

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL

PUENTE DE ARCO DE CUATRO VIAS

RICARDO CHARPENTIER GARCIA

1958

## Introducción

Mucho se ha escrito sobre arcos. Aparte de varios trabajos completos que tratan casi cualquier aspecto del problema, existe un gran número de artículos tratando detalles particulares. El puente de arco parece tener un atractivo especial para el ingeniero, a pesar de que no todos aquellos que dedican tiempo a su estudio tienen muchas oportunidades de diseñar puentes de este tipo .

Antes del tiempo del hormigón armado y del acero casi todos los puentes eran construidos con piedra, y en su mayoría tenían forma segmental con una gran profundidad del nervio . Esta profundidad era tal que la curva de presiones podía pasar por el tercio medio bajo cualquier arreglo de la carga viva permisible, eliminando así la posibilidad de que se produjeran tensiones en cualquier lugar de la sección transversal .

A pesar de limitaciones tan severas se construyeron muchos arcos bonitos de mampostería, incluyendo ejemplares hasta de 200 pies de luz.

Desde luego que un arco de tal longitud no hubiera sido posible sin obligar a la curva del arco a coincidir con la línea de presiones para carga muerta .

El uso de arcos de acero y hormigón armado da mayor libertad en la escogencia de la curva del arco y además es posible salvar luces muy grandes, aún con tráfico pesado, sin necesidad de ajustar la curva del arco a la curva de presiones .

Usando materiales modernos, hay dos consideraciones principales que gobiernan la selección de la curva: a) estética y b) economía .

Algunos arquitectos están suficientemente influenciados por el culto al funcionalismo para preferir una forma de arco natural a una que no lleva idealmente el trabajo que tiene que cumplir, pero el usuario ordinario de puentes, y en un grado menor el ingeniero, no se muestra del todo indiferente al atractivo sutil de un arco semielíptico que tiene poca justificación desde el punto de vista ingenieril. Aparentemente está completamente claro que una forma de arco natural o funcional no debe ser incompatible con un puente de buena apariencia , pero las cuestiones de estética son muy debatibles .

La segunda razón principal que influye en la escogencia de la curva del arco es la economía, y nadie puede negar la importancia de este aspecto del diseño de puentes. La economía en el diseño de arcos puede ser lograda principalmente escogiendo una curva para la línea de centro del nervio tal que los momentos flectores debidos a las cargas y los cambios de temperatura sean un mínimo. En el caso de arcos de hormigón armado el efecto del flujo plástico debe ser toma

-do en cuenta como similar a una caída de temperatura. Los momentos debidos a cambios de temperatura, flujo, etc, pueden resultar un factor serio en arcos de gran luz en los cuales la razón flecha/luz es pequeña ( menor que  $1/7$  a  $1/8$  ) y es en este tipo de puentes que el conocimiento y la experiencia del especialista pueden encontrar sus mayores oportunidades. En arcos de menos de 100 pies de luz, con razones de flecha/luz de  $1/6$  o más, las economías que pueden hacerse por medio de una selección diestra de la curva del arco y de las proporciones del nervio no son tan grandes. Es también necesario recordar que una economía de un 20% en el nervio del arco puede disminuir el costo total del puente alrededor del 3%, lo cual indica que hay que evitar el peligro de empeñarse en usar métodos de diseño sobre-elaborados.

El tipo de arco al cual nos vamos a referir aquí es la estructura fija en sus extremos sin articulaciones o discontinuidades. En el arco fijo hay momentos y empujes secundarios debidos a la deformación del anillo bajo la compresión causada por el empuje normal.

La contracción del nervio acorta su longitud y la curva del arco toma una nueva forma, pero como en sus extremos es constreñido por la masa de los apoyos para conservar su pendiente inicial y su luz, induce un momento negativo y un empuje. Un efecto similar ocurre durante el lento período de curado debido al flujo plástico y cuando ocurre una caída de temperatura, produciéndose una inversión de momentos y empujes cuando se eleva la misma. La contracción del nervio del arco bajo el empuje normal es generalmente conocido como " acortamiento del arco " y esto conjuntamente con el flujo plástico y los efectos de temperatura, complica grandemente la escogencia de la forma del arco más económica. En los primeros pasos los efectos de temperatura, etc, serán ignorados, pero más tarde serán discutidos en detalle.

Está muy favorecido el arreglo de la curva del arco de tal modo que coincida su línea de centro con la línea de presiones para carga muerta; así no habrán momentos debidos a carga muerta, aparte de los efectos secundarios previamente mencionados. Sin embargo esto no puede ser hecho de inmediato. Es necesario en primer término asumir una curva y unas dimensiones del nervio aproximadas, aproximación que será tanto mejor cuanto más exacta sea la estimación de la carga muerta .-

## DISEÑO DE UN PUNTE DE ARCO

### Primera Parte. Teoría de los arcos

1. Discusión preliminar. Supongamos que  $P_1, P_2, \dots, P_5$  mostradas en la figura 1. son cinco cargas verticales soportadas sobre la vi  
ga AB. Comenzando en cualquier punto sobre la línea de acción de cualquiera de las cargas, digamos en "m", sobre la línea de acción de la carga  $P_1$  y resolviendo esta carga  $P_1$  en dos componentes cualquiera  $F$  y  $F_1$ , luego prolongando la línea de acción de  $F_1$  hasta que intercepte  
te la línea de acción de la carga  $P_2$  en "n" resolviendo  $P_2$  en dos componentes ( $F_1$  y  $F_2$ ) de tal modo que una  $F_1$  balancee la componente  
te  $F_1$  en "m" y luego prolongando la línea de acción de acción de la o  
tra componente ( $F_2$ ) hasta que intercepte la línea de acción de  $P_3$  en "o" y luego en "v" resolviendo  $P_3$  en dos componentes ( $F_2$  y  $F_3$ )  
tales que una ( $F_2$ ) balancee  $F_2$  en "n", y siguiendo este procedi-  
miento obtenemos la línea quebrada curva zmnostx, la cual es el po-  
lígono de equilibrio. Este polígono de equilibrio es el mismo que se obtendría construyendo el diagrama de fuerzas mostrado en (d) Fig.1 y dibujando los segmentos paralelos a los rayos. Se nota rápidamente que en la construcción del polígono de equilibrio zmnostx, cada carga fue reemplazada por dos componentes y que todas ellas están balance  
eadas excepto  $F$  y  $F_5$ . Luego es evidente que si un arco es construido  
do de tal modo que este polígono pase a través de su línea de centro como se muestra en a, y las reacciones  $R'$  ( $=F_5$ ) se apliquen como se indica, el arco estará en equilibrio bajo la acción de las 5 cargas y las dos reacciones, y estará sujeto a compresión directa solamen-

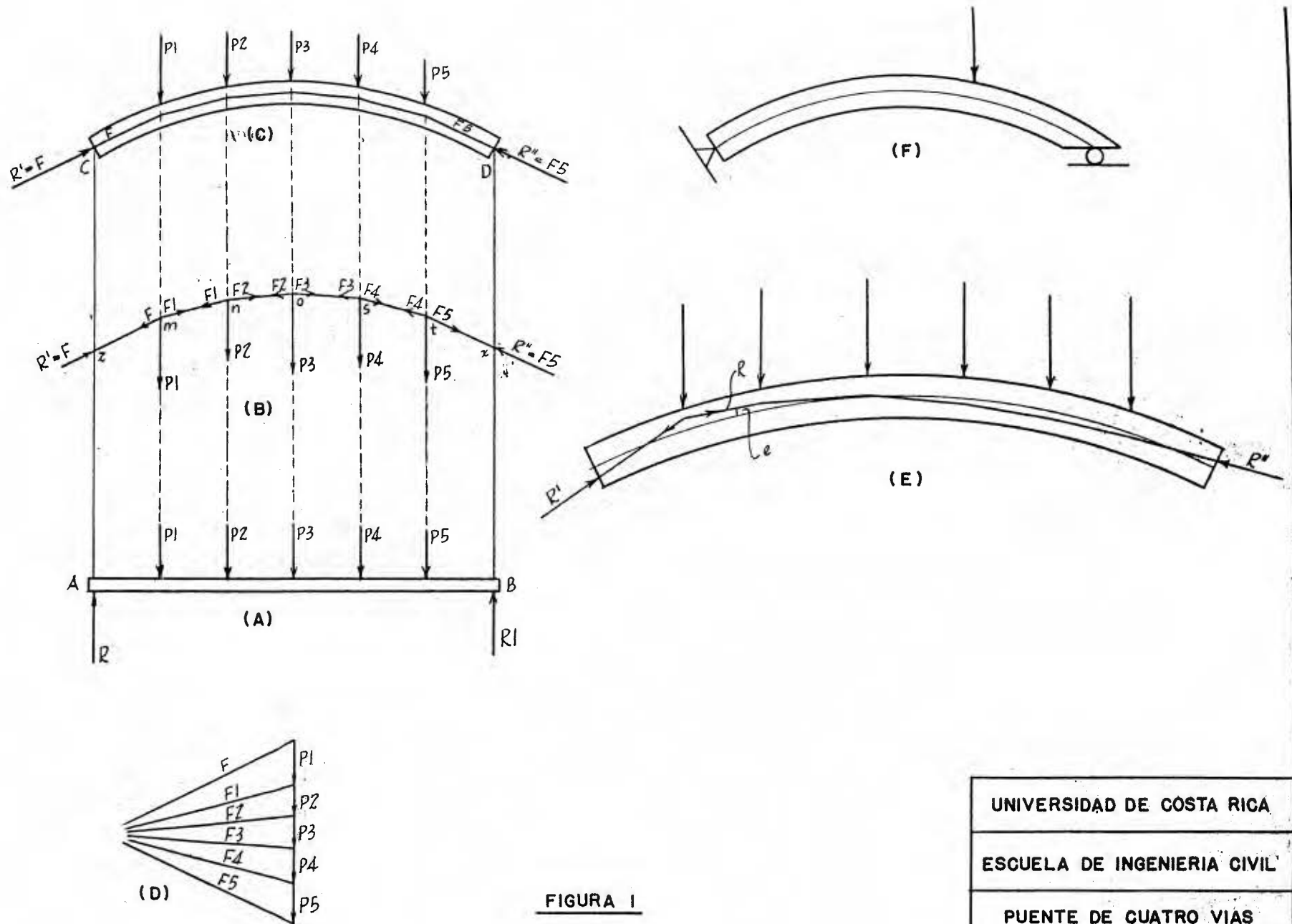


FIGURA 1

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA	
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL	
PUENTE DE CUATRO VIAS	
R.CH.G.	1957

reacciones, estará sujeto a compresión directa solamente, lo cual es ideal.

Ahora, si otras cargas además de  $P_1, \dots, P_5$  fuesen aplicadas al arco, es evidente que la posición del polígono de equilibrio cambiaría y en consecuencia no pasaría a través de la línea de centro del arco y en dondequiera que no pase a través del centro, habrá flexión sobre el arco, y además habrá un esfuerzo cortante, todo esto agregado al esfuerzo de compresión directa. Si la curva del arco fuese cambiada de tal manera que coincida nuevamente con el polígono de equilibrio, obtendremos un arco sujeto a compresión directa solamente. Como se ha visto cualquier cambio en las cargas requerirá una curva del arco enteramente diferente si se quiere evitar la flexión y el cortante.

Es obvio, que tal logro no es práctico. Sin embargo, es práctico construir la curva del arco de modo que las cargas fijas constantes tengan una resultante que pase a lo largo de la línea de centro de la curva del arco, en tal caso estas cargas producirán compresión directa solamente en la curva del arco y luego pueden tomarse precauciones en el diseño para resistir cualquier flexión o cortante que pueda ser causado por la aplicación de cargas adicionales. Cuando se trata de arcos ordinarios es práctico delinear la curva del arco de modo que la carga muerta produzca solamente compresión directa en la curva del arco y tomar precauciones en el diseño de la curva del arco para soportar cualquier flexión, empuje y cortante producidos por la carga viva que llega al arco.

Considerando la misma curva del arco mostrada en (c), vamos a suponer que el polígono de equilibrio, debido a las cargas adicionales a aquellas mostradas en (c), toma la posición que se indica en (e). Luego el

resultante, la cual está dada enteramente por uno de los rayes del polígono de fuerzas, y donde e es la distancia de la línea de centro del arco a aquél punto de la resultante R tomada perpendicularmente a la resultante. Como es evidente, en cualquier punto donde el polígono de equilibrio intercepta la línea de centro de la curva del arco, el momento flector será cero. El valor y la dirección de la resultante R en cualquier punto serán obtenidas de un polígono de fuerzas como el que se muestra en (d) .

La compresión directa, conocida como empuje, en la sección de la curva del arco estará representada por la componente de R perpendicular a la sección, y la otra componente perpendicular a la línea de centro representará el cortante en ese punto. Como se demostró antes, una curva de arco puede ser delineada de modo que la resultante debida a las cargas fijas pasará a lo largo de su línea de centro, en este caso no habrá flexión en el arco, pero cuando se aplican cargas adicionales habrá flexión y la distancia de la resultante a la línea de centro será  $e = \frac{M}{R}$  . Así es como se ve que para localizar la resultante en cualquier punto es necesario primero determinar el valor del momento M y la resultante R .

El empuje y el cortante son componentes de R y usualmente son usadas para diseñar en lugar de R . Vemos que es necesario conocer los momentos flectores, cortantes y empujes en todo el arco antes de localizar el polígono de equilibrio . En otras palabras, es necesario primero acudir a algún método para encontrar los momentos, cortantes y empujes en todo el arco, y una vez obtenidos el polígono de equilibrio puede ser localizado, pero entonces es de poco uso.

El método más usado está basado en la teoría de los desplazamientos elásticos. La curva del arco se considera una viga elástica curva fija en los extremos.

El tratamiento entero se conoce como " teoría del arco elástico " .

Antes de entrar en la derivación de las tres fórmulas fundamentales vamos a dar la definición de arco .

En general, se llama arco a la estructura curva que, cargada verticalmente, produce presiones oblicuas en los apoyos y cuyas características dependen principalmente de la clase de sustentación que se disponga. En un elemento constructivo así definido, la forma no es el distintivo primordial; en efecto consideremos en la figura 1.f a un arco fijo en el apoyo izquierdo, y móvil en el derecho, sometido a cargas verticales : evidentemente se comportará como una viga libremente apoyada, y las reacciones serán también verticales, lo que nos sugiere que, en el sentido estricto eminentemente estático, no se trata de un arco, si no de una viga curva determinada .

En los cálculos de estabilidad y resistencia predomina la influencia que ejercen las sustentaciones de los apoyos . Si estas realizan un empotramiento en los estribos, toda carga  $P$  dará lugar a las reacciones  $R_1$  y  $R_2$  , oblicuas, de las cargas que se desconocen su magnitud , dirección y punto de aplicación; estos tres valores definen las reacciones ( fuerza, ángulo y distancia al eje, por ejemplo ) pero también lo pueden estar por sus componentes vertical y horizontal y por su momento. Para determinar las seis incógnitas que existen en los arranques, sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio :  $\sum V=0$  ,  $\sum H=0$  y  $\sum M=0$  y por lo tanto el sistema será  $6 - 3 = 3$  veces indeterminado ( arco empotrado ) .



## 2. Derivación de las tres ecuaciones fundamentales :

ACB en fig.2 representa la línea de centro o eje neutro de un arco fijo sin cargas, y AC'B es la posición distorsionada del mismo eje neutro cuando las cargas son aplicadas al arco. Supongamos que la distorsión hace que el punto C se mueva hacia abajo y hacia la derecha a la posición C' y que la tangente TT se mueva a la posición T'T'. Se ve rápidamente que el ángulo  $\phi'$  decrece en la cantidad  $\Delta\phi$ , mientras que el ángulo  $\phi$  se incrementa en la misma cantidad .

La distancia vertical  $y$  y la distancia horizontal  $x$  representan plenamente el desplazamiento del punto C , mientras  $\phi$  representa el cambio en la pendiente de la tangente en C . Como es obvio, este movimiento del punto C es debido directamente a la distorsión que resulta en gran parte de la flexión sobre el arco y evidentemente debe haber una cierta relación entre el movimiento del punto C y los momentos flectores del arco, lo cual consideraremos inmediatamente.

AC , Fig. 2, representa la posición del arco a la izquierda de C , a la que consideraremos dividida en pequeñas franjas, como se indica. Se ve rápidamente que cualquier distorsión de cualquiera de estas divisiones debida a flexión causará un movimiento del punto C . De modo que el primer paso es derivar una expresión para el movimiento del punto C causado por la distorsión de una de las pequeñas divisiones, y luego, por simple suma, podemos obtener el movimiento del punto C causado por todas ellas .

abce , Fig. 3, representa la primera división a la derecha de A cuando no está esforzada y la cual tiene una longitud de ds en la



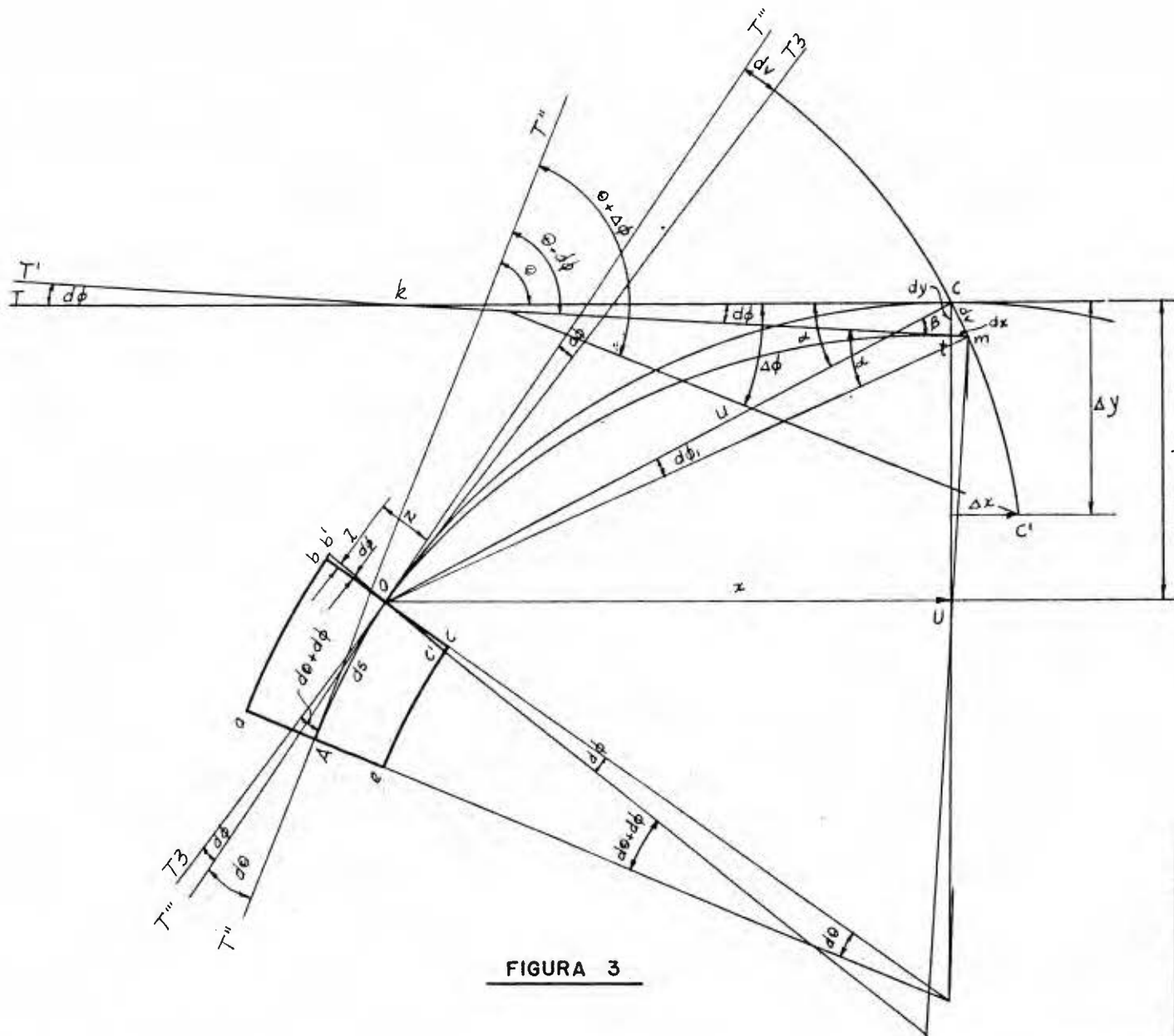


FIGURA 3

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA	
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL	
PUENTE DE CUATRO VIAS	
R.CH.G.	1957

línea de centro  $oA_2$  y  $oC$  representa el resto de la línea de centro del arco hasta  $C$ . Ahora asumamos que la cara  $ae$  permanece fija en su posición mientras la cara  $bc$ , debido a la flexión en toda la división  $abce$ , toma la posición  $b'c'$ . Como se ve el ángulo entre las tangentes  $T''T''$  ( a través de  $A$  ) y  $T''T''$  ( a través de  $o$  ) antes de que la flexión tome lugar es  $d\theta$ , y entre las tangentes  $T''T''$  y  $T_3T_3$  después de que la flexión tome lugar, es  $(d\theta + d\phi)$ , es decir la tangente  $T''T''$  simplemente se mueve a la posición  $T_3T_3$ . De aquí se ve que el cambio en pendiente de la línea de centro del arco entre  $A$  y  $o$  ( en la corta longitud  $ds$  ) debido a la flexión en la división  $abce$  es  $d\phi$ . Consideraremos ahora el movimiento del punto  $C$  debido a este cambio de pendiente. Si consideramos que el arco  $oC$  permanece constante, la cuerda  $u$  permanecerá constante, se ve rápidamente que el movimiento de la cara  $bc$  a la posición  $b'c'$  ( debido a la flexión ) rotará la cuerda  $u$  ( alrededor de  $o$  ) a través del ángulo  $d\phi$  llevando el punto  $C$  a la posición  $m$  y la tangente  $cT$  a la posición  $mT'$ . Luego el ángulo  $\alpha = \alpha'$  y como el ángulo  $\beta = d\phi + \alpha'$  se ve que el ángulo entre las tangentes  $cT$  y  $mT'$  es igual a  $d\phi$ ; esto es, el cambio del ángulo  $\theta$  entre la tangente en  $A$  y la tangente en  $C$  debido a la flexión en la corta división  $abce$  es  $d\phi$  igual al cambio de pendiente en la división  $abce$ . Luego, evidentemente, el cambio total del ángulo  $\theta$  debido a la flexión en todas las divisiones entre  $A$  y  $C$  es igual a la suma de sus respectivos cambios de pendiente; esto es  $\Delta\theta = \sum_C^A d\phi$  en la cual la mayor parte de los  $d\phi$  serán diferentes.

