UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
ESCUELA DE FORMACIÓN DOCENTE

APORTE DE LA TEORÍA PIAGETIANA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INFINITO A PARTIR DE LA EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE DE LOS DOCENTES

INVESTIGACIÓN DIRIGIDA

PARA OPTAR POR EL GRADO DE LICENCIATURA

EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PRESENTAN

MARIO ALEJANDRO DE LEÓN URBINA A61868
CARLOS ROBLES PADILLA A95197

DIRECTORA:

DRA. JACQUELINE GARCÍA FALLAS

San Pedro, abril del 2019

HOJA DE APROBACIÓN DEL TRIBUNAL

Dra. Jacqueline García Fallas

Directora

Dra. Annia Espeleta Sibaja

Lectora

Licda. Alejandra Alvarado Alvarado

Lectora

Dra. Gabriela Valverde Soto

Lectora externa

Mag. Wilfredo Gonzaga Martínez

Presidente del Tribunal Examinador

Nadie nos podrá expulsar del paraíso que Cantor ha creado.

David Hilbert

En resumen, los números transfinitos de Cantor disocian entre sí las dos estructuras fundamentales de la clase lógica y la relación asimétrica, que se fusionan en un solo todo en la construcción de los números enteros finitos. (...) Por lo tanto, sólo hay una manera de evitar los callejones sin salida a donde nos conduce el realismo de lo infinitamente pequeño: considerar con Leibniz –magníficamente interpretado por L. Brunschvig– al infinito como la expresión del dinamismo mismo de la construcción operatoria.

Jean Piaget

Agradecimientos

Queremos agradecer a la profesora Jacqueline García por su entera disposición para ser nuestra directora de tesis desde el primer momento en el que se lo propusimos. Gracias a ella por guiarnos en todo momento en la elaboración de esta investigación. Agradecemos a la profesora Annia Espeleta por orientarnos durante el proceso y por sus atinadas observaciones, a Alejandra Alvarado y a Diana Chacón por las sugerencias enriquecedoras. También agradecemos a nuestros familiares y amigos, a los docentes que participaron y a la Universidad de Costa Rica por nuestra formación académica y profesional.

Dedico este trabajo a mi madre Reina Urbina, quien me enseñó a no rendirme nunca en medio de tantas adversidades y carencias. También lo dedico a mi familia y a todos los habitantes de La Carpio que batallan diariamente para convertirse en mejores personas. A mi esposa Ana Lorena le doy gracias por acompañarme durante esta travesía. Agradezco a Gustavo Cabezas, que sin su guía no hubiera sabido lo que es el mundo universitario. Agradezco a Jonatan y Yolanda (que su memoria sea de bendición) por tenerme fe y darme alegría y esperanzas. A Eugenio Murillo-Fuentes porque su cálido hogar fue un oasis para mí. A Carlos Robles por montarse al bongo piagetiano y tomar los remos conmigo. Y le agradezco a DI-S por todas las personas que me han hecho llegar hasta este punto de la vida. Como escribió Tácito: *experientia docet*.

Mario

Le agradezco a Dios por la oportunidad de estar en este tipo de experiencias de tanto aprendizaje. Dedico el trabajo a mi familia, amigos cercanos, profesores que fueron grandes fuentes de inspiración, principalmente la profesora Sandra Rodríguez, quien fue un ejemplo para que yo decidiera ser profesor. A los jóvenes Juan Carlos y Christopher, quienes representaron un reto como tutor hace doce años y fueron las personas claves para darme cuenta que la enseñanza es mi vocación. A las señoras María Ester Méndez, María Rodríguez y la pareja Jenny y Rodolfo: grandes ángeles en mi vida que me levantaron en muchos momentos y por los cuales siempre estaré agradecido. A mi amiga Arlene, que sigue siendo una gran compañía en esta grata experiencia universitaria. A Mario De León por invitarme a esta aventura y permitirme compartir un año y medio extraordinario de conocimiento. Finalmente, a mi madre Rosa Iris, porque ella ha representado un ejemplo de entrega y superación siempre. Por los consejos que me sigue brindando y porque sé que está conmigo en todo momento. A.M.D.G.

Carlos

Resumen

El propósito de esta investigación dirigida es cómo el planteamiento de Piaget, en torno a la construcción del infinito, podría contribuir a la mediación pedagógica del profesorado para facilitar el desarrollo de dicho concepto en el aula de secundaria. Para ello se partió de las experiencias personales, didácticas y curriculares de un grupo docente que participó en esta investigación de corte cualitativo.

Esta investigación está compuesta por seis capítulos. El primer capítulo comprende la introducción, el problema y su justificación. El segundo capítulo consiste en los objetivos general y específicos. En capítulo 3 se desarrolla el marco teórico conformado por el estado de la cuestión y los referentes teóricos del concepto de infinito matemático, donde se destaca la construcción del concepto de infinito desde Piaget. En el cuarto capítulo se explica la metodología que se llevó a cabo con el enfoque fenomenológico. En el capítulo 5 se expone el análisis de resultados de esta investigación. Por último, en el sexto capítulo se exponen las consideraciones finales de la investigación.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción

Como contribución a la formación académica y didáctica de los investigadores, surgió la inquietud de profundizar acerca del aporte de Jean Piaget (1894-1980), considerando que los experimentos elaborados a través de sus investigaciones acerca de la construcción de los conocimientos involucraron directamente conceptos matemáticos y físicos. Aunado a ésto, las contribuciones de él a la historia de las ciencias, por medio de los métodos histörico-crítico y psicogenético de la epistemología genética, resaltaron la importancia de estudiar la construcción histórica, social e individual de dichos conceptos.

Según Piaget (1978), la construcción del número es fundamental para entender cómo y cuándo se construye el concepto de infinito matemático a través de lo acontecido a lo largo de la historia. El número aparece como la *síntesis* entre la inclusión de las clases y la seriación (esto es: cardinalidad y ordinalidad), o sea, como una combinación nueva pero a partir de caracteres puramente lógicos (Piaget, 1970, p.17). La teoría de Piaget se centra en la génesis de la formación de los conceptos y la evolución de los mismos a traves de la equilibración de las estructuras cognitivas. Como ejemplos: el espacio no se reduce solo a la experiencia perceptiva y su construcción sigue un orden teórico (intuiciones topológicas, espacio proyectivo y finalmente una métrica) (Piaget, 1970, p.18); en cuanto al tiempo, las simultaneidades y las duraciones se subordinan a los efectos cinemáticos (Piaget, 1970, p.20).

Dubinsky (2000) señala que Piaget no tuvo formación en matemáticas, aunque se expresa de él de la siguiente manera: "me parece que cuando describe cómo es un matemático cuando trabaja en matemáticas, buscando ideas y resultados nuevos, Piaget entiende muy bien y lo que describe está muy cerca de mis experiencias." (p. 55).

De esta manera, la investigación de la construcción del concepto de infinito matemático a partir del constructivismo piagetiano es un referente para la comprensión de cómo se debe enseñar en torno a este concepto.

En segundo lugar, se aplicaron técnicas cualitativas de recolección de datos (entrevistas en profundidad, grupos focales) con docentes de educación costarricense que hayan impartido lecciones de secundaria en instituciones públicas, con una doble finalidad: conocer las nociones que tienen sobre el infinito matemático y luego, indicar los tipos de estrategias didácticas que han utilizado o utilizan en sus clases cuando imparten contenidos afines al infinito.

En tercer lugar se trianguló la información obtenida a partir del enfoque de metodología fenomenológica con el enfoque piagetiano sobre la construcción de estructuras cognitivas, con el objetivo de analizar y reflexionar los hallazgos con lo planteado en la fase de búsqueda e investigación bibliográfica.

Finalmente, los resultados de la investigación permiten contrastar los aspectos de análisis que se establecieron a través de las categorías y se ofrecen reflexiones para que un docente las pueda considerar al momento de enseñar temas asociados a la noción del infinito.

1.1. El problema y su justificación

La influencia de Piaget se observa en el desarrollo de estudios sobre génesis del pensamiento que tuvieron como referente temas de las matemáticas como cantidad, volumen, simetría, reversibilidad y otros, lo cual condujo a un impacto importante de la teoría piagetiana en el ámbito de la didáctica. Al respecto Barriga (1998) expresa que

> De suerte que hoy en día el campo de la *educación matemática* constituye un ámbito con una didáctica específica; los diversos grupos que se dedican a él en diferentes países siguen líneas que deben mucho al pensamiento piagetiano. (citado en Castorina y otros, 1998, p.136)

Piaget aporta significativamente, desde la epistemología genética, a la enseñanza de las matemáticas actual, y él mismo abogó por una educación matemática que partiera de la equilibración de las estructuras cognitivas, lo cual puede verse ejemplificado en el texto "La enseñanza de las matemáticas"(Piaget y otros, 1965), en el que participaron matemáticos puros y pedagogos, preocupados por cómo se enseñaba esta materia en las aulas europeas.

Por otra parte, el programa de estudios de Matemática en Costa Rica, presenta como eje central, la resolución de problemas, tema que también ha sido discutido en décadas anteriores. Al respecto, Barriga (1998) destaca que

> el tema de la resolución de problemas ha sido, relativamente una constante en el debate didáctico de los últimos cincuenta años, sin embargo, fueron las aproximaciones piagetianas las que concedieron importancia significativa al análisis del contenido que enfrenta un estudiante como generador de interrogantes en él. (citado en Castorina y otros, 1998, p.128)

Piaget mostró que los métodos de la epistemología genética resolvían el problema entre matemáticos formalistas, intuicionistas y constructivistas en cuanto a la naturaleza de los objetos e ideas matemáticas, y es lo que desarrolló con textos tales como "Ensayo de lógica operatoria"(1977) e "Introducción a la Epistemología Genética: 1. el pensamiento matemático"(1978). En este último libro Piaget hace una extensa exposición sobre la construcción de las estructuras matemáticas, utilizando tanto la metodología psicogenética como la histórico-crítica. En esta construcción, se identifica la construcción del número y, particularmente, la del infinito matemático, tema de esta investigación.

A través de la revisión bibliográfica y de la experiencia de los investigadores, se muestra que la enseñanza y aprendizaje del infinito trae consigo muchas dificultades para el estudiantado, particularmente dos: primero, la diferenciación entre infinito potencial y actual, pues uno se relaciona con las intuiciones del individuo y el otro es precisamente contraintiuitivo (Piaget (1978), Waldegg (1996), Villabona y Roa (2016), Garbin (2005), Vera, Pinilla y Roa (2010), Belmonte y Sierra (2011), D'Amore(2011)). La segunda situación es el uso de intuiciones en la enseñanza de este concepto, porque son obstáculos didácticos para la construcción del infinito actual (Waldegg, 1996).

El problema que se plantea en esta investigación consiste en cómo el planteamiento de Piaget, en torno a la construcción del infinito podría contribuir a la mediación pedagógica del profesorado para facilitar el desarrollo de dicho concepto en el aula de secundaria. Para esto, se determinan cuáles experiencias previas tuvieron algunos docentes que laboran en la educación secundaria costarricense en la construcción de dicho concepto.

Así, ante este abordaje del tema, surgen los siguientes cuestionamientos para el desarrollo de la investigación: ¿cuál es el aporte de la epistemología genética de Piaget en la construcción del concepto de infinito? ¿Cómo contribuye el abordaje teórico de Piaget de ese concepto al proceso de enseñanza y aprendizaje de dicha noción? Más aún, ¿cuál es el aporte del aparato teórico piagetiano al docente de matemática en el ámbito costarricense, en la enseñanza del concepto del infinito?

El infinito es un concepto que se construye desde la infancia del estudiante cuando se hacen referencias al mundo físico. En la actualidad, la tecnología ha impulsado que la palabra "infinito" no sea ajena al ámbito cotidiano del individuo, pues en videojuegos y en series de televisión, películas y medios masivos de comunicación se menciona dicho término. La construcción del concepto de infinito es de carácter formal y lo que se busca es una aproximación a la noción con el fin de aportar a la enseñanza de los temas matemáticos que están vinculados directamente con él.

Capítulo 2

Objetivos

2.0.1. General

Analizar el aporte de la teoría piagetiana en la construcción del conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de infinito desde la experiencia de aprendizaje de los docentes de matemáticas.

2.0.2. Específicos

1) Describir la construcción del infinito en la teoría piagetiana para definir aspectos claves de su enseñanza.

2) Analizar los elementos curriculares que permiten el aprendizaje del concepto de infinito en la educación secundaria costarricense.

3) Identificar el concepto de infinito en la enseñanza de la matemática de educación secundaria costarricense y algunos elementos de su didáctica.

4) Reflexionar con el personal docente participante acerca de sus experiencias en la construcción del concepto matemático de infinito y la teoría piagetiana.

Objetivo general	Objetivos específicos	Metas	Actividades
Analizar el aporte de la teoría piagetiana en la construcción del conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de infinito desde la experiencia de aprendizaje de los docentes de matemáticas.	1. Describir la construcción del infinito en la teoría piagetiana para definir aspectos claves de su enseñanza.	-Conceptualización teórica desde la perspectiva piagetiana de conceptos matemáticos involucrados en la construcción del infinito matemático. - Presentación del aspecto formal del infinito desde las matemáticas.	- Lectura de textos piagetianos en los que se menciona el concepto de infinito matemático. - Descripción de la construcción del concepto de número como antesala del concepto del infinito matemático desde la epistemología genética de Piaget. - Revisión y análisis de bibliografía acerca de la axiomatización del infinito desde la Lógica y la Teoría de conjuntos.
	2. Analizar los elementos curriculares que permiten el aprendizaje del concepto de infinito en la educación secundaria costarricense.	-Descripción de habilidades y contenidos del programa de estudios del MEP que involucran explícita e implícitamente el concepto de infinito.	-Análisis de habilidades y contenidos desarrollados por el programa de estudios del MEP.
	3. Identificar el concepto de infinito en la enseñanza de la matemática de educación secundaria costarricense y algunos elementos de su didáctica.	-Descripción de las experiencias de aprendizaje de los docentes participantes con respecto al infinito.	-Entrevistas a profundidad con los docentes participantes.
	4. Reflexionar con el personal docente participante acerca de sus experiencias en la construcción del concepto matemático de infinito y la teoría piagetiana.	-Reflexión con el personal docente participante sobre sus experiencias de aprendizaje y experiencia profesional. -Realimentación entre los investigadores y docentes para la valoración del aporte de la teoría piagetiana en la enseñanza del infinito.	-Grupos focales con los docentes participantes. -Triangulación de la información bibliográfica con los datos de información.

Figura 2.1: Objetivos en cuadro lógico.

Capítulo 3

Marco teórico

El marco teórico en este trabajo abarca dos secciones: estado de la cuestión y referentes teóricos. En el primero se resaltan puntos importantes de investigaciones en torno a la temática del concepto de infinito, y en el segundo se hace una exposición de la historia y de la formalización del concepto de infinito, de los fundamentos del programa del MEP y de los principales conceptos de la Epistemología Genética, así como la construcción del número y del infinito desde dicha óptica.

El programa de estudios del MEP es el principal referente de los docentes de matemáticas en su labor educativa en las aulas y en este se destaca el uso de la historia de la matemática como eje transversal para la enseñanza efectiva de esta materia; las investigaciones descritas en este capítulo, así como la reseña histórica que recorre el infinito matemático revelan los obstáculos que tuvo la humanidad para culminar en la formalización de dicho concepto. La explicación de Piaget desde la epistemología genética recopila todos estos aspectos para compararlos con la historia propia del individuo particular en su trayectoria, lo cual es fundamental para que se realice la abstracción reflexiva sobre el concepto de infinito, que no es más que la comprensión de dicha noción.

3.1. Estado de la cuestión

En este apartado se realizará una descripción de los antecedentes con respecto a las investigaciones en torno al concepto de infinito matemático. El esquema siguiente muestran las modalidades clásicas del infinito matemático, la cual sirve de guía para entender los estudios acerca de este concepto.

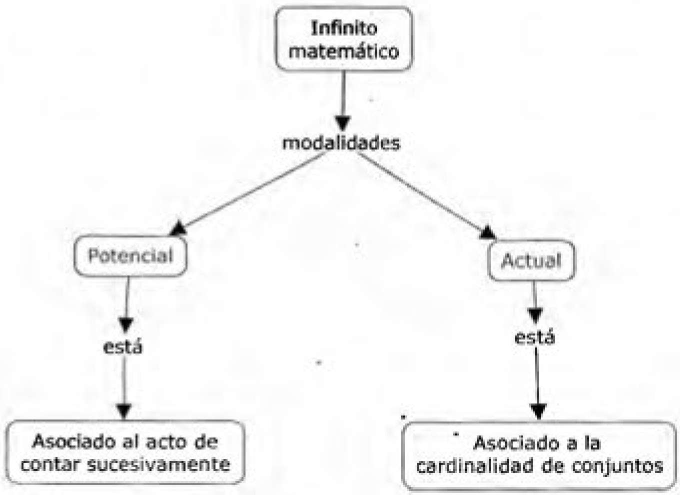


Figura 3.1: El infinito matemático. Elaboración propia.

Waldegg (1996) realizó un estudio basado en las concepciones de los alumnos vinculadas a los conjuntos infinitos, esto para identificar obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. Para esta autora el establecimiento de una biyección entre un conjunto infinito y uno de sus subconjuntos propios es el obstáculo epistemológico más difícil de superar para la comprensión de los conjuntos infinitos. Para ello elaboró un análisis en el desarrollo histórico para determinar que

> las concepciones de los conjuntos finitos impiden fuertemente la aceptación del criterio de la biyección para establecer una comparación de conjuntos infinitos y entonces avanzar así hacia la aritmetización del infinito. (Waldegg, 1996, p.5)

A partir de dicho estudio, de carácter estadístico, Waldegg (1996) concluyó que hay factores que tienen gran influencia sobre la comprensión de los conjuntos infinitos:

- Un conjunto acotado difícilmente se acepta como un conjunto con infinitos elementos (por ejemplo: un intervalo real de longitud finita). Como en el caso histórico de Bolzano, la configuración y las dimensiones de las regiones geométricas son un obstáculo para la comprensión.

- La comparación entre dos conjuntos infinitos se hace más difícil si uno de ellos es acotado y el otro no. En este caso, el infinito potencial es un obstáculo para compararlos. El infinito potencial se hace presente en el conjunto no acotado superiormente porque permite disponer de las posiciones necesarias para continuar el proceso; en cambio, en el conjunto acotado este proceso no es posible.

- Existe un rechazo con la aplicación del criterio de biyección para comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios, incluso si ya hubo instrucción anterior, es decir, aún conociendo resultados basados en cursos anteriores sobre el establecimiento de dichas correspondencias biunívocas.

- Los estudiantes poseen una secuencia de intuiciones asociadas al concepto de infinito y que se pueden interpretar en múltiples contextos. Las intuiciones son localmente coherentes pero a nivel global son contradictorias.

- Las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales. No todos los estudiantes tienen las mismas intuiciones locales.

Para Waldegg (1996), la identificación de las dificultades que fueron vencidas en el desarrollo histórico del infinito le dio los elementos para plantear la búsqueda en las concepciones de los estudiantes y a partir de eso proponer "caminos didácticos" para superarlas:

> La resistencia que presentan estas concepciones ante distintos intentos instruccionales muestra que estamos ante un obstáculo didáctico con raíces epistemológicas. Evidentemente, no se puede concluir de ahí que con la sola "maduración" el estudiante alcanzará un nivel de conceptualización conforme al cuerpo teórico de la matemática. Es necesaria la intervención de procesos didácticos bien planificados, que tengan en cuenta los obstáculos que el estudiante tiene que vencer. (Waldegg, 1996, p.11)

Garbin (2005) elaboró una investigación en la que reveló cómo piensan el infinito los alumnos con edades entre 16 y 20 años y la influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Para esto utilizó los conceptos de Pensamiento Matemático Elemental (PME) y Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Garbin (2005) menciona en dicho articulo que Tall y Dreyfus elaboraron una teoría cognitiva en relación con el desarrollo y crecimiento del PMA, basados en los aportes de la psicología cognitiva de Piaget y de Bruner, que muestra cuáles son las condiciones para ir de un PME a un PMA. Para esta autora, si se trabaja con estudiantes con edades donde prevalecen esquemas finitos y concretos, no debe perderse de vista que en algún momento se deberán superar los esquemas finitos para ingresar en el ámbito de la infinitud, el cual cognitivamente está lleno de "contradicciones": los nuevos conceptos e ideas matemáticas contradicen los esquemas finitos previos.

> Desde la realidad psicológica el infinito es un concepto complejo y contradictorio. Y si observamos su historia, y hacemos presente nuestras intuiciones, podemos ver que estas son similares a aquellas experimentadas por los matemáticos en el desarrollo del concepto. El concepto aristotélico de infinito es una noción potencial que dominó en la historia hasta la época cantoriana, habiendo tenido una gran in-

> fluencia en el desarrollo de este concepto. Como ha explicado Fichsbein (1982), este concepto potencial de infinito es el que responde a la interpretación intuitiva del infinito. (...) En una palabra, el infinito actual es una noción contraintuitiva. (...) En este escrito nombramos al infinito actual, como el que está asociado a la idea de totalidad, de completés y de unidad. (Garbin, 2005, pp.173-174)

Vera, Pinilla y Roa (2010) determinaron en su estudio las concepciones del infinito en estudiantes que transitan del colegio a la universidad. Estas autoras mencionan que "es más fácil comprender el infinito en lo grande como un proceso que continúa sin parar y que no tiene fin, que el infinito en lo pequeño" (Vera, Pinilla y Roa, 2010, p. 375). Las preguntas que se plantearon fueron: ¿qué ideas intuitivas desarrollan los estudiantes sobre el infinito en escenarios no escolares?, ¿cómo estas ideas permean su construcción del concepto en situaciones matemáticas?, y ¿cómo el análisis de conceptos como límite genera la evolución de las concepciones de los estudiantes sobre el infinito? Para responderlas aplicaron una prueba piloto a 42 estudiantes de undécimo grado y 40 de un curso de cálculo II, luego seleccionaron cuatro estudiantes de cada grupo para una entrevista didáctica, la cual era un diálogo entre el estudiante y el entrevistador. Los resultados revelaron que las ideas intuitivas adquiridas en ambientes no escolares permean la construcción de conceptos matemáticos avanzados. Las respuestas entre estudiantes de bachillerato y de universidad no difirieron. En palabras de las investigadoras:

> Si comparamos las respuestas de los estudiantes del colegio con los de la universidad, nos damos cuenta que no hay un cambio significativo. Es decir, a pesar que los jóvenes del curso de cálculo II utilizan términos matemáticos más avanzados, la esencia en sus respuestas refleja que aún el infinito no habita en sus mentes de una manera clara (...).

> En estos resultados nuevamente las ideas intuitivas prevalecen, pues según Garbin (2005), el infinito potencial se considera como una idea intuitiva, mientras que el infinito actual es una noción contra intuitiva (Garbin y Azcarate, 2001. Citado en Garbin, 2005), siendo precisamente esta la razón que causa toda la controversia existente alrededor del tema. (Vera, Pinilla y Roa, 2010, pp. 380-381.)

Belmonte y Sierra (2011) estudiaron la evolución del concepto de infinito desde el último curso de primaria (estudiantes de 11 a 12 años) hasta el primer curso de enseñanza universitaria (estudiantes de 18 a 19 años), esto es: primaria, ESO, bachillerato y primeros cursos universitarios. Diseñaron un cuestionario que aplicaron a más de dos mil estudiantes para lograr identificar modelos tácitos del infinito, e identificaron tres nuevos modelos intuitivos tácitos. Estos autores señalan que el concepto de infinito no se define explícitamente en el currículo y los textos escolares y que a pesar de esto dicho concepto se utiliza desde los primeros grados hasta la finalización del bachillerato:

> Es decir, durante más de diez años en el aprendizaje de las matemáticas de un individuo, el infinito desempeña un papel exclusivamente simbólico o bien sólo como sinónimo de *muy grande* o *muy pequeño*. Sin embargo, dicho concepto va ligado a innumerables tópicos habituales en la enseñanza obligatoria y postobligatoria, como decimal periódico, irracional, número real, sucesión, serie, asíntota, límite, derivada y tangente a una curva, integral, resolución numérica de ecuaciones, sistemas de ecuaciones y su significado geométrico, fractal, geometría proyectiva, cardinal de un conjunto, inducción, número transfinito y un largo etcétera. Este carácter singular del infinito y el inevitable interés que despierta entre los estudiantes su mención o cualquiera de sus paradojas constituye una buena razón para estudiar con detalle

> sus características cognitivas. (Belmonte y Sierra, 2011, p. 141)

Belmonte y Sierra (2011) se centraron en establecer los *modelos intuitivos tácitos*, concepto propuesto por Fischbein (1987, 1989, 2001) y también utilizaron los *esquemas conceptuales* de Tall y Vinner (1981) en torno a la idea de infinito. Estos autores destacan que Fischbein, Tirosh y Hess (1979) fueron los pioneros en cuanto al tema de infinito, con su trabajo "The intuition of infinity" y a partir de ahí se elaboraron más de setenta investigaciones sobre las características cognitivas del infinito.

> Fischbein, Tirosh y Hess (1979) advierten sobre el carácter contradictorio del infinito, el cual se traduce en una serie de modelos intuitivos que permiten al estudiante dotarle de sentido. (...) Ahora bien, la estabilidad y resistencia de las intuiciones suponen un inconveniente a considerar para superar obstáculos tanto didácticos como epistemológicos. Fischbein distingue a las intuiciones primarias, que se desarrollan sobre la base de la experiencia cotidiana, antes e independientemente de la instrucción académica, de las intuiciones secundarias, adquiridas mediante la intervención educativa. (Belmonte y Sierra, 2011, p. 142).

Los modelos intuitivos tácitos surgen cuando los sujetos se enfrentan a una noción que es intuitivamente inaceptable, tienden a crear, deliberada o inconscientemente sustitutos de esa noción que faciliten su accesibilidad. Los modelos intuitivos del infinito identificados antes de la investigación de Belmonte y Sierra (2011) son los siguientes:

1. **Modelo de inclusión:** responde a la noción de que el todo es mayor que la parte, propia de los conjuntos finitos. Este modelo es extendido por los sujetos estudiados hacia los conjuntos infinitos.

2. **Modelo infinito = infinito:** concibe como equivalentes todas las cantidades infinitas incluso sin que haya correspondencia biunívoca entre ellas.

3. **Modelo punto-marca:** consiste en atribuir dimensiones o una naturaleza material a los puntos geométricos para comparar conjuntos continuos o geométricos.

Los modelos intuitivos identificados por Belmonte y Sierra (2011) en su investigación fueron los siguientes:

1. **Modelo de indefinición:** las respuestas que induce este modelo están asociadas a cierta incapacidad de conocer o calcular, lo cual impide la concreción de resultados que se relacionan con procesos u objetos infinitos.

2. **Modelo de divergencia:** el que atribuye sistemáticamente un resultado infinito a la suma de una cantidad infinita de objetos matemáticos, sin considerar en absoluto su eventual convergencia. Por tanto, el modelo responde a la versión de la propiedad arquimediana en la que la suma de infinitas cantidades da un resultado infinito.

3. **Modelo acotado-finito/no acotado-infinito:** es producto de la relación que establece una cantidad importante de sujetos entre la definición acotada o no acotada de un conjunto y el cardinal de sus elementos. Por su parte, la ausencia de cotas origina en mayor medida expresiones infinitistas bajo una perspectiva potencial: en $[0, +\infty[$ hay más números que en $[0, 1]$ porque no acaba.

Belmonte y Sierra (2011) concluyeron que el estudio les reveló que hay una idea intuitiva de infinito y que los modelos entran en conflicto bajo determinados contextos o representaciones contextuales, lo cual es generador de contradicciones internas que se externan por medio de respuestas incoherentes.

D'Amore (2011) aportó en una línea de investigación que denominó "lo veo pero no lo creo", en la cual se realizaron diversas pesquisas en varios países y con distintos grupos de estudiantes a nivel de grados superiores en educación secundaria y estudiantes de primeros cursos universitarios. La motivación de D'Amore fue una frase entresacada de la correspondencia entre Richard Dedekind y Georg Cantor acerca de si es posible establecer una biyección (correspondencia biunívoca) entre variedades de dimensiones distintas. Para poner un ejemplo más concreto: establecer una correspondencia biunívoca entre el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ y el intervalo $[0,1]$. Cantor demostró que dicha correspondencia sí existe en este caso.

El infinito está muy ligado a los procesos limítrofes del cálculo diferencial e integral. En este caso, Engler y otros (s.f.) destacan en su artículo, sobre el límite infinito, que

> El concepto de límite es uno de los conceptos matemáticos que más dificultades de aprendizaje trae inherentes al propio concepto. Las últimas investigaciones en relación a la didáctica del cálculo propone una aproximación más intuitiva y una metodología más activa para su enseñanza. Para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que se olvida fácilmente si no se le da el valor que corresponde y, uno de los más difíciles de enseñar y aprender. (p. 12)

Lo anterior se enmarca en investigaciones en torno al concepto de límite, continuidad, derivabilidad e integrabilidad de una función, sucesiones y series infinitas, conceptos propios de un curso de cálculo introductorio en múltiples universidades a través del mundo, que tienen como base un conocimiento más profundo del infinito matemático. Engler y otros (s.f.) mencionan cómo llevaron a cabo dicha investigación:

> Diseñamos una situación didáctica orientada a que los alumnos

> estén suficientemente preparados para abordar el aprendizaje de límite infinito teniendo en cuenta el trabajo con funciones considerando especialmente las distintas formas de representación y algunas cuestiones relacionadas con las aproximaciones retomando la noción de infinito en sentido positivo y negativo. Se favoreció el trabajo en forma verbal, tabular, numérica, analítica y gráfica. Las actividades se diseñaron para favorecer el desarrollo de habilidades para poder pasar sin inconvenientes de un sistema de representación a otro con sus diferentes formas de representación y propician que el estudiante entre en acción. (Engler y otros, s.f., p. 15)

Es decir, se diseñaron situaciones didácticas en las que se tomó en cuenta la representación múltiple del concepto de función real de variable real para enseñar el concepto de límite puntual. Por otra parte, en la construcción de los conceptos se vislumbra la posibilidad de equivocarse. Retomando las contribuciones de D'Amore (2011), él propuso una forma de llamarle a los errores o dificultades para aprender el concepto de infinito, a los cuales denominó " un error común" y son los que se presentan a continuación:

1) **Aplastamiento de cardinales transfinitos**: para los estudiantes, la cardinalidad de $\mathbb{Z}$ es, en un primer momento, superior a la de $\mathbb{N}$ (hay quien incluso dice que es el doble). Una vez aceptada la demostración de que estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, muchos estudiantes creen que pueden concluir que esto depende del hecho de que ambos son conjuntos infinitos y que, por lo tanto "todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad", es decir, infinita. Por lo que, por ejemplo, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ deberían simplemente tener la misma cardinalidad.

2) **Dependencia de los cardinales transfinitos de los hechos relativos a medidas:** muestra cómo los procesos mentales y las convicciones intuitivas llevan a

los estudiantes a pensar que en un segmento largo existan más puntos que en un segmento más corto.

3) **Deslizamiento:** la dificultad que tienen los estudiantes para aceptar la correspondencia biunívoca llamada "de Galileo" entre $\mathbb{N}$ y el subconjunto de los números cuadrados.

D'Amore además menciona que el infinito en sentido actual es un concepto difícil a través de los lentes de la historia de las matemáticas occidentales, y esto se ve reflejado en el proceso de construcción del mismo en las aulas:

> El clásico debate filosófico de origen aristotélico sobre el infinito en sentido actual y en sentido potencial (Arrigo, D'Amore, 1993; Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2011) ha inspirado diferentes investigaciones, por ejemplo las de Moreno y Waldegg (1991), de Tsamir y Tirosh (1992), de Shama y Movshovitz Badar (1994) y de Bagni (1998). Se han hallado, en verdad, resultados a veces contradictorios; pero está probado que la evolución de la concepción actual del infinito matemático es más lenta y se da en modo contradictorio a lo largo del curso del currículo escolar y gracias a un proceso de maduración y sistematización cognitiva de los aprendizajes. (D'Amore, 2011)

López (2014) señala problemas similares con el infinito en las matemáticas griegas clásicas:

> Los diferentes problemas que el infinito ocasionaba como consecuencia de las situaciones aparentemente contradictorias caracterizaron al mundo griego en lo que se denominó "horror al infinito". Las paradojas de Zenón de Elea, siglo V a. c, acerca del infinito y lo infinitesimal lo ubican como un precursor de la Matemática en temas que han sido tratados posteriormente por destacados matemáticos. (p. 280)

Para el año 2016, el docente universitario Javier Fernández García, quien imparte lecciones en la UNAM de México, redactó el texto denominado "Un acercamiento a los fundamentos del cálculo: el infinito y los números reales". Dada la experiencia vivida al impartir cursos de cálculo en la Facultad de Ciencias de la UNAM desde hace varios años atrás, Fernández García se vio en la necesidad de redactar un texto que profundizara temas del infinito matemático y los números reales:

> hace ya muchos años, me pareció que en buena medida la dificultad para la comprensión de algunos de los conceptos más relevantes y de la forma general en que funciona el cálculo, tenía su origen en el desconocimiento del infinito matemático y los números reales. Las cosas mejoraron significativamente al poner en práctica dos cambios: El primero, introducir al comienzo de los cursos una reflexión acerca de la naturaleza de los procesos y los conjuntos infinitos, de manera que los estudiantes fueran descubriendo, por un lado, la presencia del infinito en la solución de muy diversos problemas; y por el otro, que el infinito tiene sus propias reglas, las más de las cuales resultan no poco sorprendentes, lo que por cierto tiene un efecto bastante motivador. El segundo, abordar una discusión sobre los números reales que permitiera comprender cómo son, qué resuelven, cómo lo hacen y de qué otras formas podríamos hacerlo. Lo anterior acompañado de un panorama general de la evolución histórica de las controversias sobre estos temas, los cuales, enlazados al desarrollo de la teoría de conjuntos y a la lógica, configuran una de las problemáticas más polémicas y difíciles de solucionar a lo largo de su historia. (Fernández, 2016, p. XII).

La motivación de Fernández (2016) estribó en las dificultades que tenían sus estudiantes en la comprensión de conceptos clave en el cálculo infinitesimal (como se le denomina comúnmente), por un desconocimiento del infinito matemático, y para conseguirlo llevó a cabo lo antes mencionado por él. Fernández (2016) cita que

> la ausencia de una discusión sobre el infinito, y la reducción de la enseñanza de los números reales a la exposición del listado de los axiomas de campo ordenado completo, y la demostración de algunas propiedades algebraicas a partir de ellos, me parece que dificultan el avance en otros temas y limitan la visión –y solidez– de la formación matemática de los alumnos. (p. XIII).

Desde los párrafos del inicio de esta sección, es notable que las investigaciones citadas se enfocaron en estudiar y analizar el concepto de infinito matemático en estudiantes de primaria, secundaria y universitarios. Los estudios destacan que los estudiantes se enfrentan ante dos tipos de infinito y que las dificultades fundamentales radican en diferenciar el infinito potencial, el cual es de corte intuitivo y familiar, con el infinito actual, el cual es contraintuitivo y es complicado de asimilar por los sujetos. Las investigaciones proponen situaciones matemáticas que involucran el infinito, en algunos casos adaptadas de problemas históricamente famosos, como lo son las paradojas de Zenón o problemas de biyecciones entre determinados conjuntos de cardinalidades infinitas.

3.1.1. Antecedentes en Costa Rica

Con respecto al infinito matemático, se encontraron artículos que tratan sobre la historia del infinito, como el de Arguedas (2014) intitulado "Georg Cantor (1845-1918): la locura del infinito o el infinito de la locura". En dicho texto se mencionan aspectos de la vida personal de Cantor; o el artículo de Rosales (2016), "Numerabilidad y cardinalidad de conjunto" en el que se trata de manera formal, con resultados y demostraciones, tópicos relativos a la numerabilidad y no numerabilidad de conjuntos, así como una presentación del teorema de Schröeder-Cantor-Bernstein, y se culmina probando que cualquier conjunto infinito se puede expresar como una unión disjunta de infinitos, al utilizar los números primos (Rosales, 2016).

3.2. Referentes teóricos

En esta sección se hace un resumen de la historia del concepto de infinito hasta la formalización dada por Georg Cantor en el siglo XIX, lo cual es un aspecto importante en el análisis histórico-crítico desde el enfoque epistemológico genético. Luego se hace una exposición de los fundamentos teóricos del programa de estudios de matemática del Ministerio de Educación Pública costarricense, así como los conceptos fundamentales de la Epistemología Genética y la construcción del número y del infinito matemático.

3.2.1. Historia del infinito matemático

Siguiendo a Donald (s.f.), la palabra *apeiron* significó sin límites, infinito, indefinido. Era una palabra peyorativa para los antiguos griegos pues el caos primigenio del cual surgió el cosmos era *apeiron*. Los pitagóricos asociaban el bien y el mal con lo finito y lo infinito, respectivamente. Sin embargo, el descubrimiento de inconmensurables como $\sqrt{2}$ requirió un claro concepto y entendimiento del infinito. La concepción griega del infinito tenía tres bases del mundo físico observable hasta ese entonces:

1) El tiempo no tiene fin: los eventos, la vida y la muerte y la inobservabilidad de un fin del mundo sostuvieron esta idea.

2) Espacio y tiempo pueden ser subdivididos sin fin: esto de alguna manera in-

troduce las ideas de infinitesimales y de procesos infinitos. Por ejemplo, la circunferencia puede verse como el límite de polígonos regulares inscritos cuya cantidad de lados aumenta drásticamente. Zenón de Elea formuló paradojas combinando razonamientos de carácter finito con infinito y procesos limítrofes.

3) El espacio no tiene fronteras (no es acotado): acá posiblemente no fue un asunto meramente griego al inicio, pues ellos creían que el universo tenía límites.

El infinito confrontó a los griegos con teoremas sobre la infinitud de números primos (Euclides) y con la necesidad de contar con números enteros de magnitudes abrumadoras (Arquímedes). Aristóteles evitó el infinito actual definiendo un infinito mínimo. El trabajo con el infinito potencial satisfizo a matemáticos y filósofos durante dos milenios: los enteros son potencialmente infinitos debido a que siempre se puede agregar un número mayor en una secuencia, pero el conjunto infinito de números como tal no existe.

Aristóteles dijo que el infinito era imperfecto, incompleto e impensable[1]. La incapacidad griega de asimilar el infinito más allá del infinito potencial tuvo un profundo y limitante impacto en sus matemáticas. Puede verse reflejado en el trabajo de Euclides, quien evita el infinito al definir una recta diciendo que ésta puede extenderse tan lejos como fuera necesario.
Arquímedes probó resultados interesantes y fue uno de los grandes precursores del cálculo infinitesimal con su método de exhaución. Por ejemplo, probó que el volumen de una esfera es igual a 2/3 del volumen de un cilindro que la contiene.

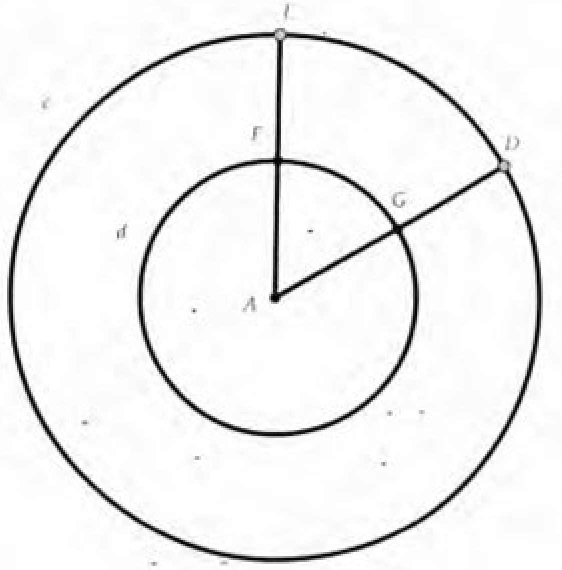
Los inconmensurables fueron la catapulta para estudiar mejor a los números irracionales, y de cierta manera los métodos desarrollados por Diofanto para resolver ecuaciones algebraicas con soluciones racionales pudo ser un intento por

[1] "Infinito es (...) aquello fuera de lo cual, si se asume como cantidad, siempre es posible asumir alguna otra cosa. En cambio, aquello fuera de lo cual no hay nada, es perfecto y entero. (...) Pero ninguna cosa que no tenga un fin es perfecta, y el fin es límite". Citado por Reale (1992).

evitar soluciones inconmensurables.

Fueron los árabes los que custodiaron el legado matemático griego y trabajaron en ello, principalmente en álgebra. Los árabes no tuvieron miedo y calculaban libremente con números irracionales, sin importar su naturaleza.

Siglos después, los europeos trabajaron con números irracionales, aún sin enfocarse en los problemas del infinito que estos acarreaban. Una "paradoja" que había surgido en la edad media era la de las dos circunferencias concéntricas que tenían distintos radios: ¿cuál tiene más puntos, la circunferencia mayor o la menor? En la figura siguiente puede verse que al punto F de la circunferencia pequeña d le corresponde el punto E de la circunferencia grande c. Es así como Galileo (1564-1642) logró mostrar que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de la circunferencia menor y la mayor, concluyendo que tienen la misma cantidad de puntos.



Galileo sugirió la inclusión de un número infinito de infinitos agujeros pequeños, aunque entendió que el problema consistía en utilizar razonamientos finitos con cosas infinitas, lo cual quedó plasmado con la siguiente frase: "Es incorrecto hablar de cantidades infinitas que son iguales, mayores o menores entre sí". Para Galileo el infinito no era una noción inconsistente y que sin embargo obedecía a reglas diferentes.

La naturaleza de los números irracionales no fue comprendida en tiempos de Michael Stifel (1487-1567) quien mencionó que los irracionales no eran verdaderos números. En última instancia muestra el desconocimiento del infinito en los números irracionales, por decirlo de alguna manera. Sin una comprensión de los números irracionales, sin una teoría de ellos, el análisis, una de las mayores y más importantes ramas de las matemáticas, no hubiera sido posible. Tampoco el entendimiento de los polinomios puede ser completo sin tener presentes a los números irracionales. Y para ello precisaba también una definición de infinito.

Los trabajos que impulsaron el desarrollo del cálculo infinitesimal abrieron una nueva etapa en la evolución del concepto de infinito matemático. John Wallis (1616-1703), con su texto *Arithmetica Infinitorum* extendió los trabajos de Torricelli (1608-1647) y los de Cavalieri (1598-1647) acerca de los indivisibles. Wallis dio la siguiente expansión que involucra a π:

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}$$

Dicha expansión, la cual no fue la primera en su tipo, realizaba procesos infinitos sin justificación alguna. En 1657 Wallis utilizó el símbolo lemniscata ∞ para el infinito, el cual es una curva sin fin. Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Leibniz (1646-1716), los Bernoulli, Leonard Euler (1707-1783) y otros matemáticos inventaron e impulsaron el nuevo cálculo, el cual involucraba procesos limítrofes de manera que el rigor de los teoremas subió el nivel de matemáticas con el que se trabajaba hasta entonces. Sin embargo, el infinito y el uso de los infinitesimales no estaba nada fundamentado con rigor e incluso llevó a paradojas. Un ejemplo es la crítica que hizo el obispo anglicano de Cloyne, George Berkley, al cálculo de derivadas por el método de fluxiones de Newton, que hacía uso de "incrementos evanescentes", es decir, cantidades "infinitesimales".

A pesar del antecedente sentado por Berkeley, Leonard Euler (1707-1783) no hizo mucho caso de las consideraciones teoréticas acerca del infinito y sus dificultades, sino que más bien se dejó guiar por su gran genio para descubrir nuevos e ingeniosos resultados, como el desarrollo de funciones como productos infinitos a partir del cálculo de cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Euler estudió el siguiente par de series:

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Si en la primera se hace $x = -1$ se obtiene que

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

Y si se hace $x = 2$ en la segunda serie se obtiene

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$

A lo cual, comparando término a término en las series se obtiene que $-1 > \infty$, claramente una paradoja.

Según López (2014, p. 291) Agustin Louis Cauchy (1789-1857) fue la figura de transición al proporcionar la primera salida conceptual al problema de los infinitesimales. En su texto de 1821, *Analyse algébrique*, Cauchy institucionalizó el concepto de límite y con ello el de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes.

Siguiendo a López (2014), fue realmente con Karl Weierstrass (1815-1897) que el análisis adquirió todo su rigor, y la definición de límite vía $\varepsilon - \delta$ (en el año

1850) es la utilizada hasta nuestros días. Con Cauchy y Weierstrass el Análisis Matemático y con ello también las matemáticas en general reconsideraron el rigor que debía cimentarlas por medio de sus axiomáticas.

En 1817, Bernard Bolzano (1781-1848) en su *Rein analytische Beweis* trató de liberar al cálculo de la noción de infinitesimal. En su otra publicación de 1840, *Paradoxes of the infinite*, Bolzano realzó la importancia del infinito actual, que tanto había sido estigmatizado en tiempos de Aristóteles y que durante muchos siglos permaneció en ese estado de ostracismo. El infinito actual apareció en Bolzano desde el concepto de conjunto y su diferenciación entre conjuntos finitos e infinitos. Es más: los conjuntos infinitos no tienen todos el mismo tamaño. El problema de Bolzano consistió en que no pudo aritmetizar al infinito.

En 1823 Cauchy definió la integral como la suma limítrofe de rectángulos bajo una curva. Esto ayudó a que Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768-1830) usara la integral de forma más rigurosa. Ya Fourier había trabajado con sus famosas series en el problema de las ecuaciones del calor.

En 1829 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) dio algunas condiciones para que una función tuviera una serie de Fourier convergente: la función debe ser monótona con una cantidad finita de discontinuidades. Como ejemplo de función no integrable se tiene la función de Dirichlet

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\cos(n!\pi x)^{2k}\right)$$

En 1831 Karl Friedrich Gauss (1777-1855) expresó que el infinito no debía ser utilizado como una cantidad en el sentido de una entidad actual, y que eso no debía ser permitido en matemáticas.

Para el año 1854 Bernhard Riemann (1826-1866), el cual era estudiante de Dirichlet, dio una definición más general de integral, la integral de Riemann, y dio un ejemplo de una función $\mathcal{R}$-integrable que tenía una cantidad infinita de discontinuidades. En 1858, Richard Dedekind (1831-1916) utilizó sus cortaduras para axiomatizar los números reales, más precisamente los números irracionales.

Con Georg Cantor (1845-1918) el infinito matemático fue definido formalmente, desde la teoría de conjuntos, a la cual él había llegado desde una senda inesperada, esto es, las series trigonométricas de Fourier y el estudio de los puntos en los cuales dichas series podrían converger o divergir a determinada función ya hubiera sido de manera puntual o uniforme. Cantor sentó las bases de una teoría seria del infinito, la cual fue mejorada con el pasar del tiempo y de la mano con la rigorización de las matemáticas a principios y mediados del siglo XX, en lo cual tuvo influencia el programa planteado por Hilbert de axiomatización de las áreas matemáticas.

La figura siguiente muestra de manera resumida lo expuesto en los párrafos precedentes:

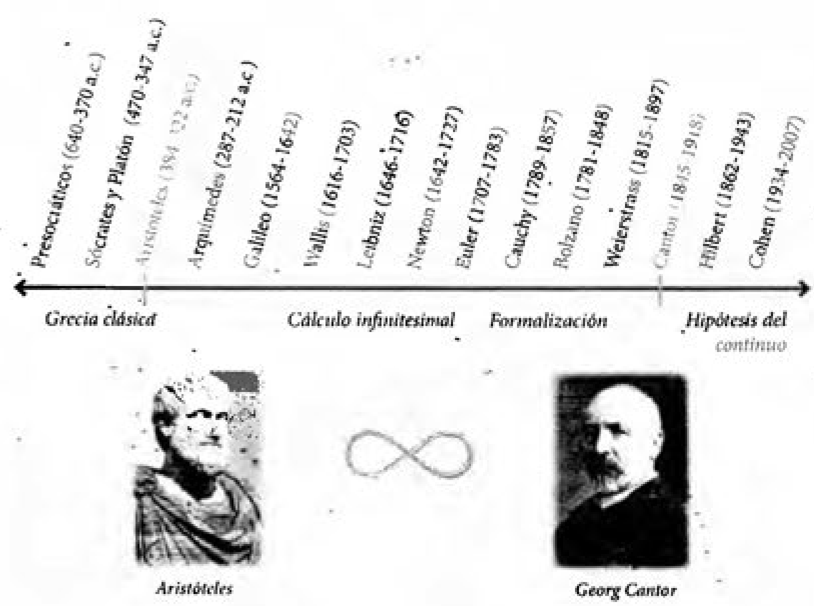


Figura 3.2: Línea temporal del infinito matemático. Elaboración propia.

El objetivo de Piaget, según Gutiérrez (2012), es el de mostrar que los mecanismos de pasaje de un período histórico al siguiente son similares a las transiciones de un estadio piscogenético al siguiente. Hablando específicamente del infinito matemático,

> Por ejemplo, dice Piaget (1989) que en la teoría de conjunto de Cantor su operación fundamental es la correspondencia uno a uno entre la serie de números enteros y números impares, se obtiene un número que no es entero ni un número impar, sino lo que él llamó el primer número cardinal transfinito $\aleph_0$. Fue más allá de los números finitos. Pero, ¿de dónde procede esta operación de correspondencia uno a uno? Cantor no la inventó; según Piaget (1989) no se trata de una construcción radical nueva. Cantor la encontró en su propio pensamiento. Formaba ya parte de su equipaje mental antes de que se interesara por las matemáticas. Porque la más elemental observación sociológica revela que la correspondencia uno a uno es una operación primitiva: Según Piaget (1989), en toda clase de sociedades primitivas esta operación es la base para el intercambio económico y pueden encontrarse sus orígenes en niños pequeños aún antes de que alcancen el nivel de las operaciones concretas. ¿Qué relación existe entre esta correspondencia uno a uno con el desarrollo de la noción de número natural? (Gutiérrez, 2012, p. 32)

De manera que Piaget consideraba que la historia del concepto de infinito –lo cual corresponde a la filogénesis del concepto– también se encontraba reflejada (o latente) en el sujeto cognoscente –lo cual corresponde a la ontogénesis del concepto–.

3.2.2. Formalización del infinito matemático

La formalización del infinito matemático se da en dos direcciones: cardinal y ordinalmente. Definiciones como correspondencia biunívoca, cardinalidad, equivalencia o equipotencia, numerabilidad y no numerabilidad, entre otros, son los que se utilizan para explicar y probar resultados referidos a conjuntos de cardinalidad infinita.

Previo a la lectura del aporte de la teoría de Piaget es preciso estudiar la formalización del concepto, porque Piaget expone la construcción del número con el uso de la axiomática formal propia de la Matemática. Además, para dimensionar lo que conlleva investigar acerca del infinito, sabiendo las transformaciones que han ocurrido en la historia, es necesario recurrir a la consulta de cómo se debe comprender desde la Matemática, por tanto, se aclara que este apartado no tiene una finalidad de brindar la forma en la cual deba enseñarse o aprenderse el concepto de infinito, solo está presente para exponer el alcance de lo que conlleva decir: noción del concepto de infinito en Matemática.

Teoría de conjuntos. Axiomática

En este apartado se siguen las notas de Ivorra (s.f.) con respecto a la axiomática de teoría de conjuntos y su relación en conjuntos infinitos y con infinitos conjuntos. Con el fin de evitar paradojas como las que se daban en axiomáticas como la de Frege y también evadir las tipologías engorrosas de Russell, Ernest Zermelo y Abraham Fraenkel formularon su axiomática (denominada **Axiomática (ZF)**). Los axiomas son los siguientes:

1) **Axioma de extensionalidad:**

$$\forall X, Y(\forall U(U \in X \leftrightarrow U \in Y) \rightarrow X = Y).$$

Lo que se expresa es que si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.

2) **Axioma del conjunto vacío:**

$$\exists X \forall U (U \notin X).$$

Este axioma afirma la existencia de un conjunto sin elementos, el cual es único, pues dos conjuntos sin elementos tendrían los mismos elementos. Por tanto, se define

$$\varnothing \equiv X | \forall U, U \notin X.$$

3) **Axioma del par:** permite decir que existen infinitos conjuntos:

$$\forall XY \exists Z \forall U (U \in Z \leftrightarrow (U = X \vee U = Y)).$$

Dados dos conjuntos X, Y, existe un tercer conjunto Z cuyos elementos son exactamente X e Y. Dicho Z es único. Se define entonces

$$\{X, Y\} \equiv Z | \forall U (U \in Z \leftrightarrow (U = X \vee U = Y)).$$

Se puede dar que $X = Y$, y en tal caso, $\{X\} = \{X, X\}$. En particular todo conjunto pertenece a otro conjunto.

4) **Axioma de la unión:**

$$\forall X \exists Y \forall U (U \in Y \leftrightarrow \exists V (U \in V \wedge V \in X)).$$

Dado un conjunto X, existe un conjunto Y cuyos elementos son los elementos de X. Dicho conjunto es único. Por tanto se define

$$\bigcup_{V\in X} V \equiv Y|\forall U(U \in Y \leftrightarrow \exists V(U \in V \wedge V \in X)).$$

5) **Axioma de partes:**

$$\forall X \exists Y \forall U(U \in Y \leftrightarrow U \subset X).$$

Por el axioma de extensionalidad dicho conjunto Y es único, por lo que se define

$$\mathcal{P}X = Y|\forall U(U \in Y \leftrightarrow U \subset C).$$

6) **Esquema axiomático de especificación:** dicho esquema determina infinitas fórmulas que la teoría acepta como axiomas. Dice así:

> Para cada fórmula $\phi(U)$ del lenguaje de la teoría de conjuntos (tal vez con más variables libres aparte de X), la fórmula siguiente es un axioma:
>
> $$\forall X \exists Y \forall U(U \in Y \leftrightarrow U \in X \wedge \phi(U)).$$

X es único, y por tanto se define

$$\{Y \in X|\phi(U)\} \equiv Y|\forall U(U \in Y \leftrightarrow U \in X \wedge \phi(U)))$$

Así, la noción de "propiedad" queda determinada al sustituirla por la de "fórmula".

7) **Axioma de infinitud:** se sabe hasta este punto que existen infinitos conjuntos pero no conjuntos infinitos. Defínase primeramente $X' \equiv X \cup \{X\}$. El axioma de infinitud afirma que

$$\exists Y(\varnothing \in Y \wedge \forall X \in Y, X' \in Y)$$

Conjuntos infinitos

En lo que sigue se hizo paráfrasis de Fernández (2016), quien hace una exposición de conceptos matemáticos relacionados con el infinito. También se siguió el artículo sobre números transfinitos de Srivastava (1997).

Definición 1 (Cardinalidad) *Decimos que dos conjuntos A y B tienen la misma* CARDINALIDAD *(notación: $|A| = |B|$) si y solo si existe una forma de aparear (=formar parejas de) los elementos de A y los de B para la cual no sobre ningún elemento en A ni en B, en el entendido de que elementos diferentes de uno de los conjuntos no pueden aparearse con un mismo elemento del otro; es decir, si existe una función biyectiva $f : A \leftrightarrow B$.*

Cuando los conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad se dice que son EQUIVALENTES, y los denotamos con el símbolo $A \sim B$.

Nota. Como observación principal se tiene que si $A \subsetneq B$ esto no implica que $|A| < |B|$. A diferencia de los conjuntos finitos, para los conjuntos infinitos no aplica aquello de que "siempre el todo es mayor que cualquiera de sus partes". Por eso no representaba ninguna paradoja el que dadas dos circunferencias, una con un radio mayor que la otra, ambas tuvieran la misma cantidad de puntos; o que la diagonal de un cuadrado tenga el mismo número de puntos que cualquiera de sus lados, teniendo mayor longitud que él.

Definición 2 (Conjunto infinito) *Aquel conjunto que se puede poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio de sí mismo.*

Entonces, un conjunto es FINITO si no es infinito. Se pasa ahora a unos resultados fundamentales con respecto a conjuntos finitos y numerables.

Definición 3 (Conjunto numerable) *Un conjunto A es* NUMERABLE *si y solo si $|A| = |\mathbb{N}|$.*

Es decir, un conjunto es numerable si puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales.

Teorema 4 *La unión de un conjunto numerable y un conjunto finito resulta un conjunto numerable.*

Teorema 5 *La unión de dos conjuntos numerables es numerable.*

Teorema 6 *La unión de una familia finita de conjuntos numerables resulta un conjunto numerable. Simbólicamente, si $A_1, ..., A_n$ son numerables entonces $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ es numerable.*

Teorema 7 *La unión de una familia numerable de conjuntos numerables resulta ser un conjunto numerable. Es decir, si $A_1, ..., A_n, ...$ son numerables entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ es numerable.*

Ejemplo. ¿Qué hay más: números naturales o múltiplos de 10? Para responder a esto defínase la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{D}, f(n) = 10n$, la cual es una correspondencia biunívoca entre los naturales y los múltiplos de 10. Esto implica que hay tantos números múltiplos de 10 como números naturales.

Ejemplo. ¿Qué hay más: números naturales o números enteros? Los enteros son el resultado de unir tres conjuntos numerables: los naturales, los enteros negativos y el conjunto $\{0\}$. Así que por los teoremas 4 y 5 se tiene que hay tantos número enteros como naturales.

Ejemplo. ¿Qué hay más: naturales o puntos en el plano con ambas coordenadas enteras entre sí? Se puede enumerar el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ utilizando el método de la diagonal, tal como se muestra en la figura:

$$\begin{array}{cccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \cdots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & \cdots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}$$

Figura 3.3: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Srivastava (2000).

Dicha enumeración se hace así: $(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), \ldots$. Por tanto, la respuesta es que sí hay tantos puntos con coordenadas enteras en el plano como número naturales.

Teorema 8 *El punto medio entre dos racionales siempre es racional.*

Prueba: Considere los números racionales $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$. Entonces el número α que es el punto medio es

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Q}.$$

Corolario 9 *Entre dos números racionales cualesquiera, por cercanos que se encuentren entre sí, siempre hay otro.*

Corolario 10 *Dado un racional cualquiera, no se puede hablar de "él siguiente" ni de "el anterior" a él de acuerdo a su magnitud.*

Teorema 11 *Entre dos números racionales cualesquiera siempre habrá una infinidad de números racionales.*

Ejemplo[2]: ¿Qué hay más, números racionales o números naturales? La respuesta a esta interrogante se puede deducir utilizando el método de la diagonal

[2]Las respuestas a los ejemplos son reformulaciones del texto de Fernández (2016).

en el que se probó que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Entonces se concluye que hay tantos número racionales como naturales.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable, y para ello basta probar que el intervalo $[a, b]$ no es numerable[3].

Teorema 12 *Si $a < b$ son números reales entonces el intervalo $[a, b]$ no es numerable.*

Prueba (Srivastava): Si el intervalo fuera numerable, entonces los elementos pueden enumerarse como $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$. Se define la sucesión creciente $\{b_n\}$ y la sucesión decreciente $\{c_n\}$ de elementos de $[a, b]$ de manera inductiva como sigue: elija $b_0 = a$ y $c_0 = b$. Para algún $n \in \mathbb{N}$, sea

$$b_0 < b_1 < ... < b_n < c_n < ...c_1 < c_0$$

Sea i_n el primer natural i tal que $b_n < a_i < c_n$ y j_n el primer entero j tal que $a_{i_n} < a_j < c_n$. Tome $b_{n+1} = a_{i_n}$ y $c_{n+1} = a_{j_n}$. Ahora, el número $x = \sup\{b_n\}$ está en $[a, b]$ pero es diferente de cada a_n. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $[a, b]$ no es numerable.

Lo anterior muestra que cada intervalo con más de un punto posee una cantidad no numerable de elementos que no son algebraicos (los cuales son soluciones de ecuaciones polinomiales en una variable con coeficientes racionales). Dichos números se denominan *trascendentes*.

Definición 13 (Relación de orden entre cardinalidades) *Se dice que la cardinalidad de un conjunto A es menor o igual que la cardinalidad de un conjunto B, denotado como $A \leq_c B$, si existe una función inyectiva f de A en B. Si $A \leq_c B$ y $A \nsim B$ se dice que la cardinalidad de A es menor que la cardinalidad de B y se escribe $A <_c B$.*

Con esta definición se tiene que $\mathbb{N} <_c \mathbb{R}$.

[3]La prueba clásica de Cantor utiliza "el método de la diagonal". Acá se presenta una prueba por medio de la construcción de sucesiones.

El siguiente teorema pone de manifiesto que la cardinalidad de un conjunto es menor que la cardinalidad de su conjunto potencia.

Teorema 14 (Cantor) *Para cualquier conjunto X,* $X <_c \mathcal{P}(X)$.

Demostración (Srivastava): Considérese el mapeo $x \longrightarrow \{x\}$ de X en $\mathcal{P}(X)$, de ahí que $X \leq_c \mathcal{P}(X)$. Ahora considérese cualquier mapeo $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Se probará que f no es sobreyectiva. Para esto, considérese el conjunto

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

Si $A = f(x_0)$ para algún $x_0 \in X$ entonces se tiene que

$$x_0 \in A \Longleftrightarrow x_0 \notin A$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $X <_c \mathcal{P}(X)$.

Del teorema precedente se tiene la siguiente cadena de "desigualdades"

$$\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <_c \ldots$$

Sea T la unión de todos los conjuntos presentes en la cadena anterior; entonces T posee una cardinalidad tan grande que ninguno de los elementos de la cadena puede superar. Cantor tuvo ante sí el siguiente problema: ¿existe un conjunto infinito cuya cardinalidad sea distinta a la cardinalidad de cualquiera de los conjuntos obtenidos? Como caso particular, ¿existe un conjunto no numerable de números reales de cardinalidad menor que $\mathbb{R}$? Cantor no pudo resolver dichos problemas, los cuales fueron tratados años después de su muerte.

El siguiente teorema es una herramienta poderosa para probar la equivalencia entre dos conjuntos.

Teorema 15 (Schröder-Cantor-Bernstein) *Para cualesquiera dos conjuntos X, Y, si se cumple que $X \leq_c Y$ y $Y \leq_c X$, entonces se tiene que $X \sim Y$.*

Demostración (Dedekind): Fíjese los mapeos inyectivos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$. Considérese el mapeo $\mathcal{H} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definido como

$$\mathcal{H}(A) = X \backslash g(Y \backslash f(A)), \; A \subset X.$$

Entonces

1. $A \subset B \subset X \Longrightarrow \mathcal{H}(A) \subset \mathcal{H}(B)$, y

2. $\mathcal{H}\left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n \mathcal{H}(A_n)$.

Ahora, sean $A_0 = \varnothing, A_{n+1} = \mathcal{H}(A_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Sea $E = \bigcup_n A_n$, entonces $\mathcal{H}(E) = E$. Defínase $h : X \longrightarrow Y$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in E \\ g^{-1}(x), & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

La función $h : X \longrightarrow Y$ es biyectiva, y por lo tanto $X \sim Y$, tal como se quería probar.

Algunas aplicaciones del teorema de Schröder-Cantor-Bernstein son las siguientes:

- $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. Para probarlo considérese la función $A \longrightarrow \sum_{n \in A} \frac{2}{3^{n+1}}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a $\mathbb{R}$; la cual es inyectiva, y por tanto $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathcal{R}$. Por otro lado, el mapeo $x \longrightarrow \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ es inyectivo y por tanto $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Y como $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Por el teorema de Schröder-Cantor-Bernstein se concluye que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- Fíjese el mapeo inyectivo $x \longrightarrow (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de $\mathbb{R}$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, el conjunto de sucesiones de ceros y unos. Entonces la función $(x, y) \longrightarrow (x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es una función biyectiva. Por lo tanto, $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$. Es decir, hay tantos puntos en el eje X que en el plano completo. Por inducción sobre k se puede mostrar que $\mathbb{R}^k \sim \mathbb{R}$. Similarmente, utilizando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ se puede mostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

Cardinales y sus propiedades

Para cada conjunto de una colección existe un *número cardinal* el cual denota su "tamaño". Enlistándolos,

$$0, 1, 2, 3, 4, ..., \aleph_0,$$

y se hace el énfasis en que el conjuto de los números reales deberá tener cardinalidad diferente de cualquier elemento de la secuencia anterior pues dicho conjunto es infinito y no contable. La lista se extiende entonces de las siguiente manera:

$$0, 1 < 2 < 3 < 4 < ... < \aleph_0 < \aleph_1$$

y se escribe c para la cardinalidad de $\mathbb{R}$. Cantor conjeturó que $c = \aleph_1$ pero no tuvo éxito al intentar probarlo. Si se asume que $c = \aleph_1$ estamos ante la *hipótesis del continuo*, (CH) y usualmente es asumida para construir ejemplos interesantes en teoría de conjuntos.

Pasemos a la aritmética cardinal:

1. Sean a y b los cardinales de dos conjuntos disjuntos A y B, respectivamente. Entonces $a + b$ denota la cardinalidad de $A \cup B$. Si los conjuntos no fueran disjuntos entonces se pueden crea dos conjuntos disjuntos a partir de ellos, y se tiene que $a + b = |(A \times \{0\}) \times (B \times \{1\})|$.

2. Sean a y b los cardinales de dos conjuntos A y B. Entonces $a \cdot b$ denota la cardinalidad del producto cartesiano $A \times B$.

3. Sean a_i, $(i \in I)$ cardinales de los conjuntos disjuntos A_i, $(i \in I)$. Entonces $\sum_{i \in I} a_i$ denota la cardinalidad del conjunto $\bigcup_{i \in I} A_i$.

4. Sea b la cardinalidad del conjunto B; entonces 2^b denota la cardinalidad del conjunto potencia de B, $\mathcal{P}(B)$.

5. Sean a y b los cardinales de dos conjuntos A y B. Entonces a^b denota la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de B en A.

6. Sean a y b los cardinales de dos conjuntos A y B. Entonces $a \leq b$ si $A \leq_c B$ y $a < b$ si $A <_c B$.

Para conjuntos finitos A y B (4) y (5) se pueden calcular con facilidad. Hay 2^b subconjuntos distintos de B y hay a^b funciones distintas de B en A. Nótese que si $A = \{0,1\}$, entonces $a = 2$, y así el conjunto potencia de B es equivalente al conjunto de todas las funciones de $B \to \{0,1\}$.

Denotemos por A^B al conjunto de todas las funciones de B en A. Así, 2^B denota al conjunto potencia de B.

La aritmética cardinal es muy similar a la aritmética de los números naturales y sigue más o menos las mismas leyes. El teorema de Schröder-Cantor-Bernstein se puede reescribir entonces así: Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

Sin embargo hay diferencias notables para los cardinales infinitos: Si λ es infinito entonces se tiene que $\lambda = \lambda + \lambda = \lambda \cdot \lambda$.

Se tienen los siguientes teoremas:

Teorema 16 *Para cada número cardinal a,* $2^a > a$.

Teorema 17 $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Teorema 18 $c + \aleph_0 = c$ y $c + c = c$.

Teorema 19 $2^{\aleph_0} = c$

En particular, la hipótesis del continuo se escribe

$$\text{CH: } 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Según Srivastava (1997), en el año 1938 Kurt Gödel obtuvo resultados profundos en modelos de teoría de conjuntos y mostró que basado en la axiomática de ZF que CH no puede ser refutada por la producción de un "modelo" de teoría de conjuntos que satisfagan los axiomas de ZF en donde CH es satisfecha. Un problema matemático resuelto de manera no trivial desde las metamatemáticas. En 1963 Paul Cohen desarrolló una técnica muy potente, conocida como **forcing**, para construir modelos de teoría de conjuntos y mostró que CH tampoco se puede probar.

Ordinales

El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es el ejemplo más simple y no trivial de conjunto bien ordenado. El orden usual $m < n$ tiene las siguientes propiedades:

1. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ no es cierto que $n < n$.
2. Para dos elementos distintos $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que $m < n$ o $n < m$.
3. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, si $n < m$ y $m < p$ entonces $n < p$.
4. Cada subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{N}$ posee un primer elemento, es decir: existe $n_0 \in S$ tal que $n_0 < s$, para todo elemento $s \in S$.

Las propiedades anteriores son las que permiten la *inducción matemática*. Sea P un conjunto de números enteros que satisface las dos propiedades siguientes:

I) $1 \in P$;

II) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $m < n$ implica que $n \in P$.

Entonces $P = \mathbb{N}$. De hecho, si P no es igual a $\mathbb{N}$, entonces el conjunto $P' = \mathbb{N} \backslash P$ es distinto de vacío y posee un primer elemento n_0.

La inducción matemática incluso puede realizarse en conjuntos que cumplan las cuatro propiedades descritas anteriormente, y no solo quedarse en una inducción para números enteros. Decimos que el conjunto X es *ordenado linealmente* y que "$<$" es un *orden lineal estricto* en X si las propiedades (1), (2) y (3) se cumplen en dicho conjunto. Decimos que X es un conjunto *bien ordenado* si las cuatro propiedades se cumplen. Si X es bien ordenado y x_0 está en X, entonces el conjunto de todos los elementos que preceden a x_0 es denominado un *segmento inicial* de X.

Definición 20 (Principio del Buen Orden) *Todo conjunto puede ser bien ordenado, esto es: para cualquier conjunto no vacío X existe una relación $<$ que es un orden lineal estricto en X tal que hace a dicho conjunto bien ordenado.*

Definición 21 (Ordinales contables) *Existe un conjunto X no contable, bien ordenado con una relación de orden $<$ tal que*

1. *X tiene un último elemento denotado con Ω;*

2. *Para cada $x_0 \in X$ con $x_0 \neq \Omega$, el segmento inicial $\{x \in X : x < x_0\}$ es contable.*

3. *Existe un elemento $\omega \in X$ tal que*

$$\{x \in X : x < \omega\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

y $<$ tiene el mismo sentido que en el conjunto de los enteros no negativos.

Así, el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ es un segmento inicial de X. Podemos ver X como una lista que inicia en 0 y continúa de manera no contable como sigue:

$$0 < 1 < 2 < \dots < \omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \dots < \omega^2 < \omega^2 + 1 < \dots < \Omega$$

Los elementos del conjunto X antes descrito son denominados *ordinales*. Cada elemento antes de ω se denomina *ordinal finito*. Cada elemento antes de Ω es llamado *ordinal contable*. El elemento Ω es denominado *el primer ordinal no contable*.

Síntesis

Para la formalización del infinito es necesario partir de la teoría de conjuntos. Dichas teorías han sido refinadas a través de sus axiomas, y un ejemplo de ello es la axiomática de Zermelo-Frankel, esto con el propósito de evitar paradojas como las de Russell,[4] las cuales ponían en evidencia que las axiomáticas debían replantearse.

Las nociones de correspondencia biunívoca y de biyección son fundamentales para definir la cardinalidad de conjuntos. El conjunto con el menor tamaño infinito es $\mathbb{N}$, cuya cardinalidad es $\aleph_0$. Un conjunto A es infinito (esto es: de cardinalidad infinita) si existe una correspondencia biunívoca entre A y un subconjunto propio de A. Un conjunto A es numerable si existe una biyección entre A y $\mathbb{N}$. Pero existen cardinalidades infinitas superiores a $\aleph_0$, esto es: conjuntos de cardinalidad infinita y que no son numerables. La prueba de Cantor por el método de la diagonal muestra que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable y que por tanto su cardinalidad, denominada como c es mayor que $\aleph_0$. La hipótesis del continuo lo que buscaba era determinar si había conjuntos con cardinalidad infinita entre $\aleph_0$ y c, y fue hasta con P. Cohen que se probó que la CH –afirmada o negada– puede tomarse como un axioma en una teoría de conjuntos. En cuanto a la ordinación, que involucra los ordinales transfinitos, se necesita de la noción de conjuntos bien ordenados. El primer ordinal transfinito contable es ω y todo aquel ordinal menor que este ordinal se denomina ordinal finito, los cuales coinciden con los números cardinales finitos. A partir de ω se construye una sucesión

[4] La paradoja de Russell consiste, en palabras sencillas, en que si puede existir el conjuntos de todos los conjuntos y de si este estaba contenido en sí mismo o no.

de ordinales transfinitos, los cuales son contables hasta llegar al primer ordinal no contable, denominado Ω.

3.2.3. El Programa de Estudios de Matemática

En el año 2012 se presentó un nuevo programa de estudios, que integra la enseñanza de la matemática en primaria y secundaria en Costa Rica. Este programa presenta una secuencia de cambios en relación con el programa del 2005, con el apoyo de un equipo de trabajo que se constituyó en la Reforma Matemática de Costa Rica.

El programa de estudios establece cinco áreas de estudio, basado en habilidades matemáticas que el estudiante va adquiriendo a través del tiempo y no solamente estructurado en contenidos:

> Este currículo se separa de las aproximaciones basadas estrictamente en contenidos. Sin embargo, no se subestima el papel de los contenidos. Por el contrario: la base que organiza los planes de estudio en cada ciclo y año lectivo son los conocimientos matemáticos y las habilidades en torno a ellos que se espera sean aprendidos (MEP, 2014, p.21)

Por tanto se plantean cinco áreas matemáticas (MEP, 2014, p.21):

- **Números:** trata sobre los sistemas numéricos, las operaciones y cálculos. Se estudian las propiedades de los mismos pero dentro de una perspectiva eminentemente pragmática que enfatiza la acción estudiantil: el cálculo y utilización de los números en la representación y manipulación del mundo.

- **Medidas:** plantea la comprensión y manipulación de unidades, sistemas y procesos de medición del espacio y el tiempo, el uso de herramientas y fórmulas para efectuar las medidas. Esta área juega un papel muy importante, que ha sido confinado tradicionalmente a la educación primaria. Con eso, se le había quitado espacio en la secundaria a un mayor dominio en los cálculos, aproximaciones y estimaciones en la medición, y al tratamiento contextualizado de temas matemáticos por ejemplo en Geometría, Estadística y Funciones.

- **Geometría:** refiere al estudio de las características de las figuras geométricas y las relaciones entre ellas, la modelización geométrica y la visualización espacial, que permiten potenciar los procesos de visualización, clasificación, construcción y argumentación. Se desea subrayar el movimiento de las formas geométricas.

- **Relaciones y Álgebra:** refiere a varios temas como el estudio de patrones y relaciones de distinto tipo (numéricas, geométricas), las funciones (vistas como relaciones entre variables), así como al manejo de expresiones y relaciones simbólicas, ecuaciones e inecuaciones, como medio de potenciar procesos de generalización y simbolización. El Álgebra no se ve sólo como manipulación de expresiones simbólicas o procedimientos para resolver ecuaciones sino como un poderoso medio para representar situaciones numéricas y geométricas. Las ecuaciones e inecuaciones, por ejemplo, se pueden apreciar mejor como representaciones de relaciones de variables cuyos recorridos (o dominios de aplicación) pueden ser muchos; a veces pueden ser números enteros, racionales o reales, formas geométricas o bien propiedades del espacio. De esta forma, expresiones algebraicas pueden representar regularidades y patrones en muchas circunstancias.

- **Estadística y Probabilidad:** ésta área incluye dos grandes temas: por un lado la identificación, organización y presentación de la información, lo que se asocia a la Estadística descriptiva y por el otro la Probabilidad que refiere al estudio de la incertidumbre y el azar.

Los **procesos matemáticos** son entendidos como actividades cognitivas que realizan las personas en las distintas áreas matemáticas y que se asocian a capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos. La realización sistemática de estos procesos transversales en la acción de aula apoya el progreso de diversas dimensiones de la competencia matemática. Estos procesos matemáticos no son capacidades pero apoyan su desarrollo, y además tienen numerosas intersecciones entre sí.

Se han seleccionado como centrales los siguientes procesos: razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, comunicar, conectar y representar. Cada proceso central señalado aquí se podría ver como una síntesis de procesos de otros niveles de especificidad o dominios de acción, pues en el sujeto todos los procesos (ya sean generales o menos generales) no se activan de forma aislada. Por ejemplo, en el momento de realizar el proceso representar pueden participar otros procesos más generales (o básicos) como identificar, listar, ordenar, clasificar, etc.

Se presentan cinco ejes transversales específicos a las Matemáticas que potencian algunas dimensiones curriculares relevantes para la enseñanza efectiva de esta materia:

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
- El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.
- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
- El uso de la Historia de las Matemáticas.

Después del inicio del cambio curricular, se realizó una valoración de la praxis que se estaba llevando a cabo. Ruiz (2013) expone el alcance que se quiere establecer y que esta toma de decisiones era urgente en el país.

Uno de los cambios más importantes de este programa es la organización de las lecciones, que consideró los aportes más recientes en la Educación Matemática. Al respecto, Ruiz (2013) expresaba que "en este currículo la sugerencia de organización de las lecciones, con base en los aportes de los investigadores costarricenses, asume el enfoque de PISA y usa como base la experiencia japonesa aunque con algunos énfasis nutridos por EMR y TSD" (p.48).

La organización de las lecciones que se ha propuesto contempla cuatro momentos, tal y como se muestra en MEP (2012):

- Problema: se asume la relevancia de construir aprendizajes a través de la resolución de problemas, se promueve aquellos en contextos reales (EMR + PISA), se acepta que debe haber algún nivel de "reinvención" de los tópicos matemáticos en juego (EMR) y se busca que las matemáticas que intervendrán respondan de manera óptima al problema (TSD), pero hasta donde sea posible.

- Trabajo estudiantil independiente: se subraya la importancia para el desencadenamiento de acciones cognitivas y el aprendizaje del espacio que debe darse al trabajo autónomo (EMR + TSD + lección japonesa), se acepta que el docente no debe obstaculizar esa autonomía (TSD) pero se acepta que en la práctica educativa real la acción del grupo y del docente contribuyen al aprendizaje (no es inadecuado para aprender que se debilite la autonomía en algunos casos).

- Comunicación y contrastación: se propone como fase esencial para el aprendizaje (EMR + lección japonesa).

- Clausura o cierre: un momento indispensable para "institucionalizar" los conocimientos (TSD + lección japonesa) y conectar con la cultura matemática.

Esta transformación de la organización de las lecciones requiere de un estudio más detallado, puesto que hay muchas vertientes teóricas en la fundamentación, pero en muchas ocasiones, los actores principales desconocen de qué tratan cada una de estas. Así, para cada uno de los énfasis mencionados, se explican los aspectos más relevantes.

1. Educación Matemática Realista: Se consideran las contribuciones de Alsina (2009) que presenta un modelo de formación de maestros a través del aprendizaje realista, que surgió a través de la investigación en educación matemática y, que fue posterior a la educación matemática realista. En el artículo se exponen los principales aspectos de esta teoría y, en este apartado, han sido extraídos los componentes esenciales para la posterior discusión.

    - Fundada por el matemático alemán Hans Freudenthal (1905-1990).
    - No es una teoría general del aprendizaje, como si lo es el constructivismo, por ejemplo.
    - Se desarrolló en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática de la Universidad de Utrecht (Holanda), hoy conocido como Instituto Freudenthal.
    - Los 6 principios fundamentales de la EMR son:

        a) De actividad: las matemáticas se consideran una actividad humana. La finalidad de las matemáticas es *matematizar* (organizar) el mundo que nos rodea. incluyendo a la propia matemática.

b) De realidad: Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en *contextos reales*. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.

c) De niveles: los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión: situacional, referencial, general y formal.

d) De reinvención guiada: proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.

e) De interacción: la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social.

f) De interconexión: los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría,...) no pueden ser tratados como entidades separadas.

2. Lección japonesa: Como aspecto central de este apartado, se destaca el enfoque de la resolución de problemas. Isoda y Olfos (2009) presentan las consideraciones respectivas de las contribuciones en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Basado en el capítulo 5, se exponen los principios y elementos distintivos del estilo de la clase de matemática japonesa, cuyos aspectos seguidamente se muestran.

   a) Aspectos culturales: Es relevante el bien común sobre él individual, al autoexigencia y perseverancia por la tarea bien hecha y una mirada holística ante la vida. Además, la mirada holística del quehacer de los profesores se constata en la rigurosidad con que se integra la enseñanza en el aula on las propuesta de enseñanza de los textos y, que son congruentes con las políticas nacionales de educación.

   b) Atención a la multiplicidad de objetivos: Las actividades de clases permiten a los alumnos reflexionar, expresar ideas, discutir, disfrutar y construir conocimeintos nuevos sobre la base de los ya adquiridos.

c) Fases distintivas de la clase al estilo japonés: Stigler y Hiebert (1999) hacen mención del formato de la clase japonesa considerando revisión de la clase anterior, presentación de los problemas del día, trabajo individual de los alumnos en sus puestos, discusión de los métodos de resolución y destacado y resumen del punto principal"(citado en Isoda y Olfos, 2009, p. 89).

d) Características de la gestión de la clase en cada una de las etapas: Se destacan cuatro y se describen brevemente a continuación:

- Hatsumon en la presentación de un problema, que significa formular una pregunta clave para atraer el pensamiento del alumno sobre un punto particular en la lección.
- Kikan-shido durante la resolución del problema por parte de los alumnos, que significa la instrucción en el escritorio del alumno. En este periodo, el profesor observa el trabajo de los estudiantes y va reflexionando de qué forma va a integrar esas ideas para la discusión.
- Neriage en una discusión de toda la clase, equivalente a expresar que se "van a pulir" las ideas del alumno y que de este modo se obtenga una idea matemática integrada en la discusión general de la clase.
- Matome como recapitulación: en síntesis, se trata de un comentario final y cuidadoso acerca del trabajo de los alumnos en términos de sofisticación matemática. El profesor revisa brevemente lo que los alumnos han discutido y recapitula lo que han aprendido en la clase.