Asumiendo todos los elementos en la división  $abce$  ( paralela a  $Ao$  ) iguales en la longitud, lo cual es justificable en este caso, obtendremos

$$\lambda = \frac{f \cdot ds}{E}$$

para la distorsión de cualquier elemento a una distancia z encima o bajo oA, donde f es igual al esfuerzo por pulgada cuadrada sobre el elemento debido a la flexión y E es igual al módulo de elasticidad del material en el arco. Pero como se ha visto  $I = z \phi$

Sustituyendo en Ec. 1 obtenemos

$$d\phi = \frac{f ds}{z E} \quad (2)$$

Luego de resistencia de materiales tenemos que

$$f = \frac{M z}{I}$$

Sustituyendo en Ec. 2 obtenemos

$$d\phi = \frac{M ds}{E I} \quad (3)$$

para el cambio de pendiente en C debido a la flexión en la división ab ó la flexión en cualquier otra división de longitud ds, luego para el cambio total de pendiente entre A y C en cualquier arco fijo tendremos :

$$\Delta \phi = \int \frac{M ds}{E I}$$

donde M = momento flector en cualquier división entre dos puntos;

ds = longitud de cualquier división en su línea de centro ;

E = módulo de elasticidad del material en el arco;

I = momento de inercia de la sección transversal del arco al centro de cualquier división.

Refiriéndonos a la fig.4 tenemos

$$d\phi = \frac{dv}{u} \quad (5)$$

y como los triángulos mtC y CUo son semejantes tenemos

$$\frac{dx}{y} = \frac{dv}{u}, \text{ sustituyendo en Ec.5 obtenemos } dx = (d\phi)y$$

y luego sustituyendo el valor de dφ dado en ecuación 3 obtenemos

$$dx = \frac{M y ds}{EI} \quad (6)$$

para el desplazamiento horizontal de C debido a la flexión en la división abce y evidentemente si las dx son sumadas en todas las divisiones entre A y C obtendremos el desplazamiento horizontal total del punto C debido a la flexión de las divisiones, luego para el desplazamiento horizontal de cualquier punto en un arco fijo debido a la flexión en cualquier número de divisiones adyacentes tendremos

$$\Delta x = \int \frac{M y ds}{EI} \quad (7)$$

Luego de los triángulos semejantes mtC y CUo (Fig.4) tenemos

$$\frac{dy}{x} = \frac{dv}{u}, \text{ sustituyendo de Ecs. 5 y 3 tenemos}$$
$$dy = \frac{M x ds}{EI} \quad (8)$$

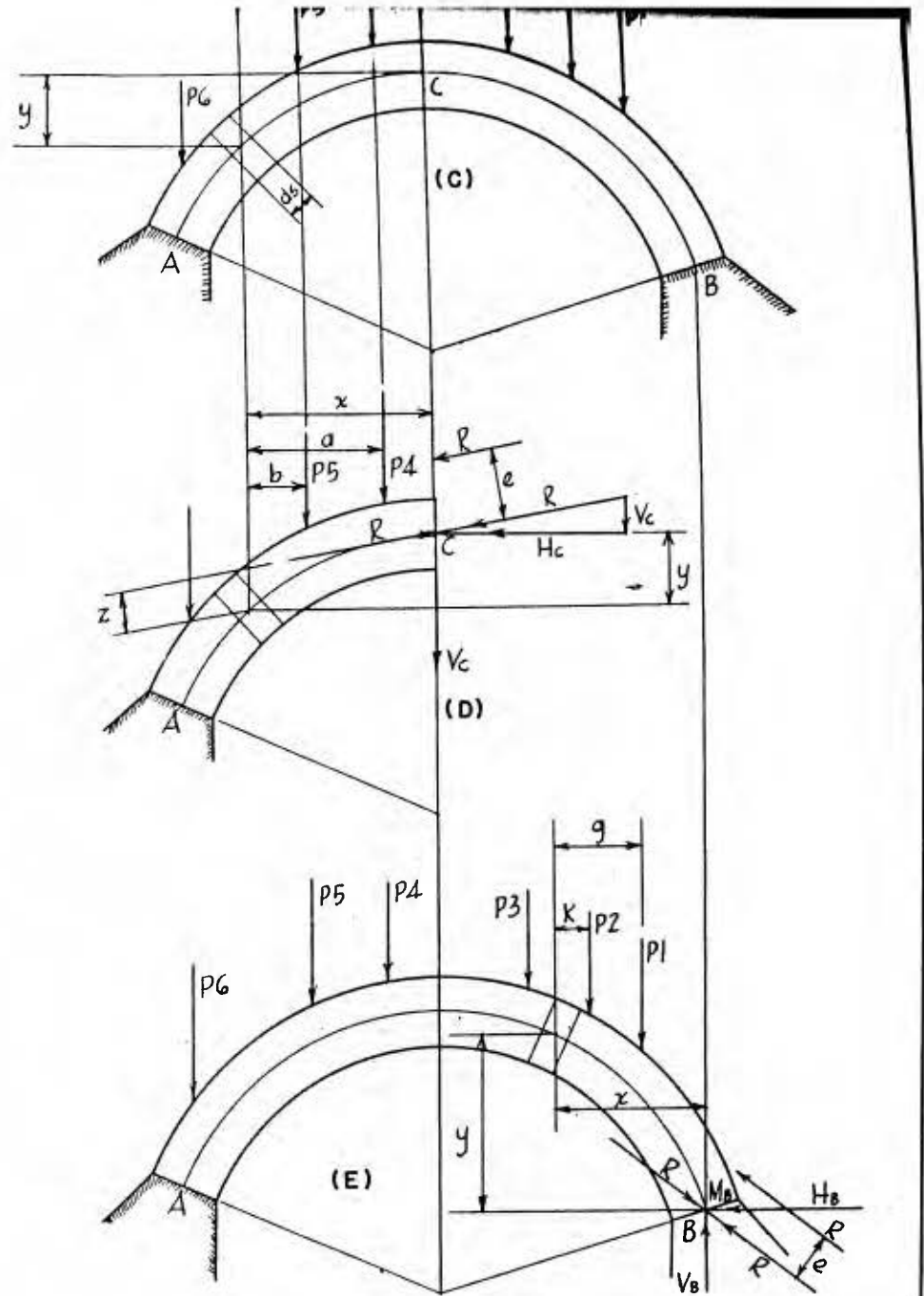
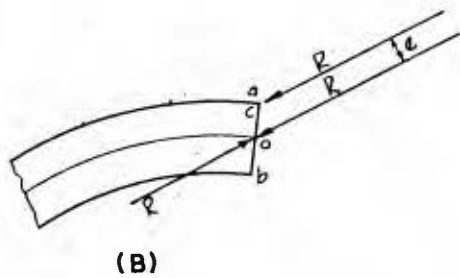
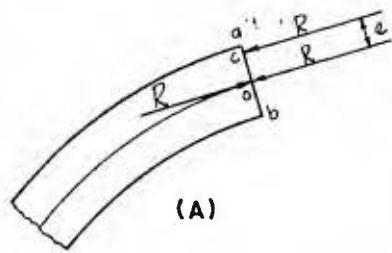


FIGURA 4

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL

PUENTE DE CUATRO VIAS

RCHG

1957

para el desplazamiento vertical del punto C debido a la flexión en la división abce y evidentemente si las dy son sumadas en todas las divisiones obtendremos el desplazamiento vertical total del punto C debido a la flexión en las divisiones y para el desplazamiento vertical de cualquier en un arco fijo debido a la flexión de cualquier número de divisiones adyacentes tenemos

$$\Delta y = \sum \frac{M x ds}{E I} \quad (9)$$

Ahora agrupando las ecuaciones 4,7 y 9 tendremos las tres ecuaciones fundamentales

$$\Delta \theta = \sum \frac{M ds}{E I} \quad (A); \quad \Delta x = \sum \frac{M y ds}{E I} \quad (B); \quad \Delta y = \sum \frac{M x ds}{E I} \quad (C)$$

Se puede observar que el momento en cualquier punto del arco aparece en cada una de las tres ecuaciones fundamentales. Para aplicar las Ecs. A, B y C es necesario obtener una ecuación general para este momento flector en términos del cortante, empuje, momento de las cargas que intervienen y el momento en algún punto específico. Luego es simple aplicar las ecuaciones A,B y C sustituyendo estas expresiones generales para momento en lugar de M en las ecuaciones A,B y C.

### 3. Ecuación general para el momento flector en un arco.

R representa una resultante aplicada perpendicularmente a la sección transversal ab de un arco en el punto c, como se indica en (a) Fig.4. Sea o el centro de gravedad de la sección. Si aplicamos dos fuerzas iguales y opuestas en o cada una de ellas igual y paralela a



R, es obvio que el equilibrio no se afectará en modo alguno por su aplicación. Ahora se ve que la fuerza R actuando hacia la derecha a través de o forma un par con la R de c y la otra R en o actuando hacia la izquierda produce compresión uniforme sobre la sección transversal ab. Si la resultante R no es aplicada perpendicularmente a la sección ab como se muestra en (b), el caso no cambia excepto que la compresión uniforme sobre la sección ab será igual a la componente de R perpendicular a la sección, y el cortante será igual a la componente de R a lo largo de la sección.

De aquí se deduce que la compresión uniforme directa en cualquier sección de un arco es la misma en cualquier caso, como si la resultante pasa a través del centro de la sección y que podemos considerar tres fuerzas iguales paralelas actuando en cualquier sección. Si la resultante pasa a través del centro de la sección las dos fuerzas que forman el par se balancean y consecuentemente el momento será 0.

AB ( Fig. 4 c) representa un arco fijo soportando cargas verticales, como se indica. R representa la resultante en cualquier sección C. Luego, considerando la parte del arco a la izquierda de la sección C y aplicando dos fuerzas iguales y opuestas en el centro de gravedad de la sección, como se muestra en ( d ) tenemos

$$M = Re + Rz - aP_4 - bP_5$$

para el momento flector en el punto a una distancia x a la izquierda de la sección C. Como se ve, Re es el momento del par en C ó en otras palabras es el momento flector en C como R es la resultante de todas las fuerzas a la derecha de c. Luego, nosotros podemos desig -

nar  $R_e$  como  $M_c$  = momento flector en  $C$ . Como la pendiente de  $R$  es desconocida y  $z$  desconocida, podemos simplificar resolviendo la  $R$  que actúa hacia la izquierda de  $o$  ( la  $R$  no incluida en el par ) en componentes vertical y horizontal, como se indica en (d). Luego para el momento flector alrededor de cualquier punto a la izquierda de  $C$  tenemos

$$M = M_c - V_c x + H_c y - m \quad ( 1 )$$

donde  $M_c$  = momento flector en  $C$ ,  $V_c$  = componente vertical de  $R$  en  $C$ ,  $H_c$  = componente horizontal de  $R$  en  $C$ , y  $m$  representa el momento de las cargas que intervienen alrededor del punto que está a una distancia  $x$  a la izquierda de  $C$ . Los momentos que producen compresión en la parte superior del arco son tomados como positivos y los momentos produciendo tensión en la parte superior del arco son tomados como negativos. En el caso de que la parte del arco a la derecha de  $C$  sea considerada, el momento flector en cualquier punto a una distancia  $x$  a la derecha de  $C$  puede ser expresado como

$$M = M_c + V_c x + H_c y - m \quad ( 2 )$$

como se ve, en este caso  $V_c$  actúa hacia arriba y por consiguiente  $V_c x$  es positivo, ya que este momento produce compresión en la parte superior del arco.

Ahora, imaginémosnos el punto  $C$  movido a la posición de  $B$  y que  $R$  representa la resultante en  $B$  como se muestra en ( e ), Entonces tendremos

$$M = M_B + V_B x - H_B y - \sum P_1 - \sum P_2 \quad ( 3 )$$

para el momento flector en un punto situado a una distancia  $x$  a la izquierda de  $B$ , ó en general

$$M = M_B + V_B x - H_B y - m \quad (4)$$

donde  $M_B$  = momento flector en  $B$ ,  $V_B$  = componente vertical de  $R$  en  $B$ ,  $H_B$  = componente horizontal de  $R$  en  $B$ , y  $m$  = el momento de todas las cargas que intervienen alrededor de un punto a una distancia  $x$  a la izquierda de  $B$

$V_B$  y  $H_B$  son aplicadas al centro de gravedad de la sección como se indica en (e). Si  $R$  está sobre el centro de gravedad del arco ( como se muestra )  $M_B$  será positivo, ya que el momento  $R_e$  ( =  $M_B$  ) produce compresión en la parte superior del arco, pero si  $R$  estuviera debajo del centro del arco  $M_B$  sería negativo, ya que el momento  $R_e$  produce tensión en la parte superior del arco. Como es obvio, el momento  $H_B y$  producirá tensión en la parte superior del arco y por lo tanto será negativo. El momento  $m$  de las cargas que intervienen es siempre negativo independientemente de la posición del punto  $C$ .

#### 4. Aplicación de las tres ecuaciones fundamentales .

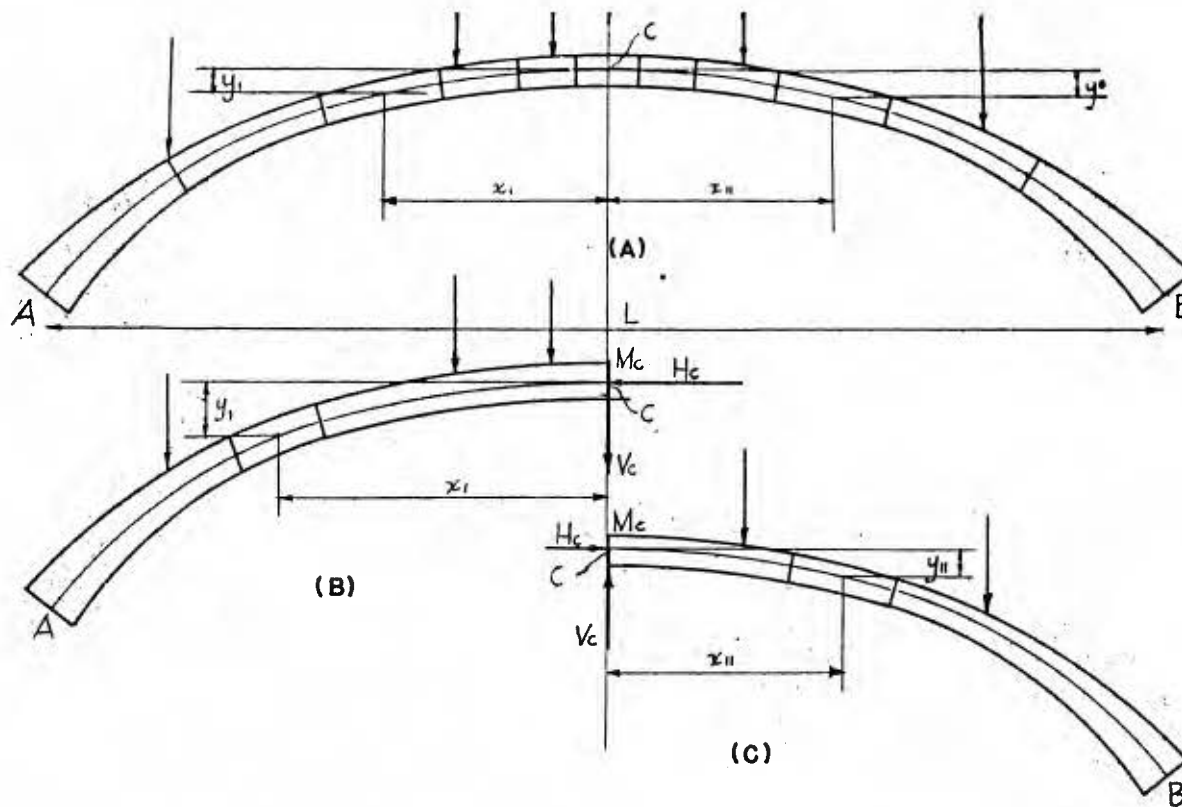
Para diseñar un arco fijo es necesario primero determinar el momento flector, empuje y cortante en prácticamente todo punto del arco . Después de que éstos han sido determinados, los esfuerzos unitarios en el hormigón y en el acero a lo largo del arco pueden ser computados y luego, si es necesario, se pueden hacer modificaciones para obtener un diseño satisfactorio.

Del último artículo se deduce que el momento flector en cualquier punto de un arco fijo puede ser determinado, si el momento flector y las componentes vertical y horizontal de la resultante en cierto punto son conocidas .

Por medio de la aplicación de las ecuaciones A, B, y C del artículo 2, el momento flector y las componentes vertical y horizontal de la resultante puede ser determinadas en cualquier punto. ACB (Fig.6) representa un arco fijo soportando cualquier número de cargas verticales, incluyendo el peso del arco, y consideremos el arco dividido en cortas franjas, como se indica.

Sea C un punto cerca del punto más alto del arco tomado en la línea divisoria de las dos divisiones .

Se demostró en el artículo 2 que el movimiento del punto C debido a cualquier carga sobre el arco puede ser determinado por medio de la aplicación de las ecuaciones (A), (B), y (C) y luego sumando de C a A ó de C a B. Esto es, nosotros obtendremos el mismo valor para x, y y  $\phi$  tanto si la suma se hace de A a B ó de C a B. Sea  $M_1$  = momento flector en el centro de cualquier división a la izquierda de C y  $M_2$  = momento flector en el centro de cualquier división a la derecha de C y  $X_1$  será la distancia horizontal de C al centro de cualquier división a la izquierda de C y  $X_2$  será la distancia horizontal de C al centro de cualquier división a la derecha de C e  $y_1$  la distancia vertical de una línea horizontal a través de C al centro de cualquier división a la izquierda de C. e  $y_2$  la distancia vertical de la misma horizontal al centro de cualquier división a la derecha de C.



**FIGURA 5**

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA	
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL	
PUENTE DE CUATRO VIAS	
R.CH.G.	1957

Luego tomando C como origen tenemos

$$\phi = \sum \frac{M_t ds}{EI} = - \sum \frac{M_r ds}{EI} \quad (1)$$

$$x = \sum \frac{M_t y_1 ds}{EI} = - \sum \frac{M_r y_1 ds}{EI} \quad (2)$$

$$y = \sum \frac{M_t x_1 ds}{EI} = \sum \frac{M_r x_1 ds}{EI} \quad (3)$$

Se ve en la Fig. 3 que el  $\Delta\phi$  decreció  $\phi$  e incrementó  $\phi$ . Así evidentemente  $\Delta\phi$  para la parte del arco a la izquierda de C en ese caso será negativo, mientras que  $\Delta\phi$  para la parte del arco a la derecha de C será positiva; en consecuencia, en general, un lado de la ecuación (1) será negativo y el otro lado será positivo. No importa cual de los lados es negativo ya que la ecuación es general.

También se ve de la Fig. 3 que Ax será positivo cuando la parte del arco a la izquierda de C es considerada, y negativo cuando la parte a la derecha de C es considerada. Así un lado de la ecuación (2) será negativo y el otro positivo. No tiene importancia cual lado de la ecuación (2) es tomado como negativo, ya que es una ecuación general. Se puede ver fácilmente que ambos lados de la ecuación (3) tendrán el mismo signo.

Sea M<sub>c</sub> = momento flector en C ;

H<sub>c</sub> = componente horizontal de la resultante en C;

V<sub>c</sub> = componente vertical de la resultante en C.

ahora, considerando la parte del arco a la izquierda de C como una estructura separada como se muestra en (b) Fig. 5, tenemos

$$M_1 = Mc + Hc y_1 - Vc x_1 - m_1 l \quad (5)$$

para el momento flector en el centro de cualquier división a la izquierda de C.

Luego considerando la parte del arco a la derecha de C como una estructura separada tal como se muestra en (c) Fig. 5 tenemos

$$M_r = Mc + Hc y_n + Vc x_n - m_r \quad (5)$$

para el momento flector en el centro de cualquier división a la derecha de C.

En la ecuación (4)  $M_1$  representa el momento con respecto al centro de cualquier división a la izquierda de C. De igual modo, en ecuación (5)  $M_r$  representa el momento con respecto al centro de cualquier división a la derecha de C.

Asumiendo que las divisiones son de tal longitud que  $ds/I$  es constante y sustituyendo en ecuaciones (1), (2) y (3) los valores de  $M_1$  y  $M_r$  dados en ecuaciones (4) y (5) obtendremos respectivamente

$$(6) \quad \sum ( Mc + Hc y_1 - Vc x_1 - m_1 ) = - \sum ( Mc + Hc y_n + Vc x_n - m_r )$$

$$(7) \quad \sum ( Hc y_1 + Hc y_1^2 - Vc x_1 y_1 - m_1 y_1 ) = - \sum ( Hc y_n + Hc y_n^2 + Vc x_n y_n - m_r y_n )$$

$$(8) \quad \sum ( Hc x_1 + Hc x_1 y_1 - Vc x_1^2 - m_1 x_1 ) = \sum ( Hc x_n + Hc x_n y_n + Vc x_n^2 - m_r x_n )$$

Sea  $N'$  = número de divisiones a la izquierda de C y

$N''$  = número de divisiones a la derecha de C. Las ecuaciones

(6), (7) y (8) se reducen respectivamente a

$$(9) \quad 0 = ( N' + N'' ) Mc + ( \sum y_1 + \sum y_n ) Hc + ( \sum x_n - \sum x_1 ) Vc - ( \sum m_1 + \sum m_r )$$

$$(10) \quad 0 = ( \sum y_1 + \sum y_n ) Hc + ( \sum y_1^2 + \sum y_n^2 ) Hc + ( \sum x_n y_n - \sum x_1 y_1 ) Vc - ( \sum m_1 y_1 + \sum m_r y_n ) = 0$$

$$(11) \quad 0 = ( \sum x_1 - \sum x_n ) Hc + ( \sum x_1 y_1 - \sum x_n y_n ) Hc - ( \sum x_1^2 - \sum x_n^2 ) Vc + ( \sum m_r x_n - \sum m_1 x_1 ) = 0$$

$Mc$ ,  $Vc$ , y  $Hc$  pueden ser obtenidos de las tres ecuaciones (9), (10)

y (11) para cualquier arco fijo de horisigón, ya sea simétrico ó asimétrico.

Arcos simétricos . En el caso de arcos simétricos, dividiendo el arco en un número de divisiones par y tomando el origen ( c ) en la clave ( centro del tramo ),  $N' = N'' = N, \sum y' = \sum y'', \sum x_1 = \sum x_n, \sum y_1^2 = \sum y_n^2, \sum x_1^2 = \sum x_n^2$  y  $\sum x_1 y_1 = \sum x_n y_n$  . Entonces la ecuación (9) se reduce a

$$2Hc + 2Hc \sum y - ( \sum m_1 + \sum m_r ) = 0 \quad ( 12 )$$

$N$  = número de divisiones en la mitad del arco y  $y$  es para la mitad del arco .

De igual modo la ecuación (10) se reduce a

$$2Hc \sum y + 2Hc \sum y^2 - ( \sum m_1 y + \sum m_r y ) = 0 \quad ( 13 )$$

y la ecuación (11) se reduce a

$$-2Vc \sum x^2 + ( \sum m_r x - \sum m_1 x ) = 0 \quad ( 14 )$$

de las ecuaciones (12) y (13) obtenemos

$$Hc = \frac{N ( \sum m_1 y + \sum m_r y ) - ( \sum m_1 + \sum m_r ) y}{2 [ N \sum y^2 - ( \sum y )^2 ]} \quad ( 15 )$$

De ecuación 14 obtenemos

$$Hc = \frac{( \sum m_1 + \sum m_r ) - 2Hc \sum y}{2N} \quad ( 16 )$$

De la ecuación 14 obtenemos

$$Vc = \frac{( \sum m_r x - \sum m_1 x )}{2 \sum x^2} \quad ( 17 )$$



Las ecuaciones (15), (16) y (17) pueden ser usadas para determinar el empuje ( $H_c$ ), momento flector ( $M_c$ ) y cortante ( $V_c$ ) en la clave de cualquier arco fijo simétrico independientemente de las cargas.

##### 5. Momentos, cortantes, y empujes debidos a cambios de temperatura.

ACB (Fig.6) representa un arco simétrico fijo, C está en el centro del trazo.

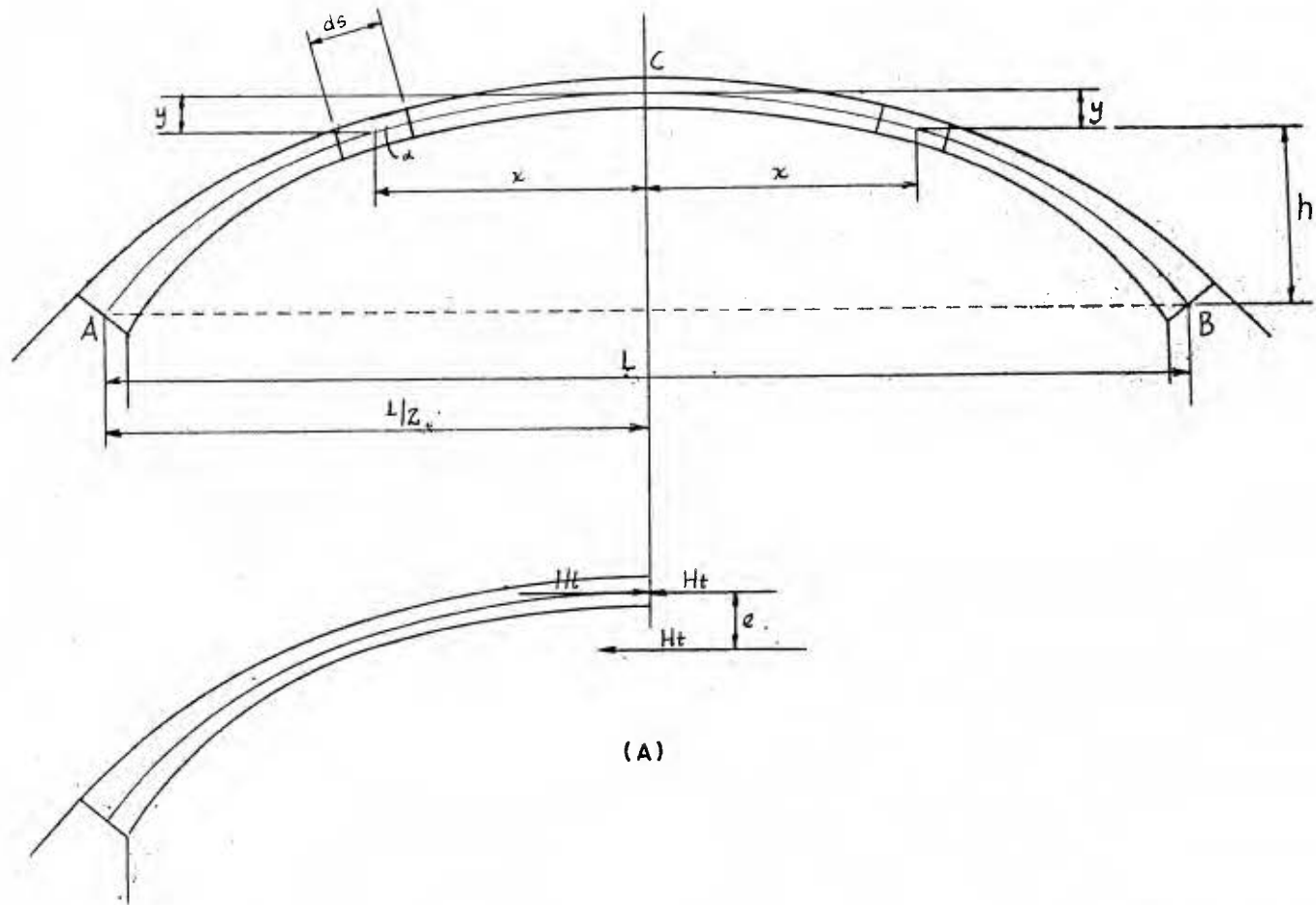
$ds$  representa cualquier pequeña división del arco. Si no estuviera restringido, el cambio de longitud de  $ds$  debido a un cambio de temperatura sería  $wt(ds)$  donde  $t$  = número total de grados de cambio de temperatura y  $w$  = coeficiente de expansión ó contracción por cada grado de cambio.

La componente horizontal del cambio en la longitud  $ds$  será  $wt(ds)\cos\alpha$ . Se puede ver fácilmente que  $(\sum ds)\cos\alpha = L$ . Luego  $wt(L)$  será el cambio total de longitud en el arco.

La componente vertical del cambio de  $ds$  será  $wt(ds)\sin\alpha$  y entonces el movimiento vertical total de C será

$$wt(\sum ds)\sin\alpha = wtn$$

Se ve fácilmente que el movimiento vertical de C debido a la expansión ó contracción de la parte derecha del arco sería la misma que la debida a la expansión ó contracción de la parte izquierda. Luego evidentemente no habrá cortante en C debidos a cambios de temperatura. Similamente podemos ver que ahí no habrá movimiento horizontal del punto C ni cambio en la pendiente en ese punto debido a cambios de temperatura. Como en C el cortante es cero y no hay cargas vertica-



(A)

FIGURA 6

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESUELA DE INGENIERIA CIVIL
PUENTE DE CUATRO VIAS
R.CH.G. 1957

-les tendremos

$$M = -M_t + H_t y \quad (1)$$

para cualquier punto a una distancia  $x$  a la derecha ó a la izquierda de  $C$ , donde  $M_t$  = momento flector y  $H_t$  = empuje en  $C$  debidos a cambios de temperatura .

Como la pendiente en  $C$  no cambia, Ecuación A del artículo 2 viene a ser

$$\Delta \theta = \sum_A^C \frac{M_t s}{EI} = 0 \quad (2)$$

Sustituyendo el valor de  $M$  dado en ecuación (1) tenemos

$$( ds / I = \text{constante} )$$

$$M_t + H_t \sum y = N M_t + H_t \sum y = 0$$

del cual obtenemos

$$M_t = \frac{-H_t \sum y}{N} \quad (3)$$

Cuando  $N$  = número de divisiones en la mitad del arco y  $y$  es para la mitad del arco solamente .

Para obtener una expresión en términos de la variación de temperatura, consideremos la mitad del arco como una estructura independiente, como se muestra en (a) Fig.6 . Luego el movimiento horizontal de  $C$  debido a cambios de temperatura será

$$\Delta x = wt \left( \frac{L}{2} \right) \quad (4)$$

en tal caso el arco puede moverse libremente con respecto a  $a$  y desde luego no ocurrirán esfuerzos de temperatura. Supongamos que  $C$  se mueve

hacia la derecha ( debido a un aumento de la temperatura ) una distancia  $x$  . Luego, supongamos una fuerza horizontal  $Ht$  aplicada en  $C$ , como se muestra en (a) ( Fig. 7 ) y supongamos que esta fuerza sea justamente de la intensidad necesaria para llevar a  $C$  a su posición original, horizontalmente, y al mismo tiempo supongamos que existe un momento en  $C$  suficiente para traer a la tangente en  $C$  a la posición horizontal . Luego evidentemente la misma condición existirá en la parte izquierda del arco como si las dos mitades del arco estuvieran conectadas . Como se puede ver fácilmente, el obligar a  $C$  a su posición original causará momentos, cortantes y empujes en la mitad izquierda del arco correspondiendo al movimiento  $x$ . Luego, la Ecuación ( B ) del artículo 2 viene a ser

$$\Delta x = \sum_A^C \int \frac{ds}{EI} = wt ( L/2 ) \quad ( 5 )$$

Luego, sustituyendo en Ec.(5) el valor de  $H$  dado en Ec.(1) obtendremos

$$\left( \sum Hty + Ht \sum y^2 \right) \frac{ds}{EI} = wt ( L/2 ) \text{ la cual se reduce a}$$

$$Ht \sum y + Ht \sum y^2 = \frac{wtLE}{2C} \quad ( 6 )$$

donde  $c = \frac{ds}{I}$  ( constante )

Ahora sustituyendo en Ec.(6) el valor de  $Ht$  dado en ec.(3) y reduciendo obtenemos

$$Ht = \frac{wtLcN}{2C [ N \sum y^2 - (\sum y)^2 ]} \quad ( 7 )$$

donde  $\sum y$ ,  $N$  y  $\sum y^2$  son para la mitad del arco solamente .

El empuje en la clave debidos a cambios de temperatura puede ser determinado para cualquier arco simétrico de Ec.(7), y seguidamente el momento debido a lo mismo en ese punto puede ser determinada de ecuación (3), y lue-

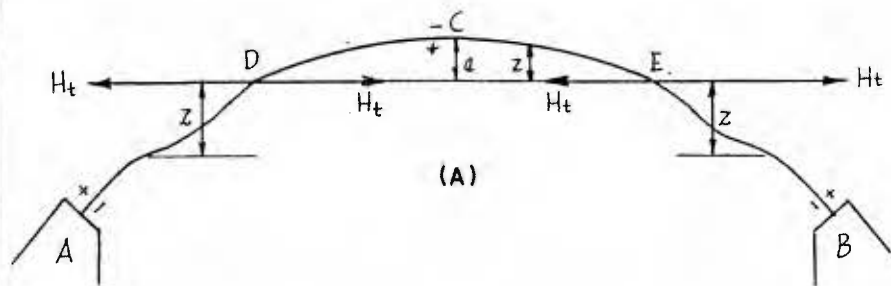
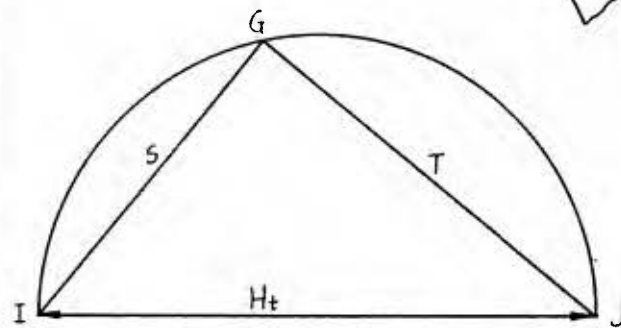
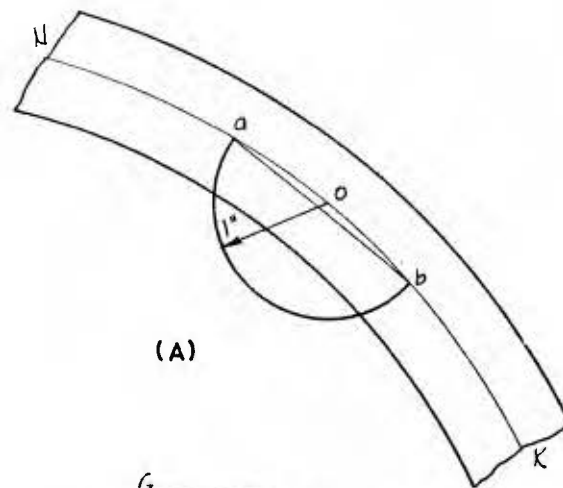


FIGURA 7



(B)

FIGURA 8

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA	
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL	
PUENTE DE CUATRO VIAS	
R.CH.G.	1957

—go el momento en cualquier punto puede determinarse de Ec.(1) ,

El valor de w puede ser tomado como 0.000006 por grado Farenheit , E como 2.000.000 #/” y t como 40.

En el caso de un aumento de temperatura t será tomado como positivo y como menos en el caso de una caída de temperatura .

Como una regla L e y son tomados en pies, en tal caso E y C estarán en unidades de pies . Para convertir E y C de unidades de pulgada a unidades de pie simplemente multiplicamos por  $(12)^2$  y  $(12)^3$  respectivamente, esto es

$$E = 2 \times 10^6 \times 12^2 = 288 \times 10^6 \text{ unidades de pie}$$

Debido a que los finales del arco están fijos, la distorsión del arco debido a un aumento de temperatura será como se indica en la Fig.7 . El momento flector en D y E ( puntos de contraflexión ) será cero .

Siendo el arco simétrico, el movimiento vertical de D debido a la expansión de DA es el mismo que el movimiento vertical de E debido a la expansión EB . Así evidentemente, el cortante vertical en D y E será cero y la parte DCE puede ser considerado como un arco independiente sobre el que actúan dos fuerzas horizontales o puestas e iguales Ht, como se muestra en (b). Luego, el momento flector en cualquier punto del arco sobre la línea DE es igual a zHt. Las partes DA y EB del arco, pueden ser considerados como simples voladizos, cada uno cargados por Ht solamente y desde luego el momento flector en cualquier punto del arco bajo la línea DE es igual a zHt. Los puntos de contraflexión tendrán la misma localización ya sea que la temperatura aumente o baje. En el caso de que la temperatura baje , Ht actuará en dirección opuesta a la que tiene en Fig. 7 y consecuentemente la distorsión a través del arco será en

la dirección a la que se muestra, pero sin embargo el momento flector en ambos casos será  $zHt$ . De modo que si los puntos D y E son conocidos, la línea DE puede ser dibujada y luego la z para cada punto puede ser sacada con escala y el momento en ese punto debido a cualquier cambio de temperatura puede ser obtenido multiplicando z por Ht. El momento debido a cualquier cambio de temperatura puede ser determinado en cualquier punto en un arco de esta manera en lugar de aplicar la Ec.(1), si uno así lo desea.

En el caso de un arco simétrico, es evidente que la línea DE es horizontal y desde luego la posición de la línea DE es obtenida rápidamente computando los valores de la distancia perpendicular e en la clave. Aplicando tres fuerzas iguales en C ( Fig. 7a ) de acuerdo con el artículo 3, se ve que el momento en C es igual a  $eHt$ . Lo mismo es evidente de Fig. 7a. Luego indudablemente tendremos  $Ht = eHt$  para el momento flector en la clave, de donde obtenemos

$$e = \frac{Ht}{Ht} \quad (8)$$

El valor de Ht se obtiene de Ec. (7) y luego el valor de Ht de Ec.(3). Después de que e se determina de Ec.3 la línea horizontal DE puede ser dibujada y luego el momento flector debido a cambios de temperatura en cualquier punto puede ser determinado como se explicó arriba.

Para el empuje perpendicular a la sección en cualquier punto del arco debido a cambios de temperatura tenemos

$$T = Ht \cos \alpha \quad (9)$$

y para el cortante en la sección transversal en cualquier punto tenemos

$$S = Ht \operatorname{sen} \alpha \quad ( 10 )$$

donde  $\alpha$  = ángulo de la pendiente y  $Ht$  = empuje horizontal en la clave . Sin embargo, el empuje y cortante en cualquier punto de un arco debidos a cambios de temperatura pueden ser encontrados más fácilmente por el siguiente método gráfico .

NK en fig. 8a, representa una porción del arco y suponemos que queremos encontrar el empuje y el cortante en el punto O.

Primero con O como centro se describe el arco ab, usando un conveniente radio, digamos 1 pulgada . Luego dibujamos la cuerda ab, la cual será prácticamente paralela a la tangente en O . Luego se dibuja JI, como se muestra en (b), igual y paralela al empuje horizontal de la clave como se dedujo de Ec.(7) y luego se describe el semicírculo JUI y se dibuja GJ paralela a la cuerda ab y tenemos el empuje en O representado por la línea GJ y el cortante por la línea GI . Luego el valor de ambos pueden ser determinados por escala, usando las mismas unidades utilizadas para trazar JI = Ht

o. Momentos, empujes y cortantes debidos a acortamiento del arco.

Los esfuerzos de compresión en un arco debidos a los empujes de carga muerta y viva acortan el arco . Este acortamiento del arco, como es evidente, causará momentos adicionales, empujes y cortantes a través del arco similares a aquellos causados por una caída de temperatura



Consideremos el arco simétrico mostrado en la Fig.7 . Para el acortamiento de cualquier división corta ( de longitud ds ) debido a un esfuerzo de compresión de f libras por pulgada cuadrada tenemos

$$z = \frac{f ds}{E} \quad ( 1 )$$

Para la componente horizontal de este acortamiento tenemos

$$z_h = \frac{f ds}{E} \cos \alpha \quad ( 2 )$$

donde  $\alpha$  = ángulo de pendiente que el arco hace con la horizontal en el centro de cualquier división . Se ve que no habrá movimiento horizontal del punto C , que la pendiente en C no cambiará y que el cortante en ese punto será cero . De modo que nosotros necesitamos considerar solamente la mitad del arco, digamos la mitad izquierda . Imaginemos el arco cortado en dos en C y el esfuerzo compresivo f aplicado a través de la mitad izquierda . Luego, no habrá esfuerzo debido a acortamiento, ya que la mitad izquierda del arco es libre de acortarse con respecto a A . El punto C simplemente se movería a la izquierda . Ahora, si una fuerza horizontal Hs y un momento Ms suficientes para llevar a C a su posición original, es evidente que momentos, empujes y cortantes se inducirán en la parte izquierda del arco iguales a aquellas producidas por el acortamiento debido a f cuando el arco está intacto .

Así indudablemente tendremos

$$\int \frac{M_1}{EI} y ds = \frac{f}{E} \int_B^A ds \cos \alpha = \frac{f}{E} \cdot \frac{L}{2} \quad \text{de la cual}$$

obtenemos

$$\sum M_1 y = \frac{f L}{2 C} \quad (3)$$

donde  $C = ds/\underline{f}$  = constante. Para el momento flector en el centro de cualquier división a la izquierda de  $C$  tenemos

$$M = M_s + Hs y \quad (4)$$

Sustituyendo en Ec.(3) el valor de  $M$  dado en Ec.(4) tenemos

$$M_s \sum y + Hs \sum y^2 = \frac{f L}{2 C} \quad (5)$$

La pendiente en  $C$  no cambia, luego tenemos

$$\Delta \phi = \frac{M_1 ds}{EI} = 0 \quad \text{de la cual obtenemos}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad (6)$$

Sustituyendo en Ec.(6) el valor de  $M$  dado en Ec.(4) tenemos

$$M_s + Hs \sum y = 0 \quad \text{de donde obtenemos}$$

$$M_s = - \frac{Hs \sum y}{N} \quad (7)$$

donde  $N$  = número de divisiones en la mitad del arco.

Sustituyendo en Ec.(5) el valor de  $M_s$  dado en Ec.(7) y reduciendo obtenemos

$$Hs = \frac{f L N}{2C [ N \sum y^2 - (\sum y)^2 ]} \quad (8)$$

El empuje horizontal  $Hs$  en  $C$  ( en la clave ) debido a acortamiento del arco puede ser determinado de Ec.(8), luego el momento  $M_s$  en ese

punto debido a lo mismo puede ser determinado de Ec.(7). Teniendo  $H_s$  y  $h_s$  determinados los puntos de contraflexión pueden ser encontrados y luego los momentos, empujes, y cortantes determinados del mismo modo que para cambios de temperatura, como se aplica en el artículo 5. En este caso

$$e = \frac{H_s}{h_s} \quad (9)$$

### 7. Arcos abiertos .

Se usan en puentes profundos donde la flecha debe ser alta. Hay dos tipos de arcos abiertos; uno es donde el arco consiste de una losa continua, lo mismo que en los arcos con relleno, y el otro es donde el arco se compone de dos ó más nervios de arco independientes.

Para delinear un arco abierto, el primer paso es dibujarlo en una misma posición aproximada sobre el arco de una parábola y luego, de un modo preliminar, se pueden determinar los soportes verticales del piso y luego el sistema de piso puede ser diseñado de tal modo que el peso del piso y de los soportes verticales puedan ser computados. Luego la carga muerta, incluyendo el arco, puede ser calculada aproximadamente y el polígono de equilibrio para carga muerta pasado por los centros de los arañques y de la clave, nos indicará la posición requerida del arco, y la posición exacta se obtiene mediante modificaciones sucesivas si son necesarias. Después de que el arco es delineado, los cálculos para momentos, empujes y cortantes en todo el ar-

-co se encuentra primero dividiendo el arco en divisiones tales que  $ds/l$  sea constante y luego aplicando ecuaciones (15), (16) y (17) del artículo 4. Las líneas de influencia son especialmente recomendadas para el análisis de arcos abiertos.

Desde el punto de vista de la economía, los arcos de nervio son preferibles a los arcos de losa continua. Cuando el arco consta de dos ó más arcos, los soportes del piso usualmente consisten de columnas que transversalmente tienen el mismo ancho que el nervio del arco. El piso consiste de una losa continua de hormigón armado excepto que debe haber una junta de expansión en cada final del tramo y una junta en el piso y en la baranda en ó cerca de la mitad del tramo. La losa del piso esté soportada directamente en vigas transversales las cuales están conectadas directamente a las columnas verticales, las cuales transmiten la carga de la viga directamente al nervio del arco.

Al diseñar arcos abiertos de nervio, se experimenta mucha dificultad al seleccionar las dimensiones apropiadas para los nervios. Para ayudar en el diseño se recomiendan las siguientes dimensiones para nervio de arco.

Luz en pies	Flecha en pies	Dimensiones en la clave en pulgadas	Dimen. en el arranque en pulgadas.
50	35	14 x 48	25 x 48
60	26	18 x 60	30 x 60
75	27	20 x 60	34 x 60
80	40	21 x 55	35 x 55

Luz en pies	Flecha en pies	Dimensiones en la clave en pulgadas	Dimensiones en el arranque en pulgadas
93	24	24x60	48x60
100	15	24x72	48x72
100	40	24x60	40x60
118	28	26x48	44x48
130	15	27x108	45x108
150	50	48x44	90x44

Estas dimensiones son para arcos abiertos de dos nervios y para vías de 24 pies a 30 pies . La información de arriba se contiene que lo que da son dimensiones aproximadas . Las dimensiones exactas requeridas dependen, como sabemos , de la flecha del arco, cargas, esfuerzos permisibles en el hormigón y en el acero, ancho de la vía y de las aceras, y requerimientos generales, de tal modo que las dimensiones requeridas deben satisfacer los esfuerzos en cada caso .