3. Teoría de las Situaciones Didácticas: Se consideran los aspectos generales a partir del documento de Sadovsky (s.f.) donde se menciona que Guy Brous-

seau (desde 1986 hasta 1999) propuso un modelo donde se pudiera pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar.

Brousseau toma las hipótesis centrales de la epistemología genética de Jean Piaget como marco para modelizar la producción de conocimientos. La concepción constructivista lleva a Brousseau a postular que el sujeto produce conocimiento como resultado de la adaptación a un "medio" resistente con el que interactúa. Ampliando esta visión, Brousseau (1986) expresó que "el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios... Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (citado en Sadovsky, s.f. p. 2).

Es importante resaltar que lo descrito anteriormente con respecto a las tres teorías que sostienen la propuesta de organización de lecciones del Programa de Estudios de Matemática en Costa Rica, no ha sido expuesta en forma exhaustiva, principalmente con respecto a la última de estas. Además de lo mencionado con la organización de las lecciones, también se hace necesario precisar cuál es la visión de las Matemáticas y de su enseñanza en esta Reforma Matemática. Al respecto Ruiz (2011) menciona que

> Las matemáticas son ciencia de lo abstracto y trabajan los aspectos más generales de lo que existe. Se debe encontrar en los elementos específicos la estructura de conocimiento y la abstracción de la disciplina; es decir, establecer un puente entre lo particular y lo abstracto, no quedarse en lo particular... Todo apunta a una estrategia educativa que sepa colocar las dimensiones abstractas y las no abstractas en el lugar que corresponde a cada una, de acuerdo a los mejores fines de fortalecer la formación matemática de la población con vista al mundo

que hoy enfrentamos. (citado en Ruiz, 2013, 43).

El currículo costarricense está fundamentado bajo supuestos epistemológicos que confluyen en la participación de tres componentes que Ruiz (2013) cita: sujeto, objeto y lo social. Este aspecto no es reciente, el autor hace mención del progreso que se tiene de estos temas en la investigación llevada en el transcurso del tiempo. A través de la resolución de problemas se resaltan los contextos reales y el uso de los instrumentos tecnológicos. No basta solo con ver a los aprendizajes como construcciones de los sujetos de manera activa, cuestión que Ruiz (2013) enfatiza puesto que hubo un acuerdo de este aspecto en la política educativa costarricense, sino que debe añadirse la potencia de "visualizar a un docente que transmite las influencias socioculturales y los constructos de la disciplina, todo a través de un medio escolar que posee sus propias reglas" (p. 39).

Aunado a lo anterior, en el año 2015 se estableció una nueva política curricular denominada "Educar para una Nueva Ciudadanía". Considerando el documento de la Fundamentación Pedagógica de la Transformación Curricular 2015 (MEP, 2015) se presentan a continuación algunos extractos de este documento, los cuales se consideran como relevantes para la comprensión del cambio curricular en Matemática y, en particular, para el estudiante y profesor que está inmerso en esta realidad.

1. Buscamos seres humanos libres, autónomos, críticos y autocríticos, con un desarrollo integral, orientados hacia sí mismos y hacia la sociedad, hacia lo local y hacia lo planetario. Un ser humano conocedor profundo de su contexto y de su historicidad, capaz de interiorizar las necesidades de los demás, ser respetuoso de la diferencia, colaborador, activo, socialmente responsable, que asuma compromisos, que participe activamente en la búsqueda de soluciones, que piense por sí mismo, establezca conexiones y que genere cambios.

2. La propuesta innovadora de pensar la educación que requiere una nueva ciudadanía para el siglo XXI se basa en los derechos humanos, considerando además la necesidad de asumir deberes ciudadanos.

3. El mundo actual ha llegado a un nivel de desarrollo científico y tecnológico de tal magnitud que las habilidades resultan vitales para la sobrevivencia del ser humano como especie. Al estar, la población estudiantil, en este contexto se le exige un desempeño orientado en el marco de la acción analizada y reflexiva, hacia la resolución de situaciones desde la individualidad hacia la colectividad.

4. Es necesario argumentar que desde la propuesta de un curriculum por habilidades, los sujetos generadores del curriculum confluyen de manera democrática y activa, donde los horizontes de "aprender a hacer" y "aprender a ser" se ven fortalecidos por el "aprender a convivir", tomando como referencia un enfoque socioconstructivista y una pedagogía crítica, donde el estudiantado se estimula a llevar el conocimiento a la práctica y el educador debe tener comprensión crítica de la realidad social, política y económica del educando.

Al considerar estos cuatro puntos de la actual política curricular, se considera lo siguiente: que el estudiante asuma un compromiso y que reflexione constantemente, que el futuro ciudadano asuma su función como corresponde en el marco de los deberes y derechos que le atañen, que la comunidad educativa sea capaz de trabajar tanto individual como colectivamente y, más allá de ser portador de conocimientos, la experiencia se oriente a través de las habilidades. De este modo, se expresa otro factor por considerar en el contexto de la realidad educativa y en la cual, como investigadores, se hace la propuesta de que el concepto de infinito pueda ser llevado a un ámbito de discusión y reflexión, considerando que:

- El programa de estudios tiene como eje transversal el uso de la Historia de las Matemáticas. Tal y como se expuso anteriormente, se evidencia que el concepto de infinito ha enfrentado conflictos a lo largo de la historia y este antecedente permite mostrar que la enseñanza de temas asociados al infinito van conllevar dificultades al momento de usar el infinito, aunque sea solamente considerando el símbolo que le caracteriza.

- Considerando la Política Curricular Nacional, se puede instar al estudiante para que investigue en torno a la noción del infinito y que pueda realizar aportes en la clase. La construcción del concepto estará guiada por medio de la interacción entre los estudiantes y el profesor, y considerando el nivel de abstracción que se logre alcanzar según los conocimientos matemáticos que se requieran estudiar.

- Tal y como se mostrará en el siguiente apartado, la teoría de Piaget revela que el individuo debe tomar conciencia de cómo ha construido sus conocimientos y que se aprovechen los aportes obtenidos a lo largo de la historia, a través de un análisis específico en la construcción del número, primordial para la adecuada construcción del concepto de infinito.

3.3. Construcción del infinito desde Piaget

La epistemología genética aporta un marco explicativo para la construcción de conceptos e ideas en cada individuo, nociones que pertenecen a estructuras cognitivas en constante proceso de equilibración-desequilibración-reequilibración.

Los conceptos matemáticos poseen una génesis y una evolución, los cuales pertenecen a una inteligencia en un momento dado de la historia del sujeto y de la humanidad. Por tanto, a continuación se exponen los principales términos y nociones de la epistemología genética de Piaget que sirven de referencia para la explicación de la construcción del número finito y transfinito.

Lo mencionado anteriormente se puede representar en el siguiente esquema:

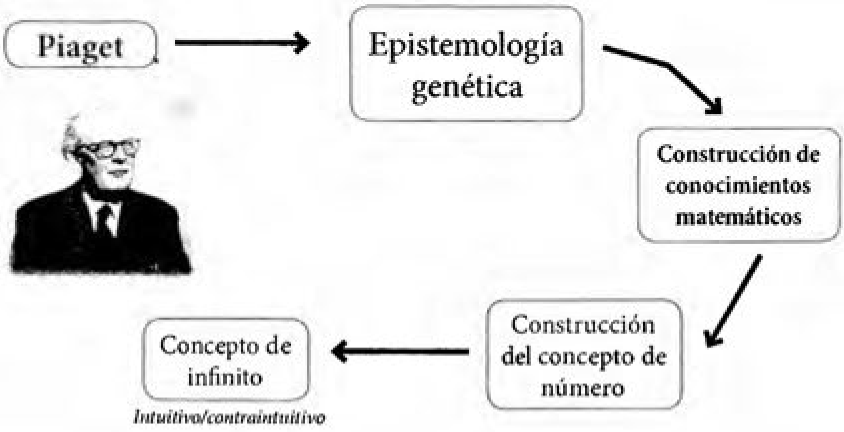


Figura 3.4: Esquema de Piaget y el infinito matemático. Elaboración propia.

3.3.1. La epistemología genética

Para Nortes y Martínez (1994), Piaget con la epistemología genética intentó explicar la relación entre sujeto y objeto desde una óptica no tratada por otras epistemologías. Para estos autores el constructivismo de Piaget es *relacional* y presenta dos características principales: primero, manifiesta una preocupación por la idea de totalización y de formación histórica que la lléva a elaborar la síntesis entre las consideraciones de estructura como totalidad y la génesis como formación. Segundo, considera el conocimiento como unidò a una acción que modifica el objeto y que solamente lo alcanza a través de las transformaciones inducidas por dicha acción.

Para Moreno (en Castorina y otros, 1998), la epistemología genética ha tematizado el papel mediador de los esquemas asimilatorios en la construcción del conocimiento. El conocimiento no se concibe como una copia de una realidad externa e independiente del sujeto que conoce, sino que es él resultado de una construcción incesante a partir del mundo de las experiencias. El conocimiento es siempre un estado transitorio de un proceso: *conocer*. A su vez, conocer es asimilar. Asimilar es interpretar, dar significado a una experiencia nueva a partir de lo que, en ese momento, sean los esquemas cognitivos.

Según García (2000), Piaget llegó a la Psicología buscando respuestas a las interrogantes que le plantearon sus inquietudes epistemológicas, pues la explicación de lo que llamamos "conocer", "comprender", "explicar" habrá de surgir, por consiguiente, de la investigación de los procesos de cambio de un nivel a otro, más que del análisis de los estados en cada período o en cada nivel. La psicología y la epistemología que estudian esos procesos fueron calificadas por Piaget como Psicología Genética y Epistemología Genética, en tanto su objetivo era estudiar la génesis del conocimiento. El rechazo de las posiciones empiristas y aprioristas implica, a su vez, renunciar a la búsqueda de un "punto de partida" absoluto para el conocimiento[5]. En tanto no hay algún factor específico (intuiciones, sensaciones) a partir del cual se elabora el conocimiento, tampoco se puede establecer un momento preciso en el cual "comienza" la actividad cognoscitiva. La ruta que va desde los procesos puramente biológicos, incluyendo los reflejos más elementales, hasta los movimientos voluntarios y las actividades con características que permiten considerarlas como cognoscitivas, muestra una transición gradual, sin puntos de discontinuidad.

Estas consideraciones conducen directamente a lo que García (2000) ha denominado **principio de continuidad funcional** de los procesos constructivos del conocimiento, que constituye uno de los pilares fundamentales de la epistemología genética. En primer lugar, el principio de continuidad funcional implica la

[5]Con respecto a esto, Piaget señala que "en cuanto a las epistemologías platonizantes, racionalistas o aprioristas, creyeron encontrar, cada una de ellas, algún instrumento fundamental de conocimiento ajeno, superior o anterior, a la experiencia. Pero a resultas de un olvido que se explica, sin duda, nuevamente por las tendencias especulativas y por el desprecio de la verificación efectiva, estas doctrinas mientras tomaban las precauciones de caracterizar las propiedades que atribuían a este instrumento (la reminiscencia de ideas, el poder universal de la razón, el carácter a la vez previo y necesario de las formas a priori) descuidaron verificar si este instrumento estaba realmente a disposición del sujeto."(Piaget, 1972, p. 11)

imposibilidad de dar una caracterización general intrínseca de lo que es conocimiento.

El principio de continuidad funcional implica que tampoco hay punto de partida definido desde donde pudiera comenzar la construcción de mecanismos constructivos. Dar cuenta de esta construcción de los mecanismos constructivos es indispensable, en el caso de una epistemología genética, por propia coherencia interna.

Para García (2000), la propuesta piagetiana, apoyada en los resultados de la metodología del análisis psicogenético, significó un enfoque enteramente diferente de la manera tradicional de abordar los problemas del conocimiento. El principio de continuidad funcional implica que el conocimiento debe estudiarse como un proceso cuyo desarrollo es sólo definible en un contexto histórico-social. Por consiguiente, el objetivo de la epistemología no puede consistir en estudiar estados de conocimiento sin tomar en cuenta dichos contextos, ni limitarse a los métodos de validación a los cuales se vio reducido el empirismo. La epistemología genética se propone, por el contrario, analizar en qué consiste que un individuo, o la ciencia en un periodo dado, construyan lo que la misma sociedad considera como un nivel de conocimiento más avanzado (Piaget y García, 1982).

Para la epistemología-genética, el aprendizaje consiste en la consolidación de los esquemas cognitivos y en la generación de otros nuevos, como resultado de los desequilibrios de los existentes. Un *esquema cognitivo* puede ser un concepto o patrón de acción. En un esquema siempre está presente un mecanismo de reconocimiento, para ver si determinado objeto o situación es admisible para el esquema. Una vez que se pone en marcha un esquema, si los resultados obtenidos son compatibles con los esperados, entonces dicho esquema se hace más estable como recurso cognitivo. Pero puede ocurrir que ante una nueva situación el esquema no responda adecuadamente y por tanto el esquema cognitivo se desequilibra y esto hace al sujeto más consciente de la necesidad de responder a la perturbación hasta que logre la modificación del esquema en cuestión.

Para Moreno (en Castorina y otros, 1998, p. 167-168), al referirse al conocimiento y las experiencias del sujeto,

> El constructivismo piagetiano no niega la existencia de un mundo independiente del sujeto; lo que dice es que el mundo al que el sujeto se enfrenta para la construcción de su conocimiento, *es el mundo de sus experiencias*.[6] (...) Sin duda, es la reflexión sobre sus acciones, lo que conduce a las nuevas formas de conocimiento del sujeto. (...) Conocer es actuar y transformar (...). Nuestro conocimiento encaja con nuestra experiencia así como una llave encaja en una cerradura.

Además, los conocimientos en general no aparecen de manera espontánea, sino que poseen una génesis, la cual puede estudiarse incluso hasta los primeros años de edad del sujeto. En palabras de Piaget,

> todo conocimiento debe enfocarse siempre, metodológicamente como siendo relativo a un estado anterior de menor conocimiento, y como susceptible de constituirse a su vez en el estado anterior respecto de un conocimiento más profundo. Incluso una verdad llamada eterna, como $2 + 2 = 4$, puede interpretarse como una etapa genética porque, por una parte, se trata de un conocimiento que no todo sujeto pensante posee y conviene, en consecuencia, estudiar su formación a partir de conocimientos menores (...). (Piaget, 1978, p. 31)

Conceptos fundamentales

Para explicar la formación de los conceptos y el desarrollo de la inteligencia, Piaget, en sus obras tempranas (Perraudeau, 1999; Gutiérrez, 2012) propuso las

[6] El énfasis es nuestro.

etapas del desarrollo, las cuales son las siguientes:

- Sensoriomotriz: en esta etapa, que va de los 0 a los 2 años de edad aproximadamente, la inteligencia es práctica y los problemas que se presentan al individuo se resuelven por medio de la acción inmediata. Esta etapa posee seis subestadios.

- Preoperatoria: va de los 2 a los 7 años aproximadamente. Aparece el simbolismo y el juego, y con el desarrollo del lenguaje se amplía la gama de posibilidades para resolver problemas del entorno, no ya de manera inmediata, aunque las operaciones aún no poseen una estructura lógica.

- Operacional concreta: va de los 7 a los 12 años de edad, aproximadamente. El pensamiento del sujeto ya posee indicios de una estructura lógica, pero solo es aplicable a situaciones de experimentación y a la manipulación de objetos concretos.

- Operacional formal: va de los 12 años en adelante. Son evidentes el pensamiento y la lógica formales, capacidad reflexiva, modelación de la realidad en el plano hipotético, manipulación y uso de reglas del cálculo proposicional. Los objetos de la realidad son operados en el plano del pensamiento, y no se necesita manipular la realidad de forma concreta.

Sin embargo, en la maduración de su trabajo a través de los años y en colaboración con otros teóricos de distintas disciplinas, Piaget resaltó que dichas etapas no eran una sucesión rígida en cuanto a las edades, sino que eran una sucesión flexible cronológicamente, pero siempre una detrás de la otra. Así que, en vez de hablar de las etapas anteriores, Nortes y Martínez (1994), mencionan que Piaget distingue **dos grandes planos en el desarrollo**: el de la acción y el de la representación. El plano de la acción, denominado período sensoriomotor, y el de la representación, que consiste en los períodos de preparación y organización de las operaciones concretas y el período de las operaciones formales. Para Gutiérrez (2012), la epistemología genética

> Intenta explicar el conocimiento científico sobre la base de su historia, su sociogénesis y especialmente desde los orígenes psicológicos de las nociones y operaciones sobre las cuales está fundamentado. También toma en consideración, en tanto le sea posible, la formalización y en particular, las formalizaciones lógicas aplicadas a estructuras estables de pensamiento, y en ciertos casos, toma en cuenta las transformaciones de un nivel a otro del desarrollo del pensamiento. Esta propuesta se ubica dentro de una postura dialéctica o integral, en la perspectiva de la dicotomía de la ciencia planteada por Hans Reichenbach; vale decir, que Piaget al analizar la ciencia como una metateoría la estudia tomando en cuenta su contexto de justificación y su contexto de descubrimiento. (p. 37)

Los siguientes conceptos y definiciones son una recopilación y síntesis de los autores Flavell (1991), Battro (1969), Silverman (1989) y Piaget (1982;-1986), los cuales son utilizados para explicar el proceso de equilibración de las estructuras cognitivas.

Conocimiento. Todo contacto recíproco entre un sujeto y un acontecimiento por medio del cual este acontecimiento se convierte en algo conocido por el sujeto. Como relación dialéctica viva entre conocedor y conocido, Piaget describió el conocimiento de acuerdo con tres conceptos básicos:

1. Asimilación, el cual es el proceso continuo de adoptar datos;
2. Esquemas generales, los cuales son la capacidad interna del sujeto para asimilar, y

3. Acomodación, proceso continuo de aplicar esquemas generales a contenidos particulares.

Las dos etapas principales del conocimiento son: 1) Instintual y 2) experimental. A su vez este segundo dividido en: 2.1) Sensoriomotriz y 2.2) conceptual. El conocimiento instintual es convertido por la evolución en la fisiología del organismo, en el que el conocimiento experimental requiere una experiencia vivida, por medio del cual el organismo indivisual construye este conocimiento. Los esquemas o estructuras cognoscitivas, los cuales constituyen la *capacidad interna* son el instrumento biológico de la asimilación. Concebidos como el órgano del conocimiento y determina su etapa particular.

Piaget limita el significado de "maduración" al crecimiento fisiológico, y lo contrasta con el crecimiento psicológico que denomina "desarrollo". Los filósofos han tendido a limitar el significado de conocimiento al conocimiento conceptual, han solido olvidar que el conocimiento conceptual es simplemente el producto final de un proceso evolutivo y experimental, que tiene muchos puntos en común con formas menos avanzadas del comportamiento.

Piaget partió del supuesto de que en toda conducta hay algún conocimiento subyacente. En el conocimiento podemos distinguir *forma* y *contenido*. El contenido se deriva del hecho particular al que va dirigido el conocimiento, en tanto que la forma se deriva de la estructura interna. El contenido es frecuentemente observable; la forma no. Sinónimos de forma son "marco general", "estructura", "significado", "entendimiento" y "esencia". Sinónimos de contenido son "hecho", "información" y "estímulo".

Estructura. Es un todo o un sistema de transformaciones que es autorregulador. En la etapa sensoriomotriz, el término para las estructuras internas es "esquemas" o "coordinaciones de acción"; los esquemas en la etapa conceptual son "operaciones" o "preoperaciones". La totalidad de los esquemas de que dispone una persona forman su *inteligencia*. La preocupación piagetiana es la del conocimiento como capacidad general y, por consiguiente, por la inteligencia, no por el conocimiento de un contenido en particular. El *desarrollo* no es más que inteligencia en proceso de creación. Por lo que respecta al apriorismo o aposteriorismo, Piaget más bien rechaza dichas posturas, porque el desarrollo requiere tanto de una experiencia individual como de experiencias externas.

Operaciones. Son las categorías lógicamente predominantes por medio de las cuales el mundo aparece como estable y congruente: la clasificación jerárquica, el ordenamiento serial y la cuantificación numérica son ejemplos de ello. Una vez construidos, permiten al infante pasar de un punto del sistema a otro basado en la lógica interna del sistema.

Equilibración/Equilibrio.[7] Un sistema en equilibrio es aquel que posee algún tipo de balance o estabilidad (frágil o seguro, temporal o duradero) respecto de las fuerzas que actúan sobre o dentro de él. En un sistema equilibrado las fuerzas o perturbaciones que, de no hallar oposición, conducirían a un cambio de estado, son contrarrestados por fuerzas iguales y opuestas que aseguran el *statu quo*. Los tipos de sistemas a los que Piaget aplica el modelo de equilibrio, evidentemente no son térmicos ni mecánicos, sino psicológicos. En particular son sistemas de acciones, sea externalizados o internalizados, que el sujeto lleva a cabo en medio del mundo de objetos y acontecimientos. Dado que son las mismas acciones las que forman sistemas equilibrados, Piaget habla de estado de *equilibrios dinámicos*, para distinguirlos de los equilibrios estáticos.

[7] Un ejemplo de sistema equilibrado es el de considerar que el todo es mayor que las partes en el ámbito de lo finito. Remitiéndonos a los ejemplos citados en el estado de la cuestión de esta investigación, los sujetos se enfrentaron a la situación de determinar si en dos intervalos, por ejemplo $[0, 1]$ y $[0, +\infty[$, había más elementos en uno o en otro. En la mayoría de los casos respondieron que en el intervalo de "mayor longitud" había más puntos precisamente porque era "más largo" y el otro es de longitud finita.

El esquema siguiente recopila algunos de los conceptos de la espistemología genética.

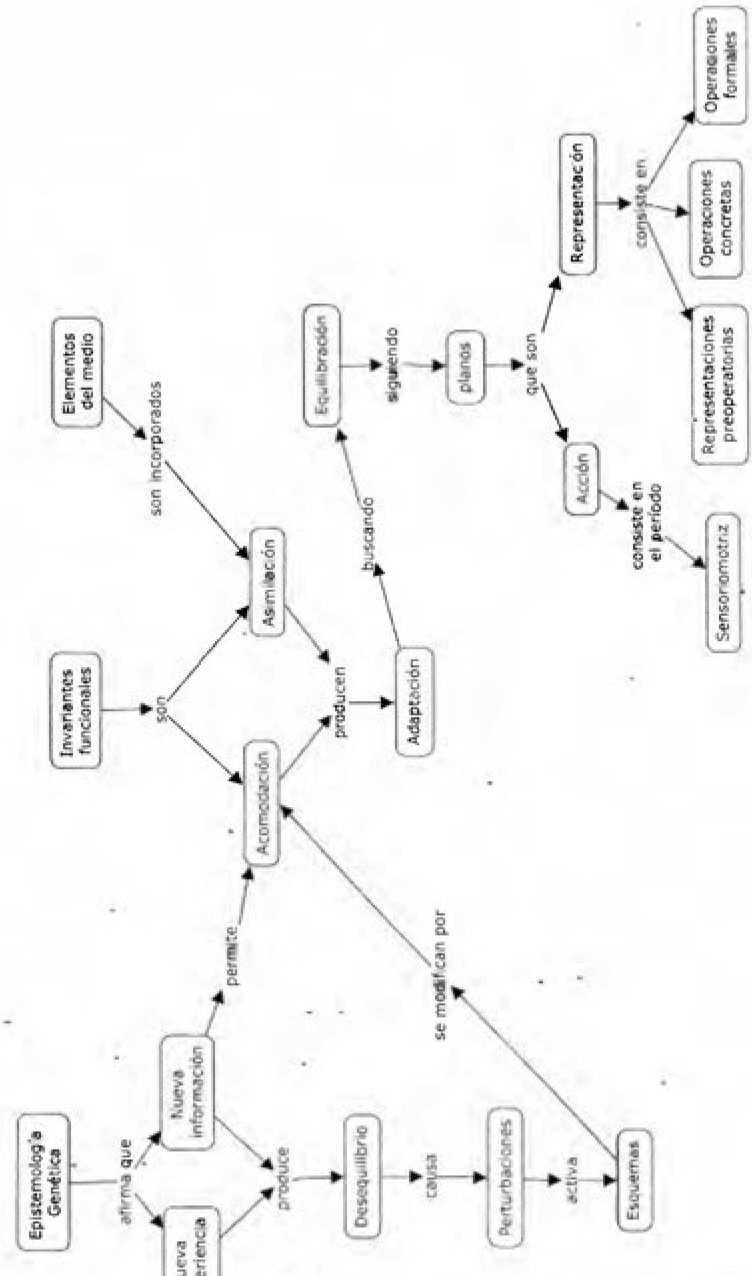


Figura 3.5: Epistemología Genética. Elaboración propia.

Los métodos de la Epistemología genética

Gutiérrez (2012) explica que la epistemología genética hace uso de métodos tanto psicogenéticos como histórico-críticos.

1) **Método psicogenético**: con este método, Piaget estableció períodos en el desarrollo de la inteligencia. Cada estadio se caracteriza por una estructura operativa de conjunto, que da cuenta de las conductas propias de ese estadio. Los modelos de estas estructuras operativas que usó Piaget (1978) son lógico-matemáticos, habiendo descubierto uno de ellos: el grupo de las cuatro operaciones conmutativas (al cual llamó "agrupación": un intermedio entre la estructura *retículo* y el *grupo*, siguiendo a Battro (1969)) o grupo INRC (I= Implicación; N= Negación; R= Reciprocidad y C= Complementariedad). Los estadios tienen un carácter integrativo (dialéctico): cada estadio reorganiza e integra estructuras que se han construido en el estadio anterior a un nivel más equilibrado, a la vez que prepara las condiciones para la aparición del estadio siguiente. El paso gradual de un estadio a otro se explica por medio de la adaptación de la inteligencia por medio de la asimilación y la acomodación: si bien las estructuras se suceden unas a otras y son reemplazadas por nuevas organizaciones, hay un doble movimiento: a la vez que hay cambios hay continuidad. Ésta última se encuentra asegurada por las invariantes.

2) **Método histórico-crítico**: consiste en averiguar cómo ha trabajado realmente el inventor de un principio o aquellos que habían preparado su descubrimiento científico. Se trata de responder interrogantes como las siguientes: ¿qué tipo de experiencias, experimentos o experiencias mentales utilizaron?; ¿cuáles fueron sus deducciones?; ¿por medio de qué sistema deductivo hallaron estas experiencias? Es un método de análisis epistemológico que se sirve de la Historia de la Ciencia para la discusión de problemas de esta tipología.

3.3.2. La equilibración de las estructuras cognitivas

Para García (2000), la teoría de equilibración tiene por objetivo explicar la dinámica de los procesos de desequilibración y procesos de reequilibración. Piaget utilizó el término *equilibración* para referirse tanto a las estructuras estabilizadas que mantienen un equilibrio dinámico, como las estructuras propiamente constructivas en las cuales el término se refiere a procesos que conducen a nuevos equilibrios dinámicos.

El esquema de equilibración presentado por Piaget resuelve el problema de encontrar un esquema explicativo adecuado de interacciones e interrelaciones entre los elementos endógenos aportados por la actividad del sujeto y los elementos exógenos provenientes de su relación con la experiencia.

Los elementos cuyas interrelaciones concurren al desarrollo y cuya equilibración determina las fases estabilizadas son (García, 2000):

1. Los observables provenientes de las constataciones sobre los objetos (Obs O). En sentido amplio, se incluyen como observables no solo los registros de objetos y eventos singulares. Las relaciones entre dichos observables se convierten también en observables.

2. Las observaciones del sujeto sobre sus propias acciones, a partir de la toma de conciencia de sus actos, y luego de sus conceptualizaciones (Obs S).

3. La manera en que el sujeto coordina (organiza) sus acciones y sus conceptualizaciones (Coord S).

4. Las coordinaciones que establece el sujeto con los objetos, desde las simples relaciones entre eventos hasta las relaciones causales (Coord O).

Desde el punto de vista psicogenético, el principio general que rige las interrelaciones entre los cuatro elementos consiste en el hecho elemental de que el sujeto toma conciencia de sus propias acciones solo a través de sus constataciones sobre los objetos; pero los objetos solo son cognoscibles por medio de las inferencias a las cuales se llega a través de las coordinaciones de las acciones del sujeto. Sobre esta base Piaget construyó su esquema general de equilibración:

$$\begin{tikzcd}
(\text{Obs. S} \arrow[r] & \text{Coord. S}) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[rr, bend right, "\text{SO}"'] & (\text{Obs. O} \arrow[ll, bend right, "\text{OS}"'] & \text{Coord. O}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Figura 3.6: Esquema general de equilibración. García (2000).

Los procesos OS representan la toma de conciencia a partir de los resultados de la acción, es decir, logros y fracasos. A partir de ahí el sujeto puede coordinar sus acciones y conceptualizar en la dirección Obs S⟶Coord S, que incluye desde inferencias elementales hasta las relaciones y estructuras lógicas, según los niveles. Los procesos SO conducen de las coordinaciones de la acción (Coord S) a las coordinaciones sobre los objetos (Coord O). Las Coord O consisten en establecer relaciones causales que rebasan los observables y son establecidas por inferencias, de allí la dirección Coord S⟶Coord O. Tales relaciones son primero aplicadas y luego "atribuidas" a los objetos.

Las interrelaciones de los dos tipos de coordinaciones permiten nuevas interpretaciones de los datos empíricos, es decir, llevan al "descubrimiento" de nuevos observables, lo cual cierra el ciclo inicial y abre un nuevo ciclo.

Para García (2000), las conclusiones epistemológicas fundamentales que constituyen el núcleo de la teoría piagetiana del conocimiento son las siguientes:

1. El desarrollo del conocimiento es un proceso continuo que sumerge sus raíces en el organismo biológico, prosigue a través de la niñez y de la adolescencia, y se prolonga en el sujeto adulto hasta los niveles de la actividad

científica.

2. El conocimiento surge en un proceso de organización de las interacciones entre un sujeto ("el sujeto de conocimiento") y esa parte de la realidad constituida por los objetos ("el objeto de conocimiento"). Esto supone que el sujeto debe coordinar sus propias acciones, para poder interactuar, así como establecer coordinaciones con los objetos; que el sujeto construye las formas de organización de los objetos de conocimiento; que esas formas de organización intervienen en los mecanismos inferenciales inherentes a toda interpretación de la realidad y que tales formas, incipientes en los niveles elementales, llegarán a constituir, durante el desarrollo, las estructuras lógicas que culminan en la lógica formal y en las estructuras matemáticas.

3. La génesis de las relaciones y las estructuras lógicas y lógico-matemáticas están en las interacciones sujeto-objeto. No provienen del objeto, como abstracciones y generalizaciones de percepciones empíricas, ni del sujeto, como intuiciones puras o ideas platónicas. Su raíz primera está en las coordinaciones de las acciones del sujeto sobre el objeto.

4. Organizar los objetos, situaciones, fenómenos de la realidad empírica (en tanto son objetos de conocimiento) significa establecer relaciones entre ellos. Pero las relaciones causales no son observables: son siempre inferencias.

5. El desarrollo del conocimiento no procede de una manera uniforme, por simple expansión, ni por acumulación aditiva de elementos. El desarrollo tiene lugar por reorganizaciones sucesivas. Esto significa que la elaboración de los instrumentos cognoscitivos del sujeto procede por etapas.

6. En todo el dominio de la realidad (físico, biológico, social) las interacciones del sujeto con los objetos de conocimiento dan lugar a procesos cognoscitivos que se construyen con los mismos mecanismos, independientemente

del dominio. Por consiguiente, en tanto se trate de la asimilación de los objetos de conocimiento, no hay dicotomía, en el nivel psicogenético, entre los fenómenos del mundo físico y los fenómenos del mundo social.

7. El sujeto del conocimiento se desarrolla desde el inicio en un contexto social. La influencia del medio social se incrementa con la adquisición del lenguaje y luego a través de múltiples instituciones sociales, incluida la misma ciencia.

Según García (2000), los dos procesos elementales considerados por el constructivismo como instrumentos básicos en la construcción del conocimiento son designados con los nombres clásicos de *abstracción* y *generalización*. Piaget extendió considerablemente ambos conceptos, reformulando su significado y el papel que juegan en el desarrollo cognoscitivo.

Abstracción

Piaget distingue dos tipos:

1. **La abstracción empírica:** referida a los objetos exteriores, en los cuales el sujeto constata ciertas propiedades, características o hechos, que son separados (abstraídos) de los otros para analizarlos independientemente.

2. **La abstracción reflexiva:** referida a las acciones y operaciones del sujeto. La diferencia entre ambas se puede ejemplificar así: dados cinco objetos el sujeto puede centrar su atención en una propiedad física (color, tamaño) y considerarla separadamente de las demás propiedades, lo cual es una abstracción de tipo empírico, pero contar los objetos y concluir que son cinco es agregar una propiedad que no está en los objetos, y es el resultado de una operación del sujeto consistente en poner los objetos en correspondencia biunívoca con la serie de los números, lo cual es una abstracción reflexiva.

Los dos tipos de abstracción funcionan concurrentemente, pero la abstracción reflexiva tiene un modo de funcionamiento más complejo, y una significación epistemológica más importante, debido a que el calificativo de "reflexiva" se aplica en dos sentidos distintos:

a) Como reflejante, con una de las acepciones de "reflejar" que significa formar la imagen de algo en una "superficie", que en este caso es un "nivel";

b) Como reflexionante, considerando una cosa con detenimiento.

Generalización

En correspondencia con los dos tipos de abstracción, son las siguientes:

1. La generalización inductiva o extensional, la cual es el instrumento de desarrollo del conocimiento que la filosofía especulativa consideró como un proceso que conduce de la constatación de hechos singulares repetidos, a nociones, conceptos o leyes generales; o bien, a partir de hechos constatados durante un intervalo de tiempo, abstraer una relación que se ha repetido, y considerar que seguirá siendo válida en futuros hechos del mismo tipo. Es un proceso que se basa en constataciones de observables referidos a objetos externos al sujeto, de donde, por abstracción empírica se extraerá la propiedad que será objeto de la extrapolación de "algunos" a "todos", o de "ahora" a "siempre".

2. La generalización constructiva o completiva, que Piaget caracterizó como conducente a la producción de nuevas formas. Tiene como base la abstracción reflexiva. El desarrollo consiste en un progresivo reemplazo de constataciones de hechos, y de sus resultados obtenidos a través de abstracciones empíricas, por reconstrucciones que implican inferencias y ponen en juego

nuevas formas de organización que concluyen en un conjunto de relaciones encadenadas deductivamente. La reconstrucción exige una reflexión en un nivel superior (representativo o conceptual) al del dato empírico. De aquí que no haya generalización constructiva si abstracción reflexiva. Por otra parte, tal desarrollo supone un proceso de sucesivas diferenciaciones e integraciones.

3.3.3. La formación de los conocimientos matemáticos

En cuanto a la construcción de los conocimientos lógico-matemáticos, Piaget (1970) menciona que existen dos formas de experiencia, las cuales son la *experiencia física* y la *experiencia lógico-matemática*. La experiencia física es la que clásicamente se ha denominado como experiencia, la cual "consiste en actuar sobre los objetos para obtener un conocimiento por abstracción a partir de estos mismos objetos"(Piaget, 1970; pp. 69-70). En cambio, la experiencia lógico-matematica "consiste en actuar sobre los objetos pero por abstracción de los conocimientos a partir de la acción y no ya más de los propios objetos"(Piaget, 1970, p. 70). Dicha acción confiere a los objetos del mundo físico caracteres que no tienen per se (propiedades físicas por ejemplo). Por tanto, para Piaget las acciones lógico-matemáticas del sujeto pueden, en un momento dado, no ser aplicadas a objetos físicos e interiorizarse en operaciones que se pueden manipular simbólicamente. Por lo tanto,

> es por esta razón, (...) que a partir de un cierto nivel existen una lógica y unas matemáticas puras, para las que la experiencia es inútil. Por otra parte esta lógica y esta matemática pura son susceptibles, (...), de superar indefinidamente la experiencia al no estar limitadas por las propiedades físicas del objeto. (Piaget, 1970, pp. 70-71)

Que la experiencia física deje de ser "útil" en el sentido de la cita anterior estriba en que las operaciones se llevan a cabo en las estructuras internas del sujeto, las cuales no necesitan apoyo del mundo físico una vez interiorizadas. El plano simbólico es esencial para operar los objetos logico-matemáticos, los cuales son el resultado de la abstracción reflexiva.

La génesis del número

Siguiendo a Battro (1969), se presentan las operaciones referidas al número que Piaget y sus colaboradores estudiaron a través de sus investigaciones y los experimentos que llevaron a cabo para lograrlo, en las cuales se evidenciaron las operaciones de clasificación y seriación, las cuales son decisivas según Piaget para la construcción del número en el sujeto.

Figura 3.7: Piaget realizando experimentos junto a los niños. Recuperado de `https://www.cejepi.com/somos/biografia-piaget/`

I. **Operaciones de clasificación.** Estudio de la noción lógica de "clase" o "conjunto", la forma en la que el niño opera concretamente con dichas nociones.

   a) Correspondencia biunívoca: con el experimento de "flores y floreros" o "huevos y hueveras" se analizó el concepto de *correspondencia biunívoca*. Para estudiar la correspondencia biunívoca espontánea, se dejaba que el sujeto inventara por su cuenta correspondencias, y para ello utilizaba fichas puestas en varias maneras. También se estudiaron las correspondencias multívocas, por ejemplo: presentar al sujeto una colección de 10 flores azules, 10 flores blancas y 10 floreros, y colocar las flores en los floreros.

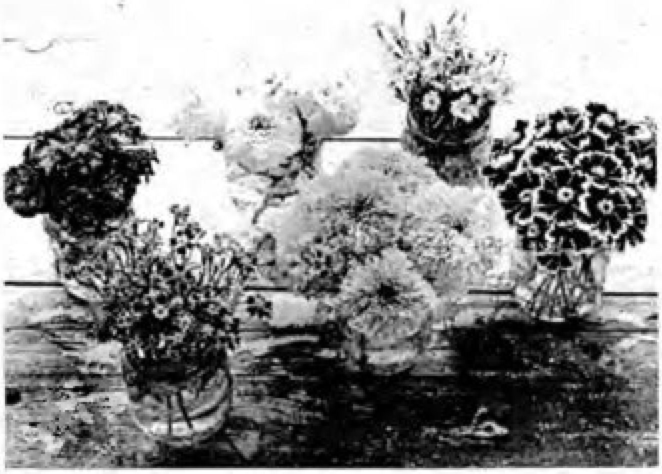


Figura 3.8: Correspondencia multívoca. Recuperado de `https://www.studiofmp.com/yellow-cut-flowers`

b) Adición lógica: se construyeron experiencias de la forma $A + A' = B$, o sea $A = B - A'$, $A < B$ y $A' < B$. Por ejemplo, una caja que contiene perlas de madera (clase B) y la mayor parte de las cuales son negras (clase A) y 2 o 3 son blancas (clase A').

c) Composición aditiva de números: experiencia sobre las relaciones aritméticas de parte a todo: $4 + 4 = 1 + 7 = 6 + 2 = 5 + 3 = 8$.

d) Conservación de las cantidades continuas: la experiencia se basa en colocar recipientes de iguales dimensiones, que contienen la misma cantidad de líquido (A_1, A_2) y se somete el contenido de A_2 a distintas deformaciones o transvasamientos, para luego compararlo con A_1.

Figura 3.9: Experimento de los transvases de líquidos. Recuperado de `https://memy.jeja.pl/462765,logiczne.html`

e) Conservación de cantidades discontinuas: lo mismo que en el experimento de conservación de cantidades continuas, pero en vez de que el contenido sea líquido se sustituye por bolitas perforadas de distintos colores.

II. Operaciones de **seriación.** Estudio de las relaciones asimétricas.

a) Construcción de correspondencia ordinal entre dos series:
se colocan 10 muñecos de madera de tamaños distintos y graduados y 10 bastones en las mismas condiciones, para luego hacer correspondencia entre los muñecos y los bastones.

b) Determinación de la correspondencia ordinal: igual que en el caso de los muñecos y los bastones, pero con bolitas de plastilina en vez de los bastones.

Figura 3.10: Bolitas ordenadas. Recuperado de `https://www.pinterest.es/pin/493284965415563413/`

c) Reconstrucción de la correspondencia cardinal: el mismo caso que los muñecos y bastones, se disloca una de las series y se pide encontrar el bastón para un muñeco elegido arbitrariamente.

d) Noción de orden y cardinalidad: muestra que la "ordinación" y la "cardinación" son operaciones que se implican recíprocamente. Ordenar 10 bastones desde el más pequeño A hasta el más grande J e ir intercalando ótros 9 bastones $(a, b, ..., i)$ para crear una nueva serie $AaBbC...IiJ$.

e) Composición de las relaciones y relaciones numéricas:

   I. Coordinación de las relaciones inversas: recipiente U (ancho y bajo) y pasar la misma cantidad de líquido al recipiente L (estrecho y alto).

   II. Coordinación de las relaciones de equivalencia: Si $L = A$ y $A = G$ entonces se tiene la relación entre L y G: $L = G$.