### 8. División del arco de tal modo que $ds/I$ es constante.

Para simplificar el análisis de arcos de concreto, asumimos el arco dividido de modo que la longitud de cada división dividida por el momento de inercia de la sección transversal sea constante. Esto es, si  $ds$  representa la longitud de cualquier división e  $I$  el momento de inercia de la sección transversal en el centro de la división,

tendremos

$$\frac{ds}{I} = c \quad (1)$$

Luego si  $\frac{ds}{I}$  es constante en todo el arco, es obvio que

$\frac{\sum ds}{\sum I}$  es igual a la misma constante .

Así tendremos

$$\frac{\sum ds}{\sum I} = c \quad (2)$$

Como se puede ver,  $\sum ds$  es igual a la longitud del arco medida sobre su eje y el verdadero problema consiste en encontrar el valor de  $\sum I$ . Desde un punto de vista teórico entre mayor sea el número de divisiones que se hace a un arco más exacto son los resultados, pero resultados suficientemente aproximados se obtienen si se usa la siguiente fórmula :

$$N = 2\sqrt{L}$$

donde  $N$  = número de divisiones en el arco y  $L$  = longitud del tramo en pies .

de la ecuación mencionada se obtienen los siguientes resultados:

Longitud del tramo	Número de Divisiones
30 pies	12
40 "	12
50 "	14
60 "	16
70 "	16
80 "	18
90 "	18
100 "	20

Es más conveniente tomar un número par de divisiones, y así el centro del tramo estará en una línea de división, entonces se tomará el número par más cercano al obtenido de la ecuación de arriba. Nosotros sabemos que el momento de inercia de la sección transversal de un arco crece desde la clave hasta el arranque y consecuentemente si  $\frac{ds}{I}$  es constante en todo el arco, la longitud de las divisiones crecerá de la clave a el arranque. Con esto en mente y teniendo el número de divisiones asumido, podemos dibujar divisiones que tengan aproximadamente la misma longitud y posición que las divisiones requeridas; esto es, simplemente asumimos las divisiones para comenzar. Luego determinando el momento de inercia en el centro de cada una de estas divisiones y sumando los resultados obtenemos un valor aproximado de  $\sum I$ . Luego sustituyendo este valor de  $\sum I$  y el valor de  $\frac{ds}{I}$  en Ec.(2) obtenemos un valor aproximado de  $c$ .

De ecuación (1) obtenemos

$$ds = cI \quad (3)$$

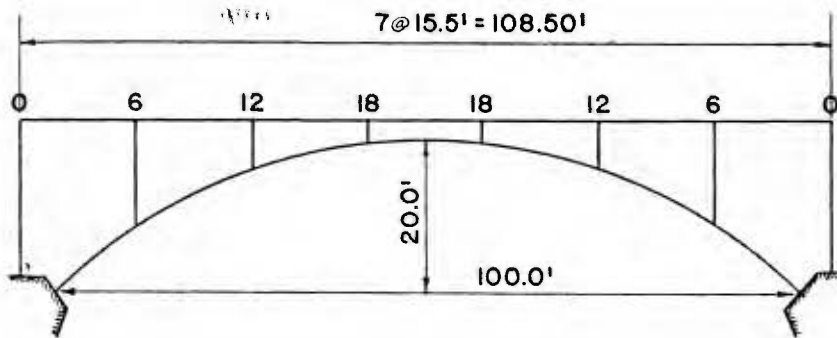
Esto es, la longitud de cualquier división es igual a la constante  $c$  multiplicada por el momento de inercia de la sección transversal en el centro de la división.

Así multiplicando el valor encontrado para  $c$  por el momento de inercia encontrado para la sección en el centro de cada división asumida, obtendremos más aproximadamente las longitudes requeridas de las divisiones. Luego se dibujan estas longitudes, comenzando en la clave en el caso de ser simétrico el arco ( sólo la mitad del arco necesita ser considerada ) y luego se determina el momento de inercia

-cia de la sección transversal en centro de cada una de estas divisiones y sumando estos momentos de inercia , obtendremos un valor más aproximado de  $\sum I$  . Sustituyendo otra vez en Ec.(2) obtenemos un valor más aproximado de c . Luego, sustituyendo en Ec.(3), prácticamente las verdaderas longitudes de las divisiones serán obtenidas y finalmente, haciendo aquellas correcciones en las divisiones que se consideren necesarias, obtendremos las divisiones deseadas tales que  $ds/I$  será prácticamente constante a través de todo el arco.

Es obvio que entre más nos aproximemos al asumir las divisiones al comenzar, menor será el trabajo que hay que hacer para obtener las divisiones satisfactorias. Al tener el ajuste generalmente se obtienen divisiones satisfactorias .-





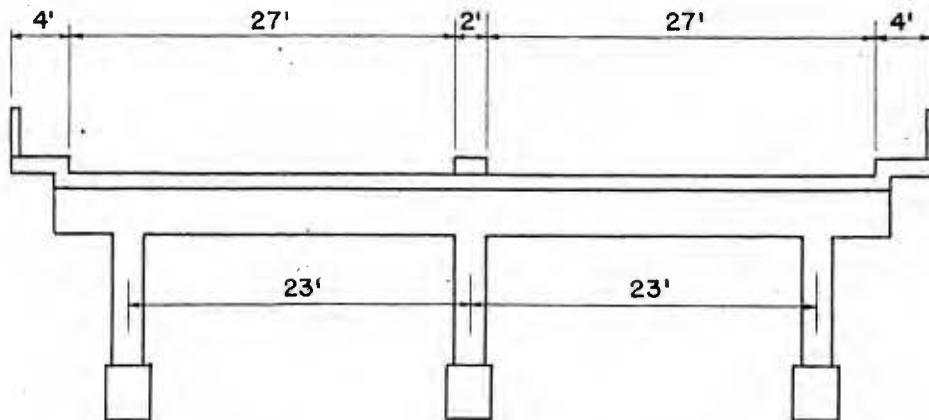
PUENTE DE ARCO DE CUATRO VIAS

$f'_c = 3000$

$f_s = 18000$

ESPECIFICACIONES = AASHO 1953

CARGA VIVA = H20, H20-S16



### Losa continua

#### Carga muerta

$$\text{Losa de 10.0 inch. de espesor} \quad \frac{10 \times 12}{144} \times 150 = 125 \text{ lbs./ft.}$$

$$1.0 \text{ in. para desgaste por rodamiento} \quad \frac{1 \times 12}{144} \times 150 = 13 \text{ lbs./ft.}$$

$$\text{Total} = 138 \text{ lbs./ft}$$

#### Carga viva

a) Cargas de rueda

$$E = \frac{10N + W}{4N} = \frac{10 \times 2 + 26}{4 \times 2} = 5.75 \text{ ft}$$

$$\text{Carga por pie de losa} = 12000 \div 5.75 = 2090 \text{ lbs}$$

b)

Carga uniforme más concentraciones.

$$\text{Carga uniforme} = \frac{N \cdot Q}{0.5W + 5N} = \frac{2 \times 640}{0.5 \times 26 + 5 \times 2} = 55.6$$

$$\text{Carga uniforme} = 55.6 \text{ lbs/ sq.ft.}$$

$$\text{Concentración} = \frac{N \cdot P'}{0.5W + 5N}$$

$$\text{Concentración para momento} = \frac{2 \times 18000}{0.5 \times 26 + 5 \times 2} = 1570 \text{ lbs/ft}$$

$$\text{Concentración para cortante} = \frac{2 \times 26000}{0.5 \times 26 + 5 \times 2} = 2260 \text{ lbs/ft.}$$

Cálculo de los momentos máximos y cortantes máximos en el punto 1

( Ver hoja 1 y líneas de influencia ) .

Carga muerta

$$M = + 0.0528 \times 138 \times (15.5)^2 = 1745 \text{ lbs-ft.}$$

Carga viva.

a) Carga uniforme más concentración

Area positiva de la línea de influencia =

$$\begin{aligned} & ( 0.065 + 0.1155 + 0.083 + 0.052 + 0.028 + 0.007 ) + \\ & + ( 0.002 + 0.0039 + 0.004 + 0.0039 + 0.0032 + 0.0015 ) \times 15.5 \times \frac{15.5}{6} \\ & = 14.80 \text{ sq.ft.} \end{aligned}$$

Momento positivo( carga uniforme ) =  $14.80 \times 55.6 = 823 \text{ lb - ft.}$

Momento positivo( concentración ) =  $0.1318 \times 15.5 \times 1570 = 3210 \text{ lb - ft.}$

$$\% \text{ Impacto} = \frac{50}{125+31} = 32 < 30$$

Momento positivo máximo debido a carga uniforme más concentración

$$= ( 823 + 3210 ) \times 1.30 = 5250 \text{ lb - ft.}$$

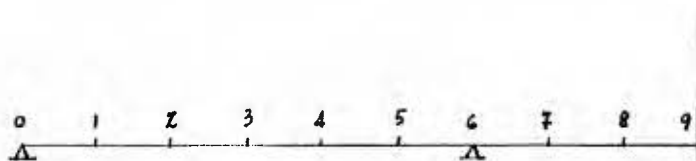
Area negativa de la línea de influencia =

$$\begin{aligned} & = ( 0.0021 + 0.0070 + 0.0110 + 0.0134 + 0.0121 + 0.0051 ) \times 15.5 \times \frac{15.5}{6} \\ & = 2.0 \text{ sq.ft.} \end{aligned}$$

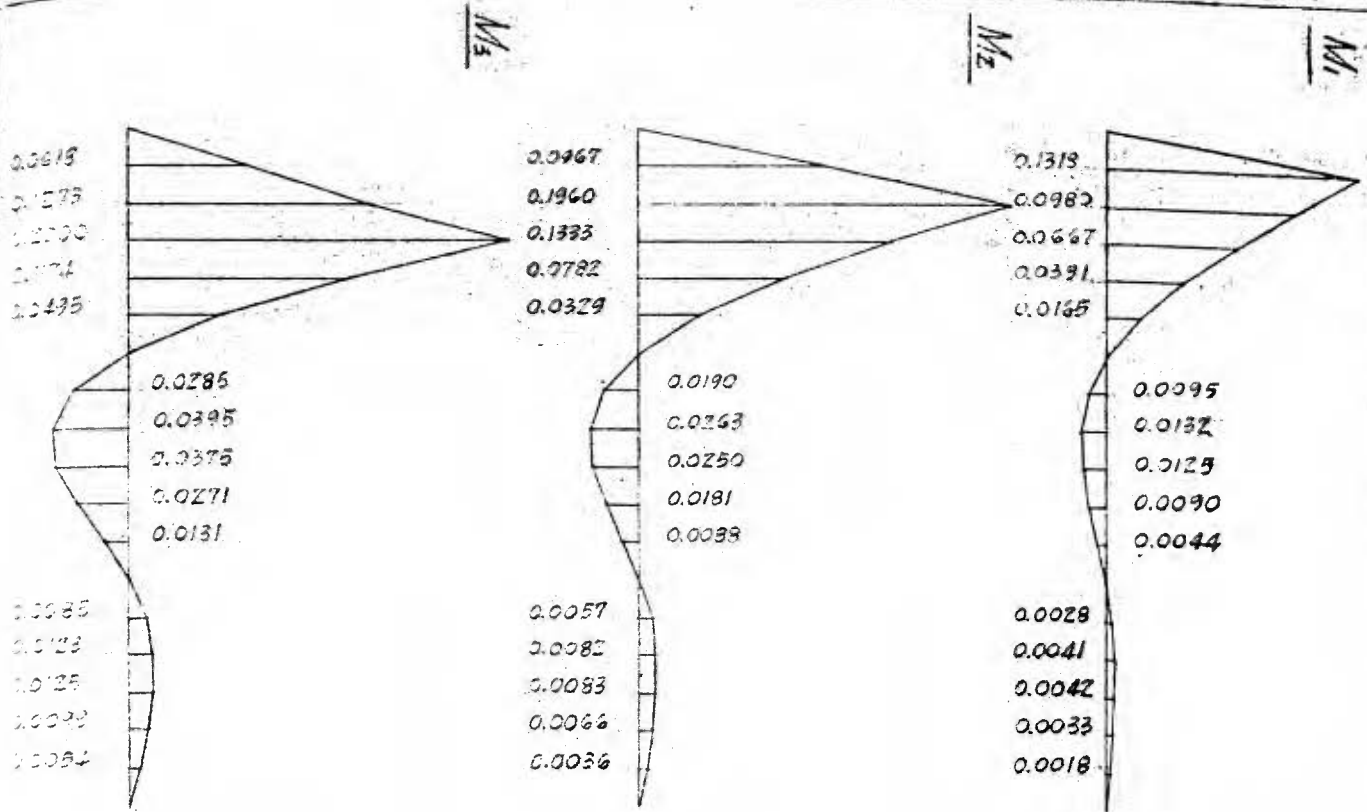
Momento negativo ( carga uniforme ) =  $2.0 \times 55.6 = 111.2 \text{ lbs. - ft}$

Momentos en

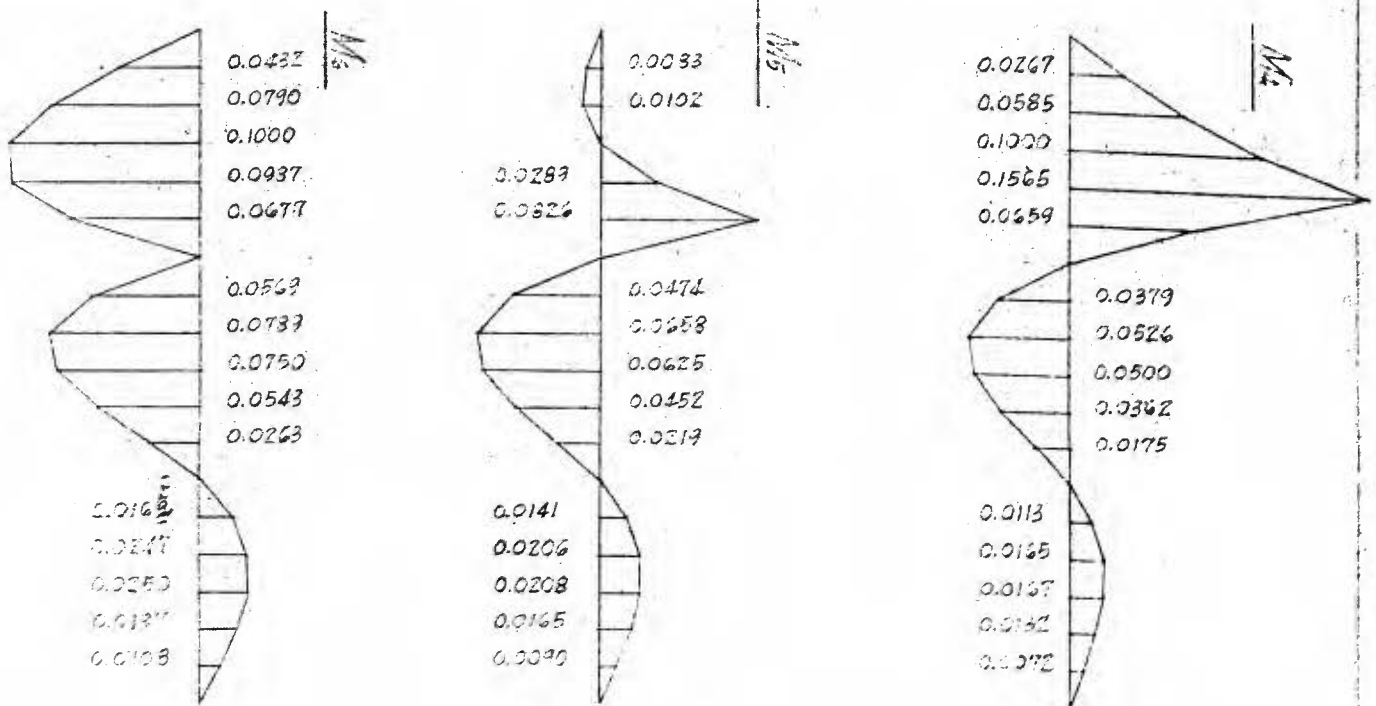
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1326	0.0983	0.0642	0.0300	-0.0042	-0.0333	-0.0301	-0.0219	-0.0138	1
0.0995	0.1990	0.1318	0.0645	-0.0027	-0.0701	-0.0550	-0.0401	-0.0251	2
0.0686	0.1371	0.2057	0.1076	0.0095	-0.0837	-0.0697	-0.0508	-0.0318	3
0.0410	0.0820	0.1231	0.1640	0.0382	-0.0876	-0.0688	-0.0501	-0.0314	4
0.0177	0.0355	0.0533	0.0710	0.0889	-0.0601	-0.0472	-0.0344	-0.0215	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
-0.0138	-0.0277	-0.0415	-0.0553	-0.0692	-0.0832	0.1056	0.0773	0.0490	7
-0.0190	-0.0381	-0.0571	-0.761	-0.0951	-0.1142	0.0364	0.1870	0.1210	8
-0.0179	-0.0358	-0.0537	-0.0716	-0.0894	-0.1073	0.0010	0.1094	0.2177	9
-0.0128	-0.0256	-0.0384	-0.0512	-0.0640	-0.0768	-0.0108	0.0552	0	10
-0.0060	-0.0120	-0.0180	-0.0240	-0.0300	-0.0361	-0.0066	0.0206	0	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
0.0028	0.0057	0.0085	0.0113	0.0142	0.0170	0.0042	-0.0037	0	13
0.0041	0.0082	0.0124	0.0165	0.0206	0.0247	0.0060	-0.0127	0	14
0.0042	0.0084	0.0125	0.0167	0.0209	0.0251	0.0061	-0.0129	0	15
0.0033	0.0066	0.0099	0.0132	0.0165	0.0198	0.0048	-0.0101	0	16
0.0018	0.0036	0.0054	0.0072	0.0090	0.0108	0.0026	-0.0056	0	17



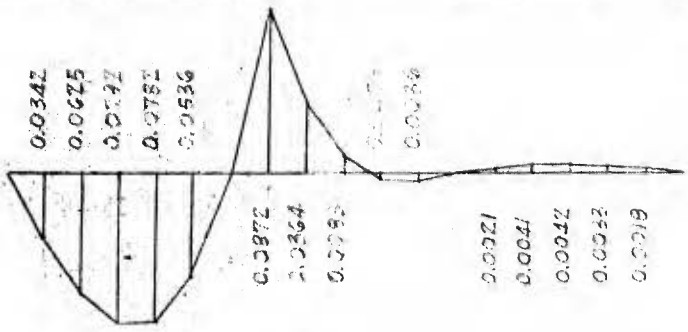
		Momentos debidos a carga uniformemente distribuida						
10	11	Reacción $R_6$	cortante para carga en :		de	carga muerta s/toda la viga	carga viva en	carga viva en
			1	1 <sub>2</sub>			1	1 <sub>2</sub>
0		0	1.0000	0	0	0		
1		0.2428	0.7950	.0378	1	0.0468		
2		0.4726	0.5966	.0692	2	0.0659		
3		0.6763	0.4113	.0876	3	0.0572		
4		0.8407	0.2457	.0864	4	0.0208		
5		0.9527	0.1066	.0593	5	0.0435		
6		1.000	0	1.000	6	-0.1355	-0.0591	-0.0931
7		0.9527	0.0832	0.8595	7	0.0181		
8		0.8096	0.1142	0.6954	8	0.0523		
9		0.6073	0.1073	0.5000	9	0.0757		
10		0.3814	0.0768	0.3046	10			
11		0.1666	0.0361	0.1305	11			
12		0	0	0	12		0.0167	-0.0931
13		-0.0763	0.0170	-0.0593	13			
14		-0.1111	0.0247	-0.0864	14			
15		-0.1127	0.0251	-0.0876	15			
16		-0.0890	0.0198	-0.0692	16			
17		-0.0486	0.0108	-0.0373	17			



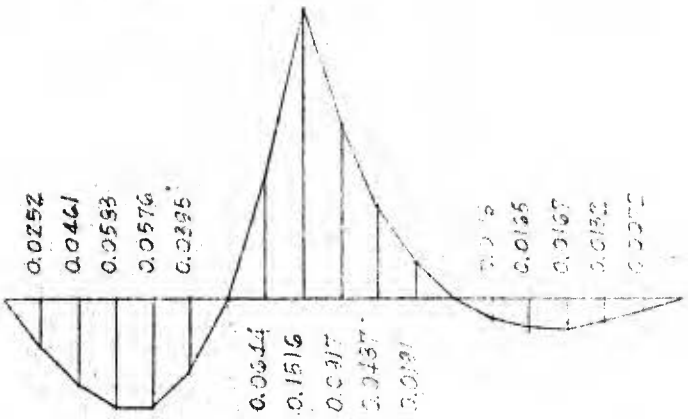
Para obtener la línea de influencia de  $M_x$  deben multiplicarse los valores dados por  $Z = 15.50$  ft. Para obtener el diagrama de momentos con carga muerta se multiplican los valores dados por  $w_m Z^2$ .



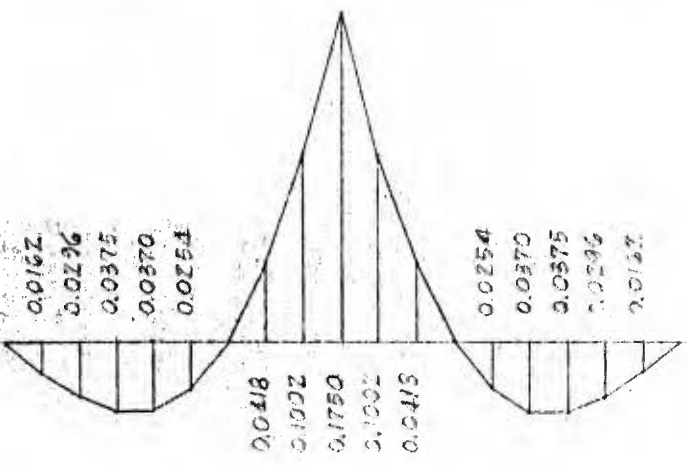
Mr.



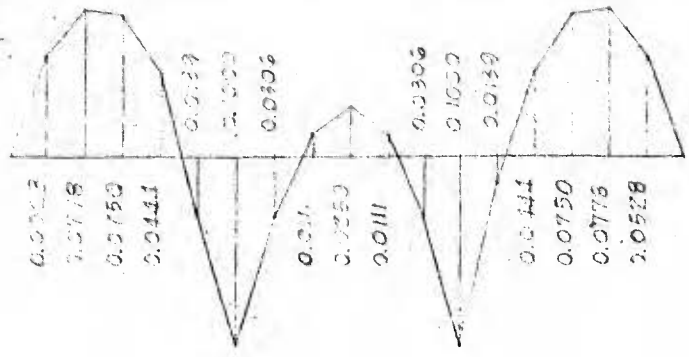
Ms.



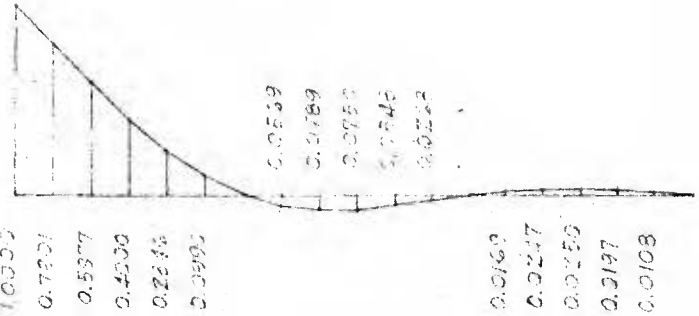
Ma.



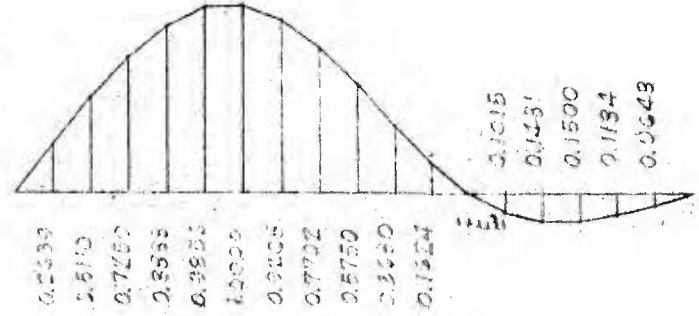
Mr.



Ms.



Ma.



Momento negativo ( concentración ) =  $0.0135 \times 15.5 \times 1570 = 329 \text{ lb-ft}$

Momento negativo máximo debido a carga uniforme más concentración  
 $= ( 111.2 + 329 ) \times 1.3 = 575 \text{ lbs - ft}$

b) Cargas de rueda

Momento positivo =  $( 0.1318 + 0.0018 ) \times 15.5 \times 2090 = 4319 \text{ lb-ft}$

% Impacto = 30

Momento positivo máximo debido a cargas de rueda =  $4319 \times 1.3 =$   
 $= 5610 \text{ lbs - ft}$

Momento negativo =  $0.0135 \times 15.5 \times 2090 = 437 \text{ lbs - ft}$

% Impacto = 30

Momento negativo máximo debido a cargas de rueda =  $437 \times 1.3 = 569 \text{ lb-ft}$

Momento positivo máximo en el punto 1 =  $1745 + 5610 = 7355 \text{ lb-ft}$

Momento negativo no puede haber en este punto puesto que 1745 ( Mo-  
 mento de carga muerta ) > 575 ( Momento máximo negativo de carga viva )

Resumen de momentos máximos en la losa continua

Punto	$\bar{M}_v^+$	$\bar{M}_v^-$	$M_n$	$M_n + \bar{M}_v^+$	$M_n + \bar{M}_v^-$
1	5610	575	1745	7355	1170
2	8650	1130	2530	11230	1450
3	8950	1675	2480	11430	805
4	7300	2265	1465	8765	800
5	4375	3230	460	3915	-3690
6	1100	8600	3310	-2210	-11910
7	3350	3660	1015	2835	-4675
8	6400	3320	368	6768	-2952
9	7360	3340	826	8186	-2514



Punto 0

$$R_v^+ = 3520 \text{ lbs}$$

$$R_v^- = 295 \text{ lbs}$$

$$R_m = 858 \text{ lbs}$$

$$R_v^+ + R_m = 4378 \text{ lbs}$$

$$R_v^- + R_m = 563 \text{ lbs}$$

Punto 6

$$R_v^+ = 4500 \text{ lbs}$$

$$R_v^- = 563 \text{ lbs}$$

$$R_m = 2360 \text{ lbs}$$

$$R_v^+ + R_m = 6860 \text{ lbs}$$

$$R_v^- + R_m = 1797 \text{ lbs}$$

### Cálculo de la profundidad de la losa

$$f_s = 18000 \text{ lbs/sq.in} ; f_c = 3000 \text{ lbs/sq.in.} ; K = 248 ; j = 0.857$$

$$\text{Momento máximo} = 11910 \text{ lbs - ft}$$

$$d = \sqrt{\frac{11910}{248}} = 6.94 \text{ in.}$$

$$h = 6.94 + 0.75 + 0.375 + 1.0 = 9.06 \text{ in.}$$

La losa tendrá una altura de 9.5 in.

### Cálculo del acero de la losa

$$A_s = \frac{M}{f_s j d} = \frac{124}{18000(0.857)(7.38)} = \frac{M}{10000}$$

( Ver resumen y distribución del acero principal en la página siguiente )

$$\% \text{ Acero de distribución} = \frac{100}{\sqrt{s}} = \frac{100}{\sqrt{15.5}} = 26$$

$$A_c(\text{ distribución }) = 1.19 \times 0.26 = 0.31 \text{ sq. in. Usar } \#4 @ 7.1/2''$$

Resumen de las cantidades de acero y espaciamiento mínimo de varilla en la losa .

Punto	As	Var. #5 a	Var. #6 a	As	Var. #5 a	Var. #6 a
1	0.74	5	7	0	-	-
2	1.13	3.1/4	4.1/2	0	-	-
3	1.15	3.1/4	4.1/2	0	-	-
4	0.88	4.1/4	6	0.08	18	18
5	0.40	9	13	0.37	10	14
6	0.23	16	18	1.20	3	4.1/4
7	0.29	13	18	0.47	8	11
8	0.68	5.1/2	7.1/2	0.30	12	17
9	0.82	4.1/2	6	0.26	14	18

Losa simplemente apoyada

Carga muerta

$$M = \frac{1}{8} \times 138 \times (15.5)^2 = 4150 \text{ lbs - ft.}$$

Carga viva

a) Carga uniforme más concentración

$$\text{Momento debido a carga uniforme} = \frac{1}{8} \times 55.6 \times (15.5)^2 = 1680 \text{ lbs - ft}$$

$$\text{Momento debido a concentración} = \frac{1}{4} \times 1570 \times 15.5 = 6090 \text{ lbs - ft}$$

$$\% \text{ Impacto} = 30$$

$$\text{Momento total} = (1680 + 6090) \times 1.3 = 10100 \text{ lbs - ft}$$

b) Cargas de rueda

$$\text{Momento} = \frac{1}{4} \times 2090 \times 15.50 = 8100 \text{ lbs - ft.}$$

$$\% \text{ Impacto} = 30$$

$$\text{Momento total} = 8100 \times 1.3 = 10600 \text{ lbs - ft.}$$

$$\text{Momento máximo positivo} = 4150 + 10600 \text{ lbs} = 14750 \text{ lbs - ft}$$

$$d = \sqrt{\frac{14750}{248}} = 7.70 \text{ in.}$$

$$\text{Usar } h = 9.5 \text{ in.} \quad \text{y} \quad d = 7.70 \text{ in.}$$

$$A_s = \frac{14750 \times 12}{20000 \times 0.857 \times 7.70} = 1.34 \text{ in.} \quad \text{Usar } \frac{1}{2} \text{ a } 3\frac{3}{4}$$

Cálculo de cortantes máximos

Carga muerta.

$$R = 138 \times 15.5 \times 0.5 = 1070 \text{ lbs}$$

Carga viva

a) Carga uniforme más concentración

$$\text{Reacción debida a carga uniforme} = 55.6 \times 15.50 \times 0.5 = 431 \text{ lbs}$$

$$\text{Reacción debida a concentración} = 2260 \text{ lbs}$$

$$\% \text{ Impacto} = 30$$

$$\text{Reacción total} = (431 + 2261) \times 1.3 = 3500 \text{ lbs}$$

b ) Cargas de rueda

$$R = 2090 + 670 \times \frac{1.50}{15.50} = 2157 \text{ lbs}$$

$$\% \text{ Impacto} = 30$$

$$\text{Reacción total} = 2157 \times 1.3 = 2800 \text{ lbs.}$$

$$\text{Reacción máxima} = 1070 + 3500 = 4570 \text{ lbs}$$

Diseño de la acera y de la viga de cordón

Acera

$$\text{Peso de la baranda ( asurido )} = 175 \text{ lbs/ft}$$

$$\begin{aligned} \text{Carga uniforme muerta} &= \frac{10}{12} \times 150 = \\ &= 135 \text{ lbs/ft.} \end{aligned}$$

$$\text{Carga uniforme viva} = 85 \text{ lbs/ft}$$

$$\text{Carga uniforme total} = 220 \text{ lbs/ft.}$$

$$\text{Momento máximo} = 220 \times 9 \times 0.5 + 176 \times 3 = 1520 \text{ lbs - ft}$$

$$d = \sqrt{\frac{1520}{243}} = 2.5 \text{ in.} \quad ; \quad h = 2.5 + 0.75 + 0.3 = 3.75 \text{ in.}$$

La acera tendrá un espesor mínimo de 4.0 in.

$$V = 220 \times 3 + 176 = 836 \text{ lbs}$$

$$v = \frac{836}{12 \times 0.875 \times 3} = 28 \text{ lbs/sq.in} < 90$$

$$A_s = \frac{1520 \times 12}{18000 \times 0.857 \times 3} = 0.394 \text{ sq.in. ; Usar } \frac{\#5 @ 9 \text{ ó } \#4 @ 6}$$

$$\% \text{ Acero de distribución} = 100 \div \sqrt{3} = 79.6$$

$$A_{sd} = 0.706 \times 0.394 = 0.28 \text{ sq. in.}$$

$$\text{Usar } \#4 @ 8.1/2$$

### Viga de cordón

$$\begin{aligned} \text{Carga uniforme muerta} &= \\ &= \frac{22 \times 15}{144} \times 150 = 344 \text{ lbs/ft.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Carga uniforme total} &= \\ &= 344 + 836 = 1180 \text{ lbs/ft} \end{aligned}$$

$$\text{Momento torsional} = 1520 + 836 \times 0.63 = 2050 \text{ lbs. - ft.}$$

Momento debido a carga uniforme

$$M = 1180 \times (15.50)^2 \times \frac{1}{12} = 23600 \text{ lbs - ft.}$$

$$M = 11800 \text{ lbs - ft.}$$

Momento debido a carga viva

$$M = 0.08 \times 12000 \times 15.50 = 14900 \text{ lbs - ft}$$

$$\text{Momento positivo total} = 11800 + 14900 \times 1.3 = 31150 \text{ lbs - ft}$$

$$\text{Momento negativo total} = 23600 + 14900 \times 1.3 = 43000 \text{ lbs - ft}$$

$$d = \sqrt{\frac{43000 \times 12}{248 \times 12}} = 13.2 \text{ in.}$$

La viga de cordón tendrá una altura de 22.0 in. y un ancho de 12.0 in.

La profundidad efectiva será de 19.5 in.

$$A_s = \frac{31150 \times 12}{18000 \times 0.857 \times 19.5} = 1.25 \text{ sq.in.} \quad \text{Usar } \#3 @ 7\frac{1}{2}$$

$$A_s = 1.72 \text{ sq. in} \quad ; \quad \text{Usar } \#8 @ 5\frac{1}{2}$$

$$\text{Cortante máximo} = 1180 \times 15.50 \times 0.5 + 6000 = 15150 \text{ lbs.}$$

$$\text{Momento torsional en el apoyo} = 2050 \times 15.50 \times 0.5 = 15900 \text{ lbs-ft.}$$

Para los siguientes cálculos ver " El Hormigón Armado " de R. Saliger, Capítulo 12, Artículo k.

$$= 3 + \frac{26}{0.45 + \frac{h}{b}} = 3 + \frac{26}{0.45 + \frac{22}{12}} = 4.13$$

$$b_k = 12 - 2 = 10 \text{ in.}$$

$$d_k = 22 - 2 = 20 \text{ in.}$$

El momento torsor que puede ser absorbido por el núcleo

$$\text{es : } M_k = \frac{b^2 \times d_k \times V_c}{\psi} = \frac{100 \times 20 \times 90}{4.13 \times 12} = 3630 \text{ lbs - ft}$$

$$\text{Para los estribos queda : } M_u = 15900 - 3630 = 12270 \text{ lbs - ft.}$$

$$A_s = \frac{M_u}{2b \times d_k \times f_s} = \frac{12270 \times 12}{2 \times 10 \times 20 \times 18000} = 0.0204 \text{ sq.in/in.}$$

$$V = 15150 \text{ lbs}$$

$$v = \frac{15150}{12 \times 0.857 \times 19.5} = 75.5 \text{ lbs./sq. in}$$

$$V' = v b j d = 12 \times 0.857 \times 19.5 \times v = 201 v$$

Si uso varilla N° 5 tenemos :

$$fv = \frac{V' s}{Avjd} ; S = \frac{18000 \times 0.62 \times 0.857 \times 19.5}{V'}$$

$$= \frac{186900}{V'}$$

$$s = \frac{186900}{201v} = \frac{930}{v}$$

Cuando  $s = 12$   $v = 77.4$  lbs./sq. in.

Si uso varilla de 5/16 debo usarla cada 6 in.

Para torsión necesito  $0.0204 \times 6 = 0.1224$  sq. in c/6 in.

Area varilla 5/16 = 0.077 sq. in.

Area total cada 6 in. =  $0.1224 + 0.077 = 0.20$  sq. in.

Usando N° 4 cada 6 in. se abastece el acero necesario

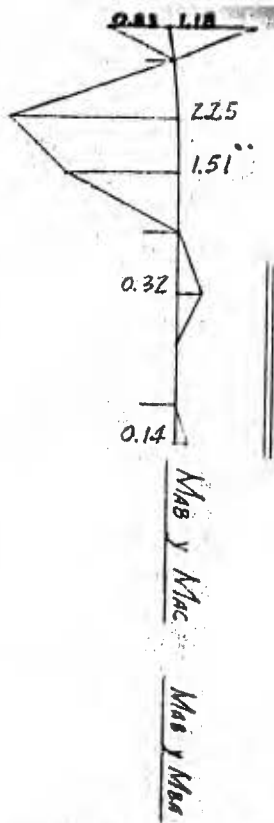
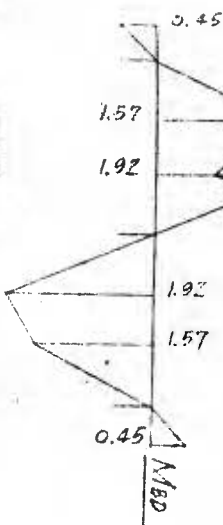
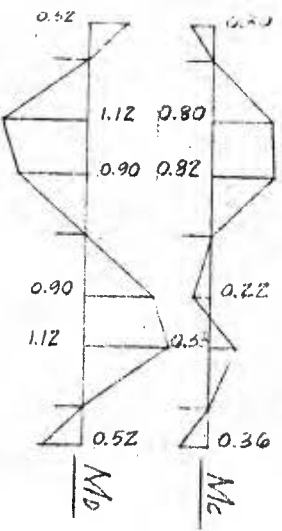
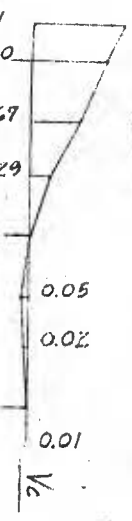
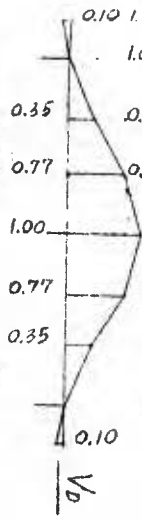
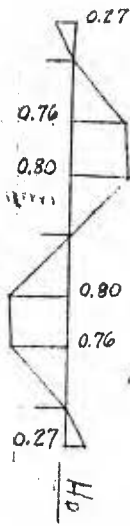
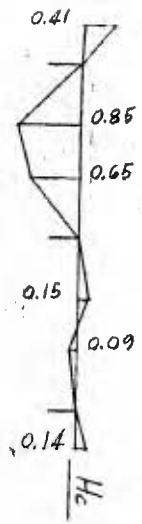
Cordón

$$\text{Momento} = 500 \times (15.5)^2 \times \frac{1}{12} = 20000 \text{ lbs - ft}$$

$$d = \sqrt{\frac{20000 \times 12}{243 \times 12}} = 6.65 \text{ in.}$$

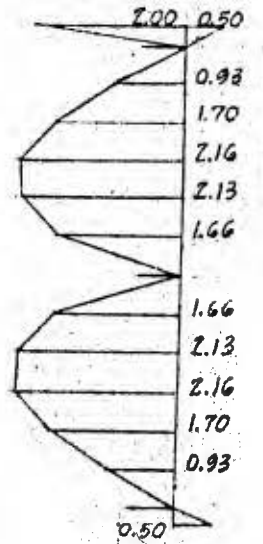
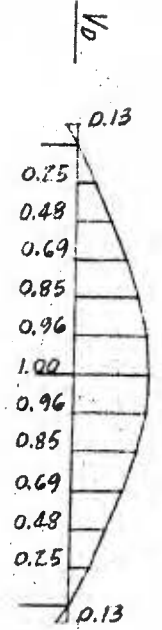
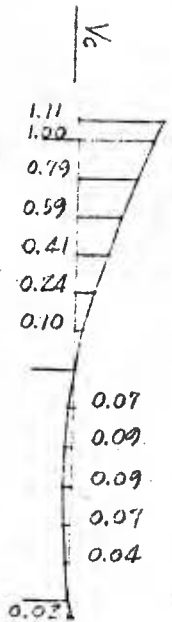
El ancho de la viga de cordón ( 12 in. ) es suficiente

$$v = \frac{500 \times 15.5 \times 0.5}{22 \times 0.857 \times 6.65} = 31 \text{ lbs./sq. in}$$



Marco 12

Z'  
6 @ 3.51' = 23.1'  
6 @ 3.84' = 23.1'  
Z'



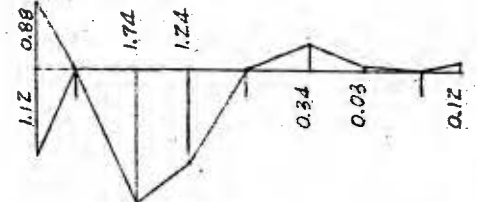
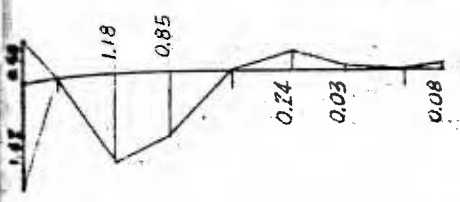
Viga 18



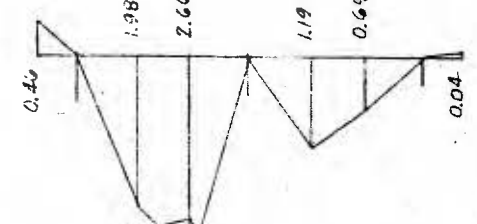
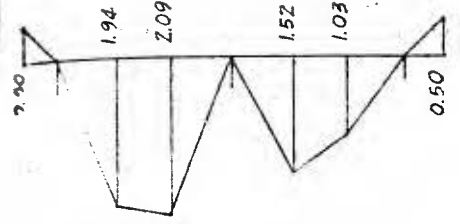
Marco 0

Marco 6

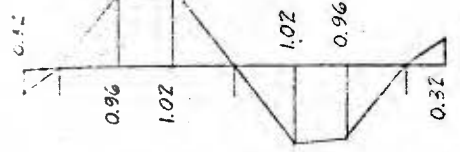
MAB y MAC



MBA



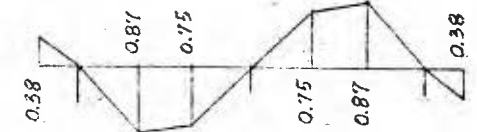
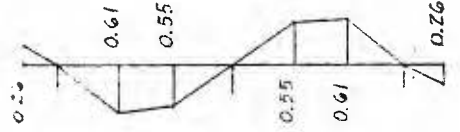
MBD



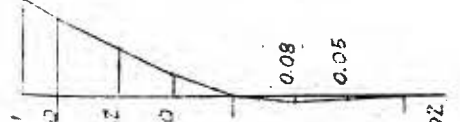
Mc



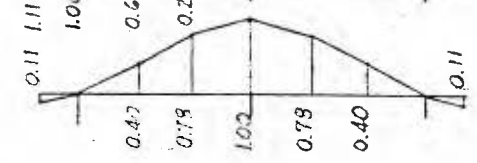
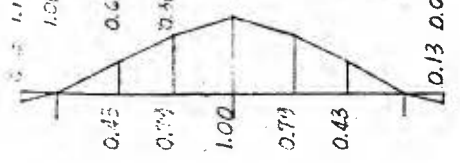
MD



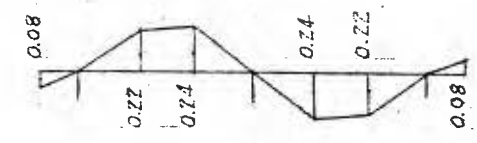
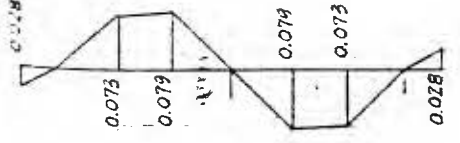
Vc



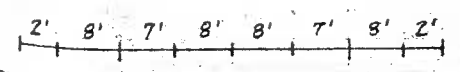
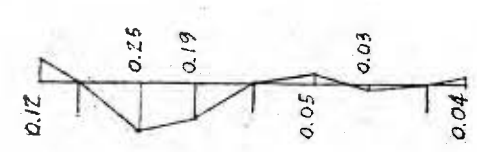
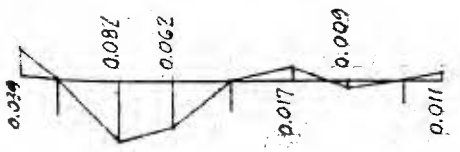
Vd



Hd



Hc

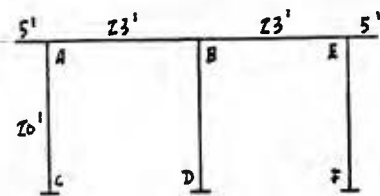


### Diseño de marco 0

Altura de la columna = 20 ft.

Dimensiones de la columna = 2ft.x2ft.