   III. Composición aditiva o multiplicativa de orden numérico: $L + G = 2A$,

f) Desarrollo de la medida: se presentan dos o tres recipientes de formas distintas, llenos con la misma cantidad de líquido. La forma del recipiente impide una evaluación perceptiva directa.

A continuación se muestra un mapa conceptual en el cual se sintetiza la formación del número a partir de los esquemas de clasificación y seriación, los cuales se evidenciaron en los experimentos resumidos en los párrafos anteriores.

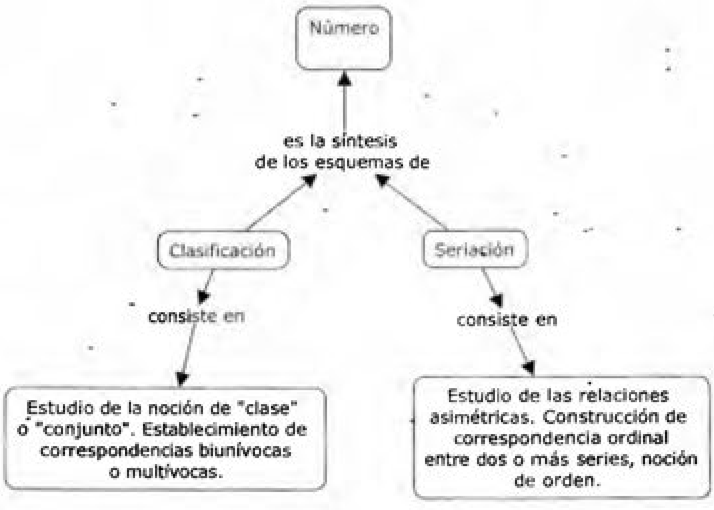


Figura 3.11: Construcción del número según Piaget. Elaboración propia.

El problema epistemológico del número

Para Piaget (1978), existe un mismo mecanismo operatorio que se desarrolla en función de su lógica interna del modo más continuo y mejor equilibrado, el cual, desde las acciones más elementales que permiten al niño enumerar pequeñas colecciones de objetos hasta las generalizaciones negativas, complejas y transfinitas del número, y que a pesar de su apariencia con frecuencia irregular resulta de las dificultades de la toma de conciencia.

La acción de enumerar no puede estar determinada solamente por los objetos, debido a que dicha acción los estructura en función de un esquema operatorio, que es asimilación de las cosas al doble acto de reunir y ordenar, y puesto que asimilar significa agregar a los objetos caracteres nuevos que no estaban incluidos anteriormente a la acción del sujeto. Por ejemplo, la reunión "elemental" $1 + 1 = 2$ añade a cada uno de los objetos contados como unidades la nueva propiedad de constituir un todo.

Existe una *fase intuitiva y preoperatoria* del pensamiento durante la cual es necesaria la experiencia para el descubrimiento y la verificación de las verdades aritméticas, y una *fase operatòria* a partir de la cual la deducción comienza a bastarse a sí misma. Pero a pesar de que la experiencia (física) sea psicológicamente indispensable para la construcción del número, no es prueba de que se extraiga el número a partir de los objetos, en la forma que sea, ya que una cosa es actuar empíricamente y otra abstraer una relación a partir de los objetos: la relación establecida entre los objetos puede haber sido agregada por la acción, aún cuando esta se inicie con una etapa de tanteo experimental. En otras palabras, el sujeto que actúa de modo empírico puede utilizar los objetos como simples soportes para la acción, pero en realidad experimentar consigo mismo, es decir, con la coordinación de sus propias acciones más que con los objetos sobre los que ellas se apoyan.

Aunque experimental en su fuente intuitiva, el número se añade a los objetos y en absoluto es extraído a partir de ellos. Se encuentra en su totalidad en el esquema de asimilación operatoria. No por esto deja de ser importante la acomodación. Hay equilibrio permanente entre la asimilación de los objetos al esquema operatorio y la acomodación de este esquema a objetos cualesquiera, pero no hay nada de la estructura definitiva del esquema considerado que haya sido "abstraído" del objeto. Para poder abstraer el número de las colecciones de objetos sería necesario poder clasificarlos y ordenarlos, que son acciones del sujeto ejercidas sobre estas colecciones: ahora bien, el esquema del número se reduce precisamente a estas solas acciones de clasificar y ordenar, simplemente agrupadas de forma distinta.

Con respecto a la experiencia interna del sujeto, tampoco puede obtenerse el número a partir de ella. Ni la seriación ni la clasificación ni el número están dados en la conciencia interna: son el resultado de la coordinación de las acciones sucesivas, es decir, de su agrupamiento, y estos agrupamientos se aplican tanto a los datos de la experiencia interna como a los de la experiencia externa, y no son más la resultante de las primeras que de las segundas, puesto que se trata de acciones que se ejercen sobre ellas y no sobre intuiciones primeras.

El número consiste exclusivamente en un sistema de acciones u operaciones que se ejercen sobre los objetos, pero no dependen de las propiedades particulares de estos objetos y la construcción del número puede proseguir indefinidamente más allá de los límites de la percepción e incluso más allá de la representación imaginada de las colecciones formadas por estos objetos; es decir, mucho más allá de las fronteras del objeto.

El uso de las distintas formas de infinito, indispensables para el matemático, no es sino el testimonio cotidiano de esta liberación de los entes numéricos respecto del objeto, puesto que el objeto de experiencia es necesariamente finito.

La construcción del infinito matemático según Piaget

Para Piaget (1978), el problema del infinito actual siempre se opuso a las interpretaciones realistas y operatorias del número. Las dificultades pueden ser evitadas recurriendo al dinamismo intelectual de las operaciones, las cuales son el único soporte de las diversas formas de infinito, pues sustituyen la realización actual por una virtualidad de un desenvolvimiento ilimitado.

Como ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$ se concluye pues lo propio de las operaciones intelectuales es el de prolongar operaciones reales iniciales con operaciones virtuales cuya validez es el resultado de su posible composición y únicamente de ella. Esta serie representa la paradoja de Zenón en cualquiera de sus variantes.

En cuanto a lo "infinitamente pequeño" no puede aislarse en forma actual salvo apoyándose en una creencia realista o extraoperatoria, obligada además a completar la realidad física, siempre finita, con la realidad de números ideales que susbsistirían de por sí. Por lo tanto, solo hay una manera de evitar las contradicciones hacia los cuales condujo el realismo de lo infinitamente pequeño: considerar con Leibniz, al infinito como la expresión misma del dinamismo de la construcción operatoria. Dicho problema apareció con el análisis de las funciones crecientes asintóticamente hacia infinito, o sea, en lo infinitamente grande y precisamente esto planteó la interrogante de si la escala de las funciones alcanza uno o varios infinitos actuales que trascenderían las operaciones mismas que permiten alcanzarlas o si solo se aplica a las operaciones como tales.

Con base en sus resultados, G. Cantor creó el cálculo del transfinito sobre la consideración de las relaciones de correspondencia entre conjuntos. La sucesión de números enteros es infinita, es imposible asignar en el interior mismo del conjunto un número infinito actual que consistiría en el último de la serie. En cambio, se puede asignar a esta sucesión un límite que por definición será exterior a la serie y a partir de la cual comenzará una nueva sucesión: es el primer ordinal infinito ω. Gracias a la repetición de este procedimiento se obtendrán los transfinitos $\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots, 2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, \ldots, 3\omega, \ldots, n\omega, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots$.

Dichos ordinales transfinitos constituyen así órdenes. Con respecto a los cardinales transfinitos, el primero es la clase de los conjuntos enumerables $\aleph_0$. Otro cardinal transfinito es $\aleph_1$ que corresponde al conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. El gran interés de esta realización del infinito, que trasciende sin cesar las operaciones constructivas para alcanzar una sucesión de infinitos actuales encajados unos en los otros, es culminar de hecho en un debilitamiento del carácter específicamente numérico de la construcción y marcar un retorno parcial a los componentes lógicos del número. En efecto, los cardinales transfinitos ya no cumplen la ley aritmética de iteración, sino a las reglas de tautología y absorción: $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ y $\aleph_0 \cdot \aleph_0=\aleph_0$. Esto se comprende de por sí pues estos números ya no son a la vez cardinales y ordinales como los números finitos, sino que la cardinación está disociada de la ordinación: el conjunto de todos los conjuntos enumerables es en verdad una clase lógica constituida por todas las subclases numerables, es decir, una clase cualitativa surgida de una simple reunión lógica de las subclases que tienen la propiedad común de ser enumerables.

Por ejemplo, la función $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n)=2n$ es una correspondencia que relaciona cada elemento individual de las subclases componentes con un elemento determinado de una de las otras subclases, es una correspondencia reflexiva, es decir que permite igualar el todo a la parte. Ahora bien, esta correspondencia no culmina en una equivalencia aditiva entre el todo y la parte, sino que es una equivalencia multiplicativa, comparable a la de las clases multiplicadas entre sí con el esquema lógico de un cuadro de doble entrada.

En cuanto a los ordinales transfinitos, solo son *tipos de orden*, es decir, sistemas multiplicativos de relaciones asimétricas, así como los cardinales trasfinitos son clases: de ahí que a un mismo cardinal transfinito corresponda una infinidad de ordinales, ya que pueden ordenarse de infinitas maneras los elementos de una misma clase infinita.

En síntesis: los números transfinitos de Cantor disocian entre sí las dos estructuras fundamentales de la clase lógica y la relación asimétrica, que se fusionan en un todo en la construcción de los números enteros finitos. Por ende, si la serie de los ordinales finitos corresponde biunívocamente a la de los cardinales finitos, siendo todo número entero necesariamente cardinal y ordinal en el ámbito de lo finito, dicha correspondencia termina en el dominio de lo transfinito.

Figura 3.12: Los esquemas de clasificación y seriación con respecto a los números. Elaboración propia.

Como esta disociación transfinita, entre los dos aspectos ordinal y cardinal del número entero, culmina en un retorno a los esquemas operatorios separados de la relación asimétrica y la clase lógica, y constituye la mejor confirmación de la interpretación operatoria respecto de la génesis del número entero finito.

En la página siguiente se muestra un esquema en el que se resume lo antes expuesto de los números finitos y transfinitos.

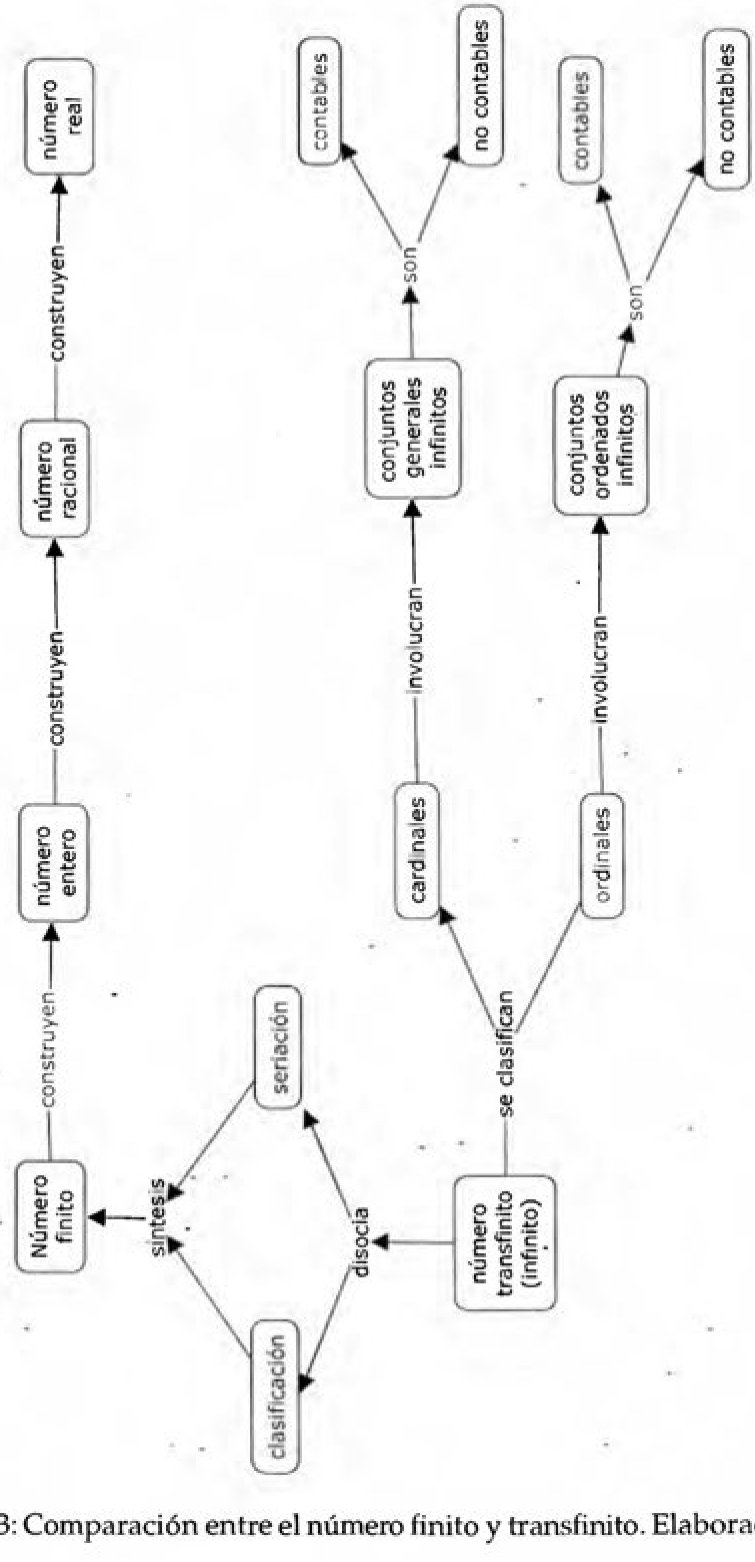


Figura 3.13: Comparación entre el número finito y transfinito. Elaboración propia.

Capítulo 4

Metodología

4.1. Tipo de investigación

Según Hernández et al (2008, p. 22) "la investigación es un conjunto de procesos sistemáticos y empíricos que se aplican al estudio de un fenómeno". El enfoque de esta investigación es de corte cualitativo, puesto que se examinará el mundo social, concretamente con profesores de educación secundaria. En este enfoque no se efectuó una medición numérica y la recolección de los datos consistió en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes. Siguiendo a Hernández y otros (2008, p. 28), "... la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas". En la investigación se busca profundizar acerca del infinito matemático, cómo se construye y se enseña.

4.2. Descripción y sustento del método utilizado

El método utilizado en la investigación corresponde al fenomenológico, puesto que se trabajó con los insumos que los docentes proporcionaron a través de las experiencias que han tenido con la construcción del concepto de infinito.

Según Gurdián (2007), "el método fenomenológico respeta, por completo, el relato que hace la persona de sus propias vivencias. Se centra en el estudio de las realidades vividas o vivencias, generalmente, poco comunicables."(p.156).

El carácter descriptivo y reflexivo de este método permite comprender las vivencias de los actores inmersos en dichas realidades. Al respecto, Gurdián (2007) menciona que el método fenomenológico siempre empieza con la experiencia concreta de las personas. Para esta investigación, se parte de la experiencia concreta en torno al infinito, experiencias que han sido consideradas desde sus vivencias en la infancia, así como las asociadas a la formación universitaria y las que han sido parte del ejercicio de la profesión.

La fenomenología surgió dentro del ámbito de la Filosofía y su fundador fue el matemático y astrónomo Edmund Husserl. Aguirre y Jaramillo (2002, p.55) exponen que la pregunta básica de este método (¿Cómo se sabe *X*?) no tiene como objeto algo del mundo objetivo, sino que el fenomenólogo se dirige a la estructura (o condiciones) de la experiencia o vivencia de X. Entonces, la fenomenología se dirige a la conciencia del sujeto y su meta es la descripción de la corriente de vivencias que se dan en la conciencia.

Considerando la anterior notación, el *X* de esta investigación es el infinito. La experiencia de aprendizaje de los docentes de este X que se ha descrito y que está presente en los apéndices (E y F) aporta, según Gurdián (2007), la intersubjetividad y la intuición en la comprensión de los fenómenos socioeducativos, además que capta el sentido de los fenómenos y la intención de las actividades socioeducativas.

4.2.1. Supuestos teóricos

Por la naturaleza del enfoque fenomenológico no existen hipótesis iniciales de trabajo, sino que los supuestos van apareciendo sobre la marcha. El propósito no es generalizar conocimientos, probar hipótesis, elaborar leyes, establecer relaciones entre variables, etc. Su contribución consiste en la profundización de los significados esenciales de la experiencia pedagógica. A nivel formal, el investigador llega a elaborar "una descripción (textual) estimulante y evocativa de las acciones, conductas, intenciones y experiencias humanas tal como las conocemos en el mundo de la vida"(Van Manen citado por Ayala, 2008, p.214).

Durante la investigación bibliográfica surgió el primer supuesto: la epistemología genética explica la construcción del infinito matemático. El segundo supuesto apareció después de que se hicieran las entrevistas a los docentes: las nociones intuitivas del infinito ajeno al ámbito matemático que dan los docentes a partir de sus distintas experiencias no son suficientes para la enseñanza de nociones asociadas a la construcción del concepto de infinito, particularmente en Matemática. El tercer supuesto sobre la marcha fue: las investigaciones desde la educación matemática sobre el concepto de infinito matemático y las dificultades en su didáctica pueden relacionarse con la explicación piagetiana y las experiencias de los docentes entrevistados.

4.3. Técnicas utilizadas

.Las técnicas de recolección de la información utilizadas fueron de corte cualitativo y consideraron las siguientes: entrevistas en profundidad, grupos focales y una conversación con expertos.

4.3.1. Entrevistas en profundidad

En este estudio cualitativo se empleó el uso de las entrevistas en profundidad, puesto que se buscaba la recopilación de las experiencias de vida, ideas o percepciones del docente en el momento inmediato de la entrevista.

Se confeccionó una guía de la entrevista en profundidad de tal modo que presentara coherencia teórica, puesto que Gurdián (2007) comenta que debe ser fiel a los objetivos teóricos que se estén buscando y que sea el mecanismo que permita avalar la investigación a partir de la información suficiente que se haya conseguido.

La guía presenta un apartado de datos personales, y considerando los docentes que se entrevistaron, la información obtenida se resume en el cuadro 4.1. Además, la guía se estructuró en cinco bloques: personal-vivencial, formación profesional, aspectos curriculares, aspectos didácticos y constructivismo piagetiano.

Docente	Edad	Años MEP	Universidad de formación	Institución actual
ANAV	33	10	UCR	Instituto de Alajuela
AV	46	16	UCR, UAM	CTP Don Bosco
DAM	38	9	UCR, UNED	Liceo Julio Fonseca
HUM	45	20	UCR, UNED, UAM	Liceo Nocturno de Desamparados
KEN	34	12	UCR, UAM	CTP La Carpio
MAG	34	12	UCR, UAM, UISIL	CTP Siquirres
REQ	47	23	UNA, UAM, UNED	Liceo Julio Fonseca
SR	40	18	UNA, UISIL, UC	CTP Sabanilla
SUV	43	19	UCR	Liceo Ricardo Fernández

Cuadro 4.1: Participantes de las entrevistas en profundidad.

Los participantes seleccionados fueron nueve docentes de educación secundaria de instituciones públicas, que tuviesen al menos siete años de experiencia. Actualmente, se implementan los programas de estudio del 2012 y, los criterios de selección comentados surgen así para identificar experiencias, tanto antes de utilizar el anterior programa como el vigente.

La decisión de solo elegir nueve docentes se determinó con base en la saturación teórica. Martínez-Salgado (2012) recopiló algunas pautas importantes a seguir para determinar cuándo se ha alcanzado una recolección de datos que cumplan el principio de saturación. Al respecto,

> Se entiende por saturación el punto en el cual se ha escuchado ya una cierta diversidad de ideas y con cada entrevista u observación adicional no aparecen ya otros elementos. Mientras sigan apareciendo nuevos datos o nuevas ideas, la búsqueda no debe detenerse. (Martínez-Salgado, 2012, p. 617).

Inicialmente se entrevistó a cuatro docentes de diferentes instituciones, pero se concluyó que no eran suficientes para alcanzar el principio de saturación teórica, porque en el bloque de personal-vivencial y en el de aspectos didácticos, se habían obtenido respuestas diferentes y se reflexionó que era posible obtener mayor variedad.

Se hizo revisión de aspectos asociados con la muestra que se debía considerar. En la presentación sobre las técnicas de muestreo en ciencias sociales y del comportamiento, Teddlie y Yu (2007) organizan el cúmulo de alternativas disponibles, de acuerdo con los propósitos que se establezcan, en cuatro subconjuntos. En el tercero de estos se ubican a los diseños secuenciales, en los que "prevalece el principio de selección gradual, ya sea porque el propósito del estudio es la generación de teoría, o porque la integración de la muestra se va decidiendo sobre la marcha, conforme van emergiendo los conceptos al ir recabando la información"(citado en Martínez-Salgado, 2012, p. 616).

A partir de la anterior cita, conforme se realizaba otra entrevista, se analizaba si se iba alcanzando la saturación o todavía se debían realizar más entrevistas. Después de entrevistar a otros cinco docentes, y al leer las transcripciones de las entrevistas, se estableció que se alcanzó la saturación teórica en los cuatro primeros bloques. Las preguntas para el bloque 5 están condicionadas al conocimiento y no tanto a las vivencias, por lo que se buscan estas respuestas en las fuentes bibliográficas.

A cada profesor participante se le realizó una entrevista en profundidad y con un duración mínima de 30 minutos.

4.3.2. Grupos focales

El grupo focal es una modalidad de los grupos de discusión que se caracteriza por centralizar su atención e interés en un tema específico de la investigación, es decir, es una temática que es propia del tema central de estudio. Es de "discusión" porque realiza su trabajo de búsqueda mediante la interacción discursiva y la comparación o contraste de las opiniones de las y los miembros del grupo (Gurdián, 2007, p. 214). En pocas palabras, "el grupo focal es una técnica estimulante y provocativa, pues de hecho los seres humanos somos por instinto sociales, salvo algunas excepciones, además el sentirnos acuerpados-apoyados por un grupo facilita nuestra expresividad espontánea."(Gurdián, 2007, p. 215).

Después del análisis de las entrevistas, se clasificó la información obtenida en seis tipos de experiencias, las cuales son: personales, definición de infinito, universitarias, curriculares, didácticas y constructivismo (ver apéndice F). Esta clasificación guió el proceso para decidir en qué se iba a centralizar la aplicación de los grupos focales para cada uno de los tipos de experiencias. A los participantes de los grupos focales se les envió el resumen de las experiencias al menos con una semana de anticipación.

Cabe destacar que esta técnica dentro de la investigación cualitativa posee una ventaja en relación con otras técnicas que se puedan aplicar. Huerta (2005) expresa que la aplicación de los grupos focales "tiene mayor credibilidad que otras técnicas, debido a que la estrategia y los hallazgos son fácilmente entendibles por los participantes y por aquellos que van a utilizar la información" (p. 3). Se planteó el estudio con dos grupos focales: uno con dos profesores que participaron en la entrevista en profundidad, y el otro grupo con tres profesores que no fueron partícipes de las entrevistas, pero que aportan nuevos elementos para el análisis. Los docentes fueron elegidos a partir de la disponibilidad que tenían para participar en este estudio y se llevaron a cabo en las instalaciones de la Academia AMP y en la sala de tesis de la biblioteca Carlos Monge de la Universidad de Costa Rica. En los grupos focales se discutieron nociones y vivencias que poseen los docentes sobre la construcción del infinito matemático, así como las estrategias didácticas que han empleado para su enseñanza en el aula. También se aprovechó el espacio para compartir los aprendizajes de los investigadores con respecto a la teoría de Piaget y cómo pueden contribuir en la comprensión de lo que ha estado sucediendo con la enseñanza de temas que están asociados a la noción del concepto de infinito.

4.3.3. Conversación con expertos

La conversación con expertos es una entrevista personal de carácter no estructurado, en el que las preguntas del entrevistador surgen espontáneamente, pero a partir de cierta temática de interés, la cual sirve de guía para orientar la conversación. Se entrevistó a dos matemáticos de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica: Dra. Samaria Montenegro Guzmán, cuya especialidad es Teoría de Modelos y al Dr. Rafael Zamora Calero, especialista en Teoría Descriptiva de Conjuntos.

Esta conversación surgió porque los investigadores determinaron que los apartados en los Programas del MEP (años 2005 y 2012) con respecto a la manera de trabajar intuitivamente el infinito, deben contraponerse con la opinión de los expertos. Los textos son: "El concepto de infinito no se introduce formalmente en este nivel educativo, sin embargo para la construcción y el estudio de gráficas se puede expresar de manera intuitiva su sentido." (MEP, 2012, p. 414). "La presentación de los conceptos de "denso", "continuo", "infinito", "completo" de los conjuntos numéricos, solamente se introducirán en forma intuitiva. Se debe basar en el concepto intuitivo más que en la definición. Por ello, su evaluación se realizará en el proceso y con base en ejemplos." (MEP, 2005, p. 48).

La conversación se generó después de leerles a ellos esos dos apartados y que nos explicaran cómo interpretarlo desde la matemática. Cabe destacar que estos expertos se han interesado por difundir nociones acerca del infinito en varios espacios de la universidad y por eso se consideró que podían brindar recomendaciones para la enseñanza del concepto.

Por un lado, el doctor Zamora ha expuesto acerca del infinito de manera histórica y matemática dada su formación en su campo. Se destaca particularmente la charla "Construyendo el infinito", durante el II semestre del año 2018, cuyo público meta fue el estudiante que está en formación para ser docente de Matemática. Por otra parte, la doctora Montenegro ha impartido el curso introductorio de la carrera de Matemática (MA-0150), en el que se formalizan conceptos asociados a la teoría de conjuntos y sus cardinalidades.

El siguiente diagrama representa las fases de esta investigación previo a la triangulación de fuentes de información:

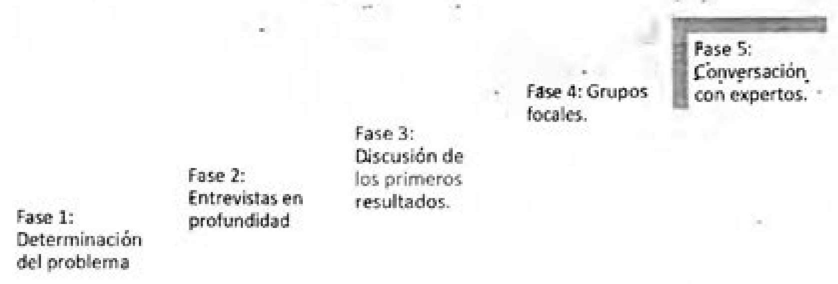


Figura 4.1: Fases de la investigación previa a la triangulación.

4.3.4. Triangulación

La triangulación según Donolo (2009) es "un procedimiento de control implemementado para garantizar la confiabilidad entre los resultados de cualquier investigación"(citado en Villas y otros, 2013, p. 6). Esta estrategia metodológica está presente considerando que Gurdián (2007) afirma que es un procedimiento imprescindible y su uso requiere habilidad por parte de los investigadores para garantizar que el contraste de las diferentes percepciones conduce a interpretaciones consistentes y válidas.

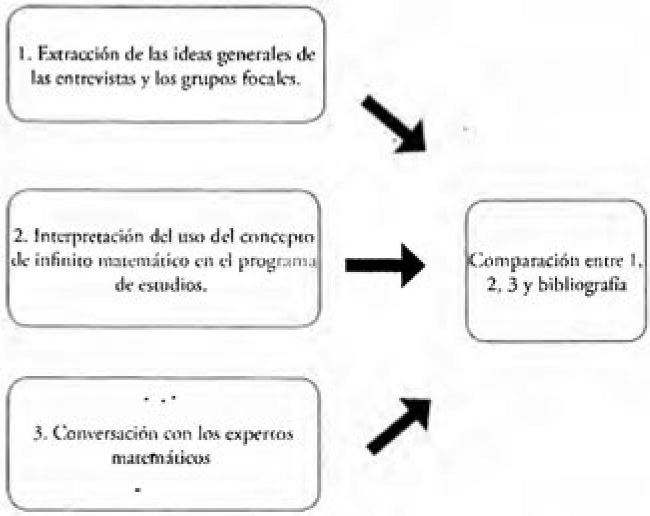


Figura 4.2: Esquema de los pasos del proceso de triangulación.

La implementación del método fenomenológico no solo se reflexiona en la etapa inicial del proceso, pues como mencionan Aguirre y Jaramillo (2012, p.56), el "encuentro intersubjetivo permite no solo comentar lo hallado, sino clarificar o, incluso, corregir, las estructuras de evidencia que creía definitivas". De este modo, el uso de la triangulación permite reconsiderar lo que se trabajó previo a la redacción de las conclusiones y para revisar si los objetivos propuestos se han alcanzado.

El procedimiento de la triangulación ha sido establecido de diferentes maneras para que se ajuste a las necesidades de cada investigación. Denzin (1970) comenta que existen 5 tipos de triangulación: de datos, de investigadores, de métodos, de teorías y, por último, la triangulación múltiple. Esta última consiste en la utilización simultánea de por lo menos dos de los procedimientos o tipos mencionados.

La triangulación múltiple es el procedimiento seleccionado para esta investigación, donde se analiza lo descrito en la Figura 4.2. Los insumos de las entrevistas, grupos focales, conversación con expertos y lo extraído del programa de estudios, se compara entre estos, dependiendo del apartado de análisis. También, se consideran las fuentes consultadas en el marco teórico y, por último, la experiencia de los investigadores, considerando que es una triangulación de múltiples fuentes, así como de la teoría de la Epistemología Genética encamina a la comprensión de la construcción del concepto de infinito.

4.3.5. Procedimiento para analizar los datos

Se implementó el software Atlas.ti®, el cual contribuye a la hora de recolectar y analizar los datos. Según Hernández et al (2008, p.669), este software sirve para segmentar datos en unidades de significado; codificar datos y construir teoría. El investigador agrega los datos o documentos primarios y con apoyo del programa los codifica de acuerdo con el esquema que se haya diseñado.

Se importaron las entrevistas en profundidad para luego crear las experiencias las cuales responden a las siguiente clasificación: personales, universitarias, didácticas, curriculares, definición infinito y constructivismo. Para analizar cómo el docente ha construído el concepto de infinito matemático, se recurrió a indagar cómo fueron sus experiencias desde la niñez. Luego, considerando que estudió para ejercer el cargo de docente en matemática, se recabó la información de las vivencias asociadas a su formación inicial con los temas relacionados con el concepto de infinito.

Continúa la recopilación de información con las experiencias vividas al ejercer la profesión. Se hace énfasis en los aspectos curriculares y didácticos de lo que conlleva ser docente de Matemática en la educación secundaria costarricense.

Además, se analiza cómo el docente tiene concebida la noción de infinito y qué conoce con respecto al constructivismo. De este modo, así fue como los investigadores establecieron la línea de trabajo previo a la técnica de entrevista en profundidad.

Para los grupos focales se importaron los archivos de audio y se transcribieron utilizando el programa.

Después, para la triangulación de la información recopilada, se determinaron cuatro categorías de análisis que fueron una guía para los resultados que se exponen en el siguiente capítulo. Las categorías surgen como consecuencia del proceso previo de haber identificado seis experiencias, sin embargo, las que estaban relacionadas con la definición del infinito, personales y universitarias, se agruparon en una sola denominada: construcción del infinito matemático.

Por último, se redactaron las consideraciones finales, las limitaciones y las recomendaciones para futuros investigadores.

Para la codificación del análisis de resultados, se especifica lo siguiente:

	Codificación
Entrevistas en profundidad	EP
Grupos focales	GF
Conversación con expertos	CE

Cuadro 4.2: Codificación.

Capítulo 5

Análisis de resultados

El análisis de datos se organiza de acuerdo con los objetivos que guiaron la investigación. Se exponen cuatro apartados con la descripción y análisis de las categorias que se establecieron y que se muestran a continuación.

1. Construcción del infinito matemático.

2. Aspectos curriculares en la enseñanza del infinito.

3. Aspectos didácticos del infinito matemático.

4. Acercamiento al constructivismo piagetiano.

Además, en un quinto apartado se elaboró un análisis que considera la reflexión con las diferentes fuentes, así como el aporte de los investigadores.

5.1. Construcción del infinito matemático

Tal y como se ha escrito acerca de la historia del infinito en este estudio (ver sección 3.2.1), esta noción se ha formalizado desde el siglo XIX y, la revisión de los textos de carácter formal demanda un conocimiento matemático avanzado. De este modo, a través de las investigaciones y las entrevistas realizadas, se identifica que la alternativa de los docentes entrevistados consiste en una aproximación a la noción del infinito a través de fuentes, no necesariamente de índole matemáticas.

> "Generalmente leo mucho, es mi segundo hobby, yo no entendía muy bien el infinito, todo aquello que no pueda sentir u oler... El Libro de Arena de Borges trata de explicar de un modo más tangible lo que sería el infinito, a partir de ese libro es como entendí bien la idea." (EP-DAM)

La iniciativa de ese docente o de otros surge a partir de considerar que la noción del infinito es importante, ya sea para la comprensión del mundo en el que vivimos o para un fin propio dentro de la matemática. Un par de citas que muestra dicha importancia son las siguientes:

> "Es muy importante conocer la noción de infinito, vivimos en un mundo donde se puede entender claramente a qué se refiere y ver dónde se aplica, y el hecho de que existen infinitos más grandes que otros infinitos nos ayudan a trabajar los números reales." (EP-ANAV)

> "Para mí es importante porque me revela la idea de que no hay algo que nos detenga." (EP-HUM)

Las citas previas revelan que el infinito es útil para comprender conceptos matemáticos, particularmente el de conjuntos infinitos. En cambio, otra docente entrevistada no considera que se necesite dedicar tiempo para ampliar la noción del infinito, inclusive desde su ámbito profesional.

> "Pues, la verdad es que el concepto de infinito no ha sido como algo que ha ocupado mi reflexión, o muchas horas de reflexión." (EP-AV)

Se comparan las posturas de los docentes, que participaron en este estudio, desde la perspectiva histórica con respecto al infinito: unos exaltaban la necesidad de profundizar en la noción del infinito (Arquímedes, Bolzano, Cantor) y otros afirmaban que era irrelevante dedicar tiempo en esa noción (Aristóteles, Gauss, Poincaré).

Por tanto, como parte de las aproximaciones a la noción, se interpreta que los participantes indicaron que el infinito es inalcanzable, es una cota de procesos humanos, algo que no tiene fin, que es indefinible, inefable.

> "Para mí el infinito se refiere a todo aquello que sé que existe, pero está muy lejos de ser alcanzado. Esto lo aplico en la perfección humana, como, por ejemplo, la cual es muy difícil de ser alcanzada. Por otro lado, concentrar el conocimiento en un solo sitio, es algo muy difícil de alcanzar. La idea misma del tiempo, lo que se ha recorrido y lo que falta por recorrer. El infinito es la idea misma de seguir adelante, de que no hay barrera que se coloque, que haga que las cosas se detengan y llegue sólo hasta allí. En lo que recuerdo se refiere a algo vasto o extenso, que no tiene límite. Es algo para lo que no hay un final." (EP-HUM)

> "¡Wow, eso sí que es difícil de decir, es bien difícil decir qué es el infinito! Yo le podría decir una discusión acerca de qué es el amor, podría tardar horas, semanas, mañanas y tardes definiendo el amor desde el punto de vista poético, filosófico, antropológico y al final si no experimentas el amor, si no tienes amor, entonces de qué sirve hablar tanto del amor." (GF1-J)

Uno de los docentes en el grupo focal expresó que, desde el ámbito matemático, es más difícil explicar qué es el infinito.

> "En Matemática es bastante difícil decir qué es el infinito, que podría decir una correspondencia, etc, etc crear conjuntos con cardinalidades, y hablar de números transfinitos, y hablar que la cardinalidad

> del conjunto mayor es mayor que las cardinalidades de sus subconjuntos y empezar a construir una teoría de infinito... Pero a lo real, el infinito parece que es como una quimera, como una idea que se nos escapa, como una aproximación que nosotros hacemos, tratando de buscar siempre en medio de nuestra finitud, alcanzar aquello que no tiene fin." (GF1-J)

La definición formal del concepto de infinito matemático, históricamente se dio en el siglo XIX, y como menciona Piaget (1978), la dificultad de esta empresa radicó en la toma de conciencia de las operaciones que lleva a cabo el sujeto. La formalización y artimetización del infinito encontraron resistencia de matemáticos que seguían apegados al infinito potencial en cierto aspecto, tal como cita Garbin (2005): "si observamos su historia, y hacemos presente nuestras intuiciones, podemos ver que estas son similares a aquellas experimentadas por los matemáticos en el desarrollo del concepto. " (Garbin, 2005, pp. 173)

Desde los primeros años de formación escolar, Jato (2012) menciona que el infinito comienza a formar parte de nuestras estructuras mentales, ya sea asociado a procesos cíclicos tal y como se da en el cambio del día y la noche, a procesos de conteo o a través de aspectos asociados a qué tan lejos están las estrellas. Incluso, es parte del lenguaje cotidiano en expresiones tales como: "tener una paciencia infinita, un espacio infinito...". Es decir, cada persona tiene su historia, y una en la que el infinito no puede faltar.

Villabona y Roa (2016) hace referencia a la transición de la historia alusiva al infinito y la percepción de lo que sucede en el entorno. Al respecto:

> Históricamente, su comprensión ha permitido el desarrollo de técnicas y teorías trascendentales en la evolución de la matemática. Sin embargo, nuestra naturaleza finita genera fuertes concepciones sobre el infinito asociadas generalmente con lo potencial, aquello que se repite

> sin fin o que no es posible percibir con nuestros sentidos (la inmensidad del mar, el número de estrellas en el firmamento o el número de granos de arena en la playa. (Villabona y Roa, 2016, p.120).

Parte de las experiencias que mencionan los docentes estuvieron relacionadas con el entorno, con producciones audiovisuales o con el juego con el fin de crear una estrategia para poder ganar:

> "El pensar en las estrellas, los granos de arena en la playa, un video de una estrella dentro de otra y otra y otra. Me ayudó el video del pato Donald, donde el locutor dice que imagine un lápiz con una punta muy fina, que puede continuar haciendo estrellas dentro de otra." (EP-ANAV)

> "Recuerdo que de pequeña solía jugar con una amiga, a ver cuál de las dos lograba decir el número más grande, pero teníamos la regla de que ambas teníamos que mencionar en algún momento números con unidades, decenas, centenas, y así sucesivamente, hasta que una de las dos se cansaba y decía que el mayor era el infinito. Hasta ahí llegaba el juego porque no había nada más después del infinito." (EP-KEN)

Por otra parte, las experiencias de la escuela o el colegio son asociadas a temas afines a las Ciencias o a la Computación. Los docentes entrevistados expresaron que les cuesta recordar qué momentos concretos tuvieron con respecto a la noción de infinito:

> "En primaria no recuerdo exactamente, tal vez se hablaba de infinito en la idea de la cantidad de números que se podían conocer, o bien hasta donde se podía mirar al campo. En secundaria tenía más relación con un asunto aritmético, la cantidad de valores que se podía manejar y los que ya sólo nos quedaba imaginarnos, como en el caso

> de los números reales, su relación para indicar intervalos. Gráfica y algebraicamente el concepto de función. En cómputo los ciclos recursivos en un programa, que si no se le ponían una condicionante, se volvería un ciclo sin fin. El cálculo de valores irracionales, los cuales su expansión decimal no se detiene." (EP-HUM)

> "En primaria un poco la mención fue más que nada en Ciencias (no me acuerdo en qué año) que el profesor que teníamos se emocionaba todo y comenzó a hablar de la tierra, de las distancias y que habían otros planetas, y que la expansión como era infinita..." (EP-SR)

Una de las docentes que participó en el estudio expresó que la transición de secundaria a universidad permitió descubrir que hay un más allá y, que las áreas de estudio en la carrera tienen un componente especial con respecto al ínfinito.