Dimensiones de la viga = 1.7 ft x 2.75 ft.



$$I (\text{ columna }) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} = 1.34$$

$$I (\text{ Viga }) = \frac{1}{12} \times 1.7 \times 2.75^3 = 2.95$$

$$r (\text{ Hickerson }) = \frac{1.34 \times 23}{2.95 \times 20} = 0.52$$

Usaré  $r = 0.50$

### Carga muerta

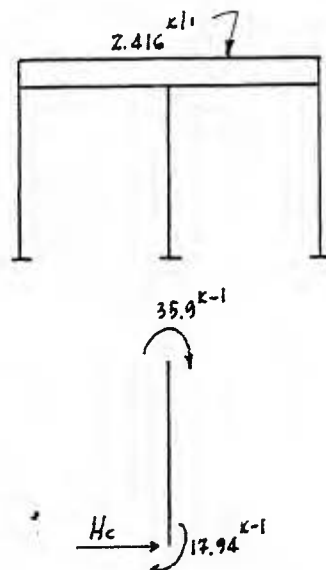
$$\text{losa} = 2 \times 858 = 1716 \text{ lbs./ft.}$$

$$\text{Peso propio} = 1.7 \times 2.75 \times 150 = 700 \text{ lbs./ft.}$$

$$wT = 1716 + 700 = 2416 \text{ lbs. /ft}$$

$$\text{Concentración en el extremo} = (1188 \times 15.50 \times 0.5 + 3000) \times 2 =$$

$$= 24.3 \text{ K.}$$



$$M = KwL^2 = k \times 2.46 \times (23)^2 = K \times 1290$$

$$M_A = (-0.032 + 0.004) \times 1290 = -35.90$$

$$M_{BA} = (-0.071 - 0.040) \times 1290 = -142.3$$

$$= 142.30 \text{ K-ft}$$

$$M_C = (0.013 + 0.001) \times 1290 = 17.94$$

$$= 17.94 \text{ K - ft}$$

r	P en		w en	
	AB	BE	AB	BE
0	0	0	0	0
0.5	-.30C <sub>AB</sub>	-.09C <sub>BE</sub>	-.032wL <sup>2</sup>	.004wL <sup>2</sup>
1.0	-.44C <sub>AB</sub>	.13C <sub>BE</sub>	-.047wL <sup>2</sup>	.005wL <sup>2</sup>
5.0	-.75C <sub>AB</sub>	.13C <sub>BE</sub>	-.073wL <sup>2</sup>	.004wL <sup>2</sup>
10.0	-.84C <sub>AB</sub>	.10C <sub>BE</sub>	-.078wL <sup>2</sup>	.003wL <sup>2</sup>
	- C <sub>AB</sub>	0	-.083wL <sup>2</sup>	0
0	-.25C <sub>AB</sub>	.50C <sub>BE</sub>	-.063wL <sup>2</sup>	-.063wL <sup>2</sup>
0.5	-.25C <sub>AB</sub>	.60C <sub>BE</sub>	-.071wL <sup>2</sup>	-.040wL <sup>2</sup>
1.5	-.23C <sub>AB</sub>	.66C <sub>BE</sub>	-.074wL <sup>2</sup>	-.030wL <sup>2</sup>
5.0	-.16C <sub>AB</sub>	.80C <sub>BE</sub>	-.079wL <sup>2</sup>	-.011wL <sup>2</sup>
10.0	-.11C <sub>AB</sub>	.86C <sub>BE</sub>	-.081wL <sup>2</sup>	-.006wL <sup>2</sup>
	0	C <sub>BA</sub>	-.083wL <sup>2</sup>	0

*M<sub>A</sub>*

*M<sub>BA</sub>*

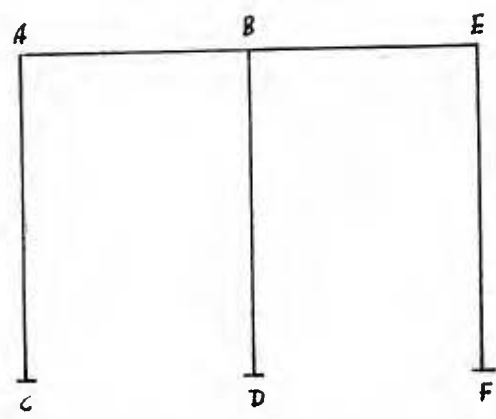
r	P en		w en	
	AB	BE	AB	BE
0	0	0	0	0
0.5	$.17C_{AB} + .21C_{BA}$	$-0.21C_{BE} - .17C_{EB}$	$.032wL^2$	$- .032wL^2$
1.0	$.22C_{AB} + .31C_{BA}$	$- .31C_{BE} - .22C_{EB}$	$.044wL^2$	$- .044wL^2$
5.0	$.23C_{AB} + .59C_{BA}$	$- .59C_{BE} - .23C_{EB}$	$.069wL^2$	$- .069wL^2$
10.0	$.18C_{AB} + .71C_{BA}$	$- .71C_{BE} - .18C_{EB}$	$.074wL^2$	$- .074wL^2$
	$0 + C_{BA}$	$- C_{BE} - 0$	$.083wL^2$	$- .083wL^2$
0	0	0	0	0
0.5	$.10C_{AB} + .06C_{BA}$	$- .06C_{BE} + .07C_{EB}$	$.013wL^2$	$.001wL^2$
1.0	$.14C_{AB} + .09C_{BA}$	$- .09C_{BE} + .11C_{EB}$	$.020wL^2$	$.001wL^2$
5.0	$.16C_{AB} + .23C_{BA}$	$- .23C_{BE} + .26C_{EB}$	$.032wL^2$	$.002wL^2$
10.0	$.13C_{AB} + .31C_{BA}$	$- .31C_{BE} + .33C_{EB}$	$.036wL^2$	$.002wL^2$
	$0 + .50C_{BA}$	$- .50C_{BE} + .50C_{EB}$	$.042wL^2$	0

*M<sub>BD</sub>*

*M<sub>C</sub>*

r	P en				ω en	
	AB		BE		AB	BE
0	0		0		0	0
0.5	- .10C <sub>AB</sub>	- .09C <sub>BA</sub>	0.09C <sub>BE</sub> + .13C <sub>EB</sub>		- .018WL <sup>2</sup>	.018WL <sup>2</sup>
1.0	- .19C <sub>AB</sub>	- .12C <sub>BA</sub>	.12C <sub>BE</sub> + .19C <sub>EB</sub>		- .026WL <sup>2</sup>	.026WL <sup>2</sup>
5.0	- .33C <sub>AB</sub>	- .13C <sub>BA</sub>	.13C <sub>BE</sub> + .33C <sub>EB</sub>		- .038WL <sup>2</sup>	.038WL <sup>2</sup>
10.0	- .38C <sub>AB</sub>	- .10C <sub>BA</sub>	.10C <sub>BE</sub> + .38C <sub>EB</sub>		- .040WL <sup>2</sup>	.040WL <sup>2</sup>
	- .50C <sub>AE</sub>	- 0	0 + .50C <sub>EB</sub>		- .042WL <sup>2</sup>	.042WL <sup>2</sup>

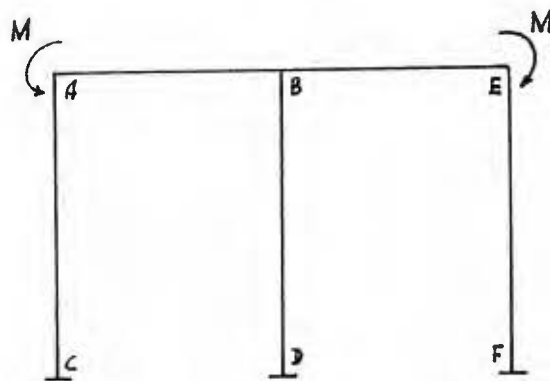
M<sub>D</sub>



$r$	$M_{ab}$		$M_{ba}$	$M_{ba}$
	$M_x$ en A	$M_z$ en E	$M_x$ en A	$M_z$ en E
0	$-M_1$	0	$.25M_1$	$+.25M_2$
0.5	$-.71M_1$	$.04M_2$	$.25M_1$	$+.09M_2$
1.0	$-.56M_1$	$.06M_2$	$.23M_1$	$+.02M_2$
5.0	$-.25M_1$	$.09M_2$	$.16M_1$	$-.07M_2$
10.0	$-.16M_1$	$.07M_2$	$.11M_1$	$-.07M_2$
	0	0	0	0

$r$	$M_{ac}$		$M_{bd}$	
0	0	0	0	0
0.5	$.29M_1$	$.04M_2$	$-.16M_1$	$.16M_2$
1.0	$.44M_1$	$.06M_2$	$-.22M_1$	$.22M_2$
5.0	$.75M_1$	$.09M_2$	$-.25M_1$	$.23M_2$
10.0	$.84M_1$	$.07M_2$	$-.18M_1$	$.18M_2$
	$M_1$	0	0	0

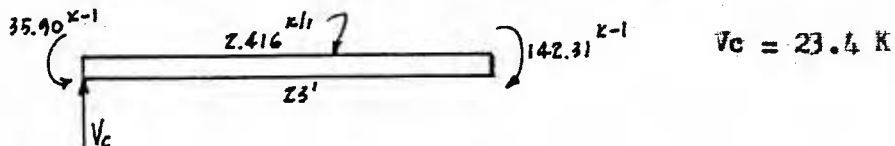
$r$	$M_c$		$M_D$	
	$M_1$ en A	$M_2$ en E	$M_1$ en A	$M_2$ en E
0	0		0	0
0.5	$-.10M_1$	$-.07M_2$	$.13M_1$	$.13M_1$
1.0	$-.14M_1$	$-.11M_2$	$.19M_1$	$.19M_1$
5.0	$-.16M_1$	$-.26M_2$	$.33M_1$	$.33M_1$
10.0	$-.13M_1$	$-.33M_2$	$.38M_1$	$.28M_1$
	0	$-.50M_2$	$.50M_1$	$.50M_1$



$$H_C = \frac{35.90 + 17.94}{20} = 2.692 \text{ K}$$

$$H_C = -H_F$$

$$23 V_C + 142.31 - 35.90 - 2.416 \times 23^2 \times 0.5 = 0$$

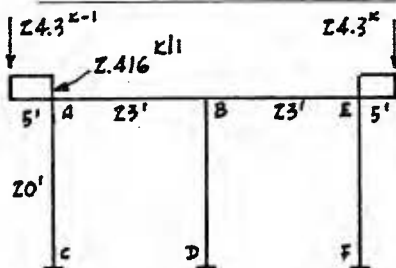


$$V_C = 23.4 \text{ K}$$

$$23.4 \times 46 + V_D \times 23 - 2.416 \times 46^2 \times 0.5 = 0$$

$$V_D = 65 \text{ K}$$

Momentos en los extremos



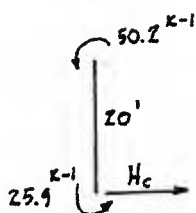
$$M = -24.3 \times 5 - 2.416 \times 25 \times 0.5 = -152 \text{ k-ft}$$

$$M_{AB} = (-0.71 + 0.04) \times 152 = -102 \text{ K-ft}$$

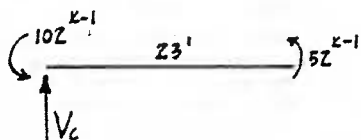
$$M_{AC} = (0.29 + 0.04) \times 152 = 50.2 \text{ k-ft}$$

$$M_C = -0.17 \times 152 = -25.9 \text{ K-ft}$$

$$M_{BA} = 0.31 \times 152 = 51.6 \text{ K-ft}$$



$$H_C = \frac{25.9 + 51.6}{20} = 76.1 \text{ K}$$



$$V_C = \frac{102 + 52}{23} = 6.7 \text{ K}$$

$$V_C = 6.7 + 24.3 + 2.416 \times 5 = 43.0 \text{ K}$$

$$V_D = 13.14 \text{ K}$$

Carga viva

$$P = 16 + 20 \times 1.5 = 46 \text{ K}$$

$$15.5$$



Para los cálculos siguientes ver las líneas de influencia  
para los marcos.

Momentos y reacciones máximos en el marco 0

$$M_{AB}(\text{negativo}) = (1.18 + 0.92 + 1.42 + 0.60) \times 18 = 74.5 \text{ K-}^1$$

$$M_{AB}(\text{positivo}) = (0.24 + 0.07 + 0.08 + 0.02) \times 18 = 7.4 \text{ K-}^1$$

$$M_{AC}(\text{negativo}) = (0.56 + 1.00 + 1.18 + 0.28) \times 18 = 54.5 \text{ K-}^1$$

$$M_{AC}(\text{positivo}) = (0.41) \times 18 = 7.4 \text{ K-}^1$$

$$M_{AB}(\text{negativo}) = (1.26 + 2.02 + 2.09 + 0.60 + 0.70 + 1.28 \\ + 1.52 + 3.86) \times 18 = 177 \text{ k-}^1$$

$$M_{BD}(\text{negativo}) = (0.64 + 0.99 + 1.03 + 0.28) \times 18 = 53.0 \text{ K-}^1$$

$$M_{BD}(\text{positivo}) = 53.0 \text{ k-}^1$$

$$M_c(\text{negativo}) = (0.08 + 0.02 + 0.14 - 0.06) \times 18 = 3.3 \text{ k-}^1$$

$$M_c(\text{positivo}) = (0.26 + 0.43 + 0.45 + 0.10) \times 18 = 22.4 \text{ k-}^1$$

$$V_c(\text{positivo}) = (1.11 + 0.80 + 0.62 + 0.35) \times 18 = 52.0 \text{ k-}^1$$

$$V_c(\text{negativo}) = (0.07 + 0.03 + 0.08 + 0.02) \times 18 = 3.6 \text{ k-}^1$$

$$V_D(\text{positivo}) = (0.94 + 0.79 + 0.57 + 0.26) \times 18 = 92.1 \text{ k-}^1$$

$$H_c(\text{negativo}) = (0.040 + 0.072 + 0.082 + 0.020 + 0.0092 \\ + 0.073) \times 18 = 4.06 \text{ k-}^1$$

$$H_c(\text{positivo}) = (0.017 + 0.004 + 0.011 - 0.006) \times 18 = 0.5 \text{ k-}^1$$

$$H_D(\text{negativo}) = H_D(\text{positivo}) = (0.048 + 0.076 + 0.009 \\ + 0.021) \times 18 = 4.1 \text{ k-}^1$$

Momentos positivos máximos

$$M_{AB} = -35.90 - 81.60 - (0.38 + 0.92 + 1.12 + 0.52) \times 18 =$$

$$= -170.50 \text{ k-ft}$$

$$V_c = 23.4 + \frac{82 + 42}{23} + (0.14 + 0.37 + 0.55 + 0.84) \times 13$$

$$= 63.0 \text{ k}$$

$$170.5 + M_A + 0.5 \times 2.42 \times 3.5^2 - 3.5 \times 63.0 = 0 \quad M_A = 36.7 \text{ k-ft}$$

$$170.5 + M_B + 2.42 \times 9.5^2 \times 0.5 + 18 \times 6 - 63.0 \times 9.5 = 0$$

$$M_B = -212.3 \text{ k-ft}$$

$$170.5 + 180 + 72 + 0.5 \times 2.42 \times 13.5^2 + M_C - 63.0 \times 13.5 = 0$$

$$M_C = 206.5 \text{ k-ft}$$

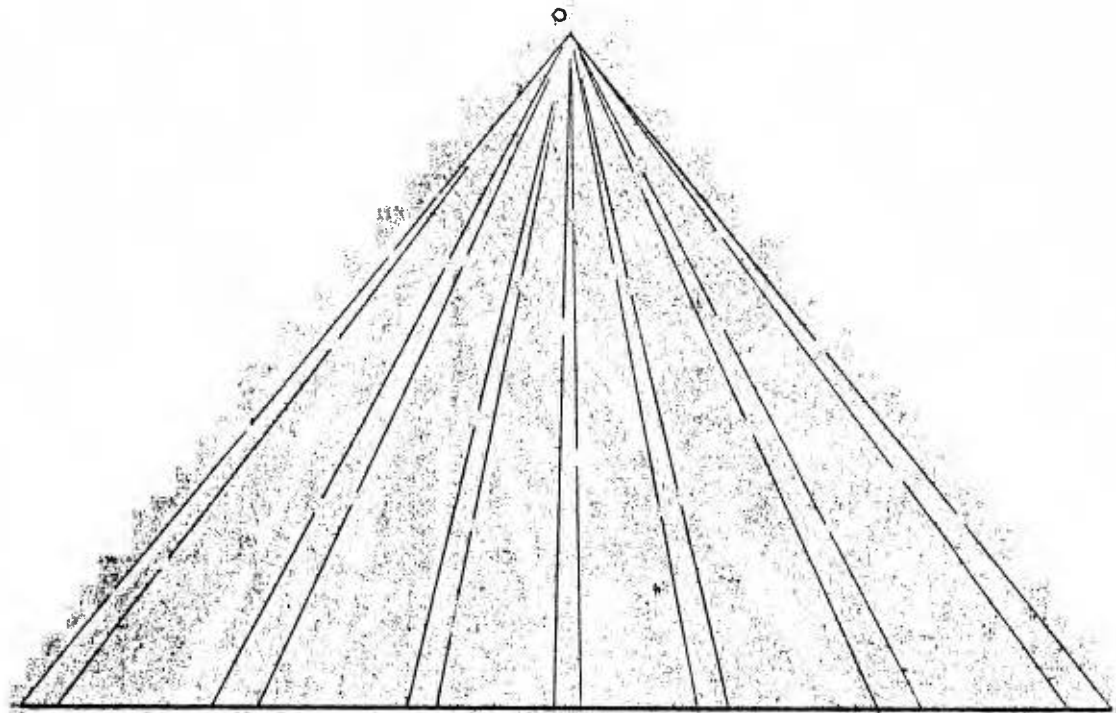
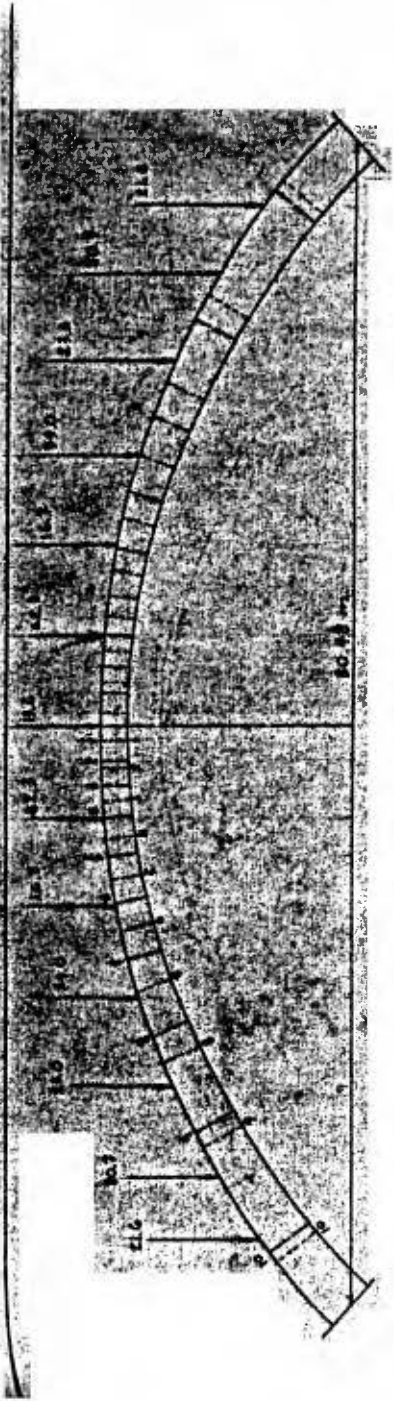
$$170.5 + (16 + 10 + 6) \times 18 + 0.5 \times 2.42 \times 19.5^2 - 63.0 \times 19.5 = 0$$

$$M_D = 23.0 \text{ k-ft}$$

Marco	Momentos positivos			
	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>
0	36.7	212.3	206.5	23.0
6	18.0	218.0	218.0	21.0
12	-6.0	198.0	199.0	5.0
18	-76.4	235.7	218.0	3.0

Marco	Tipo de Carga	M <sub>BA</sub>	M <sub>C</sub>	M <sub>AB</sub>	M <sub>AC</sub>	M <sub>BD</sub>
0	Carga muerta	-142.3	17.9	-35.90	-35.90	0
	M.en extremos	51.6	-25.9	-81.6	50.2	0
	Carga viva	-177.0	-3.3   22.4	-74.5   7.4	-54.5   -7.4	-53.0   53.0
	Total	-267.4	-11.3   14.4	-192.0	-40.2   -21.7	-53.0   53.0
6	Carga muerta	-170.0	34.3	-68.5	-68.5	0
	M.en extremos	40.0	-40.0	-80.0	80.0	0
	Carga viva	-176.0	36.4   -4.9	-90.5   9.8	-80.0   10.6	-73.0   73.0
	Total	-306.0	30.7   -10.6	-239.0	-68.5   22.1	-73.0   73.0
12	Carga muerta	-159.0	45.4	-97.2	-97.2	0
	M.en extremos	-27.9	-53.0	-54.1	106.0	0
	Carga viva	-166.0	-3.8   49.5	-105.0   10.5	-1.01   11.6	-92.0   92.0
	Total	-352.9	-16.4   41.9	-256.3	-92.2   20.4	-92.0   32.0
18	Carga muerta	-158.0	0	-32.0	0	0
	M.on extremos	45.8	0	121.5	0	0
	Carga viva	-223.2	0	-19.1	0	0
	Total	-335.4	0	-172.6	0	0

Marco	Tipo de Carga	$M_D$	$V_c$	$V_D$	$H_c$	$H_d$
	Carga muerta	0	23.4	61.0	-2.69	0
	M.en extremos	0	43.0	13.1	3.81	0
	Carga viva	-30.2   30.2	52.0   -3.6	92.1	-4.06   0.5	-4.1   4.1
	Total	-30.2   30.2	118.4	140.0	-3.0   1.6	-4.1   4.1
	Carga muerta	0	31.0	79.0	-10.9	0
	M.en extremos	0	5.2	-10.4	12.7	0
	Carga viva	-43.0   43.0	40.0   -2.6	62.6	-12.6   0.7	12.1   -12.1
	Total	-43.0   43.0	76.2	137.2	-10.8   2.5	12.1   -12.1
	Carga muerta	0	32.6	75.6	-40.4	0
	M.en extremos	0	44.2	-9.3	44.0	0
	Carga viva	-53.5   53.5	40   -1.8	68.5	-42.5   5.1	-41.0   41.0
	Total	-53.5   53.5	116.8	134.8	-38.9   8.7	-41.0   41.0
	Carga muerta	0	38.0	71.1	0	0
	M.en extremos	0	24.3	-5.3	0	0
	Carga viva	0	37.9   -4.1	98.5	0	0
	Total	0	100.2	164.3	0	0



#### Cuarta parte. Diseño de los arcos.

División del arco de tal modo que la relación  $ds \div I$  sea constante.

El artículo ( 8 - I ) especifica que el número mínimo de divisiones para un arco de 100 pies es 20 (10 en cada mitad del arco ) . Nosotros usaremos ese número. Siguiendo el método esbozado en el artículo ( 8-I ) asumiremos primero las divisiones que están indicadas con líneas " a rayas " en el anillo del arco ( Fig.1 ). El punto medio de cada una de estas divisiones asumidas se puede encontrar con compás, y el grueso del arco se determina con escala en estos puntos y se computa el momento de inercia en el punto medio de cada división .