> "Fue como abrir mundos diferentes. Cuando hablamos de $\mathbb{N}$, inclusive cuando empezamos a hablar de sucesiones es como encontrar otro lenguaje, y no solamente eso, sino que uno se da cuenta que el Álgebra encierra lo que es el ínfinito porque cuando usted habla de variables que pueden representar cualquier número, usted puede poner cualquier número. En sucesiones, que es en los primeros cursos... En los primeros cursos fue para mí como enterarme de que la Matemática no es solo un asunto de que a mí me gustara porque era buena, sino porque había algo más en ella que tenía que explorar." (EP-SUV)

Con respecto a la formación en la universidad, los docentes participantes afirman que no tuvieron un acercamiento con la noción de infinito, que nunca hubo una introducción por parte de los profesores e inclusive que ellos asumían que ya tenían el concepto, cuando esa no era la realidad del caso. Otros mencionan que, si ellos tuvieron una experiencia con respecto al infinito en la universidad, no fue significativa porque ni siquiera la recuerdan:

> "En la UCR no nos cuentan historia acerca del infinito, viene de un ejercicio, que podría pasar en cierta sucesión de funciones, intervalos reales, convergencia de funciones. Asumen que uno viene siendo formado desde niño y se asume que se tiene el concepto." (EP-DAM)

> "Legalmente no recuerdo. No podría precisar mi experiencia. Lo que recuerdo tal vez sería que no hubo un abordaje sobre el infinito como tal, sino que su manejo se daba por sentado, con lo que se tenía de la educación secundaria. Si se habló acerca de ese concepto, sería como parte de un resultado o bien sobre la base de algún otro concepto matemático. Pero, en síntesis, no preciso claramente mi experiencia con respecto al infinito." (EP-HUM)

> "Pues debe no haber sido muy significativa porque no recuerdo, realmente trato de hacer memoria como que alguna vez alguien, haber escuchado a alguien hablar o definir al infinito, o sea, siento que es una idea que se usa, pero como una idea, pero no como un concepto que defino." (EP-AV)

Como parte de las experiencias previas a la universidad, lo expresado por la Dra. Montenegro coincide con lo sucedido por los docentes entrevistados: en la secundaria se abordó la noción del concepto de manera intuitiva, pero no bastaba para comprender qué es el infinito.

> "Recordando cuando era estudiante, me sorprendió que no tenía muy claro qué era el infinito cuando ingresé a la universidad. Se usaba la palabra infinito de manera intuitiva." (CE-S)

Tanto en las fuentes consultadas como con las opiniones de las personas que participaron en este estudio, se resaltà la vía de la intuición para la construcción del concepto de infinito, a través de diferentes experiencias. Estas experiencias constituyen un factor fundamental en la formación de las intuiciones. Al respecto, Fischbein (1987) indica que "La fuente básica del conocimiento intuitivo es la experiencia acumulada por una persona en condiciones relativamente constantes"(citado en López, p.34). López (s.f.) reconoce que hay tres aspectos principales asociados a la intuición y la experiencia: los elementos comunes de la experiencia que tenga cada persona, lo que esté vinculado a la cultura y al ambiente geográfico (que también se denomina intuiciones básicas) y las experiencias particulares propias de la vida de cada individuo (también llamado intuiciones individuales o locales).

En el proceso de construcción del infinito en el ámbito escolar, se presentó el camino de la intuición. Esta vía continúa analizándose en los siguientes apartados asociados a lo curricular y didáctico del tema de esta investigación.

Los docentes que participaron en este trabajo mencionaron que el concepto de infinito tiene sus orígenes en las experiencias de la infancia y la adolescencia, las cuales surgen del medio natural y de la admiración del cielo y del océano, de la inmensidad abrumadora del espacio y de la percepción que se tiene del tiempo, el cual no pareciera tener un inicio ni un final.

El encuentro con los números naturales y la experiencia escolar los llevaron a realizar conteos en los cuales siempre existía un número más grande que un número ya dado. Contar los granos de arena, por ejemplo, o luego realizar conteos verbalizados, los llevaron a considerar que no hay un límite ulterior en el acto mismo de contar. También las películas o la literatura les mostraron metáforas del infinito, al igual que las clases de ciencias, en las que se les dijo que el universo no tiene límites, que las estrellas son incontables.

En las clases de matemáticas de primaria trabajaron con números grandes y en secundaria conocieron el conjunto de los números enteros, racionales, irracionales y reales. Se presentó que la recta numérica podía completarse con números reales, que podrían realizar algoritmos para calcular dígitos de números tanto racionales como irracionales, y observar la periodicidad o no-periodicidad de las expansiones decimales.

Con respecto a la notación que se aprendió en el aula, los docentes entrevistados dijeron que se usó el símbolo del infinito, ∞, y para denotar que en la recta no hay inicio o fin colocaban $-\infty$ o $+\infty$, respectivamente. Posteriormente, se estudió el tema de los intervalos reales y sus distintas clasificaciones, y entre ellos los intervalos no acotados que tenían como "límite"superior $+\infty$ o "inferior" $-\infty$... En el tema de las funciones reales de variable real, el uso de los intervalos se incrementó con el análisis del dominio, codominio y ámbito. Cuando recordaron en la entrevista la representación gráfica de funciones no acotadas o que tuvieran asíntotas de cualquier tipo, provocó que mencionaran nuevamente al infinito.

En la universidad fueron iniciados en demostraciones que a veces no comprendían; en cálculo operaron con el infinito y calcularon límites, derivadas e integrales. Los profesores universitarios asumieron que los docentes entrevistados tenían una concepción clara del infinito, les relataban paradojas, les dieron teoría de conjuntos, resultados con números reales, análisis y topología, pero mencionaron que no les contaron la historia del infinito. Las clases universitarias fueron magistrales y el infinito fue solo un símbolo que aparecía en todos los cursos de matemáticas, pero sin explicación de su presencia en ellos, según lo expresado por los docentes entrevistados.

Al momento de hablar formalmente del infinito, los docentes declaran que no saben definirlo, que pueden dar ciertas características de dicha noción, que es una idea abstracta y que incluso es intangible y que por eso no existe en la realidad. Lo asocian con tamaños de conjuntos, con límites o asíntotas; hablan de infinitos más grandes que otros o de lo "muy grande" y lo "muy pequeño". El infinito para ellos es vasto y extenso y los referentes culturales tales como Dios, el amor o las películas les ayudaron a formar dicho concepto.

5.2. Aspectos curriculares en la enseñanza del infinito

El concepto de infinito, en el programa de estudios del MEP (2012), aparece ligado explícitamente a los siguientes temas:

- *Expansión decimal infinita:* En las páginas 196 y 197, hablando de las divisiones de quinto año escolar y las fracciones en su forma decimal en sexto año, se recomienda no utilizar divisiones que involucren expansiones decimales periódicas infinitas, sino solo finitas, pues menciona que esas se trabajarán hasta el octavo año, lo cual precisamente se menciona en la página 286 con respecto a la importancia de la noción de infinitud en la representación decimal de los números reales: los números racionales tienen expansión decimal periódica infinita y los números irracionales tienen expansión decimal aperiódica infinita. En la en la habilidad específica 2 de la página 290 se pide identificar números con expansión decimal infinita no periódica para así contrastarlos con los números racionales: También se pide construir dichos números a partir de patrones que los generen, por ejemplo: $0,101001000100001...$

- *Infinitas soluciones de ecuaciones:* Ya sea una ecuación lineal, cuadrática o un sistema de ecuaciones lineales. En la página 336, en octavo año, las habilidades consisten en resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita y se menciona que debe contemplarse los casos en que la ecuación tenga solución vacía o que tenga infinitas soluciones, y no solo quedarse con ejemplos en donde la solución sea única. Para el noveno año, en la página 349 se refiere a ecuaciones cuadráticas y se propone que deben incluirse ecuaciones que tengan solución vacía o infinitas soluciones. En el décimo año, en la página 412, se sugiere trabajar con sistemas de ecuaciones lineales con las tres posibilidades de conjunto solución: vacío (rectas paralelas), un punto (solución única) o una recta (infinitas soluciones).

- *Espacio muestral:* En noveno año, en la página 365 se menciona la habilidad de utilizar el concepto de frecuencia relativa como una aproximación al concepto de probabilidad y que para ello es importante conocer el espacio muestral, lo cual no siempre puede ocurrir si dicho espacio es muy grande, indefinido o infinito.

- *Subconjuntos de números reales:* En décimo año, en la página 406, las habilidades están relacionadas con operaciones de conjuntos, y más puntualmente, subconjuntos de números reales, y sean de tamaño finito o infinito. Entre los subconjuntos infinitos se mencionan $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ y sus respectivos subconjuntos positivos y negativos. En las páginas 418 y 419 se hace la definición de cada conjunto a estudiar, por ejemplo, el conjunto de los números decimales, el cual está definido así: $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. También se hace la definición de los intervalos reales con sus notaciones de intervalo y por comprensión, así como su representación gráfica. Los intervalos del tipo $(a, +\infty[$ o $]-\infty, a)$ son los semiabiertos infinitos.

- *Gráficas de funciones y dominios:* En undécimo año, en la página 423, se menciona el conjunto $]-\infty, +\infty[$ como dominio de la función exponencial $f(x) = a^x$. Además se utiliza el término "tiende a infinito", referido a la asíntota horizontal $l : y = 0$ y la gráfica de la función exponencial, ya sea para tipo creciente o decreciente. Cuando f es creciente, si x tiende a $-\infty$ entonces $f(x)$ tiende a cero; si f es decreciente, cuando x tiende a $+\infty$ entonces $f(x)$ tiende a cero. De una manera similar, en la página 424 se describe la función $f(x) = \log_a x$, en donde la asíntota vertical a la gráfica es $l : x = 0$, el dominio es el intervalo $]0, +\infty[$ y el ámbito es $\mathbb{R}$.

- *Notas históricas:* En la página 66 se menciona que históricamente es posible identificar obstáculos o dificultades epistemológicas que podrían tener paralelos en los aprendizajes que incolucran al manejo del infinito. En la página 403 se menciona el quinto postulado de Euclides y de que en una de las geometrías en el que este postulado implica que por un punto exterior a la recta dada pasen infinitas rectas paralelas.

- *El concepto de manera intuitiva:* En la página 414, para el nivel de undécimo, el concepto de infinito no se introduce formalmente, pero para la construcción y el estudio de gráficas se puede expresar de manera intuitiva. También se menciona que no es conveniente formalizar el concepto de asíntota, sino que debe tratarse de manera intuitiva como una recta que se aproxima arbitrariamente a la gráfica de la función.

Como un aporte de la presente investigación, después de la lectura del programa del MEP en los ciclos III y diversificado, se estableció cuáles conocimientos tienen implícitamente al infinito. El criterio para determinarlo se basó en la experiencia docente de los investigadores, esto con el fin de mostrar el impacto que tiene dicha noción en la propuesta curricular de la educación secundaria costarricense. A continuación se mencionan los conocimientos clasificados por áreas.

1. Números:

    - *Recta numérica:* en primaria se hace énfasis en asociar puntos o rayitas de una recta con números naturales consecutivos. Para esto es menester el concepto de orden, antecesor y sucesor. En la recta numérica con los naturales no existe un último elemento debido a que siempre existe "el sucesor de". De manera potencial, el conjunto de los números naturales es de cardinalidad infinita.

    - *Números primos:* según el teorema fundamental de la aritmética, todo número natural puede ser factorizado por medio de la división euclidiana, aunque esto no es sencillo para números grandes, pues determinar si es primo o compuesto es una tarea hasta hoy complicada. En primaria y sétimo año se utiliza la criba de Eratóstenes para localizar los primos menores que 100. El conjunto de los números primos es infinito.

- *Conjunto de números pares e impares:* y en general conjuntos de múltiplos de un número natural, son de cardinalidad infinita. Se realizan sucesiones que siguen un patrón (de dos en dos, de tres en tres, etc.) para mostrar algunos elementos, o una fórmula para calcular cualquiera de los términos.

2. Relaciones y álgebra:

- *Sucesiones:* a partir de un conjunto de términos finitos puede deducirse una regla de formación de la secuencia a la cual pertenecen. O también, dada la regla de formación, se pueden calcular los términos. La sucesión puede ser finita o infinita.
- *Funciones:* Las funciones se introducen con ejemplos de la vida diaria y luego se utilizan las representaciones tabulares, con diagramas de Venn, gráficas, relacionales o con gráficos y con una fórmula o criterio. El concepto de función involucra muchos conceptos, y sus dominios de definición pueden ser de cardinalidad finita o infinita. Sirven para modelar situaciones de la vida cotidiana o profesional.
- *Gráficas de funciones en el plano cartesiano:* Las funciones reales de variable real se representan en el plano cartesiano, por medio de su gráfica, la cual, dependiendo de si el dominio es finito o infinito, la gráfica será un conjunto de puntos, finito o infinito.

3. Geometría:

- *Puntos, rectas y planos:* Las rectas y los planos son conjuntos de infinitos puntos en el espacio.
- *Áreas de figuras no poligonales:* La aproximación se realiza por medio de rectángulos en el plano cartesiano. Entre más rectángulos se encajen con la figura (por exceso, defecto o combinación de ambos) se tendrá una mejor aproximación del área.
- *Circunferencia:* Por definición, dado un plano en el espacio, y un punto en este plano, la circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidista a una distancia determinada del punto dado. El conjunto con esta definición es infinito.
- *Homotecias:* La homotecia entre polígonos es una correspondencia biunívoca entre puntos del plano. Como el conjunto de puntos es infinito, se asocian conjuntos infinitos con conjuntos infinitos de puntos.

4. Estadística y probabilidad:

   - *Ley de los grandes números:* esta ley establece que por una cantidad de repeticiones idénticas del mismo experimento, que tienda al infinito, la probabilidad de un determinado evento tiende a coincidir con su frecuencia.

Refiriéndose a los conceptos expuestos anteriormente y ligados con el infinito matemático y el programa del MEP, se resalta que, los docentes entrevistados y de grupos focales mencionaron la mayoría de los conceptos citados explícitamente por el MEP (2012), como asíntotas, conjuntos infinitos, números irracionales, números decimales, tal como se menciona en los siguientes extractos:

> "...concepto de asíntota en funciones exponenciales, logarítmicas, infinito con divisiones, acercamientos al cero: 1/10, 1/100, 1/1000, etc.,

ninguna llega exactamente al cero. El estudiante entiende 1/1000000 que no es cero exacto. El concepto de infinito está ahí. Razones trigonométricas, tangente de 90°, tan(89,9°). Relación de orden en los naturales, enteros, racionales, densidad de Q, lo que significa, en su densidad, quedan pequeños o grandes vacíos que no los llena Q, entonces, ¿cómo lleno los vacíos? Con los irracionales, infinitos no periódicos. Son necesarios para completar la recta, el infinito a ambos lados.

Más formalmente el concepto de completitud de $\mathbb{R}$ que es necesario para entender el conjunto. Los programas vienen concretos, pero es importante y necesario, por ejemplo, en mecánica de precisión que requiere hacer cálculos muy finos." (EP-RQ)

"Lo valoramos en la parte de teoría de números, ejemplo en séptimo interiorizarles el concepto de número natural, de enteros, por qué en los enteros hay un orden, por qué hay una recta numérica, qué quiere decir la recta numérica. Y ahora abordarlo por medio de un problema." (EP-SR)

"Según el nivel y el área de funcionamiento, como conceptos geométricos, conversiones de fracción a decimal y su clasificación según el comportamiento decimal, para clasificar números según los conjuntos numéricos." (EP-MAG)

"Cuando yo empiezo a dar clases y tengo que hablar que Q es un conjunto denso ahí es donde yo digo: ¿cómo les explico esto? Uno explica, pero también uno cae en el asunto de explicárselo muy somero. En la secundaria hay que acogerse al temario porque hay cosas más importantes en qué enfocarse como el asunto algebraico, por ejemplo.

Que ellos vean que los naturales es un subconjunto en los enteros. Curricularmente, ellos nada más dicen defina $\mathbb{R}$, como la unión de los racionales con los irracionales... nada más. Pero esa unión no es tan sencilla si uno tiene que recordarle a ellos que todavía los enteros no es denso como los racionales. Esa parte ahora se ha borrado un poco, sin embargo yo siempre les digo a ellos cuando se ven racionales." (EP-SUV)

Como puede notarse, el énfasis de los docentes citados se da en los conjuntos numéricos y sus propiedades, en donde destaca la densidad del conjunto de los números racionales Q en el conjunto de los números reales: entre dos números racionales siempre habrá otro número racional. También resaltan las divisiones o fracciones con denominadores grandes, que tienden hacia infinito en magnitud, y cuyos recíprocos tienden hacia cero. Se destaca lo mencionado por De León (2014), en que los docentes dan protagonismo a los números racionales porque calcularlos resulta más sencillo, y los números irracionales en la enseñanza dependen de aproximaciones racionales, de ejemplos históricos comunes sin justificación del por qué son irracionales y prevalece la falta de reconocimiento o construcción de números irracionales por otras vías que no sean las de la definición por medio de la expansión decimal no periódica infinita.

En cuanto a la resolución de problemas y el trabajo en el aula, los docentes expresaron la importancia de asociar los temas a situaciones del entorno inmediato, así como tener claros ciertos conceptos matemáticos relacionados con el infinito:

"La mayoría de las veces son situaciones sencillas, que con un poco de pensamiento se le llega a la solución, pero igual son pocos los estudiantes los que contestan, la mayoría espera o que se les diga o bien que conteste otro." (EP-HUM)

"Problemas que involucran el conteo de números. Por ejemplo cuando se estudian sucesiones, y se hacen casos también como tablas de valores en la función lineal. También se habla de los viajes espaciales y la distancia que pueda recorrer hacia una dirección determinada (no hacia un sitio). Por otra parte cuando se trabajan fracciones la diferencia entre la forma aproximada y la exacta de un número con expansión decimal periódica. También cuando se habla de intervalos, sea de tiempo, temperatura, económico, etc. Casi todo basado en la solución de problemas, basado en experiencias de los mismos estudiantes y su relación con el entorno." (EP-HUM)

"Si te trabajan conjuntos numéricos por ejemplo, se debe tener claro el concepto de antecesor y sucesor, el concepto de conjunto y la diferencia entre conjunto finito e infinito. En geometría, se debe diferenciar simbólicamente los conceptos de segmento, rayo, recta y semirrecta, así como el de plano o semiplano. En la conversión de fracciones a decimales, es importante enfatizar en un proceso de división completo, donde se visualice el comportamiento de los decimales y el mismo estudiante saque sus propias conclusiones." (EP-MAG)

"El programa en décimo habla del tema de interpolación y de aproximación de curvas que se aproximen de manera lineal y otras. El estudiante debe dar ese salto del análisis, de la intuición, del razonamiento. Ver los números no como algo frío, sino que puedan cuestionar." (GF2-REQ)

Los docentes, refiriéndose al planteamiento de enseñar conceptos ligados con el infinito de manera intuitiva señalaron que

"El concepto del infinito a través del tiempo en la etapa secundaria, creo yo, se ha dejado de lado muy a lo intuitivo de la persona, sin que para el estudiante resulte ni práctico y provechoso, lo que hace que la

> construcción de este concepto sea únicamente para explicar ciertas situaciones que no se pueden manejar de manera concreta." (EP-HUM)

> "Ok, casi que uno desde sétimo año comienza a intuir en ellos el concepto de por lo menos números infinitos, o el concepto de números reales, enteros, que hay infinitos números dentro de otros; pero propiamente el concepto no se da como tal, sino que se involucra en ciertos temas." (EP-KEN)

> "La experiencia es desde el punto de vista intuitivo, es un concepto que, aunque no podemos verlo ni tocarlo, existe. Ejemplo, las raíces de cualquier orden, decimales para raíces, por ejemplo $\sqrt{2}$, multiplicar un número por otro, se da cuenta que no va a terminar, y es un proceso manual que no termina; el concepto de infinito está ahí pero no lo podemos palpar." (EP-REQ)

En el Programa de Estudios de Matemática se menciona con respecto al nivel de undécimo año que "el concepto de infinito no se introduce formalmente en este nivel educativo, sin embargo para la construcción y el estudio de gráficas se puede expresar de manera intuitiva su sentido." (MEP, 2012, p. 414). Esta cita debe compararse con la noción de infinito que planteaba el programa anterior, es decir, el del año 2005, el cual expresa lo siguiente: "la presentación de los conceptos de "denso", "continuo", "infinito", "completo" de los conjuntos numéricos, solamente se introducirán en forma intuitiva. Se debe basar en el concepto intuitivo más que en la definición. Por ello, su evaluación se realizará en el proceso y con base en ejemplos." (MEP, 2005, p. 48)

Con respecto a lo anterior, el Dr. Zamora señaló lo siguiente, diferenciando los dos enfoques presentados en cada programa:

> "hay una disonancia entre el infinito al que se refieren. El del 2005 es más conjuntista, más de tamaño, en el otro (2012) tiene que ver con el

concepto de límites y gráficas, de crecer y crecer indefinidamente. El problema es el de tratarlo de manera intuitiva." (CE-R)

En los antecedentes de esta tesis se mencionó que las investigaciones de Belmonte y Sierra (2011) evidenciaron que la idea intuitiva del infinito era conflictiva y que los modelos tácitos surgían a raíz de ello, genera contradicciones internas que se externan por medio de respuestas incoherentes, lo cual coincide con lo expresado por el experto consultado. Para Belmonte y Sierra (2011) el concepto de infinito no se define explícitamente en el currículo español, y se ha de señalar que tampoco en el currículo costarricense, tal como se ha podido evidenciar en las citas del programa de estudios vigente.

Al momento de trabajar con diversos temas asociados al concepto de infinito, los docentes revelaron dificultades como falta de tiempo, muchos contenidos que no se pueden abarcar, falta de interés del estudiantado en los temas, despreocupación de los docentes, influencia de la zona en donde laboran y el tipo de población con la que tratan, cambio de programa de estudios de matemática y la forma de evaluar los contenidos y habilidades, al igual que no saben con exactitud cuáles temas están vinculados con la noción de infinito:

> "Con los nuevos programas, no he tenido que abordar el contenido como tal. Vamos a ver, no ubico ni siquiera (siendo muy honesta) en que parte del programa habría que tratar el concepto como tal. No sé si usted me dice que está en sétimo, octavo... no sé si por ejemplo es una intuición que se debe venir construyendo intencionalmente desde la escuela, lo que no sé digamos si viene tan explícito. Casi, casi me atrevería a afirmar que tan bien viene como algo intuitivo." (EP-AV)

> "La falta de interés del algunos docentes y de los estudiantes, hace que no se preocupen mucho por formalizar, o por lo menos, la de

generalizar de manera más detallada este concepto tan importante." (EP-HUM)

"En la zona donde trabajo se hace difícil profundizar cualquier tema, ya que de lo contrario no se logra completar el programa. Aun así muchas veces no se logra la abordar la totalidad del mismo. (...) trabajo en dos instituciones que cuentan con una población estudiantil totalmente diferente una de la otra, lo cual me obliga a trabajar y evaluar de maneras muy diferentes, a ritmos muy diferentes y los alcances varían considerablemente. He compartido mi experiencia con compañeros de diferentes lugares del país y en algunos casos son similares y en otros (muy pocos por cierto) los resultados se acercan a las expectativas del MEP." (EP-MAG)

"Hasta ahora estoy recibiendo estudiantes que han venido con el proceso y ahorita que los tengo en sétimo no me ha costado la idea de empezar con un problema, en cambio los estudiantes que yo tuve hace cuatro años de cuarto año o de sétimo que me entraban era un problema porque no lograban hacer eso. Siento que el cambio fue muy radical en el MEP. No ha sido un aprendizaje solo para ellos, para uno también." (EP-SR)

"En realidad uno termina viéndolo muy ralamente, apenas lo que uno necesita para que ellos sigan a lo demás. Y las pocas veces, he hecho el intento, y han sido pocas porque mi experiencia me ha llevado a ver que no puedo profundizar mucho porque pierdo el interés de ellos muy fácilmente. ¡Era para eso! Así le dicen a veces a uno y está la limitante del tiempo.

En los primeros años de experiencia sí lo intenté cuando uno les habla de $\mathbb{R}$, yo siempre les menciono los complejos. Me dicen: No profesora,

> déjelo ahí. Inclusive ellos me dicen a veces que uno como que empieza a volar, porque hay tanto conocimiento que uno tiene que uno quisiera que ellos tuvieran...
>
> Los estudiantes quieren lo necesario, lo que necesitan para aprobar el año y punto." (EP-SUV)
>
> "No, porque me avoco a lo que nos piden en el programa, crear ideas de intuición para el estudiante, no ha sido un tema que me interese mucho a mí." (GF2-REQ)
>
> "El programa es muy diverso en varias areas y hay poco tiempo para pasarde un tema a otro. (...) Hay compañeros que dicen que hay temas que nunca más se vuelven a ver y por eso no los dan, por ejemplo de noveno, y que en décimo y undécimo no aparecen." (GF2-REQ)

En él Programa de Estudios de Matemática del MEP (2012), el infinito aparece ligado a otros conceptos (conjuntos infinitos, expansión decimal infinita, asíntotas, espacio muestral, funciones reales de variable real, cantidad de soluciones de una ecuación, intervalos reales). Los docentes hicieron hincapié en que se debe enseñar de forma intuitiva lo que corresponde al infinito, sin una formalización del concepto, tal como en el documento oficial se indica.

Se concluye entonces que el MEP (2012) no define el concepto de infinito que se utiliza en el currículo, sino que opta por la vía de la enseñanza tácita del concepto, de forma intuitiva, no formalizada, quizás en aras de evitar que los estudiantes entren en algún tipo de conflicto cognitivo. Sin embargo, considerando el uso de la historia de las matemáticas como uno de los ejes disciplinares del programa de estudios, y agregando a esto, el método historico-crítico de la epistemología genética, es fundamental que se evidencien las dificultades enfrentadas por los matemáticos al encontrarse con el infinito.

5.3. Aspectos didácticos del infinito matemático

Con respecto al infinito en la matemática escolar, Lestón (2011) menciona lo siguiente:

> El infinito es un concepto que a lo largo de la historia atrajo a pensadores de diversas áreas del conocimiento por las dificultades en su tratamiento y abordaje científico y didáctico. Al incluirlo en la ciencia provocó numerosas paradojas y contradicciones que hicieron que durante siglos no fuera posible un tratamiento formal del mismo. Sin embargo, difícilmente podríamos en la actualidad trabajar ciertos contenidos en el aula de los distintos niveles educativos, si no habláramos de este concepto. (p. 6).

Se indica que el trabajo en el aula involucra el uso del concepto del infinito. Concerniente a esta realidad, en esta investigación se evidenciaron diferentes escenarios. En uno de ellos, al consultar acerca de los conocimientos previos para que se construya el concepto de infinito en el aula, los docentes expresaban que no saben cómo hacerlo, debido a que no tienen claro a qué se refiere el infinito matemático:

> "Para mí es la intuición que se trae de ese concepto, que casi se crea (ahora que lo pienso) de una manera casi inconsciente." (EP-AV)

> "Honestamente, no tengo clara cuál debe ser la concepción de infinito que yo debería transmitirle al estudiante. Esta es la primera vez que me siento a pensar sobre el concepto de infinito y si yo realmente tengo clara la cuestión de qué es el infinito, hablando matemáticamente. Y si yo no tengo ni siquiera esa claridad, pienso que es difícil ubicar cuáles van a ser esos contenidos previos para ese concepto." (EP-AV)

En un segundo escenario, como el concepto de infinito no es un conocimiento específico del plan de estudios, no hay estrategias didácticas para ir adquiriendo la noción, salvo algunos espacios donde se accostumbra realizar pleanarios con los estudiantes acerca de las experiencias previas asociadas al infinito, tal y como lo expresó uno de los docentes entrevistados.

> "Primero que nada, ver qué significa infinito en sí, o sea qué dice la Real Academia. ¿En dónde han escuchado ellos el término infinito? Si ha sido en la casa, en la escuela, con algún familiar, en qué lo han visto." (EP-SR)

Otra de las docentes indicó que en diferentes temáticas se debe crear un pensamiento positivo, e inclusive recurrir a la imaginación. Más allá de incentivar al estudiantado considerando el eje de creencias positivas de la Matemática propuesto en el programa de estudios actual, el que enseña también debe manifestar ese gusto, como sucede con el caso del infinito.

> "Utilizar más la imaginación, no ser tan apegados a lo concreto. Para eso se necesita que la persona se pregunte más acerca de sí misma y se pregunte sobre su entorno, no ser tan conformistas. Por otra parte, que traten siempre de ver más allá de las cosas evidentes y buscan maneras nuevas de hacer las cosas, o por lo menos de hacerlas mejor. Eso es parte de crear un pensamiento positivo que permita la adquisición de nuevos conceptos, entre ellos el del infinito." (EP-HUM)

En un tercer escenario, para enseñar temas que incluyen el uso del infinito, los docentes entrevistados recurren a diversas propuestas. Una alternativa está relacionada con la noción de lo ilimitado, de aquello que no acaba por más que la persona quiera intentarlo.

"El ponerlos a pensar en cualquier número y que otro compañero diga otro más grande, y luego otro y luego otro, hasta que ellos se cansen." (EP-ANAV)

Otra alternativa es el uso de las TIC's en el aula a través de Geogebra para las graficaciones de funciones reales de variable real y elementos que las describen, así como las rectas asíntotas; también utilizan calculadoras científicas y calculadoras en internet, o información extraída de páginas web y medios digitales de información:

"Creo que hay que prestarle atención cuando uno intenta hacer una representación gráfica del infinito, (usar flechillas) porque parece inocente pero realmente no lo es, por ejemplo, porque cuando usted usa un software y el software no usa las flechas, eso en algunos casos al estudiante se le genera un conflicto cognitivo, y quizá uno lo da por, lo obvia, lo pasa por alto y quizá eso es una expresión de que ese concepto no está lo suficientemente claro. Que el estudiante entienda que la representación gráfica siempre va a ser una representación limitada porque no puedo realmente representar al infinito de una forma concreta." (EP-AV)

"Por ejemplo, ahora que vemos los irracionales los estudiantes preguntan que como saben cuál es el número que sigue, o como sabemos los profesores que ese número es infinito y que no tiene repetición. Les damos el ejemplo de π, existe una máquina que está calculando los dígitos de π, contarles sobre el libro de arena, ejemplo del libro de unas enumeraciones enorme, ejemplo del saco, trate de sacar el mismo número. La idea de imposibilidad es la idea que lo sumerja más. Generalmente, hago grupos de papás de estudiantes y entro a YouTube de video que hablen del tema que traro esa semana. El problema

> es que los estudiantes ni siquiera lo ven ni les dan la información, los ven, pero no los entienden, los busco los más elementales posibles." (EP-DAM)
>
> "Uso Geogebra para que vean las asíntotas en las gráficas, o las ramas de las parábolas, si las definiciones en $\mathbb{R}$, límites hacia el infinito, limitado a intervalos, raíces limitadas a dos o tres decimales para trabajarlas; uso la calculadora para expansiones decimales infinitas periódicas o puras, irracionales no se pueden representar en la calculadora. Han servido esas que mencioné anteriormente, la parte visual sirve mucho para asíntotas. Al estudiante le llama la atención en décimo. En noveno tratar de sacar una raíz, se hace una única vez y luego con la calculadora. El infinito como tal está en todos esos números." (EP-REQ)
>
> " Entonces yo les digo: ustedes sabían, o busquen, busquemos en Google. Saquemos cuál es el último número... y claro, sale un chorro y dicen: ¡Profe, eso es grandísimo! Y aun así todavía no he encontrado que... el último valor. Pero eso es enorme, cómo lo van a escribir." (EP-SR)

Cabe destacar que los docentes señalan las limitaciones del software que utilizan al exponer temas relacionados con el concepto de infinito, limitaciones que a la larga pueden resultar en obstáculos epistemológicos, como lo es creer que si no hay punta de flecha en una gráfica de una función, entonces esta es finita; o que las aproximaciones de números irracionales en la calculadora los hacen aparentemente números racionales.

Como alternativa también se exponen temas relacionados con el infinito a través de la historia de la matemática, aunque sea de manera superficial.

"No se puede extender uno mucho sino nada más dar una pincelada sobre la historia y en algunos casos yo procuro referir con historia de matemáticos donde se haya mencionado, ejemplo la expansión de los números, que por qué se utilizó, que quién fue que lo vio, realmente a los de sétimo año que es a los que más les llama la atención cuando uno les habla sobre historia, más que les pongo toda dramática y les digo que a alguno de los de la escuela de Pitágoras el que comenzó a ver sobre los números irracionales." (EP-SR)

En un cuarto escenario, una de las docentes expresó una combinación de las alternativas expuestas anteriormente, e incluso otras formas. Se destaca la reflexión que realizó, porque acepta que no han sido suficentes las estrategias para ampliar la noción del infinito.

"Tal vez preguntas concretas: De aquí a la pulpería, de aquí a pasar el océano, o de aquí a... O la noción de infinito también la vemos en (bueno, a mí me fascinan los atardeceres), alguna imagen en la parte didáctica, ahora que son las imágenes tridimensionales en el WhatsApp, utilizar la imaginación y las cuestiones tecnológicas en lo que se pueda, en lo que yo pueda encontrar. Sin embargo, esta recta puede pasar el Universo, ¿qué sigue después del Universo? Siento que me he quedado corta con las propuestas." (EP-SUV)

Considerando los cuatro escenarios descritos, cabe preguntarse si la noción del infinito se está presentando, aunque sea de manera intuitiva, tal y como lo expone el Programa de Estudios de Matemática. Esta respuesta requiere de la especificación de lo que se entiende por intuición en Matemática, para lo cual Gómez-Chacón (s.f.) hace referencia y menciona que "tenemos intuición porque tenemos representaciones mentales de los objetos matemáticos"(p.30). Sin embargo, se atribuye en muchas ocasiones que una persona piense intuitivamente como algo opuesto a lo riguroso, que sea visual o convincente; inclusive, que esté inspirado en un modelo físico.

Gómez-Chacón (s.f.) comenta que es necesario educar en la intuición. Al respecto, Guzmán (1991) dice que "la intuición no se debe concebir como una especie de regalo arbitrario de las musas. La intuición se puede cultivar activamente"(citado en Gómez-Chacón, s.f., p.31). Se recomiendan algunas pautas para educar en la intuición: prepararse para recibir la intuición, dejar a un lado la convicción y tratar activamente de oír los mecanismos mentales no conscientes que poseemos. Es decir, para la acción del docente es necesario trabajar con los estudiantes las creencias que tienen sobre la intuición. Y, en el caso de este tema, se requiere conocer cuáles son las intuiciones que poseen asociadas al infinito.

Pareciera que la interpretación que se tiene de lo intuitivo del infinito por parte de los docentes entrevistados corresponde a un desconocimiento de lo que implica trabajar nociones formales en el ámbito escolar con el fin de avanzar en los diferentes tópicos de un programa de estudios. Gómez-Chacón (s.f.) expresa que "al utilizar la intuición percibimos de forma activa nuestras impresiones, las registramos, las interpretamos y, por último, las integramos con el resto de los procesos mentales. La intuición es un proceso muy riguroso. Un proceso que necesita de una instrucción." (p.31).

En la conversación con expertos se destacó el papel preponderante de las intuiciones con respecto al infinito, pero expresan que el docente debe conocer la formalización, precisamente para que tenga mayor claridad al momento de transmitir las intuiciones del concepto.

> "La intuición es esencial para entender los conceptos matemáticos. De la intuición surge la formalización, para el ciudadano común el concepto intuitivo es más relevante, pero es importante que un profesor tenga la formalización. La intuición no es suficiente, por ejemplo $1/\infty$

> puede ser muy problemática para un estudiante para entenderlo. Que un estudiante entienda la intuición de infinito es genial, pero sobre todo a nivel colegial." (CE-R)

> "Cuando uno tiene que transmitir una idea intuitiva pero no tenés la idea adecuada para dirigir, si no hay claridad, la intuición vacua puede ser peligrosa... Los profesores deberían tener más claro el concepto para transmitir intuiciones claras. " (CE-S)

A pesar de que este estudio se enfoca en el impacto que tiene en la educación secundaria, se procura alertar de lo siguiente: un descuido de cómo se concibe el infinito estriba en mayores dificultades al momento de llevar cursos universitarios. Se coincide con la opinión de Marín (2014) cuya posición es la siguiente:

> Creo que por la falta de precisión en la enseñanza del concepto del infinito es que resultan la mayor parte de los problemas para los estudiantes de cálculo a la hora de aprender numerabilidad y no numerabilidad, cardinalidad, convergencia, continuidad, etc. (p.120).

En cuanto a los aspectos didácticos, se destacan algunos esfuerzos que se llevan a cabo para presentar al infinito en el desarrollo de diferentes temas matemáticos, vistos más como una propiedad, por ejemplo: conjunto infinito, intervalo infinito o expansión decimal periódica infinita; lo que se plantea está en función del conocimiento matemático correspondiente al Programa de Estudios, vinculando que se considera el uso del infinito de manera intuitiva. Al contrastar con lo que está descrito por algunos autores o con la opinión de los expertos, la intuición no debe descartarse pero debe valorarse de manera diferente a cómo ha sido concebida hasta el momento.

Para el cierre de este apartado, según lo indicado por Crespo (s.f.), en cuanto a la intuición, "El profesor y el maestro han de estar enterados de su importancia.

Conociendo los alcances y peligros de la intuición, podrán orientar sus métodos didácticos". (p. 86). Es decir, se incentiva para que se reflexione cómo hacer una presentación intuitiva, pero con la acepción que le corresponde y no de forma vaga o imprecisa.

En las experiencias didácticas los docentes hacen uso de calculadoras o software para mostrar expansiones decimales de números irracionales o realizar aproximaciones de estos; también realizan gráficas de funciones y destacan que el estudiantado tiene problemas al momento de identificar si una gráfica de una función es acotada o no, debido a que no comprenden el uso de las flechas en los extremos de la gráfica. Los docentes indican que a los estudiantes se les dificulta el manejo de los intervalos reales en cuanto conjuntos numéricos, porque no determinan si un número real que no es racional pertenece o no a un intervalo dado, y de ahí también que presenten dificultades al trabajar con inecuaciones, ya que el conjunto solución, en general, es un intervalo real. Los docentes señalan que la historia es muy importante para el desarrollo del concepto de infinito, pero que en sus lecciones no pueden abarcarla por falta de tiempo, aunque instan a los estudiantes a que busquen por cuenta propia, y como casos concretos, que averigüen acerca del uso de números demasiado grandes.

Los docentes han utilizado el teorema de Pitágoras con la regla y el compás para ubicar números irracionales algebraicos en la recta numérica; también utilizan la espiral de Teodoro. Otro recurso que han implementado es la bisección de un segmento finito, pues así representan la densidad del conjunto de los números racionales y la idea de que entre dos números racionales siempre habrá otro número racional.

Cabe resaltar que los docentes se enfocaron en el área de Relaciones y Álgebra del programa de estudios en cuanto al uso y conceptos asociados con respecto al infinito matemático, y que no hicieron mención alguna, en las entrevistas ni en los grupos focales, de ejemplos como la infinitud de números primos en el conjunto de los números naturales, o del infinito en el área de Geometría o de Estadística y Probabilidad. Se infiere entonces que el concepto de infinito matemático tiene mayor relevancia para los docentes que participaron en este estudio, en los temas de conjuntos numéricos y funciones.

Los expertos consultados coinciden en que, tanto en el colegio como en la universidad, el infinito se da de manera informal y que existe un uso meramente operacional de dicho concepto, e insisten en que los profesores deberían tener formalizado el concepto para poder trabajar con intuiciones claras al momento de enseñarlas a los estudiantes. Diferencian entre un infinito de crecimiento y un infinito conjuntista o de tamaño. Señalan que la intuición es necesaria pero no suficiente. Acentúan que el concepto formal de infinito matemático es contraintuitivo y hasta puede parecer falso a quien lo vea por primera vez.

Entre las experiencias de los docentes que se registraron destacan que, cuando se debe realizar un conteo y se llega a una cantidad ilimitada, o fuera de las posibilidades de hacer mención de un número, entonces el concepto que resulta un "comodín" es el infinito. Según varios profesores, aceptan que trabajan el infinito como si ya los estudiantes lo conocieran, tal y como se destaca con el caso de una de las profesoras: "Usualmente estoy dando, hablando de funciones usando $\mathbb{R}$, usando en mi lenguaje, en el lenguaje normal ese término infinito. Asumo que mis estudiantes entienden, que nos entendemos mutuamente cuando hablamos de infinito, entonces no ha sido algo que es objeto de discusión, o sea, lo usamos el término y ya" (EP-AV).

Las experiencias de los docentes participantes, por tanto, fueron de gran importancia en cuanto al concepto de infinito matemático, pues pone en contexto las prácticas y los quehaceres didácticos que se realizan en el aula en torno a una noción que, históricamente ha sido difícil y así lo evidencian también las investigaciones presentadas en los antecedentes de esta tesis (Waldegg (1996), Villabona y Roa (2016), Vera, Pinilla y Roa (2010)). Es por esto que el aporte de la construcción del número y del infinito según Piaget adquiere su valor en cuanto a que explica dificultades de enseñanza y aprendizaje de estas nociones desde la epistemología genética, la cual establece que los conocimientos matemáticos tienen una génesis y una evolución en el sujeto cognoscente, y que las teorías didácticas de la matemática han denominado como obstáculos epistemológicos, conflictos cognitivos[1] y otros.

5.4. Acercamiento al constructivismo piagetiano

Uno de los principios del constructivismo que apoya el trabajo didáctico es "la concepción piagetiana de que un sujeto construye la información a partir de sucesivas aproximaciones" (Barriga, 1998, p. 131). De manera similar a la cita anterior, las ideas extraídas de las entrevistas realizadas a los docentes con respecto al constructivismo son las siguientes:

- La persona va modificando su estructura cognitiva a partir de experiencias de aprendizaje.
- Por medio del trabajo propio, manipulación y relación con el entorno construyo el conocimiento.
- Interiorización del concepto en sus propias palabras, no por los libros.
- El estudiante del error puede obtener conocimientos.
- El estudiante utiliza ideas familiares para relacionarlas con el concepto que está trabajando.