Asumiremos que el arco va reforzado con una área de acero que es 1/75 del área de la sección transversal en la clave.

$$A_s = ( 0.6 \times 0.9 ) \div 75 = 0.0072 \text{ m}^2$$

La mitad de este acero irá en la parte superior y la otra mitad en la parte inferior de la sección transversal del arco.

Si llamamos con h el grueso del arco en el punto medio de cualquier división y asumimos que el acero longitudinal se encuentra a 7.6 cm de la superficie exterior del arco, podremos obtener la siguiente expresión

$$I = \frac{1}{12} bh^3 + (n - 1) A_s \left( \frac{h - 3}{2} \right)^2 \quad ( 1 )$$

para el momento de inercia de la sección transversal del arco en el punto medio de cualquier división .

Una vez que el valor de h en cada punto es cuidadosamente medido con escala, el trabajo de determinar los momentos de

inercia se puede simplificar haciendo la siguiente tabla 1 que comprende un resumen de la Ecuación 1.

Las longitudes de las divisiones mostradas en la columna 8 ( tabla 1 ) son asumidas, y midiendo con escala los gruesos del arco en el centro de cada una de estas divisiones asumidas, obtenemos los valores que se indican en la columna 2.

Teniendo las profundidades dadas en la columna 2, el momento de inercia en el centro de cada división asumida, tal como se muestra en la columna 7, es calculado y el valor de c, que nosotros llamaremos la constante preliminar (  $ds/I$  ), se obtiene dividiendo la longitud total de una mitad del arco, que es la suma de la columna 8, por la suma de los momentos de inercia dados en columna 7.

Teniendo el valor de c dado, obtenemos los valores de ds dados en la columna 8 ( Tabla 2 ) multiplicando el valor de c por el momento de inercia dado en la columna 7 ( Tabla 1 ) .

Después de haber computado de ese modo cada valor de ds, tal como se dan en columna 8 ( Tabla 2 ), podemos dibujar estas divisiones en el arco y luego localizar el centro de cada una de estas divisiones y medir con escala el grueso del arco en el centro de cada una de estas nuevas divisiones, representadas en la columna 8 ( Tabla 2 ) y completar así la Tabla 2; así obtenemos el valor revisado del momento de inercia en el centro de cada una de estas últimas divisiones, tal como se dan en la columna 7 ( Tabla 2 ). Después se obtiene el valor revisado de c, indicado debajo de la Tabla 2, dividiendo la mitad de la longitud del arco, que es la suma de la columna 8 ( Tabla 2 ) por la suma de la columna 7 ( Tabla 2 ).

Luego, multiplicando este último valor de c por cada una de los valores dados en la columna 7 ( Tabla 2 ), obtendremos valores revisados de la longitud de cada división, dados en la columna 9 ( Tabla 2 ) .

Se puede observar en Tabla 2 que la longitud de las divisiones correspondientes dadas en las columnas 8 y 9 difieren por u -



1	2	3	4	5	6	7	8	
Div.	h	$h^3$	$\frac{h-3}{2}$	$\left(\frac{h-3}{2}\right)^2$	$(n-1)As\left(\frac{h-3}{2}\right)^2$	I	$\frac{ds}{asumida}$	
1	0.65	0.2745	0.29	0.084	0.00756	0.0243	0.03186	0.70
2	0.69	0.3285	0.31	0.096	0.00865	0.0289	0.03755	0.79
3	0.73	0.3895	0.33	0.109	0.00981	0.0342	0.04401	0.90
4	0.77	0.4565	0.35	0.123	0.0111	0.0402	0.0513	1.00
5	0.83	0.5720	0.38	0.144	0.01296	0.0503	0.0633	1.21
6	0.90	0.7290	0.43	0.185	0.0167	0.0631	0.0798	1.47
7	0.97	0.9127	0.45	0.202	0.0182	0.0790	0.0972	1.76
8	1.05	1.13	0.50	0.250	0.023	0.103	0.126	2.14
9	1.18	1.643	0.55	0.302	0.027	0.1426	0.1696	2.77
10	1.36	2.510	0.65	0.423	0.038	0.2175	0.2555	4.03
					$\frac{1}{12} bh^3$	<u>0.95612</u>	<u>16.83</u>	

$As = 0.015 \quad Ac = (0.015) \times (41 \times 2.54) \times (25 \times 2.54) \times 10^{-4}$

$As = 0.01 \text{ m}^2 \quad (n-1) As = 0.09$

$$\frac{1}{12} \text{ m}^3 = \frac{1}{12} \cdot 1.04 \text{ m}^3 = \frac{1.04}{12} \text{ m}^3 = 0.08666 \text{ m}^3$$

$$c = \frac{16.83}{0.95612} = 17.6$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Div.	h	$h^3$	$\frac{h-3}{2}$	$\frac{(h-3)}{2}$	$\frac{(n-1)As(\frac{h-3}{2})^2}{2}$	I	ds	ds calculado
1	0.67	0.306	0.30	0.09	0.0081	0.0360	0.56	0.64
2	0.68	0.315	0.30	0.09	0.0081	0.0369	0.66	0.66
3	0.72	0.374	0.32	0.11	0.0099	0.0432	0.78	0.77
4	0.76	0.439	0.36	0.13	0.0117	0.0513	0.90	0.91
5	0.81	0.532	0.38	0.14	0.0126	0.0603	1.11	1.07
6	0.88	0.682	0.40	0.16	0.0144	0.0756	1.40	1.35
7	0.94	0.830	0.43	0.19	0.0171	0.0918	1.71	1.63
8	1.03	1.093	0.48	0.23	0.0207	0.1188	2.22	2.11
9	1.16	1.600	0.54	0.29	0.0261	0.1701	2.98	3.03
10	1.36	2.520	0.64	0.41	0.0369	0.2639	4.50	4.70
						<u>0.9479</u>	<u>16.82</u>	

$$c = \frac{16.82}{0.9479} = 17.8$$

- nos pocos centímetros y es obvio que si las divisiones son dibujadas sobre el arco como se dan en la columna 9 ( Tabla 2 ) que el momento de inercia en el centro de cada una será prácticamente el mismo que se da para las divisiones correspondientes en la columna 7 ( Tabla 2 ), y de aquí que, la longitud de las divisiones dadas en la columna 9 ( Tabla 2 ) serán consideradas satisfactorias. En otras palabras, la longitud de las divisiones dada en la columna 9 ( Tabla 2 ) será considerada como definitiva y están indicadas en el arco ( Fig. ) con líneas sólidas, el próximo paso es localizar el centro de estas divisiones, lo cual se logra fácilmente con la ayuda de un compás . Una vez que el centro de cada división, como se indica en la Fig. es localizada, el siguiente paso es medir los valores de x e y en cada uno de estos puntos. y en cada caso es la distancia vertical de la línea horizontal CG ( Fig. ) que pasa por la clave al punto central de la división .

#### Tabla A 1.

Después de que las divisiones son colocadas y los valores de x e y en el punto medio de cada una de estas divisiones es medido cuidadosamente, se pueden obtener los valores para las columnas 1,2,3,4 y 5 de la Tabla A 1.

El punto medio de cada división es numerado de C a A ( Fig. ) x para cada punto es la distancia horizontal de C al punto e y para cada punto es la distancia vertical de la línea horizontal CC al punto

1 Div.	2 h	3 x	4 y	5 y <sup>2</sup>	6 x <sup>2</sup>
1	0.57	0.29	0	0	0.084
2	0.68	0.90	0.03	$9 \times 10^{-4}$	0.81
3	0.72	1.62	0.04	$16 \times 10^{-4}$	2.62
4	0.76	2.46	0.07	$49 \times 10^{-4}$	6.05
5	0.81	3.43	0.27	0.073	11.75
6	0.88	4.66	0.52	0.27	21.60
7	0.94	6.06	0.86	0.7395	36.70
8	1.03	7.90	1.50	2.25	62.50
9	1.15	12.35	2.69	7.25	100.71
10	1.36	13.50	4.58	21.90	182.00
			<u>10.66</u>	<u>31.57</u>	<u>424.92</u>

Líneas de influencia para los momentos en los diferentes puntos en el anillo del arco pueden ser construídas de las siguiente manera : por ejemplo, consideremos el punto 4 del arco mostrado en la Fig.2. ACB representa la línea de centro del arco ( Fig. 3 ) . Se dibuja la línea horizontal DE igual a la longitud c.c. y se dibujan líneas verticales a través de los puntos 1,2,3 ..... como se muestra .

El problema es construir una línea de influencia sobre la línea DE ( como directriz ) representando el momento en el punto 4 izquierdo debido a una carga unitaria en cualquier punto del tramo. Es evidente que el momento, empuje, y cortante en la clave deben ser calculados separadamente para una carga unitaria en cada punto del tramo. Esto, desde luego, requiere la aplicación de las ecuaciones (15),(16) y (17) del Art.(4-I)

Los valores dados en las columnas 3,4,5 y 6 de la Tabla A 1 pueden ser utilizados para aplicar estas ecuaciones. El primer paso es colocar una carga unitaria en un punto y determinar los valores de  $m_r$  y  $m_e$  para la carga unitaria en esa posición . Comenzaremos colocando una carga unitaria en el punto 1 derecho. Tendremos

$$\begin{aligned} \sum m_r &= 0 + ( 0.90 - 0.29 ) + ( 1.62 - 0.29 ) + ( 2.46 - 0.29 ) \\ &+ ( 3.43 - 0.29 ) + ( 4.66 - 0.29 ) + ( 6.06 - 0.29 ) \\ &+ ( 7.90 - 0.29 ) + ( 10.35 - 0.29 ) + ( 13.5 - 0.29 ) \\ &= 48.27 \end{aligned}$$

$\sum m_l = 0$  , porque no hay carga en la parte izquierda del arco.

De aquí se ve que la Ec.(15) se reduce a

$$H_c = \frac{\sum my - \sum m \sum y}{2 \left[ N \sum y^2 - (\sum y)^2 \right]} \quad ( 1 )$$

$$\begin{aligned} \sum m_i y &= 0 + 0.61 \times 0.03 + 1.33 \times 0.04 + 2.17 \times 0.07 + 3.11 \times 0.27 \\ &+ 4.37 \times 0.52 + 5.77 \times 0.86 + 7.61 \times 1.50 + 10.06 \times 2.69 \\ &+ 13.21 \times 4.68 = 108.61 \end{aligned}$$

Sustituyendo en ecuación (1) tenemos :

$$H_c = \frac{10 \times 108.61 - 48.27 \times 10.66}{2 (10 \times 31.57 - 113.8)} = 1.415$$

Sustituyendo en Ec.(16), obtenemos :

$$M_c = \frac{0 + 48.27 - 2 \times 1.415 \times 10.66}{20} = 0.905$$

En este caso  $\sum m_e x = 0$ , y en consecuencia la ecuación 17 se reduce a

$$V_c = \frac{\sum (m_r x)}{2 \sum x^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum (m_r x) &= 0 + 0.61 \times 0.90 + 1.33 \times 1.62 + 2.17 \times 2.46 + 3.11 \times 3.43 \\ &+ 4.37 \times 4.66 + 5.77 \times 6.06 + 7.61 \times 7.90 + 10.06 \times 10.35 \\ &+ 13.21 \times 13.50 = 416.72 \end{aligned}$$

Sustituyendo en Ec.2 obtenemos

$$V_c = \frac{416.72}{2 \times 124.82} = 0.491$$

Ahora, teniendo el momento, empuje y cortante en la clave debidos a una carga unitaria en el punto 1. podemos obtener:

$$\begin{aligned} M &= M_c + H_c y + V_c x - m = 0.905 + 1.415 \times 0.07 - 0.491 \times 2.46 = \\ &= -0.106 \text{ lb.-m} \end{aligned}$$

para el momento en el punto  $h$  debido a esta carga unitaria en el punto 1. Esto significa que el momento en el punto  $h$  debido a cualquier otra carga en el punto 1 puede ser obtenido multiplicando el peso de la carga por  $(-0.106)$ . Dibujando la ordenada  $ab$  a una escala conveniente igual a  $0.106$ , obtendremos el punto  $b$ , que está en la línea de influencia para el momento en el punto  $h$ , esta ordenada  $ab$  representa el momento flector en el punto  $h$  debido a una carga unitaria en el punto 1. La ordenada se dibuja hacia abajo puesto que este momento  $(-0.106)$  es negativo. Ahora, asumamos que la carga unitaria se ha movido al punto 2, de una manera similar obtenemos

$$H_c = 1.400 \text{ lbs}$$

$$M_c = 0.647 \text{ lbs - m}$$

$$V_c = 0.455 \text{ lbs}$$

y luego

$$M = 0.647 + 1.4 \times 0.07 - 0.455 \times 2.46 = -0.375 \text{ lbs - m}$$

que es la ordenada directamente bajo el punto 2.

Las demás ordenadas mostradas en la mitad derecha de la fig. se determinan de la misma manera .

Las ordenadas de la línea de influencia mostradas en la mitad izquierda del arco se obtienen de una manera similar a la mostrada para la mitad derecha .

Por ejemplo, supongamos que la carga unitaria se coloca en el punto 1 de la mitad izquierda del arco .



$$\begin{aligned} \sum m_e &= 0 + (0.90 - 0.29) + (1.62 - 0.29) + (2.46 - 0.29) \\ &+ (3.43 - 0.29) + (4.66 - 0.29) + (6.06 - 0.29) \\ &+ (7.90 - 0.29) + (10.35 - 0.29) + (13.50 - 0.29) \\ \sum m_e &= 48.27 \\ \sum m_r &= 0 \end{aligned}$$

De aquí se deduce que la Ec. (15) se reduce a

$$H_c = \frac{N \left( \sum m_e y \right) - \sum m_e y}{2 \left[ N \sum y^2 - (\sum y)^2 \right]} \quad (4)$$

De igual modo la Ec. (16) se reduce a

$$M_c = \frac{\sum m_e - 2H_c \sum y}{2N} \quad (5)$$

y la Ec. (17) se reduce a

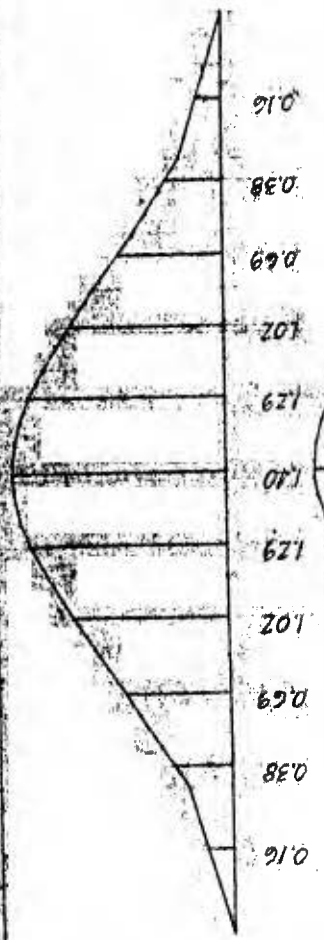
$$V_c = - \frac{\sum m_e x}{2 \sum x^2}$$

$$\begin{aligned} \sum m_e y &= 0 + 0.61 \times 0.03 + 1.33 \times 0.04 + 2.17 \times 0.07 + 3.11 \times 0.27 \\ &+ 4.37 \times 0.52 + 5.77 \times 0.86 + 7.61 \times 1.50 + 10.06 \times 2.69 \\ &+ 13.21 \times 4.68 = 108.61 \end{aligned}$$

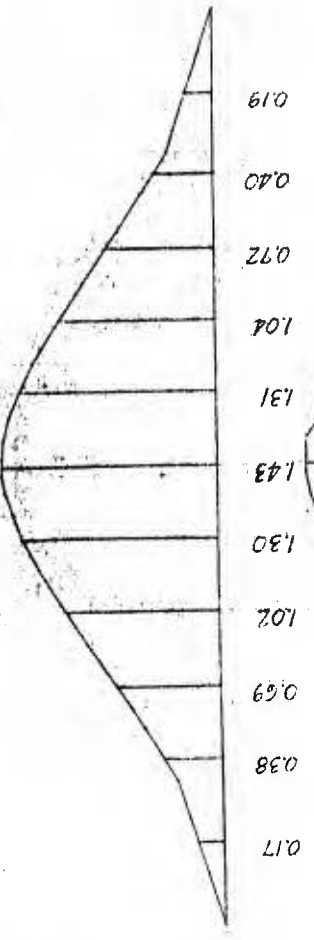
$$\begin{aligned} \sum m_e x &= 0 + 0.61 \times 0.90 + 1.33 \times 1.62 + 2.17 \times 2.46 + 3.11 \times 3.43 \\ &+ 4.37 \times 4.66 + 5.77 \times 6.06 + 7.61 \times 7.90 + 10.06 \times 10.35 \\ &+ 13.21 \times 13.50 = 416.72 \end{aligned}$$

Sustituyendo en ecuación 4, obtenemos :

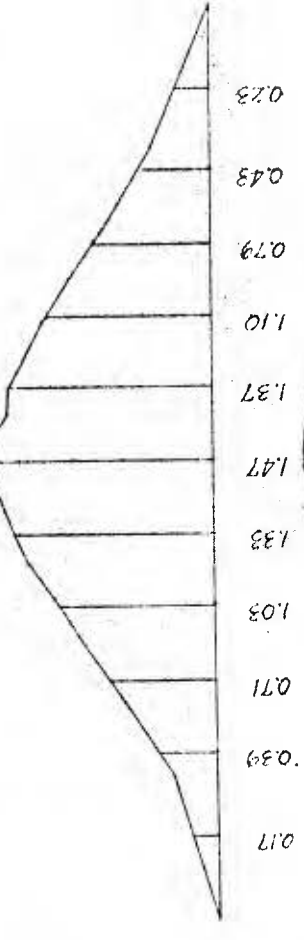
$$H_c = \frac{10 \times 108.61 - 48.27 \times 10.66}{2(10 \times 31.57 - 113.8)} = 1.415 \text{ lb}$$