[1]Rojas (2008) menciona que el conflicto cognitivo, a veces llamado "disonancia intelectual", consiste en "todas aquellas situaciones en que el alumno se enfrenta a un reto intelectual que de alguna manera es distinto de sus creencias o de lo que tenía construido. Podemos afirmar que estamos en presencia de un conflicto cognoscitivo cuando el estudiante duda de sus ideas anteriores, las cuestiona y recurre –para superar el desequilibrio que esto le causa– a una reflexión operatoria, es decir, abstracta, reorganizativa, mentalemnete creadora de significaciones nuevas y reordenadora a nivel lógico." (Rojas, 2008, p.77)

- El constructivismo no consiste solo en actividades lúdicas sin objetivos previos.
- Ofrecer recursos al estudiante para que pueda crear definiciones y conceptos propios.
- Es una tendencia o corriente pedagógica, arte de aprender haciendo, descubriendo, aprender del error.

Las ideas anteriores expresadas por los docentes entrevistados evidencian que ellos poseen los conceptos básicos del constructivismo piagetiano como corriente pedagógica.

Una de las docentes resalta que los estudiantes deben construir conceptos, pero guiados por el profesor:

> "Es cuando el docente guía a los estudiantes para que ellos mismos entiendan o construyan los conceptos nuevos, para luego aplicarlos en los temas nuevos." (EP-ANAV)

Según los docentes entrevistados, el constructivismo como corriente pedagógica, se opone a las prácticas tradicionales de enseñanza, emancipa al estudiante y el conocimiento no es un conjunto de datos que deben ser absorbidos del medio exterior por el sujeto:

> " Para mí es la construcción del conocimiento por medio de experiencias propias vividas. Por medio del trabajo propio, manipulación y relación con el entorno, voy construyendo el conocimiento." (EP-HUM)

> "Construir conceptos a partir de diferentes actividades que uno se haga, estrategias de aprendizaje diversas que no le den el contenido así, clases magistrales por decirlo así, sino de los juegos que hagamos, de las actividades que hagamos se pueda construir el conocimiento, se pueda construir el concepto como tal." (EP-KEN)

"Hay que ofrecer los recursos necesarios para que el estudiante pueda crear una definición propia de cada concepto, teniendo en cuenta lo que el estudiante sabe, sacando a relucir lo que debería de saber y sacando provecho a la capacidad de análisis que posea cada uno de manera individual o colectiva." (EP-MAG)

En cuanto a la relación entre prácticas pedagógicas constructivistas y el programa de estudios de matemáticas, existen diferentes opiniones en relación con la posibilidad de aplicarlo en instituciones públicas, pero coinciden en que el estudiantado se resiste a participar.

"Con los nuevos planes el constructivismo se facilita, pero el cumplimiento de las habilidades de cada nivel es realmente muy difícil, principalmente por el tipo de estudiante que tenemos, pues se necesita que el grupo completo se interese en trabajar." (EP-ANAV)

"Es una utopía realmente, por lo menos todavía, no tenemos ni los recursos y el plan es un poco sobrecargado en cualquiera de las ramas, tampoco se aplica en la primaria, más fácil trabajar el conductismo, uno trata de hablar del constructivismo, pero los mismos estudiantes se resienten, el constructivismo, ellos lo resienten: ¿y como lo voy a hacer? Algún momento lo apliqué en coles privados. En públicos es muy complicado." (EP-DAM)

En cuanto a la figura de Jean Piaget, los docentes entrevistados lo recuerdan como el padre del constructivismo, como parte de la formación inicial recibida en la universidad.

"Debo conocerlo porque sé que lo estudié en la universidad, pero cuando doy clases no planeo pensando en un nombre, solo en hacerme entender, ya sea de manera magistral o dinámica. (...) Hace bastantes años que leí de él. Él explica la evolución de las habilidades mentales, lo ubica por etapas y que deben irse cumpliendo para llegar a evolucionar a etapas más complejas. Fundamentalmente eso es lo que hace, que observó mucho a sus hijos para plantear esas teorías." (EP-ANAV)

"Es el papá del constructivismo Jean Piaget. Me acuerdo en Pedagogía, principalmente los trabajos de él de investigación eran relacionados a chiquitos, no está relacionado como a adolescentes que yo creo que era una de las críticas que nosotros le hacíamos. Me parece que él decía que un niño aprende cuando juega, y no cuando se le obliga, porque está incentivado, está motivado y no me acuerdo que era la otra cosa." (EP-SR)

Lo que mencionaron los docentes con respecto a Piaget está acorde con lo que explica Socas (2000) con referencia al científico suizo: Jean Piaget fue una de las figuras más notables de la psicología evolutiva o teoría cognitiva y de la epistemología del siglo XX. Por un lapso de más de cincuenta años trabajó, junto a un equipo interdisciplinario, una teoría general y original del desarrollo intelectual y perceptivo del ser humano. Piaget se doctoró en Biología y se interesó por la Psicología desde su juventud, así como por la Filosofía y la Sociología. Creó el método clínico mientras estudiaba el pensamiento infantil. Las ideas centrales de Piaget se enfocaron en el problema del conocimiento y su construcción. Muchos de sus estudios abarcaron la construcción de conceptos matemáticos, lógicos y físicos. La influencia de Piaget en la educación se manifestó en los distintas corrientes constructivistas, las cuales pusieron la mirada en el pensamiento infantil y adolescente para revisar las didácticas de las diversas disciplinas del currículo escolar.

En resumen, Piaget, no solo construye un edificio teórico complejo y

> coherente sino que aporta un enfoque y una metodología nueva para abordar el problema del conocimiento humano. Piaget hace posible la construcción de una ciencia del conocimiento, la epistemología genética, que no se limita a estudiar el desarrollo individual sino que abarca también el desarrollo del pensamiento científico. (Socas, 2000, p. 372)

Para Piaget (1978), el infinito, en la historia de las matemáticas, presentó un gran desafío para los matemáticos que se interesaron por dicho tema. El infinito aristotélico de carácter finitista o potencial estuvo inmerso en el pensamiento matemático durante muchos siglos, incluso antes, en el planteamiento euclidiano de los números y la geometría, y hasta en el cálculo infinitesimal, en el cual varios matemáticos no se preocuparon por formalizarlo. Por esto, no es de extrañar que las paradojas del infinito como las de Zenón se convirtieran en verdaderos desafíos que constantemente minaban los incipientes fundamentos de las matemáticas hasta llegado el siglo XIX.

El infinito matemático debe rastrearse en conjunto con la historia del número, puesto que este también tuvo un trayecto desde los números naturales hasta los números imaginarios. Los trabajos con los inconmensurables por parte de algunos pitagóricos evidenció que había números que no eran expresables por medio de cantidades que surgieran de una razón entre dos números "mesurables".

Fue hasta que Georg Cantor logró aritmetizar el infinito y convertirlo así en un número, algo que Bolzano no había conseguido. Cantor construyó la teoría de conjuntos y con ella la base necesaria para formalizar el infinito actual, y con esto, se dejó establecido que existe toda una jerarquía de infinitos desde el punto de vista ordinal. Los conjuntos infinitos son aquellos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio, en tanto que los conjuntos finitos no tienen dicha propiedad.

Para llegar a esto último, Piaget (1982) menciona que el ser humano, al construir el concepto de infinito matemático, sigue la misma ruta histórica del infinito, pues es por medio de la abstracción reflexiva que puede lograr culminar en una construcción del infinito actual, libre de las ataduras de la intuición y de la abstracción empírica.

El número entero, al ser la síntesis entre los esquemas de clasificación y los esquemas de seriación, evidencia que dicha noción no proviene de los objetos de la realidad, sino de la coordinación de las acciones del sujeto cognoscente, siendo así el número una construcción propia del individuo.

Con el infinito potencial el sujeto va más allá del número finito, pues el acto de contar se vuelve meramente virtual, ya no necesita del apoyo de los objetos materiales, sino que las acciones se llevan a cabo únicamente en el sujeto. Pero sucede que el individuo, al poseer un fuerte arraigo al finitismo, acepta el infinito potencial en su estructura debido a que no entra en conflicto con sus esquemas, y por tanto, con la estabilidad del pensamiento que posee en determinado momento. Así que si existen desequilibrios, estos solo son aparentes y puede evitarlos, como por ejemplo, que la suma de infinitos términos siempre darán un resultado infinito, o de que el conjunto de los números pares es de menor tamaño que el de los números naturales, puesto que la lógica finitista le indica que el todo es mayor que sus partes.

Solamente por medio de la abstracción reflexiva se lleva a cabo un desequilibrio en las estructuras del pensamiento y se puede reequilibrar y estructurar para alcanzar un nuevo estado de equilibrio, y esto explica por qué el infinito actual, el que representa la totalidad, sin el acto de contar, no es asimilado por los sujetos: atenta contra el equilibrio finitista y contra todo aquello que el sujeto considera intuitivo y exento de comprobación.

El infinito actual es contraintuitivo. Es un infinito acabado, y es el que representa los tamaños de conjuntos infinitos. Una cosa es decir que el conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos porque se pueden seguir agregando elementos y otra es decir que dicho conjunto es infinito porque se puede poner en correspondencia biunívoca con el subconjunto de los números pares. Al momento de aritmetizar el infinito, se conservan algunas propiedades de los números finitos, pero existen propiedades de carácter cualitativo que ya no comparten con los enteros, por ejemplo, al sumar $\lambda + \lambda = \lambda$.

Verdades aparentemente absolutas como que $7 + 5 = 12$ tienen una génesis en los niños, y para ellos no es una verdad autoevidente, sino que es consecuencia de la síntesis entre los esquemas de clasificación y seriación. Pero sucede que con el infinito aritmetizado la clasificación y la seriación dan paso a la cardinación y la ordinación, separadas y siguiendo sendas que dan paso a operaciones cada vez más complejas y alejadas de toda comprobación empírica. Allí el todo no es mayor que sus partes, tampoco es cierto que haya conjuntos que puedan ser contados con el infinito de los números naturales.

En la conversación con expertos se destacó que se necesita de la formalización del concepto para poder ofrecer intuiciones más claras, más adecuadas, incluso, intuiciones correctas. Más allá de la formalización está la comprensión del concepto de infinito por parte de los docentes, pues desempeña un rol fundamental al momento de enseñarlo. Al respecto, Perkins (2003) menciona lo siguiente:

> "presentamos tres metas indiscutibles de la educación: la retención, la comprensión y el uso activo del conocimiento. La comprensión desempeña una función central en está tríada. En primer lugar, porque las cosas que se pueden hacer para entender mejor un concepto son las más útiles para recordarlo. Así, buscar pautas en las ideas, encontrar ejemplos propios y relacionar los conceptos nuevos con conocimientos previos, por ejemplo, sirven tanto para comprender como para guardar información en la memoria. En segundo lugar, porque si no hay comprensión es muy difícil usar activamente el conocimiento. ¿Qué

se puede hacer con los conocimientos que no entendemos? " (Perkins, 2003, p.3)

La comprensión de cualquier concepto matemático implica haber realizado abstracción reflexiva, lo cual es la toma de conciencia de la operaciones que involucran las distintas representaciones y usos del concepto, lo cual significa reconocer las dificultades de diversa índole que podría atravesar el estudiante, y para ello el docente debe comprender más que repetir conceptos que aún no ha reflexionado en la enseñanza del infinito matemático.

Capítulo 6

Consideraciones finales

Con base en los capítulos anteriores se destacan las siguientes reflexiones en esta investigación:

- *El infinito debe tener un tratamiento especial en el aula.* Los docentes entrevistados y en los grupos focales coincidieron en que es un concepto que se ve superficialmente y que las estrategias empleadas para la enseñanza de conceptos ligados a esta noción no son suficientes para la comprensión de dichos conceptos. No hay una diferenciación entre infinitos, ya sea en su versión clásica "potencial versus actual" o en su versión de cardinalidad de conjuntos (potencia de los naturales versus potencia del continuo). El tratamiento del que se habla depende, según los expertos consultados, de la comprensión del infinito matemático que tengan los docentes que enseñan contenidos y habilidades relacionadas con dicho concepto. Así, cuando los docentes recurran a ejemplos reales o metáforas, deben distinguir a qué tipo de infinito (potencial o actual) se refieren. El uso de TIC's para enseñar conceptos relacionados con el infinito enriquece y hace más dinámica la representación geométrica o algorítmica del infinito, pero también posee sus limitaciones en cuanto a visualizar tendencias hacia el infinito o la visualización de dígitos en la expansión decimal de un número real.

- *Hay que considerar la transición entre el colegio y la universidad.* En los cursos de cálculo el infinito se ve como un comportamiento, un proceso que va más allá de agregar elementos de forma potencial. Conceptos como sucesiones, series, límites, derivadas e integrales, por mencionar algunos, requieren de procesos limítrofes, los cuales son posibles gracias al infinito actual. Se entiende que el MEP plantea la palabra "intuitivo" como un acercamiento informal de un concepto matemático y, desde esta perspectiva, los expertos recomiendan que los docentes hagan un uso de las intuiciones de manera reflexiva y teniendo clara la formalización, al menos desde lo elemental, del concepto de infinito y los distintos conceptos que lo involucran, los cuales en cantidad no son pocos en el campo de las matemáticas universitarias. Es más: en los cursos universitarios de cálculo el infinito es una noción clave para el desarrollo teórico de los contenidos que ahí se imparten.

- *La dificultad para comprender algunos conceptos tiene relación con la comprensión del concepto de infinito.* Los docentes entrevistados y los de los grupos focales coincidieron en que los intervalos reales son un ejemplo claro en el que un concepto no es comprendido plenamente si no se reflexiona previamente sobre el infinito matemático. Dicha dificultad, que radica en la naturaleza de conjuntos con potencia del continuo, se transfiere a las operaciones con conjuntos que se realizan con los intervalos reales, como son la unión, intersección o complemento. También las dificultades son más notables cuando se definen funciones reales de variable real con intervalos reales como dominios y sus respectivos conjuntos imágenes. Otro concepto fundamental es el de número real, pues la definición por expansión decimal se ve seriamente afectada por los truncamientos de los números ya sea en las calculadoras o por los algoritmos (como el de la división euclidiana generalizado para los reales) llevados a cabo para calcular dichos números.

- *El aporte de Piaget ayuda a comprender por qué es difícil entender el concepto de infinito.* Piaget hace un énfasis especial en que los conceptos lógico-matemáticos tienen una génesis y una evolución dentro de la inteligencia del sujeto. El análisis histórico-crítico y el psicogenético revelan que las dificultades en la construcción y consolidación de estructuras cognitivas estables depende de las perturbaciones o desequilibrios que a la larga robustecen dichas estructuras. Las perturbaciones provienen de distintas fuentes, como lo son el entorno social, el medio ambiente y el organismo del sujeto. El análisis histórico-crítico permite conocer cómo el concepto de infinito evolucionó a lo largo de los siglos y su formalización iniciada en el siglo XIX con el matemático Georg Cantor, y así compararlo con la senda de construcción del infinito que se sigue en un individuo determinado. En particular, el estudio de la génesis del número es el primer paso para explicar la construcción del infinito matemático en el sujeto cognoscente.

- *Las experiencias de los docentes invitan a la reflexión sobre cómo enseñar el concepto de infinito.* Con Piaget se resalta la importancia que tiene la formación de los conceptos en los sujetos desde sus primeros años de vida, y por esto es que las experiencias docentes analizadas son un material muy valioso para que los docentes de matemáticas en general puedan compararlo y constrastarlo con sus propias experiencias o las experiencias de sus estudiantes, ya sean personales o didácticas, principalmente. Que los docentes puedan recordar sus experiencias para analizarlas y como apoyo para comprender cómo es que conciben el concepto de infinito matemático es vital para una enseñanza efectiva de nociones ligadas con el infinito, las cuales no son pocas en matemáticas a nivel secundario y lo son casi todas en las matemáticas universitarias. Si no se comprende un concepto difícilmente podrá enseñarse de manera efectiva en el aula; la comprensión ayudará a que las estrategas didácticas sean más diversas y no tan limitadas.

6.1. Limitaciones

Previo al desarrollo de la investigación, se propuso un cronograma para la realización de las actividades. Conforme transcurrió el tiempo, hay modificaciones que se realizaron o actividades que se llevaron a cabo en otros tiempos a los propuestos originalmente porque, precisamente, existen limitaciones. Como un proceso de reflexión, se enumeran aquellas que se presentaron para que también otros futuros investigadores tengan en cuenta varias situaciones que se puedan presentar.

1. Desde el 10 de septiembre, el gremio del Magisterio Nacional junto con los sindicatos de profesores, se mantuvieron en huelga como una forma de ejercer presión para que no se aprobara el plan fiscal en Costa Rica. Entre septiembre y octubre se había propuesto realizar los grupos focales con los docentes; actividad que no fue realizada en los tiempos propuestos porque, conforme se contactaban a los docentes, ellos afirmaban que estaban en huelga y se negaban a colaborar en la investigación. Esta situación implicó dos aspectos: un atraso en el desarrollo de la investigación y una preocupación por no tener una cantidad de personas para los grupos focales, conforme los especialistas así lo recomiendan, según la bibliografía consultada.

2. El título de la investigación hace referencia al aporte de la teoría de Piaget, sin embargo, él escribió una cantidad de libros y de artículos muy numerosa. Por tanto, un aspecto que representó un reto: la delimitación de aquello que permitiera responder a los objetivos de la investigación. Finalmente, se optó por leer las versiones finales de Piaget, es decir, la visión "madura" de este autor, puesto que su lectura se facilitaba, considerando también que

esos escritos respondían mejor a los supuestos teóricos planteados por los investigadores.

3. Se realizó una revisión bibliográfica de antecedentes en el país. Salvo algunos artículos referentes a la formalización del infinito matemático, en Costa Rica no se encontraron investigaciones didácticas con respecto a esta noción, pero en países como México, Argentina, España sí hay disponibles varios artículos. Por tanto, con respecto a lo que corresponde a la investigación del tema en Costa Rica, no había forma de realizar comparación alguna.

4. Esta limitación ya estaba prevista por los investigadores: leer a Jean Piaget es complicado. Así lo afirman diversos autores. Particularmente, Dubinsky (2000) menciona que "hay muchos autores que interpretan las ideas de Piaget; existe, en mi opinión, una brecha grande entre los que se dicen intérpretes de Piaget y lo que Piaget dice en verdad" (p. 56).

5. No se hizo una búsqueda extensa de teorías neopiagetianas ni de constructivismos radicales. Esta es una posibilidad, pero la lectura de estas obras se alejaban de los objetivos de la investigación. Esta es una limitación, porque tales obras, al ser más recientes, son mencionadas frecuentemente y representaron un reto en la parte de la delimitación del trabajo.

6. Los docentes durante la entrevista o en el grupo focal preguntaban para saber si lo que estaban respondiendo fue correcto o no. Como en la investigación se llevó a cabo el método fenomenológico, esto representó una dificultad ya que no se debía responder, o más bien, influir en la respuesta que ellos dieran. Algunos docentes comprendieron este hecho, pero otros no. Como investigadores, llevamos a cabo la realización de las técnicas según lo explican los expertos, pero los participantes, como no están acostumbrados a esas modalidades de trabajo, mostraban cierta incomodidad o resistencia

al momento de contestar.

7. No se encontraron investigaciones acerca de lo que piensan los docentes en torno al infinito, pero sí de lo que piensan los estudiantes (esto a nivel internacional). Se cree que este trabajo es una forma incipiente de abordar la problemática y conllevó un desafío el cierre de la experiencia, considerando que los investigadores están optando por el grado de licenciatura.

6.2. Recomendaciones

- Para cursos de didáctica específicos, que se muestre una presentación de lo que hizo Piaget para la reflexión del pensamiento matemático. La construcción del número que este autor realiza es un aporte útil para el estudiantado que está en formación inicial.

- Se propone la lectura crítica de precursores de Piaget. Además, si se quiere aprender de Piaget, que se lea a dicho autor y no a muchos autores que hacen interpretaciones y solo se quedan en algunos aspectos, como en la propuesta de las etapas. Se recomienda, como lectura inicial, la obra Piaget para Principiantes que está en la bibliografía de la investigación. Ese ejemplar guía al lector para que luego pueda especificar la búsqueda de lo que necesite, conforme al área de especialización y no solo en cuanto a Matemática se refiere.

- Nos parece que la explicación de Piaget, principalmente en su obra del pensamiento matemático, es acertada; además, nos confrontó la construcción de número que habíamos hecho hasta el momento con la formación y esto queda como una reflexión final: no solo el infinito es el concepto que se debe escudriñar, hay muchas otras nociones matemáticas asociadas al número que requieren de un estudio completo, como por ejemplo: los números complejos, asumiendo esto para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática.

- Se insiste que el concepto de infinito no es un tema curricular pero que muchos conocimientos matemáticos dependen del uso del infinito, más allá de solo escribir el símbolo como parte de la notación que se enseña. Se recomienda estudiar acerca de la formalización del infinito, aprender de los acontecimientos históricos que permitieron su desarrollo y que se reflexione acerca de las intuiciones adecuadas para mostrar una aproximación al concepto.

- Se motiva al estudiante en formación inicial que investigue más en torno a la construcción del infinito matemático, e inclusive, que ofrezca una propuesta didáctica.

Apéndice A

Infinito potencial y actual

Segun Villabona y Roa (2016),

Infinito potencial. El infinito potencial es la concepción del infinito como un proceso. Este proceso es construido, empezando por los primeros pasos (por ejemplo 1, 2, 3, en la construcción del conjunto de los números naturales) la cual corresponde a una concepción acción. Repetir estos pasos (por la adición de 1 repetidamente) al infinito, requiere de la interiorización de esas acciones en un proceso.

Infinito actual. El infinito actual es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación del proceso anterior.

Apéndice B

La teoría APOE

Según Villabona y Roa (2016), la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) es una interpretación de la teoría constructivista, basada en la abstracción reflexiva planteado por Piaget para describir el pensamiento lógico. Dubinsky[1] (1991) extiende esta noción y la usa para describir cómo un sujeto logra ciertas construcciones mentales sobre un determinado concepto o noción matemática en niveles más avanzados.

> Las siglas APOS significan las acciones ("actions"), los procesos ("processes"), los objetos ("objects") y los esquemas ("schemes"). Éstas son las construcciones mentales que, según esta teoría, un individuo realiza para obtener significados de las situaciones y de los problemas matemáticos. Los mecanismos para hacer dichas construcciones se llaman abstracciones reflexivas e incluyen la repetición, la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación, la inversión, etcétera. (Dubinsky, 2000, p.58)

[1]Ed Dubinsky (1935-) es un matemático estadounidense, fundador de la teoría APOE (APOS en inglés), la cual toma los conceptos piagetianos de acción, esquema, proceso y objeto, así como la abstracción reflexiva, para explicar la construcción de nociones matemáticas avanzadas. En este documento Dubinsky explica su encuentro con la teoría epistemológica de Piaget y su interés por reinterpretarla: `http://www7.uc.cl/sw_educ/educacion/grecia/plano/html/pdfs/linea_investigacion/Otros_IOT/IOT_065.pdf`

Esta teoría describe las estructuras y los mecanismos mentales con los cuales un individuo puede llegar a construir un concepto o noción matemática. Desde esta perspectiva el conocimiento matemático se describe en términos de estructuras que son motivadas por mecanismos mentales desarrollados por el individuo.

Figura B.1: Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático. Villabona y Roa (2016).

Para Dubinsky (1991), la abstracción reflexiva es

> the construction of mental objects and of mental actions on these objects. In order to elaborate our theory and relate it to specific concepts in mathematics, we will use the notion of *schema*. A schema is a more or less coherent collection of objects and processes. (p.101)

En cuanto a procesos y objetos, Dubinsky (1991) menciona que

> We will also sometimes use the term *process* or mental process instead of mental action when we are emphasizing its internal (to the subject) nature. Finally the term *object* will refer to a mental or physical object (avoiding any discussion of the nature of the distinction). (p.102)

Los conceptos matemáticos pueden analizarse por medio de una descomposición genética (la cual no es única), la cual determina las estructuras y mecanismos mentales por medio de los cuales un sujeto puede construir el concepto de manera exitosa:

> One of our goals in elaborating the general theory is to isolate small portions of this complex structure and give explicit descriptions of possible relations between schemas. When this is done for a particular concept, we call it a *genetic decomposition* of the concept. We should also point out that although we only give, for each concept, a single genetic decomposition, we are not claiming that this is the genetic decomposition, valid for all students. Rather it represents one reasonable way that students might use to construct a concept. (Dubinsky, 1991, p.102)

Apéndice C

Guía de entrevista

Universidad de Costa Rica

Facultad de Educación

Escuela de Formación Docente

Departamento de Educación Secundaria

Carrera de Enseñanza de la Matemática

Título de la investigación: "Aporte de la teoría piagetiana para la enseñanza del concepto de infinito a partir de la experiencia de aprendizaje de los docentes" Responsables: Mario De León Urbina, Carlos Robles Padilla y la Dra. Jaqueline García Fallas, directora de tesis.

Buenos días/tardes/noches. Mi nombre es............ y estamos realizando un estudio sobre el concepto de infinito en la formación profesional de los docentes de Matemáticas en educación secundaria. Siéntase libre de compartir sus ideas en este espacio. Aquí no hay respuestas correctas o incorrectas, lo que importa es justamente su opinión sincera. Cabe aclarar que la información es sólo para nuestro trabajo, sus respuestas serán unidas a otras opiniones de manera anónima y en ningún momento se identificará qué dijo cada participante. Para agilizar la toma de la información, resulta de mucha utilidad grabar la conversación. ¿Existe algún inconveniente en que grabemos la conversación? El uso de la grabación es sólo para los fines de análisis. ¡Desde ya muchas gracias por su tiempo!

Datos personales

a) Años laborados para el MEP: ____________________

b) Institución para la que labora actualmente: ____________________

c) Niveles que ha impartido en los últimos 7 años: ____________________

d) Edad: ____________________

e) Universidad(es) en la(s) que se formó: ____________________

En esta entrevista hemos decidido dividir las preguntas por bloques.

- Bloque 1: personal-vivencial

    1. ¿Cuáles han sido sus acercamientos o recuerdos sobre el infinito o ideas afines desde la infancia hasta la actualidad?
    2. ¿Qué importancia tiene para usted el concepto de infinito?
    3. ¿Recuerda qué aspectos fueron claves en la construcción del concepto?
    4. ¿Para usted qué es el infinito?

- Bloque 2: Formación profesional

    1. ¿Cómo fue su experiencia en su formación matemática con respecto al concepto de infinito?
    2. ¿Cuáles estrategias didácticas emplearon sus profesores en cuanto a dicho concepto?

- Bloque 3: Aspectos curriculares

1. ¿Cuál ha sido su experiencia de trabajar el infinito según el plan de estudios del MEP?
2. En aquellos temas matemáticos cuyo uso del concepto de infinito es obligatorio, ¿ha aprovechado la oportunidad de extender la noción de este concepto? De ser así, ¿cuáles oportunidades o limitaciones se le han presentado?
3. ¿Qué contenidos previos pueden ser necesarios para facilitar la construcción del concepto de infinito por parte del estudiantado?

- Bloque 4: Aspectos didácticos

1. ¿Cuáles han sido las estrategias didácticas que ha desarrollado en clases para abordar el uso del infinito en los temas que se le ha presentado?
2. ¿Cuáles de las estrategias mencionadas anteriormente han sido efectivas y cuáles no? ¿Por qué?
3. ¿Qué recomendaciones ofrecería, para sus estudiantes, en la construcción del concepto de infinito?

- Bloque 5: Constructivismo piagetiano

1. ¿Conoce usted el trabajo de Jean Piaget?
2. ¿Para usted qué es el constructivismo?

Apéndice D

Citas del programa de estudios

A continuación se presentan las citas del programa de estudios de matemáticas del MEP que hacen referencia explícita del concepto de infinito. Se resaltan con mayúsculas los conceptos y definiciones que involucran el infinito.

- "Muy ligado a lo anterior, en una circunstancia histórica es posible identificar obstáculos o dificultades epistemológicas que podrían poseer un paralelo con aquellas que se podrían encontrar en los aprendizajes (por ejemplo: EL MANEJO DEL INFINITO, los inconmensurables, etc.)" (MEP, 2012, p. 66)

- "Los resultados de dichas divisiones no deben generar una EXPANSIÓN DECIMAL INFINITA PERIÓDICA, pues dicha noción se estudiará en 8° Año. Sólo se trabaja con resultados con expansión decimal finita." (MEP, 2012, p.196)

- "Para representar fracciones en su forma decimal se deben proponer ejemplos que no sean equivalentes a NÚMEROS CON EXPANSIÓN DECIMAL INFINITA PERIÓDICA. Se trabajará únicamente con representaciones con expansión decimal finita." (MEP, 2012, p.197)

- "Habilidad específica: 2. Identificar números con EXPANSIÓN DECIMAL INFINITA NO PERIÓDICA. Lo que se desea es mostrar números decimales diferentes a los números naturales, enteros y racionales. Es importante considerar el reconocimiento de patrones de construcción que generen números decimales con expansión infinita no periódica, por ejemplo: "0,1010010001... (cada vez agregar un cero más antes de escribir 1)". Esto permite establecer conexiones con el área de Relaciones y Álgebra." (MEP, 2012, p.290)

- "16. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. 17. Resolver ecuaciones algebraicas fraccionarias que se reducen a ecuaciones del primer grado con una incógnita. 18. Resolver ecuaciones literales para una de las letras. Se recomienda implementar ejemplos donde se contemplen los casos en que la ecuación tenga solución vacía o que tenga INFINITAS SOLUCIONES." (MEP, 2012, p.336)

- "Para las ecuaciones, incluya aquellas que no tienen solución, las que tienen solución única y las que tienen INFINITAS SOLUCIONES, como por ejemplo: $x^2+9=0$, $x^2-6x+9=0$, $x^2-2=-(2-x^2)$." (MEP, 2012, p.349)

- "3. Utilizar el concepto de frecuencia relativa como una aproximación al concepto de Probabilidad, en eventos en los cuales EL ESPACIO MUESTRAL ES INFINITO O INDETERMINADO. Lo establecido hasta este punto en materia de probabilidades limita el análisis de situaciones en las que se conoce con detalle el espacio muestral. Desafortunadamente eso no siempre ocurre pues en muchas ocasiones EL ESPACIO MUESTRAL ES MUY GRANDE, ES INDEFINIDO O INCLUSO ES INFINITO. Para complementar el análisis se sugiere generar situaciones aleatorias en las que el espacio muestral sea indeterminado o infinito." (MEP, 2012, p.365)

- "De esta manera, cambiando el quinto postulado, Gauss, Lobachevsky y Bolyai crearon independientemente geometrías no euclidianas; es decir, geometrías en las que el quinto postulado de Euclides no se cumple. Una de estas geometrías asume, en sustitución del quinto postulado, que POR UN PUNTO EXTERIOR A UNA RECTA PASA UN NÚMERO INFINITO DE RECTAS PARALELAS A LA DADA (es decir que no la cortan). Otra asume que por un punto exterior a una recta no pasa ninguna recta paralela." (MEP, 2012, p.403)

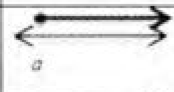
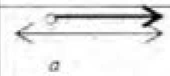
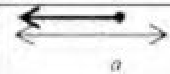
- "Utilizar SUBCONJUNTOS FINITOS O INFINITOS DE LOS NÚMEROS REALES, en particular el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el de los números enteros $\mathbb{Z}$, los decimales $\mathbb{D}$, los racionales $\mathbb{Q}$, los irracionales $\mathbb{I}$, $\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-$, para los enteros positivos y los negativos respectivamente, $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$,para los racionales positivos y los negativos respectivamente. Otros conjuntos de interés son el de los números pares, el de los impares y el de los números primos." (MEP, 2015, p. 406).

- "Se sugiere proponer sistemas con solución única, solución vacía y con INFINITAS SOLUCIONES. Enfatizar el significado gráfico de cada uno de los tres casos: rectas que se intersecan en un punto, rectas paralelas que no se intersecan, rectas coincidentes." (MEP, 2012, p.412)

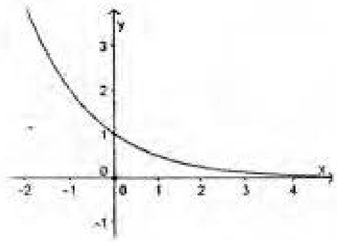
- "EL CONCEPTO DE INFINITO no se introduce formalmente en este nivel educativo, sin embargo para la construcción y el estudio de gráficas SE PUEDE EXPRESAR DE MANERA INTUITIVA SU SENTIDO." (MEP, 2012, p.414)

- "EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES $\mathbb{I}$ ESTÁ FORMADO POR LOS NÚMEROS CON EXPANSIÓN DECIMAL INFINITA NO PERIÓDICA." (MEP, 2012, p.419)

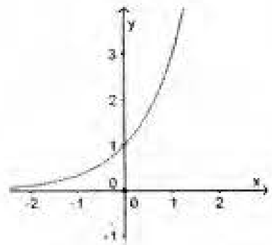
- Intervalos (MEP, 2012, p.419)

Notación de intervalo	Notación de conjunto por comprensión	Representación gráfica.
$[a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$	
$]a,b[$	$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$	
$[a,b[$	$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$	
$]a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$	
$[a,\infty[$	$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$	
$]a,\infty[$	$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > a\}$	
$]-\infty,a]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \leq a\}$	
$]-\infty,a[$	$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < a\}$	

- "Observe la diferencia gráfica cuando el valor de a es menor que 1, y cuando a es mayor que 1. En ambos casos el dominio es toda la recta real, es decir, EL INTERVALO $]-\infty,\infty[$ y el ámbito está formado por todos los números reales positivos. La gráfica interseca el eje y en el punto $(0,1)$. Si $a > 1$, la función es creciente y su gráfica se acerca al eje x cuando x TIENDE A MENOS INFINITO. El semieje negativo de las abscisas es una asíntota horizontal de la gráfica. Si $0 < a < 1$, la función es decreciente y su gráfica se acerca al eje x cuando x TIENDE A INFINITO. El semieje positivo de las abscisas es una asíntota horizontal de la gráfica. Una forma de hacer ver esto es por medio de la elaboración de tablas de valores donde se aprecie el comportamiento asintótico de la función." (MEP, 2012, p.423)



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$g(x) = 3^x$

Apéndice E

Grupos focales

E.1. Notas

- El primer grupo de participantes opinará sobre la información recopilada y qué les parecerá eso.
- El segundo grupo de participantes será elegido de los entrevistados para dar credibilidad a la participación.
- Presentar información a docentes por medio de cuadros comparativos.

E.2. Preguntas

- Con base en las "definiciones" de infinito vistas, ¿qué opinan al respecto?
- Al grupo 1: después de las entrevistas, ¿investigaron sobre el tema, les presentó interés, se sintieron inquietos al respecto? ¿En clase cuando surgió el tema de infinito, qué hicieron al respecto?
- ¿Consideran que las experiencias (personales, académicas, MEP ...) en torno a dicho concepto son fundamentales para la construcción del infinito?

Apéndice F

Grupos focales transcripción

F.0.1. Grupo 1: J, E y K

J: Al ojear este documento yo la primera conclusión que extraigo es que la noción de infinito en el mundo cotidiano es sumamente vaga, es dispersa, no es una construcción clara, nítida, y partimos mucho de los ejemplos, de la cotidianidad. Por ejemplo, a mí me dijeron que los granos de arena en una playa son infinitos porque no se pueden contar, sin embargo, todos sabemos que por metro cuadrado podríamos hacer un buen ejercicio de la aproximación de la cantidad de granitos de arena que hay, entonces hay como una especie de diferenciación metodológica conceptual, en tanto el infinito es algo que se pierde en nuestra noción de tiempo, pero en lo concreto podemos hacer aparte de nuestra experiencia vivencial cotidiana un esfuerzo por alcanzar ese otro infinito, por alcanzar la totalidad, por alcanzar ese modo que se nos escapa en nuestra noción de tiempo.

Nosotros somos seres normales, habituales con un espacio y tiempo definido, nacemos y morimos, sin embargo, el tiempo pareciera que no hay un límite para la izquierda o para la derecha, o sea que no podemos señalar el año de creación del mundo ni el año de conclusión, igual que cuando nos dicen Dios es un ser infinito, cuesta pensar en Dios como un ser infinito, porque yo soy un ser finito, yo tengo un concepto de infinitud permeado por un infinito actual, por un infinito en el que yo vivo y en el que yo me desarrollo, la concepción sigue siendo bastante etérea, es casi metafísica más allá de lo cotidiano.

J: En primer lugar, con las secuencias, la generalización, porque cuando yo empiezo a enseñar el proceso de construcción de una secuencia matemática, de una sucesión (series no las podría mencionar porque no están habitualmente, lo hacemos es con sucesiones), entonces tenemos enormes dificultades porque cuando quiero dar el salto a explicitar, a decir: "y así por siempre" "y así por los siglos de los siglos" para dejar plasmado una visión de que eso va a suceder en un tiempo, la temporalidad o la falta de conceptualización en mis estudiantes les impide crear una buena noción para ellos.

Cómo acercarme a 0 por ejemplo, con $1/x$, voy sustituyendo, $1/x$, le doy a x el valor de 1, x voy con el valor de 2 y con una calculadora a la par, entonces para mostrar que noción puedo yo generar, sobre todo en nociones de límite, pero diay ustedes saben que las nociones de límite no las enseñamos, trabajamos con otro tipo de acercamiento.

Por ejemplo, en el colegio usamos mucho que los números naturales son 0, 1,2 3, 4, 5, 6, 7, y algunas veces yo uso una payasada, 8, 9, 10 y me voy acercando a la puerta, y paso el umbral de la puerta y sigo contando fuera y sigo y sigo y escuchan y ellos se burlan, se ríen, verdad y yo me vuelvo al aula y les digo, no he terminado, ellos me dicen, siga siga porque ellos quieren que yo me vaya del aula, que no dé la clase. Esa payasada que pareciera ser una absurda noción o una ejemplificación del infinito matemático para el conjunto de los números naturales, con ello yo intento con esa pantomima dejar plasmada la idea que esa sucesión continúa así al infinito. Esa es una de las nociones más clásicas. Puedo también trabajar otro tipo de argumentos, por ejemplo me acuerdo de la espiral de Arquímedes, la que es 1, 1 cateto de triángulo rectángulo construido sobre la recta numérica de radio igual a 2, que es la hipotenusa, y después vuelvo a colocar tomando como base la hipotenusa raíz cuadrada de 2, le agrego perpendicularmente otro cateto de longitud 1 para formar de nuevo y entonces ahí le voy mostrando a ellos una secuencia que va en espiral y que ellos dicen: eso se pierde en el tiempo, no podemos hacer los dibujos, sí ya no podemos hacerlo, se lo pueden imaginar, sí porque los triángulos van montados unos sobre otros, la espiral de Teodoro perdón, para ejemplificar en los procesos de construcción que tienen que ver con el teorema de Pitágoras, que me sirve para muchas cosas. ¿Cómo esto sigue? Vamos a dar una formulita y entonces eso sigue, sí eso sigue, entonces esos números tienen nombre y se llaman el conjunto de los números irracionales, y algunos de estos van a ser como por ejemplo, raíz cuadrada de 2 que no va a ser un entero, y ya usted empieza a clasificar el proceso de la construcción, les da un ejemplo de que se sigue así por siempre, cuando estoy enseñando la supuesta irracionalidad de pi, y ya con un algoritmo divisorio y dividamos esto entre esto, y esto nos da esto... ¿Y después de aquí qué sigue? Ahora 1/3, agregamos un 0 y ponemos 3 por 3 (0.333).

J: Sí hay que darle relevancia, sí hay que tocarlo, sí hay que tenerlo presente, porque los conjuntos no son finitos, no trabajamos la finitud en la construcción de los conjuntos y trabajamos con conjuntos numéricos, estamos trabajando con aproximaciones, estamos trabajando con habilidades que nosotros queremos forjar en ellos y la noción de infinito es determinante para la construcción de muchos conceptos matemáticos. No podemos abandonarla, no podemos ser indiferentes a esa noción, solamente que en secundaria tenemos que afinar, cómo la abordamos, cómo la trabajamos.

Mario solicita un aporte desde el punto de vista filosófico:

J: Cuando nosotros trabajamos con el conjunto de los números naturales muchas veces recurrimos a los subconjuntos de los números naturales, por ejemplo, el conjunto de los números pares, entonces alguien pregunta. Pero dígame una cosa: se puede comparar el conjunto de los números pares con el conjunto de los números naturales. Sí, sí se puede comparar con qué... Se puede hacer una correspondencia con el número par con uno natural, otro par con otro natural, pero diay el de los naturales es más grande. Sí, es más grande, pero como el otro chiquitillo, siendo parte de ese otro casi que también tiene el mismo comportamiento, eso quizás no lo ve el estudiante. Entonces, el infinito de los naturales debe ser más grande que el de los pares... Bueno, ahí se los dejo. Piense si ese infinito es más grande que ese otro, valoren... ¿cuál tiene más elementos? Diay los naturales, entonces ese infinito es mayor y sin embargo, lo trabajamos con otras nociones, con otros acercamientos, empezamos a considerar conjuntos con una mayor cardinalidad.

J: Wow, eso sí que es difícil de decir, es bien difícil decir que es el infinito. Yo le podría decir una discusión acerca de qué es el amor, podría tardar horas, semanas, mañanas y tardes definiendo el amor desde el punto de vista poético, filosófico, antropológico y al final si no experimentas el amor, si no tienes amor, entonces de que sirve hablar tanto del amor. En Matemática es bastante difícil decir qué es el infinito, que podría decir una correspondencia, etc, etc crear conjuntos con cardinalidades, y hablar de números transfinitos, y hablar que la cardinalidad del conjunto mayor es mayor que las cardinalidades de sus subconjuntos y empezar a construir una teoría de infinito... pero a lo real, el infinito parece que es como una quimera, como una idea que se nos escapa, como una aproximación que nosotros hacemos, tratando de buscar siempre en medio de nuestra finitud, alcanzar aquello que no tiene fin. Y la paradoja está en que nosotros siendo seres finitos intentamos alcanzar el infinito. Lo difícil que aun a mí me resulta desde la perspectiva teológica y siendo creyendo, cuando me dicen que Dios es el Alfa y el Omega, y me dicen que el Alfa es el principio y Omega es el fin. Pero, ¿cuál es el principio y fin? Entonces, es que Él es infinito, pero cómo capto, cómo percibo para mí esta noción siendo un mortal. Yo empecé a tener conciencia a partir de cierta edad y puedo relatar hechos de mi vida a partir de cierta edad y en algún momento mi vida se va a acabar Soy un ser finito que está inmerso dentro de un proceso de infinito social, de infinito del mundo, y eso es lo paradójico del asunto, que siendo finito trate de capturar un proceso que está más allá de mis posibilidades físicas, humanas, entonces pareciera que el infinito es como una persistente imagen de alcanzarlo todo y de llegar al fin, pero ese fin se sigue escapando de mis manos por más esfuerzo que yo haga.

Previo, Mario habló.

E: Diay, pero yo crecí en el mar. Mi casa estaba cruzando la calle y ahí estaba uno en el mar, cuando se inundaba, se inundaba. Entonces, mi patio era... Me acuerdo que yo veía exactamente eso, ese vasto terreno lleno de arena, uno agarra el puño y se cae por todo lado. Usted se acuesta en la playa, ve la cantidad de estrellas y ahí empieza el chiste... ¿cuántas estrellas hay? Y no se puede contar. Uno ve en el agua un montón de caracolitos que quedan cuando se baja la ola y por más que usted cuente, van a ver y puede seguir contando, y queda mucho más. Es un primer acercamiento que uno tiene del infinito. Mario le dice que hay una cita de que el infinito es intangible. ¿Qué opina acerca de esto? E: Lo veo en la parte filosófica, religiosa y todo... eso tampoco lo puedo tocar y entonces tampoco existe. Es un símbolo que me representa él no haber un tope en el cual yo me detenga. Yo puedo continuar, continuar y continuar. Es como el conocimiento: el conocimiento en ninguna parte se detiene, el conocimiento continúa y no puedo detenerme y ¿cómo no puedo ver el final, entonces puedo decir que no existe? Igual que una carretera... Uno lo ve allá, allá... y yo sé que a algún lado me lleva.

Mario comenta la experiencia de $1/x$ y acercarse a 0.

E: Eso fue lo que imaginé cuando él estaba hablando de hacer una homologación de los naturales con los números pares, pero yo lo hice con los números racionales. El 1 con el 1/1, el 2 con el 1/2, el 3 con el 1/3, entonces eso hay una infinita cantidad de números entre el 1 y el 0, porque se va acercando a 0, es un cero más cero. Dicen los chiquillos, estoy con un cero cada vez más cero. Entonces ahí estoy diciendo que en un espacio significativo de una unidad tengo una cantidad infinita de números porque nunca voy a dejar de contarlos. Entonces un día estaba viendo esa película: "Bajo el mismo cielo" y estaban hablando que hay infinitos más grandes que otros infinitos y me acordé de eso.

Mario comenta que los profesores mencionan que muestran videos. El tema infinito es ajeno a la realidad o es algo cotidiano, esa es la pregunta.

E: Está en todo lado, es lo que le estoy diciendo. Una carretera, pero no veo por dónde está. Y empiezan a discutir, tiene un límite.

Mario comenta que los docentes hablan de la formación.

E: Usted sabe que yo no me acuerdo y estoy tratando de acordarme y en ninguna parte me habían hablado acerca de qué es el infinito. Yo estuve en la Escuela de Matemática de la UCR, pero que hayan cogido tres horas para explicarme qué es el infinito, el simbolito... Mario comenta que en la UCR era solo teorema y demostración, según algunos de los docentes entrevistados previamente.

E: No había demostración acerca del infinito, asociado con bolas, cardinalidades porque lo tuve que repetir como dos veces.

J: La imagen que tengo del infinito es la del límite, me recuerdo por ejemplo cuando n crece en $1/x$, voy sustituyendo la x por valores y es una idea aritmética de sumas, de capturas para irme justificando que de $1/x$ entre tanto voy haciendo la x más grande, más me voy acercando a 0, para intentar aritméticamente dejar grabado en mí que la noción está dando vueltas en mí que yo sensorialmente visualmente, adquiera la noción de infinito.

E: Hay conceptos básicos, conceptos primitivos en Matemática que no podemos definirlos, pero sí podemos representarlos. Lo mismo con el infinito, no lo podemos definir de manera concreta, pero sí lo podemos representar y todos tenemos una noción ante preguntas como: ¿Cuándo se creó el universo? Dígame un número grande y yo le doy otro más grande. Ellos no saben el concepto, pero lo podemos representar.

E: En el colegio uno ha encontrado como dificultad la apatía. ¡Ya sabemos qué es, cómo se representa y terminó la curiosidad científica!

Hablando de intervalos reales: E: Profesora, ¿por qué son infinitos? Tomamos en cuenta que como solución tomamos un número allá larguísimo (por qué lo dejamos abierto). Y viene una gran duda, ¿por qué dejamos abierto el infinito? Porque es un concepto (y me la creen).

J: Ellos lo patinan, no les llama la atención, no les interesa. El conjunto de los números reales es al que le podemos buscar la completitud, qué significa eso, aquí dice que es un conjunto completo. ¿Cuál número está entre 1 y 2? Profe diay 0,5. ¿cómo nace 0.5? Tomo 1 y... No no no profe. Entre 1 y 2 está 1.5. ¿Y cómo se puede llegar a él? Tomemos 1 más 2, 3. Dividido entre 2, 1.5. Ahora, seguimos buscando más números. Pero ahora entre 1 y 1,5. Tome la calculadora. 1 más 1,5 y todo eso lo divide entre dos. Eso nos da 1.25. Y eso está ahí... sigamos llenando. Hagámoslo por acá, y por qué no lo hacemos para acá: ¡Toda la recta la vamos llenando de números!

No queda un solo campito en la recta que yo no lo pueda llenar. ¿Qué quiere decir eso? Que el conjunto de los números reales es completo, está lleno, no quedan huecos. Antes sí quedaban huecos cuando trabajaba con los naturales, entre el 1 y el 2 no había más números naturales, ahí sí que había huecos de huecos. Pero ahora no. Ya lo podemos llenar, aritméticamente lo podemos llenar. Nosotros hacemos en el colegio un esfuerzo con algunos ejemplitos de capturar el infinito por medio de procedimientos aritméticos para que a ellos les quede claro, pero ellos quedan nadando. Queda ahí que se lo imaginen, que sean curiosos.

Mario motiva a que se hable en funciones, con asíntotas (dificultades).

E: Ellos se pierden por todo lado. Hay que tener mucho cuidado y los profesores en eso tenemos mucho la culpa. Cometes los errores cuando le dices a un muchacho: vamos a resolver Pitágoras, vamos a sacar raíz cuadrada, pero nunca le decimos al muchacho que es cuatro o menos cuatro, y que tenemos que desechar la negativa. Cuando llegan a la universidad, es un problemón. Cuando se lee una gráfica de izquierda a derecha. Y con límites se puede leer al revés porque yo me puedo acercar por la izquierda o por la derecha, igual que con las asintóticas... casi cero, pero nunca les va a dar cero.

E: ¿A qué se refiere usted con infinito matemático? Yo le voy a ser muy franca. Hay muchos conceptos que nos enseñaron en la universidad y que creo que no son adecuados enseñarlos a los muchachos. Me sirven a mí como docente, para poder bajar el conocimiento a los estudiantes, pero no dárselos como me lo dieron a mí porque no me lo van a entender. Hay cuestiones que me han costado entender 50 años y a veces digo. Ahhhh!, esto era y eso me ayuda a encontrar una forma para explicarlo a los estudiantes.

E: Yo no sé qué pasa con los muchachos. Antes uno decía cosas y las entendían, ahora por más que uno use un vocabulario hasta pachuco, y no lo entienden.

E: Ay si no, qué es el infinito para mí. Se lo quedo debiendo. Es solamente un símbolo, lo más grande que me pueda imaginar de una manera, pero me lo puedo imaginar más grande y voy a seguir en ese jueguito y nunca voy a parar.

K: En realidad no hay aportes. Sino que pide observar la noción de infinito visto desde muchos puntos de vista, religioso, filosófico y desde el concepto de conjunto matemático.

Los estudiantes manejan el concepto de infinito, al trabajar en el área matemática lo relacionan con los conjuntos numéricos. Sin embargo, al limitarlo, por ejemplo en la solución de una inecuación, el dominio de una función o al hablar de conjuntos mayores o menores a x, se les dificulta reconocerlo.

Es importante, principalmente para estos estudiantes con capacidades superiores donde su necesidad de ampliar sus conocimientos, como por ejemplo al hablar que una ecuación cuadrática si el discriminante es negativo decimos que no tiene solución real, ellos asumen que no tiene solución, sin embargo, nos limitamos a dejarlo hasta ahí, por todas las razones que sabemos: tiempo, programas de estudio, mediación pedagógica, complejidad. Cuando podríamos explorar en sus posibles soluciones imaginarias.

Para mí el concepto de infinito matemático sería el concepto de un todo posible, que existe posible de aplicar, resolver y determinar.

Lo relaciono con los conjuntos numéricos al explicarle la existencia, el conteo de los números para un niño de primaria, como lo mencioné anteriormente, las soluciones posibles de una inecuación.

Además pienso que el concepto es parte de la misión de esta ciencia donde detrás de este resultado podemos llegar a algo más y después a algo más.

F.0.2. Grupo 2: R y S

Carlos: buenas tardes. Les agradecemos por su participación. En la experiencia de la entrevista en profundidad se hicieron 7 preguntas divididas en varios bloques, nos interesa enfocarnos en algunas de ellas y saber si hubo un cierto impacto después de ese momento hasta este instante en su experiencia como docente. Dentro de las preguntas que se habían propuesto dentro de este trabajo se les había preguntado acerca de sus acercamientos al concepto de infinito desde la infancia hasta la actualidad, y hubo una pregunta relacionada ¿para usted qué es el infinito? con base en las definiciones, tanto la que usted dio como las que dieron los otros, ¿qué opina al respecto?

R: El concepto de infinito como tal lo trabajamos en la universidad a través de cursos como cálculo, en sucesiones. Epistemológicamente no es algo que se trabaje en la carrera y en historia se abordó poco, en los colegios cuando el tema se requiere usar con estudiantes veo que la mayoría lo ven como una percepción intuitiva, tratar de generar en el estudiante y nosotros mismos la idea de algo no medible, la idea que continúa y no se detiene, tratamos de buscar ejemplos lo más concretos posibles donde al estudiante le quede esa idea de algo que continúa, que no se detiene. La mayoría lo menciona como intuitivo, percepciones, ideas. Poner a alguien a contar hasta que se canse o en la recta numérica cuando decimos al estudiante que no se puede representar: buscamos un símbolo que lo represente. Que el estudiante tenga en su mente de que hay algo que no se puede limitar ni en el tiempo ni en el espacio, y por lo tanto le asumimos a eso un nombre y lo relacionamos con un concepto de infinitud.

Carlos: Después de la entrevista en profundidad, ¿investigó un poco acerca del tema?

R: No, porque me avoco a lo que nos piden en el programa, crear ideas de intuición para el estudiante, no ha sido un tema que me interese mucho a mí. Lo veo más filosófico, en la universidad solo era visto como una posibilidad de solución, cuando hablábamos de intervalos, de la construcción de los elementos. No sé si hay un interés real del tema en la universidad ahorita, en aquel tiempo. Y lo usamos como un trabajo para un tema específico. Pero no más allá.

Carlos: Eso que usted comenta está expresado en la página 414 del programa, en donde el concepto de infinito no se introduce formalmente en el nivel educativo pero para la construcción en el sentido de gráficas se puede expresar de manera intuitiva. ¿Usted cómo entiende ese párrafo?

R: Poder crear en el estudiante, no darle, el estudiante debe generar a partir de algo una idea, una forma es buscar algún modelo, alguna construcción donde el estudiante caiga a cuentas en algún momento de que el concepto no se detiene, no va a parar, por ejemplo, hubo una idea interesante en noveno año cuando tenemos que ubicar números irracionales en la recta numérica: es fácil con una regla ubicar números enteros, es fácil ubicar fracciones dividiendo, pero cuando tengo que colocar un número como $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$ ya no es tan simple hacerlo solo con regla, ahí requerimos de otras herramientas. Una forma de hacerlo es a través del teorema de Pitágoras. Cuando se hace reiteradamente el estudiante pregunta que cuándo parar. Ahí viene nuestra intervención: esto puede continuar, puede seguir. Los irracionales están ubicados en la recta, tienen un espacio ahí, y son infinitos. Puede seguir haciendo un caracol eternamente, cuando está ubicando también expansiones decimales. Es interesante, en noveno, el estudiante tiene que aprender a estimar valores, un tema que es bastante lindo, en donde el estudiante me da un estimado de $\sqrt{8}$ con dos decimales al menos. El se dará cuenta de que puede sacar los decimales que quiera, si lo hacemos a mano puede sacar los que quiera. Para un estudiante de ahora sacar 7 decimales es una cantidad muy grande. Ellos preguntan ¿cuándo acabo, cuándo termino? Generar en su mente que existe un número que no va a tener un periodo y ese número podemos sacarle eternamente decimales. El infinito es algo que no se adapta a nuestras normas cotidianas de vida, pero se usa. Las raíces las usamos, pero nadie va a la ferretería a pedir media raíz cuadrada de clavos, pedimos medio kilo, medio metro. Vamos buscando estimaciones.

Carlos: En el programa están presentes 5 áreas de trabajo, ¿en cuál considera usted que se dificulta más esa noción intuitiva de trabajo con el infinito?

R: Más que todo cuando se usan intervalos, el problema es el trabajo previo... el concepto de intervalo por comprensión le cuesta al estudiante porque por error nuestro también y error de los textos , trabajamos solo con números enteros, usted habla de intervalos cerrados de 1 a 7 por ejemplo, y ellos entienden que los números que faltan son el 2, el 3, 4, 5, 6. Alguno más brillante entenderá que ahí están las fracciones, pero hasta ahí. En bachillerato se les dificulta cuando se les pregunta sobre un posible valor que está dentro de tal intervalo, por ejemplo con dominio y le dan una raíz, y el estudiante no puede ver que esa raíz está ahí. Tenemos que empezar a darle al estudiante otro tipo de ejemplos, yo trato de no usar solo enteros para limitar intervalos. A un estudiante se le dificulta cuando una ecuación cuadrática da raíces con números irracionales. Hay que enseñar a ubicar números en un intervalo que no sean solo enteros.

Carlos: ¿Considera que las experiencias personales, académicas, en la institución, son fundamentales para la construcción del infinito?

R: El programa es muy diverso en varias áreas y hay poco tiempo para pasar de un tema a otro. También hay que ver el interés de la persona que recibe la información, y en general es de manera impuesta. Puede haber desinterés en dar el tema bien y por ejemplo puede dar el símbolo oo como dos bolitas pegadas y el estudiante se queda con el símbolo equivocado. Una simple banda pegada en los extremos contrarios y ponerlo a cortar le genera un concepto interesante. El problema es que en la parte didáctica en CR no está muy desarrollado, el área de didáctica de la matemática. Yo tengo una licenciatura en didáctica de la matemática y trato de buscar ideas que que les dé curiosidad a los estudiantes. Hay compañeros que dicen que hay temas que nunca más se vuelven a ver y por eso no los dan, por ejemplo de noveno, y que en décimo y undécimo no aparecen. El programa en décimo habla del tema de interpolación y de aproximación de curvas que se aproximen de manera lineal y otras. El estudiante debe dar ese salto del análisis, de la intuición, del razonamiento. Ver los números no como algo frío, sino que puedan cuestionar.

Carlos a S: ¿Pudo leer el material que le proporcionamos? Para ampliar, con base en las definiciones vistas, ¿qué opina? ¿Pudo investigar algo acerca del tema?

S: Habían docentes y las preguntas que ustedes hicieron. Uno en el colegio no lo tiene muy claro, no lo profundiza, algunas personas coinciden ahí con eso, es como muy intuitivo. No es un concepto que se enseñe, la verdad. Después de la entrevista me pareció bastante curioso el tema; empecé a ver cuestiones, por ejemplo, mi hijo que está en quinto grado, me habló del infinito y es algo que se supone que en primaria que lo deben de tener bien claro, sin embargo, después de la entrevista, no es algo que todos los estudiantes lo tengan claro y en mi experiencia es algo como muy obvio. Todavía a nivel universitario cuando uno les dice "un número irracional que tiene una expansión decimal infinita" y la calculadora les da nueve decimales todavía no tienen esa noción.

No investigué profundamente del tema pero si me di cuenta de coas que creí que eran muy básicas que manejaban los estudiante por ejemplo los intervalos, ¿por qué me dejan cerrado el intervalo en el infinito? Me doy cuenta de que ellos lo ven como un número, esa noción algebraica o simbólica de ese intervalo. He sido más perceptiva en clases. Mi hijo de quinto grado me dijo que el infinito es solo una noción, y yo le pregunté que dónde había aprendido eso de noción.

Carlos: compartíamos con R., con respecto a la noción intuitiva de la página 411, ¿qué opina al respecto?

S: Que no, los estudiantes no ven al infinito, una flecha, eh no. Cuando no tienen la flecha piensan que sigue, no hacen ese paso de lo que es la gráfica a ese concepto intuitivo del infinito y tampoco lo hacen cuando hablamos de los intervalos, no es tan evidente, y ese paso de lo simbólico, la gráfica a la idea de infinito de manera intuitiva no es tan sencilla.

Carlos: ¿Cuál área considera que se dificulta más trabajar el concepto de infinito?

S: Los intervalos, eso sería relaciones y álgebra, en funciones. Otra área, números. Hay un apartado en el programa que habla de números muy grandes y muy pequeños y habla de teras, megas, gigas, hexa; uno lo ve pero con una gente de la universidad nos dio un número con 10 a la 12 y les pregunté cuánto es, ¿qué es esa cantidad? Hablando del déficit fiscal aproveché de que el hueco era de billones, pero esos estudiantes nunca habían escrito ese número de 10 a la doce. En noveno, no relacionan qué tan grandes o qué tan pequeños son los números, pues los números son infinitos. Además de ese, ¡me doy cuenta con mi hijo que ellos ven números grandes! Millones, trillones, en la escuela. No sé si es que las generaciones anteriores no han visto esos grandes números o no tuvieron la necesidad de utilizarlos, porque se usan mucho en almacenamiento digital. No pueden ver que en un intervalo hay infinitos números, por ejemplo entre 1 y 2 porque ellos solo ven el 1 y el 2 pero no ven más números.

Carlos: La problemática parece ser la de los intervalos de extremos enteros. ¿Consideras que las experiencias personales, etc., son fundamentales para la construcción del infinito?

S: Sí, cada persona puede generar la idea. Cuando uno empieza desde pequeño a contar y ver que sigue y sigue. Pero uno no sigue hasta el fin, sino que es un asunto meramente matemático. Una persona que no le guste la matemática no sigue con esa idea.

Carlos: Sobre el constructivismo y Piaget.

Interviene Mario con síntesis sobre Piaget.

Carlos: ¿Cuáles didácticas se están aplicando actualmente? R: El constructivismo, tenemos una forma contradictoria de evaluarlo. Yo aplico el método socrático. Tengo a alguien que sabe más que mí, lo consulto. Descubro a través de ayuda. El estudiante "descubre" con ayuda del docente. El constructivismo es muy amplio: no solo es construir, es descubrir, ensayo y error. A través de un error puedo generar conocimiento verdadero. Resalto el error para aprender. En noveno le dije a mis chicos que buscaran qué significaba el símbolo de Google, y les dije que si sabían que era un concepto matemático. Hay un video muy lindo de los 80s de Carl Sagan y hablaba del gogol. La empresa Google lo que nos dice es que tiene una ilimitada capacidad de información que ofrecernos. La calculadora del teléfono es más potente que las nuestras y con los muchachos lo hemos trabajados. Con el constructivismo no es ensayar, tengo un control y me guío para llevar aprendizaje. La pregunta es ¿quiere el estudiante aprender realmente? El programa actual no contempló si el estudiante quiere aprender

Apéndice G

Experiencias en tablas

Las experiencias de los docentes de las entrevistas en profundidad se ordenaron en tablas.

1. Experiencias personales

Docente	Experiencias
ANAV	El pensar en las estrellas, los granos de arena en la playa, un video de una estrella dentro de otra y otra y otra. El poder entender la noción con cosas palpables, como se me presentó con la arena y las estrellas, y el video del pato Donald, donde el locutor dice que imagine un lápiz con una punta muy fina, que puede continuar haciendo estrellas dentro de otra.
AV	Pues, la verdad es que el concepto de infinito no ha sido como algo que ha ocupado mi reflexión, o muchas horas de reflexión. Estoy hablando no desde el punto de vista matemático, sino de la cotidianidad, simplemente usar la expresión infinito para referirme a algo que es muy, muy grande, como que no logro visualizar su fin. Como puede pensar decirte: "El amor de Dios es infinito", alguna expresión tal vez de este tipo.
DAM	Generalmente leo mucho, es mi segundo hobby, yo no entendía muy bien el infinito, todo aquello que no pueda sentir u oler, el libro de arena de Borges. En ese libro se trata de explicar de un modo más tangible lo que sería el infinito, a partir de ese libro es como entendí bien la idea.

	Perfectamente el infinito si lo sacamos no sería casi necesario, después de cierta cantidad de números se hace abstracto, uno lo puede olvidar, no es tan necesario, con números reales, completitud de números reales, desde Q, la recta no se la podemos… línea completa, esa línea nunca fue completa, y que todo fue una farsa, que tiene huecos.
HUM	De niño sería el ver el espacio, contemplar el cielo estrellado y pensar en la cantidad de estrellas y demás elementos que se encuentran allí. De joven sería la cantidad de conocimiento que se puede generar, en donde para una sola persona resulta imposible de conocer. En primaria no recuerdo exactamente, tal vez se hablaba de infinito en la idea de la cantidad de números que se podían conocer, o bien hasta donde se podía mirar al campo. En secundaria tenía más relación con un asunto aritmético, la cantidad de valores que se podía manejar y los que ya sólo nos quedaba imaginarnos, como en el caso de los números reales, su relación para indicar intervalos. Gráfica y algebraicamente el concepto de función. En cómputo los ciclos recursivos en un programa, que si no se le ponían una condicionante, se volvería un ciclo sin fin. El cálculo de valores irracionales, los cuales su expansión decimal no se detiene. Para mi es importante porque me revela la idea de que no hay algo que nos detenga. Nos recuerda que no hay un fin concreto, que siempre se puede seguir. Eso viéndolo desde un punto filosófico, diría yo. Me imagino que la filosofía tuvo mucho que ver y la visión de las cosas, desde la perspectiva humana y su lugar en el universo. Más allá de eso, admito no me he puesto a pensar en las bases de la formación de este concepto.

KEN	En secundaria sí un toquecito cuando empezamos a ver el tema de funciones. La profesora sustituía y veíamos cantidades muy grandes en la calculadora y dependiendo del infinito daba como cero. Sinceramente en la aplicación diaria no le he visto ninguna importancia, en lo que es formación de estudiantes.
MAG	Claro, desde que se habla de la percepción de conjuntos de números. En primaria se habla de que los números nunca terminan, esto con el entendido de que no existe el número más grande de todos. En secundaria el concepto se conserva en cuanto a conceptos numéricos, pero se extiende al estudio del comportamiento de los números decimales, representación de intervalos y análisis de gráficos. Recuerdo que de pequeña solía jugar con una amiga, a ver cuál de las dos lograba decir el número más grande, pero teníamos la regla de que ambas teníamos que mencionar en algún momento números con unidades, decenas, centenas, y así sucesivamente, hasta que una de las dos se cansaba y decía que el mayor era el infinito. Hasta ahí llegaba el juego porque no había nada más después del infinito.
REQ	Acercamientos formales en el colegio con intervalos reales, solución de inecuaciones, dominio y ámbito de funciones cuadráticas, trigonometría, dominio de la función tangente. Luego en la universidad.
SR	Yo le puedo hablar desde pequeña cuando mi papá se sentaba y me decía: ejemplo, la pista, de que nosotros veíamos la pista larguísima, esto es que continúa, es infinito hasta llegar al lado de la frontera

	en escuela me acuerdo que se mencionó algo así como en ciencias, más que nada fue como en el Universo y luego, en colegio comenzamos a (por lo menos que yo me acuerde) como en cuarto, quinto año que fue más que nada en Física Mate que nosotros utilizamos un poco sobre ese tema. en primaria un poco la mención fue más que nada en Ciencias (no me acuerdo en qué año) que el profesor que teníamos se emocionaba todo y comenzó a hablar de la tierra, comenzó a hablar del sol, de todo el Sistema Solar, entonces comenzó a hablar de que las distancias y que habían otros planetas, y que la expansión como era infinita En el colegio, le soy sincera, ya fue específicamente como la definición de números naturales, números enteros, los racionales, que a nosotros nos decían que estos van hasta el infinito, que continúan infinitamente, no hay algo que los detenga.
SUV	Cuando uno empieza a estar ya uno en la escuela y empieza a ver que hay más de 100 en la parte numérica, que ya hay más números, que ya vamos por el millón y se extiende más ahí es donde se empieza a ya dar más un poco lo que es el infinito. . A nivel de secundaria pues ya se empiezan a ver los números reales, lo que son los intervalos infinitos, se empieza a formar lo que es los negativos, ya no es un infinito positivo, sino que hay un infinito negativo… Y ya hablamos de infinito en ambos sentidos en lo que es la recta numérica.

	En Ciencias hablábamos de que el Universo es infinito. En lo que era en Matemática, más que todo en intervalos para manejar dominios, manejar funciones, pero igual yo lo veía como un asunto de la recta numérica del plano cartesiano. Cuando me dicen en la escuela que los números no acaban, así lo digo como lo recuerdo. ¡Ya eso es importante! Después cuando veíamos en Ciencias (porque a mí me gustaba mucho Ciencias en la escuela), cuando hablamos del Universo, el utilizar mucho la imaginación para eso, porque no es un concepto que se pueda palpar. Pero yo me acuerdo en lo que son los asuntos de educación porque estamos hablando que el infinito no es solo algo numérico o matemático, sino también inclusive humano.

2. **Definición de infinito**

Docente	Definición
ANAV	Infinito es algo que no tiene fin. desde la religión que habla del amor de Dios, o el universo del cual formamos parte hasta los números que crecen y crecen y que gracias al sistema numérico con el que contamos pueden seguir haciéndolo sin que tenga nunca fin., Es muy importante conocer la noción de infinito, vivimos en un mundo donde se puede entender claramente a que se refiere y ver dónde se aplica, y el hecho de que existen infinitos más grandes que otros infinitos nos ayudan a trabajar los números reales. Creo que cada vez que se toca la noción de infinito caigo en lo mismo, infinito es algo muy muy muy grande, o muy muy muy pequeño, ¿qué tan grande? ¿qué tan pequeño? No se puede decir, eso es infinito. Que el infinito es solo una idea, la matemática le puso un símbolo para poder hablar de esa idea, pero es lo que decimos cuando no podemos decir cuánto es en verdad, ya porque sea muy grande o muy pequeño.
AV	El infinito bueno…es una idea que refiere a continuidad sin límite. Yo siento que esa referencia que existe en nosotros, pienso mucho por la sociedad en la que vivimos, un Dios, la infinitud hacia algo supremo, el espacio inalcanzable, el espacio infinito, un Dios que tiene un poder infinito, un Dios que tiene

	un amor infinito son referentes culturales que probablemente son los que se usan para elaborar de alguna manera ese concepto, pues se da por sentado. Ahora que lo pienso, pues me imagino simplemente que queda nada más en una idea abstracta, que uno asume que es algo muy abstracto y por eso lo relacionan con esas cosas que son un poco complejas.
DAM	Es una idea nada más, más que eso no porque es intangible, para los que no creemos en cosas intangibles, nadie lo ha visto para ver que eso existe, es una idea, una abstracción.
HUM	Para mí el infinito se refiere a todo aquello que sé que existe, pero está muy lejos de ser alcanzado. Esto lo aplico en la perfección humana, como, por ejemplo, la cual es muy difícil de ser alcanzada. Por otro lado, concentrar el conocimiento en un solo sitio, es algo muy difícil de alcanzar. La idea misma del tiempo, lo que se ha recorrido y lo que falta por recorrer. El infinito es la idea misma de seguir adelante, de que no hay barrera que se coloque que haga que las cosas se detengan y llegue sólo hasta allí. En lo que recuerdo se refiera a algo vasto o extenso, que no tiene límite. Es algo para lo que no hay un final.
KEN	Si hablamos de números, infinito es como un número al que no sé cómo contar, no tengo una regla establecida para llegar a contarlo, no sabría definir infinito yo, es tan complejo, no sé. Se ve tan fácil y se ve tan a la hora de definirlo. Simplemente como una cantidad que no se puede llegar a conocer; una cantidad extremadamente grande o extremadamente pequeña.
MAG	Es aquello que no tiene fin o que nunca termina. Siempre que hablamos del concepto infinito lo hacemos con el entendido de que el concepto se refiere a algo que no tiene fin, es decir, que por alguna razón nunca termina. Saber que siempre se puede obtener un número más grande que el anterior.

REQ	Lo considero filosóficamente como un concepto, siempre existe la posibilidad de obtener un número más; desde un punto de vista formal no lo tengo muy claro, pero uso de fórmulas, concepto de límite, asíntotas, límites laterales. Nunca llegamos a ver un número como tal. Como profesor de matemáticas es un concepto que nos permite transmitir que hay algo más, por ejemplo, los números en la recta: "uno más en el paquete". También es importante filosóficamente hablando.
SR	A nivel matemático, lo puedo ver como una forma numérica. Ya en concepto espiritual, todo en la vida es una consecuencia, una reacción y todo esto lleva también a un infinito, porque hay infinidad de soluciones, de procedimientos, de cosas que puede pasar, e igual que el pasado si yo hubiera cambiado, que reacción hubiera tenido. En la parte lingüística, ejemplo cuando uno interioriza el concepto uno les dice a los chiquillos el infinito y más allá, ¿a dónde lo han escuchado? A bueno, en una película, ah en una fábula.
SUV	En lo matemáticamente hablando, es un asunto de nunca acabar sino también lo siento en mi ser. Cuando uno se va desarrollando como persona se da uno cuenta que hay un sinfín de situaciones en las que usted puede decir que son predecibles para usted, pero en realidad hay muchas. Aunque la vida es corta, nuestro pensamiento puede generar cosas infinitas. La tecnología es una muestra de lo que hasta ahora hemos avanzado y mi abuela decía: "Quién sabe que van a ver ustedes, porque si yo vi un montón de cosas, ustedes quién sabe que van a ver". Para mí, el infinito lo representa el pensamiento humano, no solo en la parte matemática, científica, tecnológica, también su desarrollo emocional. Uno es el que genera ese asunto de infinito, nadie lo va a representar más que una persona.

3. Experiencias universitarias

Docente	Experiencias
ANAV	Sencilla, no recuerdo nada que fuese complicado con el infinito, una vez que comprendí los signos (< y >) no tuve dificultad con los infinitos. No recuerdo ninguna estrategia en específico, los ejemplos y la explicación del símbolo, nada más.
AV	Pues debe no haber sido muy significativa porque no recuerdo, realmente trato de hacer memoria como que alguna vez alguien, haber escuchado a alguien hablar o definir al infinito, o sea, siento que es una idea que se usa, pero como una idea, pero no como un concepto que defino.
DAM	Cuando uno la ve en la u, tiene otro tipo de nivel de madurez, hay que decirlo porque está en los planes, pero sin sentido. Cuando uno lo empieza a usar más en límites al infinito, parece contradictorio, como se ve x en cierto entorno, cuando uno acepta la idea de infinito en cosas pequeñas, intervalo [0, 1] y R. En la UCR no nos cuentan historia acerca del infinito, viene de un ejercicio, que podría pasar en cierta sucesión de funciones, intervalos reales, convergencia de funciones. Asumen que uno viene siendo formado desde niño y se asume que se tiene el concepto. Si las emplearon no me acuerdo, … ellos ya asumen que usted tiene la noción de lo que significa el infinito, en teoría de conjuntos, y, uno se lo cree. Me acuerdo de infinito y de estrategia, en la UCR había una profe que alguien le comento sobre la paradoja del conejo y la tortuga, ella aprovecho para hablar del concepto. Una fábula de MGM.

HUM	Legalmente no recuerdo. No podría precisar mi experiencia. Lo que recuerdo tal vez sería que no hubo un abordaje sobre el infinito como tal, sino que su manejo se daba por sentado, con lo que se tenía de la educación secundaria. Si se hablo acerca de ese concepto, sería como parte de un resultado o bien sobre la base de algún otro concepto matemático. Pero, en síntesis, no preciso claramente mi experiencia con respecto al infinito. Demostraciones. Como en el caso los límites. La demostración de que el conjunto de números reales no es acotado superiormente. Casi todo se basó en el uso de demostraciones. Debo utilizar elementos que para ellos sean más de uso conocido y concreto. No recuerdo estrategias para abordar este concepto que me fueran proporcionadas por los docentes, en mi tiempo de estudio en la universidad.
KEN	Ya propiamente en la carrera es necesario conocerlo para muchas cosas; en el caso cuando uno imparte lecciones para los que estudian ingeniería y ahí si tienen que llevar cálculo y tienen que ver la aproximación a, o el límite a cuando se tiende a infinito o diferentes representaciones gráficas para que ellos lo logren aprender. Sinceramente no recuerdo absolutamente nada, alguien que me diera ningún énfasis en la universidad sobre ese concepto. Ok, en mi formación como tal el concepto de infinito, no tengo recuerdos que me lo hayan dado como tal, sino en la aplicación de ciertos contenidos, de cierta materia relacionada con el tema de infinito, pero, así como relación propiamente que nos hayan dado para representarlo, no: Es tan complejo verdad, porque yo me recuerdo mucho en cálculo que usábamos, hasta en integrales, toda esa parte, pero el cálculo meramente, estrategias didácticas ni siquiera usaban para ningún tema a mi parecer, era todo magistral cien por ciento y menos para tratar el tema de infinito verdad, simplemente como una resolución de algo y obtenga un resultado.

MAG	Nunca fue un tema que se estudiara con exclusividad, más bien representaba solo un posible resultado para el análisis o clasificación de estructuras. Sólo se utilizaba la representación simbólica (∞), anteponiendo el menos cuando se cambia de dirección.
REQ	Se abordó en cálculo en el uso de límites, integrales, derivadas, ecuaciones e inecuaciones, más parte de cálculo. Ahorita no manejo demostraciones. Definición de límites laterales, límite formalmente: para cada delta existe lambda tal que encontrar un valor. A nivel de formación, demostraciones, teoremas. No hay mucha didáctica.
SR	Cuando entré a la carrera de Matemáticas, directamente ya ahí ubicados de los conceptos de números enteros, etc., sobre el infinito, principalmente la parte algebraica. En la parte geométrica, tal vez por los recursos que uno utilizaba ahí se menciona menos por decirlo así, como era más físico... Pero fue en la parte del Álgebra donde más uno lo denotó, por lo menos lo mencionó, hizo relación, etc. Frustrante, porque el profesor Fabio en Matemática Fundamental él nos hizo una demostración de 8 páginas para llegar a un concepto de que los números eran infinitos. Y era una demostración de que si usted me pregunta cómo empezó... no sé. Me llevó casi cuatro meses para poder entender todos los conceptos que él puso en esa demostración. Asociar lo pedagógico con lo magistral, difícil. Uno inventa, prueba y error.
SUV	A mí me queda de la universidad cuando se habla de la completitud de R, que ahí fue donde entendí más el asunto de que el infinito no es nada más un montón de números que siguen de un lado a otro, sino que en un pequeño intervalo hay infinidad.

	De hecho, inclusive cuando vemos dimensiones, cuando hablamos de 3D, de dimensiones y que también hay infinidad (n dimensiones en la universidad). En el colegio uno lo veía todo plano. Fue como abrir mundos diferentes. Cuando hablamos de N, inclusive cuando empezamos a hablar de sucesiones es como encontrar otro lenguaje, y no solamente eso, sino que uno se da cuenta que el Álgebra encierra lo que es el infinito porque cuando usted habla de variables que pueden representar cualquier número, usted puede poner cualquier número. En sucesiones, que es en los primeros cursos… En los primeros cursos fue para mí como enterarme de que la Matemática no es solo un asunto de que a mí me gustara porque era buena, sino porque había algo más en ella que tenía que explorar. Me acuerdo una vez que llevaron una gráfica de una imagen en 3D, luego en 4 y así…No recuerdo hasta qué dimensión llegaba, pero sí fue muy interesante porque cambia mucho. Cuando vimos sucesiones y teníamos que definir n+1. Me acuerdo de que una de las cosas que más me costó en Matemática fue Topología porque eso tiene que ver mucho con infinito y cuando definen vecindarios… Son nociones muy abstractas, pero eran muy interesantes. No era entender algo que está ahí, sino tomar en cuenta que lo tiene en su mente. Yo ahí sí tengo un problema por el divorcio que había entre Matemática y Educación en esa época.

4. **Experiencias curriculares**

Docente	Experiencias
ANAV	No me ha presentado mayor dificultad, como mencioné anteriormente, me ha parecido que luego de que comprenden los símbolos > y <. El uso del < y >, creo que mucha gente llega con problemas reales en estos símbolos, incluso a niveles universitarios.
AV	Muy pocas veces he tenido que dar los niveles de sétimo, octavo, noveno, y entonces siento que así como profesora de momentos significativos, no me acuerdo algo específico tan fácilmente. Yo casi siempre los recibo grandes, entonces por lo menos en el recuerdo más próximo en niveles de sétimo, octavo, noveno si hay que hablar de esos conceptos. Con los nuevos programas, no he tenido que abordar el contenido como tal. Vamos a ver, no ubico ni siquiera (siendo muy honesta) en que parte del programa habría que tratar el concepto como tal. No sé si usted me dice que está en sétimo, octavo… no sé si por ejemplo es una intuición que se debe venir construyendo intencionalmente desde la escuela, lo que no sé digamos si viene tan explícito. Casi, casi me atrevería a afirmar que tan bien viene como algo intuitivo.
DAM	Uso el libro de arena para analizar cuales estudiantes meto en olimpiadas. El MEP se ha enfocado en ver otros temas, no sirven para nada en la vida real, en la u posiblemente si sirva, el MEP quisiera que planteemos un objeto que sea infinito para que los estudiantes lo entiendan mejor, es un objeto intangible. En 7mo apenas están empezando a abstraer.
HUM	La mayoría de las veces son situaciones sencillas, que con un poco de pensamiento se le llega a la solución, pero igual son pocos los estudiantes los que contestan, la mayoría espera o que se les diga o bien que conteste otro.

	Continuidad. Cantidades finitas (por ejemplo, expansión decimal), para contraponerlas con cantidades cuya representación genera mayor complejidad. Conjuntos finitos, para realizar contraposiciones. Problemas que involucran el conteo de números. Por ejemplo cuando se estudian sucesiones, y se hacen casos también como tablas de valores en la función lineal. También se habla de los viajes espaciales y la distancia que pueda recorrer hacia una dirección determinada (no hacia un sitio). Por otra parte cuando se trabajan fracciones la diferencia entre la forma aproximada y la exacta de un número con expansión decimal periódica. También cuando se habla de intervalos, sea de tiempo, temperatura, económico, etc. Casi todo basado en la solución de problemas, basado en experiencias de los mismos estudiantes y su relación con el entorno. El concepto del infinito a través del tiempo en la etapa secundaria, creo yo, se ha dejado de lado muy a lo intuitivo de la persona, sin que para el estudiante resulte ni práctico y provechoso, lo que hace que la construcción de este concepto sea únicamente para explicar ciertas situaciones que no se pueden manejar de manera concreta. La falta de interés del algunos docentes y de los estudiantes, hace que no se preocupen mucho por formalizar, o por lo menos, la de generalizar de manera más detallada este concepto tan importante.
KEN	Ok, casi que uno desde sétimo año comienza a intuir en ellos el concepto de por lo menos números infinitos, o el concepto de números reales, enteros, que hay infinitos números dentro de otros; pero propiamente el concepto no se da como tal, sino que se involucra en ciertos temas. Cuando uno está viendo el cálculo de dominio o ámbito en funciones precisamente ahí en bachillerato evalúan infinito, por lo que nosotros tenemos que darles una noción a los muchachos y uno se ayuda con la calculadora para que ellos comiencen a trabajar con los números.

MAG	Según el nivel y el área de funcionamiento, como conceptos geométricos, conversiones de fracción a decimal y su clasificación según el comportamiento decimal, para clasificar números según los conjuntos numéricos. En la zona donde trabajo se hace difícil profundizar cualquier tema, ya que de lo contrario no se logra completar el programa. Aun así muchas veces no se logra la abordar la totalidad del mismo. Si te trabajan conjuntos numéricos por ejemplo, se debe tener claro el concepto de antecesor y sucesor, el concepto de conjunto y la diferencia entre conjunto finito e infinito. En geometría, se debe diferenciar simbólicamente los conceptos de segmento, rayo, recta y semirrecta, así como el de plano o semiplano. En la conversión de fracciones a decimales, es importante enfatizar en un proceso de división completo, donde se visualice el comportamiento de los decimales y el mismo estudiante saque sus propias conclusiones. Trabajo en dos instituciones que cuentan con una población estudiantil totalmente diferente una de la otra, lo cual me obliga a trabajar y evaluar de maneras muy diferentes, a ritmos muy diferentes y los alcances varían considerablemente. He compartido mi experiencia con compañeros de diferentes lugares del país y en algunos casos son similares y en otros (muy pocos por cierto) los resultados se acercan a las expectativas del MEP.
REQ	La experiencia es desde el punto de vista intuitivo, es un concepto que, aunque no podemos verlo ni tocarlo, existe. Ejemplo, las raíces de cualquier orden, decimales para raíces, por ejemplo raíz de 2, multiplicar un número por otro, se da cuenta que no va a terminar, y es un proceso manual que no termina; el concepto de infinito está ahí pero no lo podemos palpar.

	Concepto de asíntota en funciones exponenciales, logarítmicas, infinito con divisiones, acercamientos al cero: 1/10, 1/100, 1/1000, etc., ninguna llega exactamente al cero. El estudiante entiende 1/1000000 que no es cero exacto. El concepto de infinito está ahí. Razones trigonométricas, tangente de 90°, tan(89,9°). Relación de orden en los naturales, enteros, racionales, densidad de Q, lo que significa, en su densidad, quedan pequeños o grandes vacíos que no los llena Q, entonces, ¿cómo lleno los vacíos? Con los irracionales, infinitos no periódicos. Son necesarios para completar la recta, el infinito a ambos lados. Más formalmente el concepto de completitud de R que es necesario para entender el conjunto. Los programas vienen concretos, pero es importante y necesario, por ejemplo, en mecánica de precisión que requiere hacer cálculos muy finos.
SR	Lo valoramos en la parte de teoría de números, ejemplo en séptimo interiorizarles el concepto de número natural, de enteros, por qué en los enteros hay un orden, por qué hay una recta numérica, qué quiere decir la recta numérica. Y ahora abordarlo por medio de un problema. Hasta ahora estoy recibiendo estudiantes que han venido con el proceso y ahorita que los tengo en sétimo no me ha costado la idea de empezar con un problema, en cambio los estudiantes que yo tuve hace cuatro años de cuarto año o de sétimo que me entraban era un problema porque no lograban hacer eso. Siento que el cambio fue muy radical en el MEP. No ha sido un aprendizaje solo para ellos, para uno también.
SUV	Cuando yo empiezo a dar clases y tengo que hablar que Q es un conjunto denso ahí es donde yo digo: ¿cómo les explico esto? Uno explica, pero también uno cae en el asunto de explicárselo muy somero. En la secundaria hay que acogerse al temario porque hay cosas más importantes en qué enfocarse como el asunto algebraico, por ejemplo.

	Que ellos vean que los naturales es un subconjunto en los enteros. Curricularmente, ellos nada más dicen defina R, como la unión de los racionales con los irracionales... nada más. Pero esa unión no es tan sencilla si uno tiene que recordarle a ellos que todavía los enteros no es denso como los racionales. Esa parte ahora se ha borrado un poco, sin embargo yo siempre les digo a ellos cuando se ven racionales. El curriculum no le ayuda a uno en nada en cómo explicarles. En realidad uno termina viéndolo muy ralamente, apenas lo que uno necesita para que ellos sigan a lo demás. Y las pocas veces, he hecho el intento, y han sido pocas porque mi experiencia me ha llevado a ver que no puedo profundizar mucho porque pierdo el interés de ellos muy fácilmente. ¡Era para eso! Así le dicen a veces a uno y está la limitante del tiempo. En los primeros años de experiencia sí lo intenté cuando uno les habla de R, yo siempre les menciono los complejos. Me dicen: No profesora, déjelo ahí. Inclusive ellos me dicen a veces que uno como que empieza a volar, porque hay tanto conocimiento que uno tiene que uno quisiera que ellos tuvieran... Los estudiantes quieren lo necesario, lo que necesitan para aprobar el año y punto.

5. Experiencias didácticas

Docente	Experiencias
ANAV	El ponerlos a pensar en cualquier número y què otro compañero diga otro más grande, y luego otro y luego otro, hasta que ellos se cansen El uso de los mismos ejemplos que me mostraron a mí, y la actividad donde un estudiante dice un número, luego otro dice uno más grande y otro y otro. La anécdota de dibujar una recta en la pizarra y hacer la pantomima de continuar la recta hasta salirse de la pizarra e incluso del aula si se puede. Creo que cada estrategia funciona, tal vez no a todos los estudiantes, pero alguna le servirá a unos y otras a otros, por eso me gustà hacerlo todo, porque de pronto con una estrategia Luisito no entendió, pero con la segunda sí, y Martita hasta la tercera lo logró.
AV	Usualmente estoy dando, hablando de funciones usando R, usando en mi lenguaje, en el lenguaje normal ese término infinito. Asumo que mis estudiantes entienden, que nos entendemos mutuamente cuando hablamos de infinito, entonces no ha sido algo qùe es objeto de discusión, o sea, lo usamos el término y ya. Ya ubico otra cosa, cuando hablamos del espacio, el Universo, por ahí son referentes de ese infinito, ya traen los chiquillos. De nuevo, no me he sentido en la necesidad de hacer una discusión… como decir, es algo que sigue. Viene como parte de ese lenguaje que ya se trae. Para mí es la intuición que se trae de ese concepto, que casi se crea (ahora que lo pienso) de una manera casi inconsciente.

	Lo visualizo nada más como cuando le hago las flechitas al plano cartesiano para indicar que esto va para el infinito, ahí es donde lo visualizo, como usando representaciones de ese infinito, cosas que indiquen que ahí está ese infinito, pero no definiendo el infinito. He asumido que los chicos entienden cuando uso el concepto o digo la palabra infinito, tiende al infinito, esto crece infinitamente. Uso ese tipo de expresiones. Tampoco recuerdo un momento en que un chico me haya detenido y me diga: pero profe, ¿eso qué significa? Honestamente, no tengo clara cuál debe ser la concepción de infinito que yo debería transmitirle al estudiante. Esta es la primera vez que me siento a pensar sobre el concepto de infinito y si yo realmente tengo clara la cuestión de qué es el infinito, hablando matemáticamente. Y si yo no tengo ni siquiera esa claridad, pienso que es difícil ubicar cuáles van a ser esos contenidos previos para ese concepto… Para hablar o señalar del infinito utilizo ciertos gestos, expresiones o movimientos de la mano que uno puede usar para (y esto sigue…), expresiones así y que uno gesticula de alguna manera indicando esa continuidad. Pienso en las representaciones, cuando hablo de los intervalos cómo escribir adecuadamente (pienso menos infinito, más infinito), qué símbolo uso. Digamos, una discusión por ahí para hacer un acuerdo de cómo es que lo vamos a expresar. Cuando yo en funciones quiero indicar que es una tendencia, que continúa infinitamente, le ponemos flecha, no le ponemos flecha… Buscar alguna representación apropiada que nos indique ese infinito. Es básicamente como los acuerdos que hacemos.

	Creo que hay que prestarle atención cuando uno intenta hacer una representación gráfica del infinito, (usar flechillas) porque parece inocente pero realmente no lo es, por ejemplo, porque cuando usted usa un software y el software no usa las flechas, eso en algunos casos al estudiante se le genera un conflicto cognitivo, y quizá uno lo da por, lo obvia, lo pasa por alto y quizá eso es una expresión de que ese concepto no está lo suficientemente claro. Que el estudiante entienda que la representación gráfica siempre va a ser una representación limitada porque no puedo realmente representar al infinito de una forma concreta.
DAM	Los estudiantes no lo aceptan, ellos le preguntan a uno, como se yo que ese número es infinito, si tiene los puntos suspensivos indica que se reproduce infinitamente, contarles la historia, algo más allá, no. Por ejemplo, ahora que vemos los irracionales los estudiantes preguntan que como saben cuál es el número que sigue, o como sabemos los profesores que ese número es infinito y que no tiene repetición. Les damos el ejemplo de pi, existe una máquina que está calculando los dígitos de pi, contarles sobre el libro de arena, ejemplo del libro de unas enumeraciones enorme, ejemplo del saco, trate de sacar el mismo número. La idea de imposibilidad es la idea que lo sumerja mas Tratar de convencer a un estudiante, le voy a vender una idea, lo hago pensar en una idea o situaciones que involucren el infinito, el infinito es el amor, el tiempo, existen otra variedad de infinitos. Busco convencerlos. Estrategias que sirvan poner los puntos suspensivos cuando se tratan de números, infinitos periódicos puros, ayudan a hacer la noción de que eso continúa infinitamente, ayuda bien, Fracciones a decimales. Lo hacen bien.

	Generalmente, hago grupos de papas de estudiantes y entro a YouTube de video que hablen del tema que traro esa semana. El problema es que estudiantes ni siquiera lo ven ni les dan la información, los ven, pero no los entienden, los busco los más elementales posibles.
HUM	Es un poco complicado, ya que el planteo de problemas se torna un poco un difícil, muchos alumnos quieren que todo sea concreto y si ya se les indica algo más abstracto, no contestan, sobre todo en sétimo, vienen muy acostumbrados que todo se les diga o piensen lo menos. En funciones se presta mucho, pero igual se limita por el uso del tiempo, y sobre todo, porque muchos de los alumnos dejan las tareas y no las resuelven o, sólo las copian, por lo que la experiencia no llega muy lejos. Otro aspecto es el tiempo para profundizar y la importancia, porque, aunque se les diga que es importante y se les trata de demostrar, si resulta que no es de uso inmediato en su vida, no lo toman en serio. Hay estudiantes muy participativos y otros muy pasivos. Cuando se trata de conteos o bien de buscar valores de cantidades, la mayoría trabaja y lo entiende. En la relación de funciones o bien de intervalos numéricos, muchos tienen de confundir, ya que para ellos no es tan palpable, en la mayoría de los casos, los estudiantes les cuesta entender el concepto cuando se avanza más en lo abstracto. Utilizar más la imaginación, no ser tan apegados a lo concreto. Para eso se necesita que la persona se pregunte más acerca de sí misma y se pregunte sobre su entorno, no ser tan conformistas. Por otra parte, que traten siempre de ver más allá de las cosas evidentes y buscan maneras nuevas de hacer las cosas, o por lo menos de hacerlas mejor. Eso es parte de crear un pensamiento positivo que permita la adquisición de nuevos conceptos, entre ellos el del infinito.

KEN	La noción es difícil de que ellos lo logren porque ellos no tienen claro cómo voy a sustituir infinito, verdad, entonces que es lo que hace uno: procurar de que es como un número muy grande y que entonces vamos cambiando valores para llegar a un número establecido, sin embargo no es un número exacto que se va a dar, sino que es como una aproximación para ir llegando a un resultado. Una aproximación tal vez del concepto en la clase: Hablarles un poco por lo menos de la historia, de por qué históricamente existe ese concepto, que realmente nosotros no lo manejamos tanto por la presión del tiempo y tal vez si queda un poquito de tiempo uno trata de aprovecharlo en otras cosas, más acá que solo hay tres lecciones en diversificada; pero básicamente uno podría interiorizar más cuando habla de recta numérica, ir metiéndoles relaciones y álgebra un poquito de ese concepto para que los resultados no sean exactos. Quizás en funciones y bueno, estrategias didácticas, intenté hacerlo con divisiones, aproximaciones de divisiones. Iba dividiendo números por cero coma algo, cero coma algo, hasta llegar a un valor que le da error en la calculadora decían los chiquillos, verdad, como unas aproximaciones con la calculadora, básicamente que me acuerde en este momento. Luego sustituciones con valores extremadamente grandes o valores extremadamente pequeños y obligarlos a hacer cálculos para sacar imágenes o preimágenes o dominio o ámbito. Las aproximaciones con la calculadora para todos han sido muy fácil, pero la interpretación al final siempre es como un poco confusa, porque ellos dicen ¿por qué me da un valor muy grande, por qué meda un valor muy pequeño? Entonces siempre se les enreda.
MAG	Curiosamente, los estudiantes que ingresan a sétimo año lo suelen llamar "el ocho acostado".

	Se asocia a conceptos como el de la recta, donde de manera visual el estudiante puede nombrar algunas carreteras, o el horizonte del mar. Busco ofrecerles a los estudiantes problemas y ejercicios en los que ellos puedan plantearse posibles respuestas y debatir al respecto. Esto debido a que ellos ingresan al colegio con un concepto que en la mayoría de los casos es aprendido por memorización y no por construcción. Cuando los grupos están cargados de estudiantes repitentes es necesario cambiar mucho en la metodología. A algunos no les gusta resolver problemas y solo quieren repetir procedimientos. Lejos de una construcción, los estudiantes llegan a una conclusión del concepto, pero no se profundiza en el mismo.
REQ	en noveno se da el tema. Colocación de raíces entre enteros: cuadradas, cúbicas, cuartas, etc. Conclusión: hay raíces de cualquier índice, siempre se puede colocar un número más Uso Geogebra para que vean las asíntotas en las gráficas, o las ramas de las parábolas, si las definiciones en IR, límites hacia el infinito, limitado a intervalos, raíces limitadas a dos o tres decimales para trabajarlas; uso la calculadora para expansiones decimales infinitas periódicas o puras, irracionales no se pueden representar en la calculadora. Han servido esas que mencioné anteriormente, la parte visual sirve mucho para asíntotas. Al estudiante le llama la atención en décimo. En noveno tratar de sacar una raíz, se hace una única vez y luego con la calculadora. El infinito como tal está en todos esos números.
SR	Entonces yo les digo: ustedes sabían, o busquen, busquemos en Google. Saquemos cuál es el último número… y claro, sale un chorro y dicen: ¡Profe, eso es grandísimo! Y aun así todavía no he encontrado que… el último valor. Pero eso es enorme, cómo lo van a escribir.

	No se puede extender uno mucho sino nada más dar una pincelada sobre la historia y en algunos casos yo procuro referir con historia de matemáticos donde se haya mencionado, ejemplo la expansión de los números, que por qué se utilizó, que quién fue que lo vio. realmente a los de sétimo año que es a los que más les llama la atención cuando uno les habla sobre historia, más que les pongo toda dramática y les digo que a alguno de los de la escuela de Pitágoras el que comenzó a ver sobre los números irracionales. Sí he podido extenderlo un poquito tal vez en los años de cuarto año. Uno puede aprovecharse en las gráficas, me puedo aprovechar del porqué tengo que hacer una relación con los números reales y por qué su extensión, por qué no puedo decir que existe un solo término, por qué existen ese montón de decimales. Cuando usted ve función exponencial y les deja problemas de bacterias y se vuelvan extremadamente grandes y que yo les digo cómo los represento en la función y por qué estas tienen una continuidad y qué pasa con esa continuidad cuando se va acercando a 0. ¿Pero llega a ser 0? Esa es la pregunta del millón. Estos números son infinitos, ya con la calculadora ni siquiera la puedo calcular, pero entonces como dicen ellos: entonces nunca la llega a tocar, no... ¡Va ahí como a la par! Entonces se quedan sorprendidos. ¡Y entonces continúan! Entonces entienden que los números son tan infinitos, tan grandes y su expansión es tan enorme que no podemos decir aquí concluyo y aquí termino. Primero que nada, ver qué significa infinito en sí, o sea qué dice la Real Academia. ¿En dónde han escuchado ellos el término Infinito? Si ha sido en la casa, en la escuela, con algún familiar, en qué lo han visto. Con los de sétimo iniciamos con un problema contextualizado de la vida cotidiana y que ellos hicieran una plenaria de cómo lo resuelven. Hacer una relación de qué les decía la maestra, de por qué la recta tiene flechas, por qué se dice que es infinita.

	Ejemplo de otros niveles enfatizar que ya ellos vieron números naturales y que ya esos son infinitos, ir planteando el concepto e irlo agrandando, existen otros enteros que son positivos, negativos y que van hasta dónde… Hasta el infinito y ahí continúa uno. En ésta parte podemos decir que se hace un estilo como lluvia de ideas. Para mí efectivas, el trabajar problemas es muy efectivo, más si usted trata que los chiquillos se introduzcan. Otro que veo que se utiliza mucho, la lluvia de ideas. Eso totalmente los ubica y con las palabras de ellos mismos. Ejemplo, si estoy en un año superior podemos trabajar con esquemas mentales. Yo les diría investiguen, porque a los chiquillos les cortan en la escuela la parte de investigar, porque todo se lo dan. La parte de investigación es muy necesaria para que el estudiante adquiera más conocimiento. En nóveno que comencé con números irracionales y hablando una relación con lo del infinito, yo les digo. Hoy vamos a utilizar estas cosas: les di una regla, una cuerda, el corte de un hilo y luego les dije vamos a sacar longitudes. Busquen dentro del aula cinco objetos que sean redondos, o sea, formas circulares
SUV	Bueno, por ejemplo, hacer eso de tomar un segmento entre 1 y 2 e irlo partiendo a mitades, mitades y mitades… Cuando hablamos de la recta, en las cuestiones geométricas, de planos. Tal vez preguntas concretas: De aquí a la pulpería, de aquí a pasar el océano, o de aquí a… O la noción de infinito también la vemos en (bueno, a mí me fascinan los atardeceres), alguna imagen en la parte didáctica, ahora que son las imágenes tridimensionales en el WhatsApp, utilizar la imaginación y las cuestiones tecnológicas en lo que se pueda, en lo que yo pueda encontrar. Sin embargo, esta recta puede pasar el Universo, ¿qué sigue después del Universo? Siento que me he quedado corta con las propuestas.

	Cuando uno traza una recta en Geogebra, uno puede ampliarlo o achicarlo. Las imágenes son planas, les falta ese asunto de imaginación. En la del segmento ellos sí lo manejan mejor, porque ellos empiezan a hacerlo. Chicos, qué pasa si lo seguimos haciendo. En lo de partir sí queda más o en Geometría cuando uno hace la flecha... Cuestionar un poco más lo que está en el papel, poder tener una imaginación (un poco más). Siento que es un asunto también de motivarlos, que no lo que ellos piensan es incorrecto. Que ellos investiguen con Google, para que ellos puedan construir ellos necesitan cuestionarse, cuestionarse un poco más. Investigar, pero investigar cosas que les resulte diferentes... No de lo mismo, de lo cotidiano. Ejemplo: ¿cómo se hace lo de la realidad virtual? ¿Cómo se construye? ¿Qué significa cuando en un ultrasonido le dicen esta es una imagen en 4D? Qué implica esto. ¿Qué implica ir al cine y ver un 4D?

6. Experiencia Constructivismo

Docente	Experiencias
ANAV	Es cuando el docente guía a los estudiantes para que ellos mismos entiendan o construyan los conceptos nuevos, para luego aplicarlos en los temas nuevos Con los nuevos planes el constructivismo se facilita, pero el cumplimiento de las habilidades de cada nivel es realmente muy difícil, principalmente por el tipo de estudiante que tenemos, pues se necesita que el grupo completo que se interese en trabajar.
AV	Es una corriente, una forma de explicar el aprendizaje en la que se entiende que la persona va modificando su estructura cognitiva, a partir de esas experiencias de aprendizaje. El aprendizaje no es algo que me imponen desde afuera, es algo que sucede dentro de mí y que él afuera lo que hace es estimularme para que ese aprendizaje suceda.
DAM	Es una utopía realmente, por lo menos todavía, no teneos ni los recursos y el plan es un poco sobrecargado en cualquiera de las ramas, tampoco se aplica en la primaria, más fácil trabajar el conductismo, uno trata de hablar del constructivismo, pero los mismos estudiantes se resienten, el constructivismo, ellos lo resienten: ¿y como lo voy a hacer? Algún momento lo aplique en coles privados. En públicos es muy complicado.
HUM	Para mí es la construcción del conocimiento por medio de experiencias propias vividas. Por medio del trabajo propio, manipulación y relación con el entorno, voy construyendo el conocimiento.

KEN	Construir conceptos a partir de sean diferentes actividades que uno se haga, estrategias de aprendizaje diversas que no le den el contenido así, clases magistrales por decirlo así, sino de los juegos que hagamos, de las actividades que hagamos se pueda construir el conocimiento, se pueda construir el concepto como tal.
MAG	Ofrecer los recursos necesarios para que el estudiante pueda crear una definición propia de cada concepto, teniendo en cuenta lo que el estudiante sabe, sacando a relucir lo que debería de saber y sacando provecho a la capacidad de análisis que posea cada uno de manera individual u colectiva.
REQ	Es una tendencia ó corriente pedagógica, arte de aprender haciendo, descubriendo, aprender del error, crear conocimiento nuevo. Por ejemplo hay estudiantes que creen que 3^2 = 3x2. Los estudiantes de ese error pueden sacar conocimientos. Descubrir haciendo y aprendiendo de los errores. Los exámenes escritos no son la mejor manera, sería mejor por proyectos. El constructivismo busca interiorización del concepto en sus propias palabras, no por los libros. Ejemplo, conjuntos no solo en matemática. Trata que con sus palabras digan lo que aprenden.
SR	Está relacionado en todo. Constructivista la gente creé, tiene la idea vendida que es hagamos bodoquitos, tijeritas, bodoquitos y gomita. ¡Y no es eso! Que el mismo estudiante sepa utilizar cosas y que las pueda llegar a relacionar el concepto con lo que dice. El problema es que hay gente que hace una cosa constructivista y les dice paso a paso qué deben ir haciendo y no... Puede ser que hayan empezado al revés y llegan a la misma conclusión. Y yo lo que quiero es que amarren todo eso y lleguen al concepto porque nunca yo puedo ser específica en Matemática. Hay un cierto orden sí, pero no puedo llegar y decirles es así porque es así y no se pueden salir de ahí. El sacò no es así, el saco tiene huecos y se pueden salir por cualquiera. Para ser constructivista no es necesario sacarlos del aula.

SUV	La idea es construir bajo su propio, construir el conocimiento en su propio ámbito, porque el ambiente también tiene que ver con habilidades porque ellos tienen que construir con respecto a lo que necesita, porque tal vez ellos no ven útiles cuestiones matemáticas porque no se les lleva a un plano más a lo que ellos viven día a día.

Apéndice H

Contenidos por año y áreas

7° AÑO			
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números Naturales • Operaciones: - Suma - Resta - Multiplicación - División - Potencias • Combinación de operaciones **Teoría de números** • Algoritmo de la división • Divisibilidad • Factor • Múltiplo • Números primos • Números compuestos • Descomposición prima • Mínimo Común Múltiplo • Máximo Común Divisor **Números enteros** • Enteros negativos • Concepto de número entero • Relaciones de orden • Recta numérica • Valor absoluto • Número opuesto **Operaciones, calculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias • Raíces • Combinación de operaciones	**Conocimientos básicos** • Punto - Puntos colineales y no colineales - Puntos coplanares y no coplanares - Punto medio • Recta - Segmento - Semirrecta - Rayo - Rectas concurrentes - Rectas paralelas en el plano - Rectas perpendiculares en el plano • Plano **Visualización espacial** • Caras • Aristas • Vértices • Rectas y segmentos paralelos • Rectas y segmentos perpendiculares • Planos paralelos • Planos perpendiculares **Ángulos** • Llano • Adyacentes • Par lineal • Opuestos por el vértice • Congruentes • Complementarios • Suplementarios **Triángulos** • Desigualdad triangular • Ángulos internos • Ángulos externos **Cuadriláteros** • Áreas • Suma de medidas de ángulos internos • Suma de medidas de ángulos externos **Geometría analítica** • Ejes cartesianos • Representación de puntos • Representación de figuras	**Sucesiones** • Ley de formación • Patrones **Relaciones** • Proporcionalidad inversa **Representaciones** • Verbal • Tabular • Gráfica • Algebraica	**La Estadística** **Conocimientos básicos** • Unidad estadística • Características • Datos u observaciones • Población • Muestra • Variabilidad de los datos • Variables cuantitativas y cualitativas **Recolección de información** • La experimentación • Interrogación **Frecuencia** • Absoluta • Porcentual **Representación** • Tabular: cuadros de frecuencia absoluta y porcentual **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Mínimo • Máximo

Figura H.1: Sétimo año, MEP (2012).

8º AÑO			
NÚMEROS	GEOMETRÍA	RELACIONES Y ÁLGEBRA	ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD
Números racionales • Concepto de número racional • Representaciones • Relaciones de orden **Operaciones, cálculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias • Raíces • Combinación de operaciones	**Transformaciones en el plano** • Homotecias • Puntos homólogos • Segmentos homólogos **Triángulos** • Semejanza • Congruencias • Teorema de Thales **Visualización espacial** • Pirámide recta - Caras laterales - Base - Apotemas - Ápice (cúspide) - Altura • Sección plana • Prisma recto	**Funciones** • Función lineal **Expresiones algebraicas** • Concepto de expresión algebraica • Valor numérico • Monomios - Monomios Semejantes - Operaciones con monomios - Factor numérico y factor literal • Polinomios - Operaciones con polinomios - Productos notables **Ecuaciones** • Ecuaciones de 1er grado con una incógnita - Solución de una ecuación - Cero de una función - Raíz de una ecuación • Ecuaciones literales	**Estadística** **Recolección de información** • La experimentación • Interrogación **Frecuencia** • Absoluta • Porcentual **Representación** • Tabular: cuadros de frecuencia absoluta y porcentual • Gráfica: barras, circulares, lineales y diagramas de puntos **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Mínimo • Máximo • Recorrido **Probabilidad** **El azar** • Aleatoriedad • Determinismo **Espacio muestral** • Espacio muestral, puntos muestrales y su representación **Eventos** • Resultados favorables a un evento • Eventos simples y compuestos • Evento seguro, evento probable, evento imposible **Probabilidad** • Eventos más probables, menos probables e igualmente probables • Definición clásica (o laplaciana) **Reglas básicas de probabilidad** • La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 • La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.

Figura H.2: Octavo año, MEP (2012).

9° AÑO			
NÚMEROS	**GEOMETRÍA**	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Números reales • Números irracionales • Concepto de número real • Representaciones • Comparación • Relaciones de orden • Recta numérica **Cálculos y estimaciones** • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias • Radicales **Cantidades muy grandes y muy pequeñas**	**Triángulos** • Teorema de Pitágoras **Trigonometría** • Radianes • Seno • Coseno • Tangente • Razones trigonométricas de ángulos complementarios • Ángulos de elevación y depresión • Ley de senos **Geometría del espacio** • Pirámide recta • Apotema • Prisma recto • Área lateral • Área total	**Funciones** • Función cuadrática **Expresiones algebraicas** • Factorización • División de polinomios • Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias • Racionalización **Ecuaciones** • Ecuaciones de 2° grado con una incógnita - Raíces - Discriminante **Funciones** • Función cuadrática	**Estadística** **Variables cuantitativas** • Discretas • Continuas **Distribuciones de frecuencia** • Clases o intervalos • Frecuencia absoluta • Frecuencia relativa y porcentual • Representación tabular • Representación gráfica - Histogramas - Polígonos de frecuencia **Probabilidad** **Muestras Aleatorias** **Probabilidad frecuencial** • Estimación de probabilidad: empleo de la frecuencia relativa (concepto frecuencial o empírico) • Introducción a la ley de los grandes números

Figura H.3: Noveno año, MEP (2012).

10° AÑO		
GEOMETRÍA	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Geometría Analítica • Circunferencia - Centro - Radio - Recta secante - Recta tangente • Recta exterior • Rectas paralelas • Rectas perpendiculares **Polígonos** • Lado • Radio • Apotema • Ángulo central • Ángulo interno • Ángulo externo • Diagonal • Perímetro • Área • Relaciones métricas **Visualización espacial** • Esfera • Cilindro circular recto • Base • Superficie lateral • Radio • Diámetro • Sección plana • Elipse	**Conjuntos numéricos** • Unión • Intersección • Pertenencia • Subconjunto • Complemento • Intervalos **Funciones** • **Concepto de función y de gráfica de una función** • **Elementos para el análisis de una función** - Dominio - Imagen - Preimagen - Ámbito - Inyectividad - Crecimiento - Decrecimiento - Ceros - Máximo y mínimo - Análisis de gráficas de funciones • **Composición de funciones** • **Función lineal** • **Función cuadrática** **Sistemas de ecuaciones lineales** • Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	**<u>Estadística</u>** **Representaciones tabulares y gráficas** **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Mediana • Cuartiles • Extremos - Máximo - Mínimo **Media aritmética ponderada** **<u>Probabilidad</u>** **Eventos** • Relaciones entre eventos - Unión $\cup$ - Intersección $\cap$ - Complemento • Eventos mutuamente excluyentes **Probabilidades** • Reglas básicas de las probabilidades: - $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A - Probabilidad del evento seguro es 1 y del evento imposible es 0 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para eventos A y B mutuamente excluyentes • **Otras Propiedades** - Probabilidad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - Probabilidad del complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Figura H.4: Décimo año, MEP (2012).

11° AÑO		
GEOMETRÍA	**RELACIONES Y ÁLGEBRA**	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**
Geometría analítica • Simetría axial • Imagen • Preimagen **Transformaciones en el plano** • Traslaciones • Reflexiones • Homotecias • Rotaciones **Visualización espacial** • Cono circular recto • Vértice • Base • Superficie lateral • Radio • Diámetro • Sección plana • Elipse • Parábola • Hipérbola	**Funciones inversas** • Inversa de la función lineal • Función raíz cuadrada **Funciones exponenciales** • La función a^x • Ecuaciones exponenciales **Funciones logarítmicas** • La función $\log_a x$ • Ecuaciones logarítmicas **Funciones y modelización**	**Estadística** **Medidas de variabilidad** • Recorrido • Recorrido intercuartílico • Variancia • Desviación estándar **Representación gráfica** • Diagrama de cajas **Medidas relativas** • Posición relativa: estandarización • Variabilidad relativa El coeficiente de variación

Figura H.5: Undécimo año, MEP (2012).

Bibliografía

[1] Aguirre, J.; Jaramillo, L. (2012). *Aportes del método fenomenológico a la investigación educativa.* Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, vol. 8, núm. 2, julio-diciembre, pp. 51-74. Colombia: Universidad de Caldas.

[2] Alsina, A. (2009). *El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado.* Investigación en Educación Matemática XIII, pp. 119-127. Santander: SEIEM.

[3] Arguedas, V. (2014). *Georg Cantor (1845-1918): la locura del infinito o el infinito de la locura"* Revista digital Matemática, Educación e Internet, TEC. 14(1), pp. 1-7.

[4] Ayala, R. (2008). *La metodología fenomenológico-hermenéutica de M. Van Manen en el campo de la investigación educativa. Posibilidades y primeras experiencias.* Revista de Investigación Educativa, vol. 26, núm. 2, pp. 409-430. Murcia. Asociación Interuniversitaria de Investigación Pedagógica.

[5] Battro, A. (1969). *El pensamiento de Jean Piaget. Psicología y epistemología.* Buenos Aires: Emecé Editores.

[6] Belmonte, J.; Sierra, M. (2011). *Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14(2): 139-171. Encontrado en: `http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v14n2/v14n2a2.pdf`

[7] Betrián, E.; Galitó, N.; García, N.; Jové, G.; Macarulla, M. (2013). *La triangulación múltiple como estrategia metodológica*. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 11(4): 5-24. Encontrado en: `https://repositorio.uam.es/handle/10486/661478`

[8] Bruckner, A.; Bruckner, J.; Thompson, B. (2007). *Real Analysis*. USA: Prentice Hall Inc.

[9] Castorina, J.; Coll, C.; Barriga, A.; Díaaz, F.; García, B.; Hernández, G.; Moreno, L.; Muriá, I.; Pessoa, A.; Vasco, C. (1998). *Piaget en la educación. Debate en torno de sus aportaciones.*. México: Paidós.

[10] Crespo, R. (s.f.). *La intuición y la enseñanza de la matemática*. Encontrado en: `http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/69713/00820073001106.pdf?sequence=1`

[11] D'Amore. (2011). *La didáctica del infinito matemático*. Sunto della Conferenza generale tenuta il 9 settembre 2011 al XXIV Coloquio Distrital de Matematicas y Estadistica, promosso dalle Universdità Distrital, Nacional e Pedagogica de Bogotà. In: AA. VV. (2011). Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matematicas y Estadistica, Bogotà, 8-10 settembre 2011. CD. ISBN: 978-958-57050-0-5. Pagg. 21-29.

[12] De León, M. (2014). *Algunas reflexiones en torno a los números irracionales*. Revista digital Matemática, Educación e Internet, TEC. Vol 15, No 2. Marzo – Agosto 2015.

[13] Dolle, J. (2003). *Para comprender a Jean Piaget*. Tercera reimpresión. México: Trillas.

[14] Donald, G. (s.f.) *History of infinity*. Encontrado en: `http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/infinity/infinity.pdf`.

[15] Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* Encontrado en: `http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ReflectiveAbstraction.pdf`

[16] Dubinsky, E. (2000). *De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal.* Encontrado en: `https://www.clame.org.mx/relime/200003a.pdf`

[17] Engler, A.; Greogorini, M.; Vranken, S.; Müller, D.; Hecklein, M.; Henzenn, N. (s.f.). *El límite infinito: una situación didáctica.* Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral, Esperanza. Prov. de Santa Fe (Argentina)

[18] Fernández, J. (2016). *Un acercamiento a los fundamentos del cálculo. El infinito y los números reales.* Ciudad de México: Universidad Autónoma de México.

[19] Flavell, J. (1991). *La psicología evolutiva de Jean Piaget.* Sétima reimpresión. México: Editorial Paidós Mexicána S.A.

[20] Garbin, S. (2005). *¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(2), julio, pp. 169-193. Encontrado en: `http://www.redalyc.org/pdf/335/33580205.pdf`

[21] García, R. (2000). *El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos.* Barcelona: Gedisa Editorial.

[22] Gómez-Chacón, I. (s.f.). *La intuición en Matemáticas.* Encontrado en: `http://eprints.ucm.es/23318/1/IGomez26.pdf`

[23] Gurdián, A. (2007). *El Paradigma Cualitativo en la Investigación Socio-Educativa.* San José: Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana (CECC) Agencia Española de Cooperación Internacional (AECI)

[24] Gutiérrez, R. (2012). *Epistemología genética*. Facultad de Psicología, Universidad Peruana Cayetano Heredia. Lima, Perú. Rev. Psicol. Hered. 7(1-2)

[25] Hernández, R.; Collado, C.; Baptista, P. (2008). *Metodología de la investigación*. Cuarta Edición. México: McGraw-Hill Interamericana.

[26] Huerta, J. (2005). *Los grupos focales*. Encontrado en: `http://academic.uprm.edu/jhuerta/HTMLobj-94/Grupo_Focal.pdf`

[27] Investigación y Ciencia. (2001). *Temas 23. Ideas del infinito*. Barcelona: Prensa Científica.

[28] Isoda, M.; Olfos, R. (2009). *El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la Matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

[29] Ivorra, C. (s.f.). *La axiomática de la teoría de conjuntos*. Encontrado en: `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Axiomas.pdf`

[30] Jato, S. (2012). *El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria*. Trabajo fin de máster. Encontrado en: `https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1724/Sergio%20Jato%20Canales.pdf?sequence=1`

[31] Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de Matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología*. Instituto Politécnico Nacional, México.

[32] López, C. (2014). *El infinito en la historia de la matemática*. Universidad de Palermo, Argentina. Ciencia y Tecnología, 14, 2014, pp. 277-298 ISSN 1850-0870

[33] López, C. (s.f.) *La intuición y la matemática*. Universidad de Palermo, Argentina.

[34] Marín, I. (2014). *Sobre el infinito y sus dificultades antes de Georg Cantor y sus obras.* Corporación Universitaria Republicana.

[35] Martínez-Salgado, C. (2012). *El muestreo en investigación cualitativa. Principios básicos y algunas controversias.* Ciencia & Saúde Colectiva. 17(3), p. 613-619.

[36] Ministerio de Educación Pública. (2005). *Programa de Estudios de Matemáticas.*

[37] Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programa de Estudios de Matemáticas.*

[38] Ministerio de Educación Pública. (2015). *Fundamentación Pedagógica de la Transformación Curricular 2015: Educar para una Nueva Ciudadanía.*

[39] Perkins, D. (2003). *El contenido. Hacia una pedagogía de la comprensión.* Encontrado en: `https://blogfcbc.files.wordpress.com/2012/03/11-perkins-elcontenido.pdf`

[40] Perraudeau, M. (1999). *Piaget hoy. Respuestas a una controversia.* México: Fondo de cultura económica.

[41] Piaget, J.; Beth, E.; Dieudonné, J.; Lichnerowicz, A.; Choquet, G.; Gattegno, C. (1965). *La enseñanza de las matemáticas.* Madrid: Aguilar S.A.

[42] Piaget, J. (1977). *Ensayo de lógica operatoria.* Buenos Aires: Editorial Guadalupe.

[43] Piaget, J. (1978). *Introducción a la Epistemología Genética: 1. El pensamiento matemático.* Segunda edición. Buenos Aires: Editorial Paidós.

[44] Piaget, J. (1979). *Introducción a la Epistemología Genética: 2. El pensamiento físico.* Segunda edición. Buenos Aires: Editorial Paidós.

[45] Piaget, J. (1977). *Biología y conocimiento. Ensayo sobre las relaciones entre las regulaciones orgánicas y los procesos cognoscitivos.* Cuarta edición. Madrid: Siglo veintiuno editores.

[46] Piaget, J.; Szeminska, A. (1967). *La génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe.

[47] Piaget, J.; García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de las Ciencias*. México: Siglo XXI.

[48] Piaget, J. (1972). *Psicología y epistemología*. Buenos Aires: Emecé editores.

[49] Reale, G. (1972). *Introducción a Aristóteles*. Segunda edición. Barcelona: Herder.

[50] Resnick, L.; Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Temas de educación Paidós. Barcelona: Ediciones Paidós.

[51] Rojas, M. (2008). *Educación científica y matemática para el niño preescolar I. Perspectiva constructivista*. San José: EUNED.

[52] Rosales, J. (2016). *Numerabilidad y cardinalidad de conjuntos*. Revista digital Matemática, Educación e Internet, TEC. Vol 17, No 2. Marzo - Agosto 2017.

[53] Ruiz, A. (2013). *La reforma de la Educación matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis*.

[54] Sadovsky, P. (s.f.). *La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Encontrado en: https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

[55] Serulnikov, A.; Suárez, R. (1999). *Piaget para principiantes*. Buenos Aires: Era Naciente SRL.

[56] Silverman, H. (Comp.). (1989). *Piaget, la filosofía y las ciencias humanas*. México: FCE.

[57] Srivastava, S. (1997). *Transfinite Numbers. What is Infinity?* Encontrado en: https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/002/03/0058-0068

[58] Socas, M. (2000). *Jean Piaget y su influencia en la educación*. Encontrado en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2316660

[59] Vera, M.; Pinilla, L.; Roa, S. (2010). *El infinito: concepciones de los estudiantes que transitan del colegio a la universidad*. Memoria 11° Encuentro colombiano de Matemática Educativa. Encontrado en: http://funes.uniandes.edu.co/1046/

[60] Villabona, D.; Roa, S. (2016). *Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE*. Educación matemática, 28(2), 119-150. Encontrado en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262016000200119&lng=es&tlng=es.

[61] Waldegg, G. (1996). *Identificación de los obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual*. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1(1), enero-junio. Encontrado en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14000108