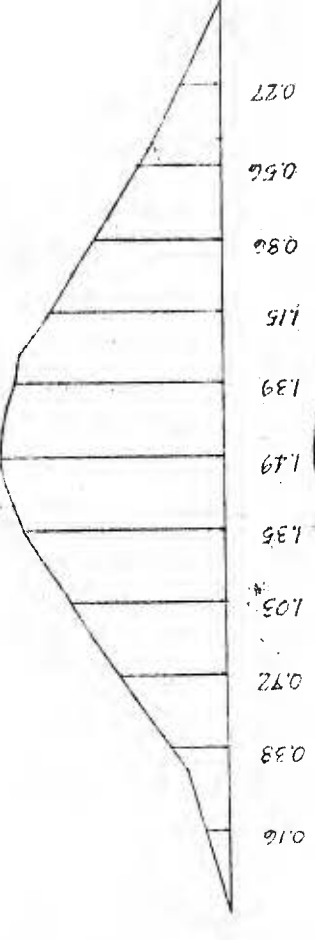
P<sub>1</sub>



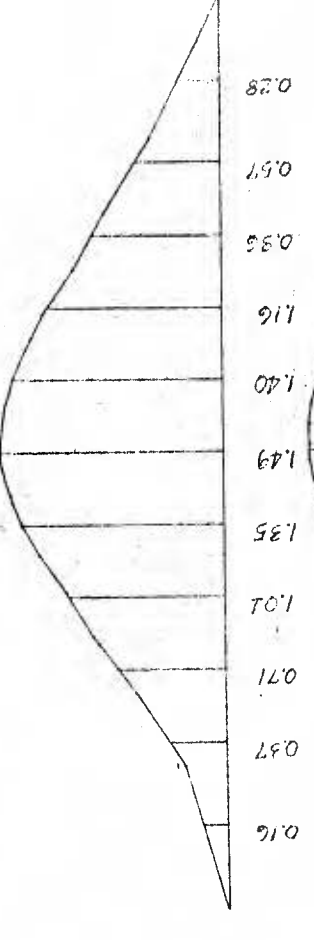
P<sub>2</sub>



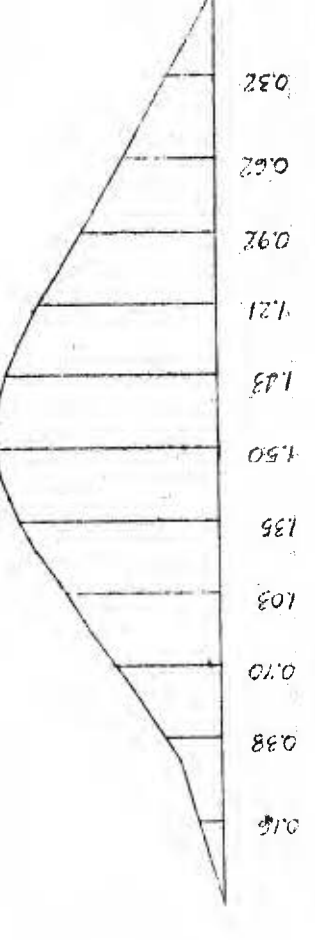
P<sub>4</sub>



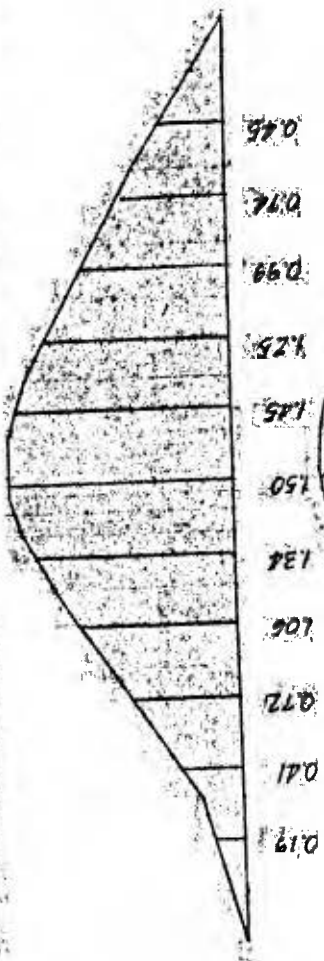
P<sub>5</sub>



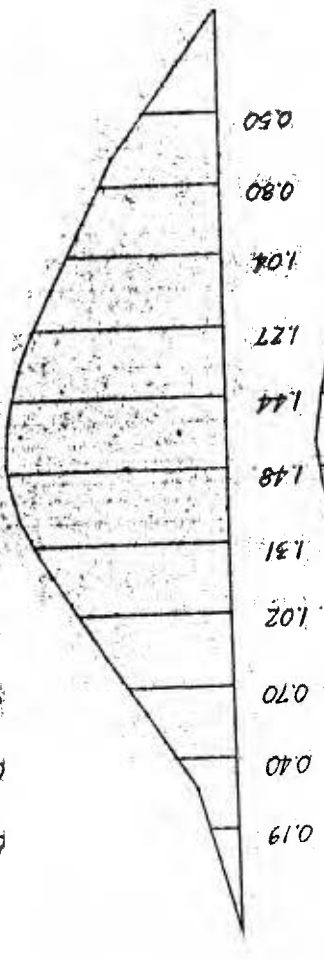
P<sub>6</sub>



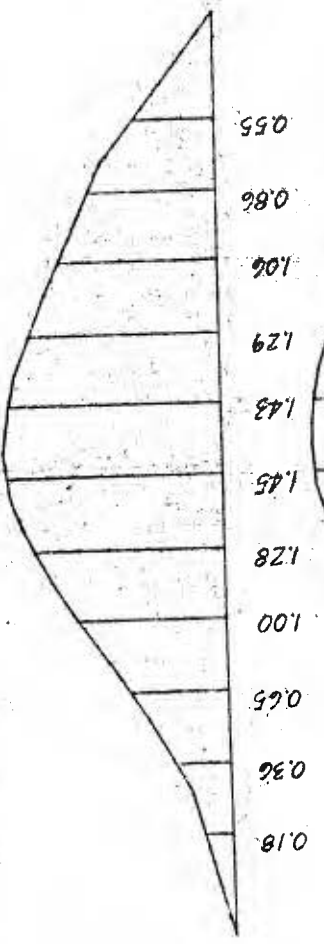
P<sub>7</sub>



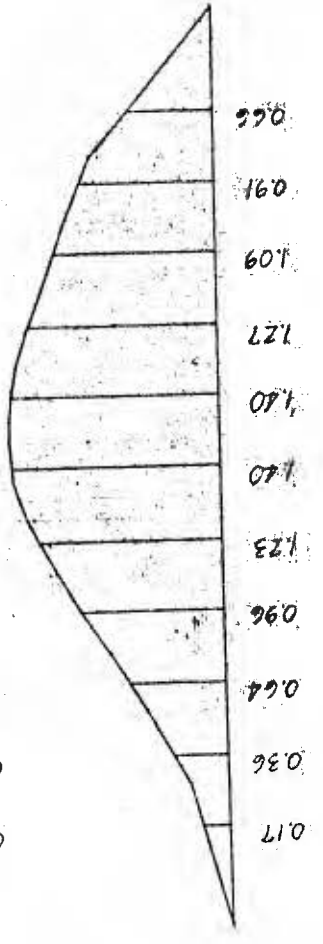
|| P<sub>1</sub>



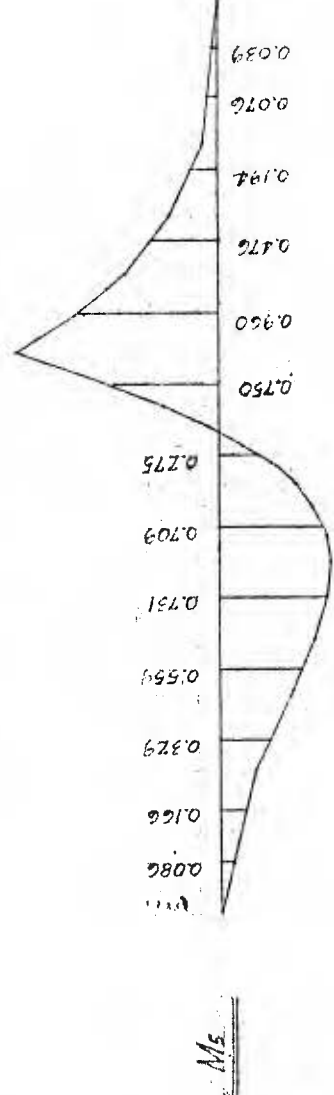
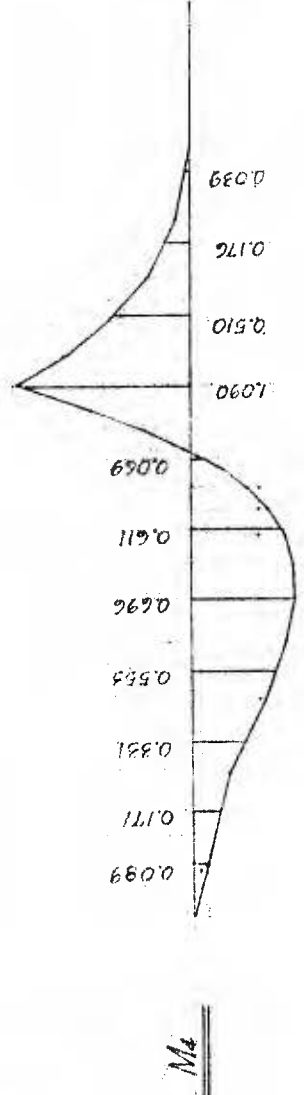
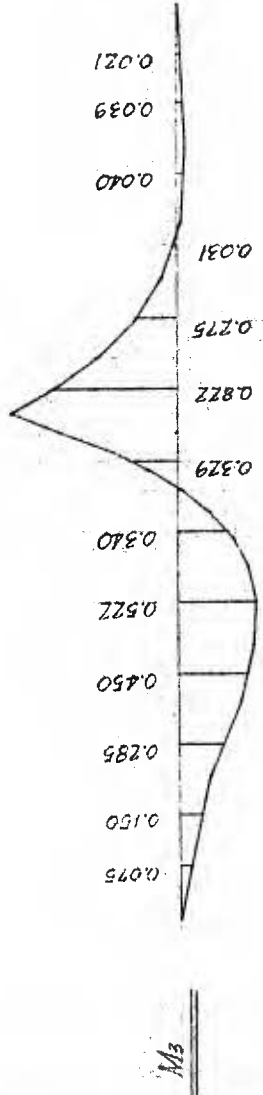
|| P<sub>2</sub>

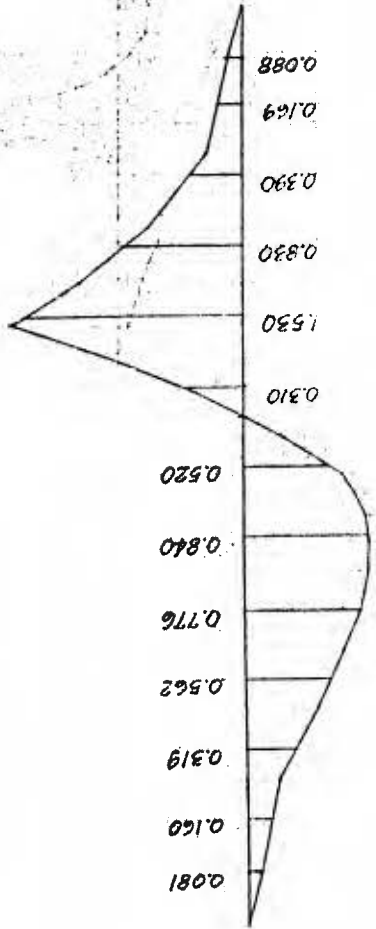


|| P<sub>3</sub>

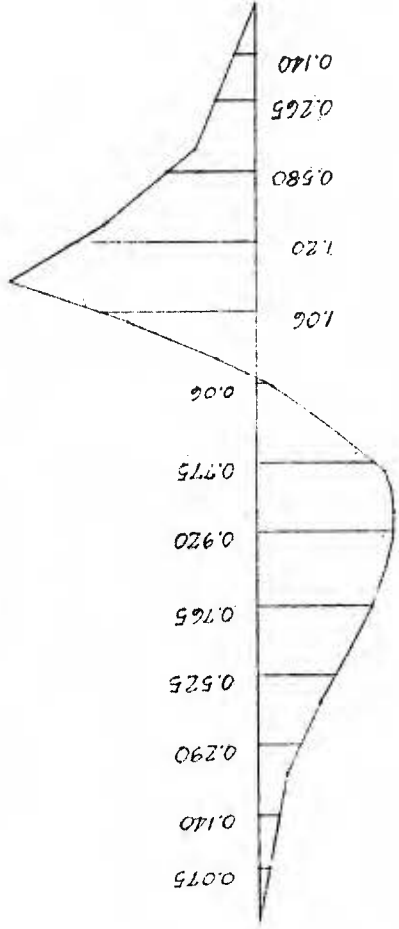


|| P<sub>4</sub>

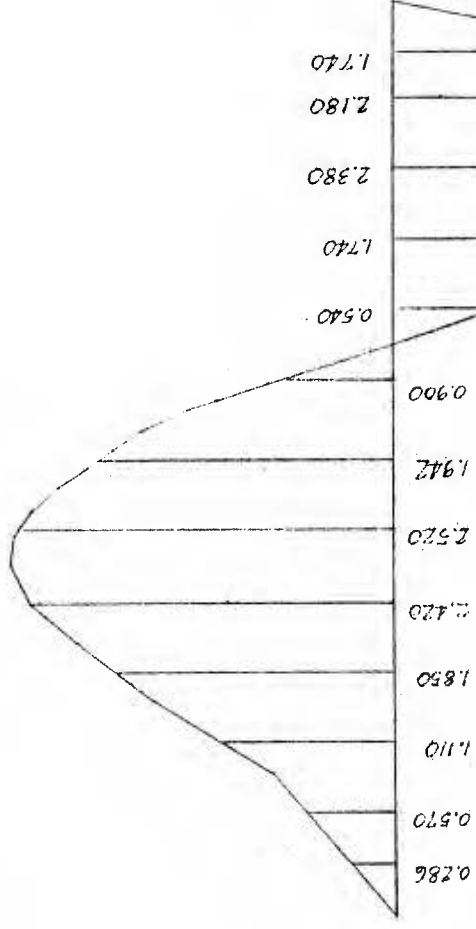




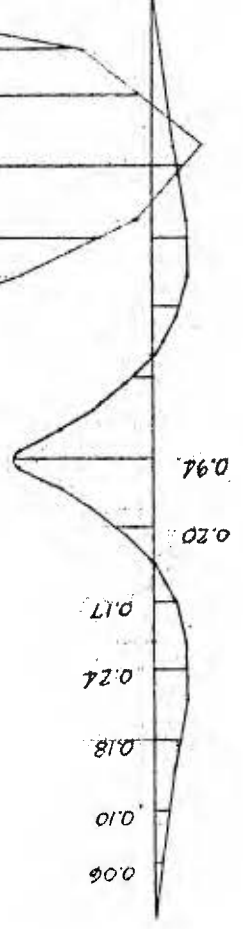
*Ma*



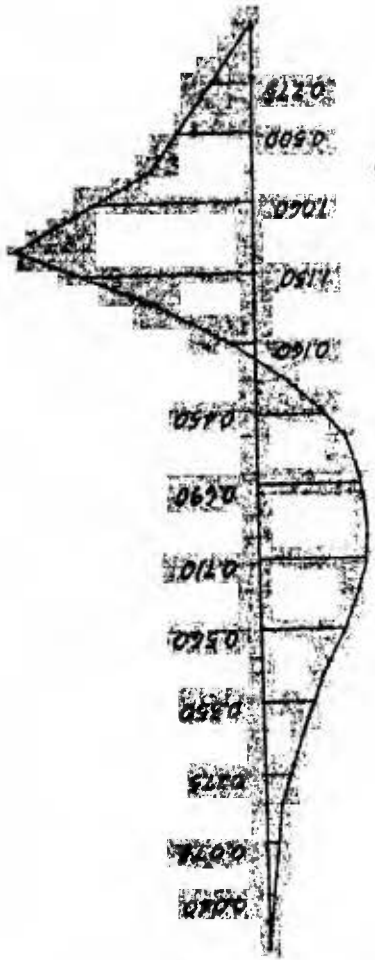
*Mb*



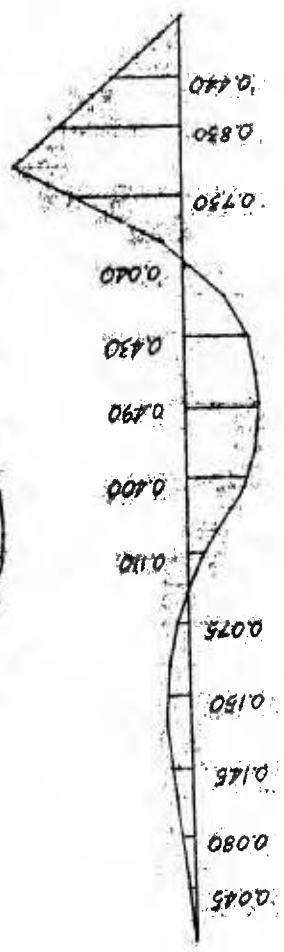
*Ma*



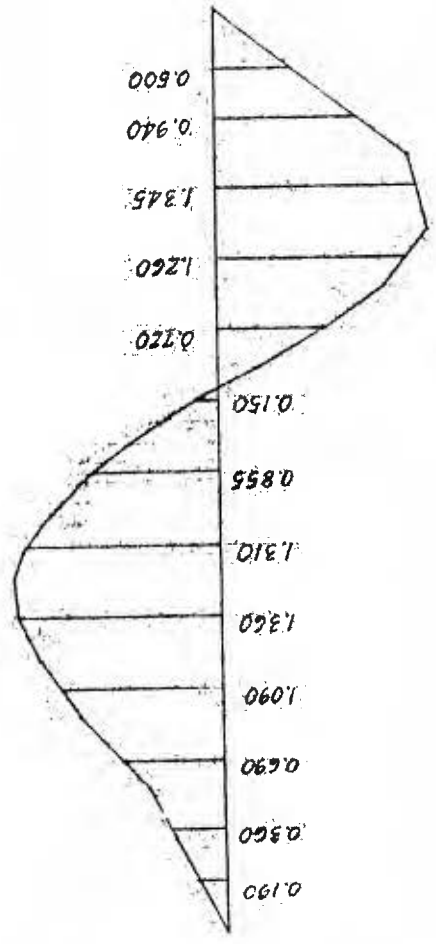
*Mb*



M8



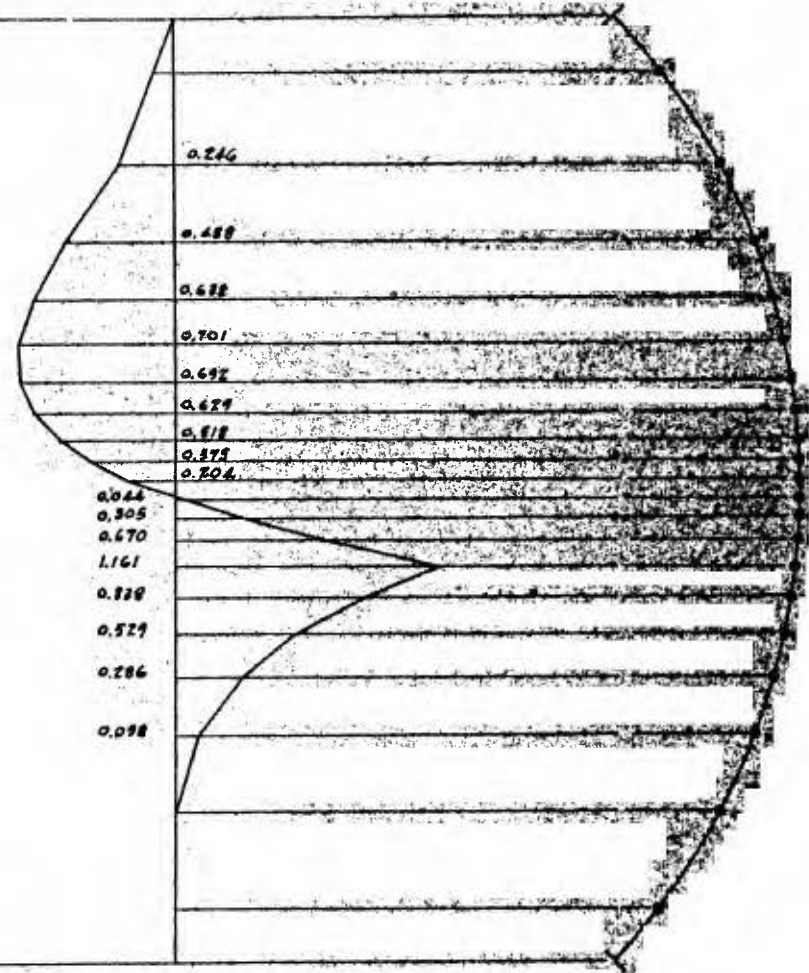
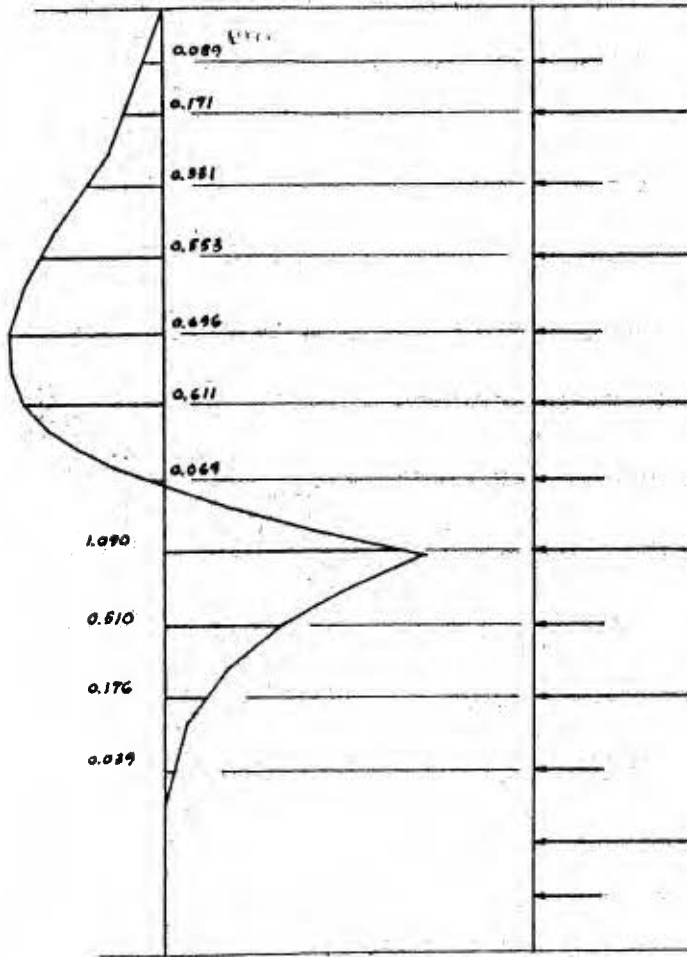
M9



M10

peso propio del arco

carga proveniente de la columna



Luego sustituyendo en Ec.(5) tenemos

$$M_c = \frac{48.27 - 2 \times 1.415 \times 10.66}{20} = + 0.905 \text{ lbs} - m$$

y sustituyendo en Ec.(6) obtenemos

$$V_c = - \frac{416.72}{2 \times 424.82} = - 0.491 \text{ lb}$$

$$\text{luego } M = M_c + H_c y + V_c x - m_T = 0.905 + 1.415 \times 0.074 + 0.491 \times 2.46 - 2.17 = 0.042 \text{ lb} - m$$

que es la ordenada directamente bajo el punto 1 en la mitad izquierda del arco, tal como se muestra en la figura .

Las demás ordenadas mostradas en la parte izquierda del arco fueron determinadas de modo semejante y la línea de influencia para el momento en el punto 4 fue completada .

La gran ventaja de las líneas de influencia es que permiten ver cual es la posición que debe tener la carga viva para producir un momento máximo, y tantos momentos debidos a cargas concentradas como momentos debidos a carga uniforme pueden ser obtenidos rápidamente .

Líneas de influencia para empuje y cortante en los diferentes puntos del eje del arco pueden ser construídas de la siguiente manera .

Sea ACB ( Fig.4) la línea de centro del arco y, como un ejemplo, supongamos que construimos la línea de influencia para el empuje en el punto 1.

Los siguientes valores que fueron computados para construir las líneas de influencia para momento pueden usarse :

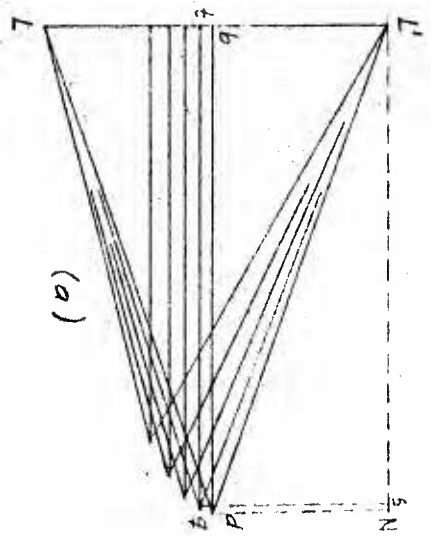
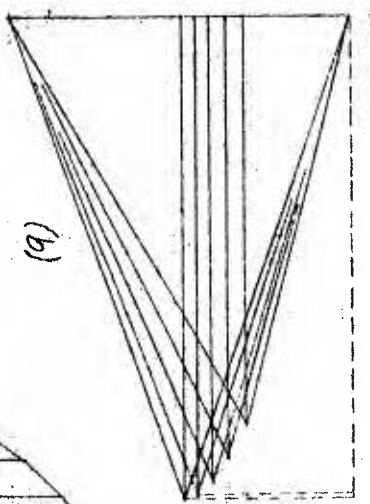
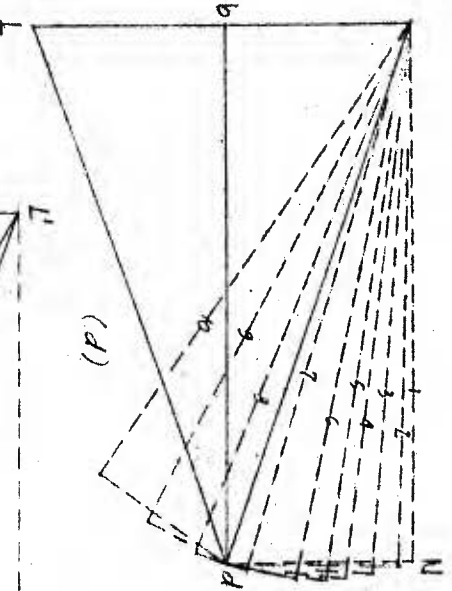
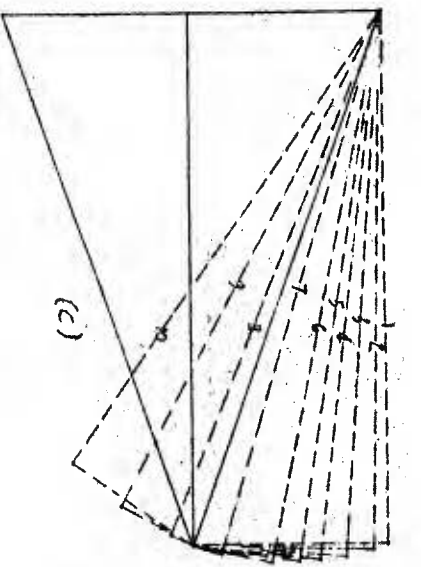
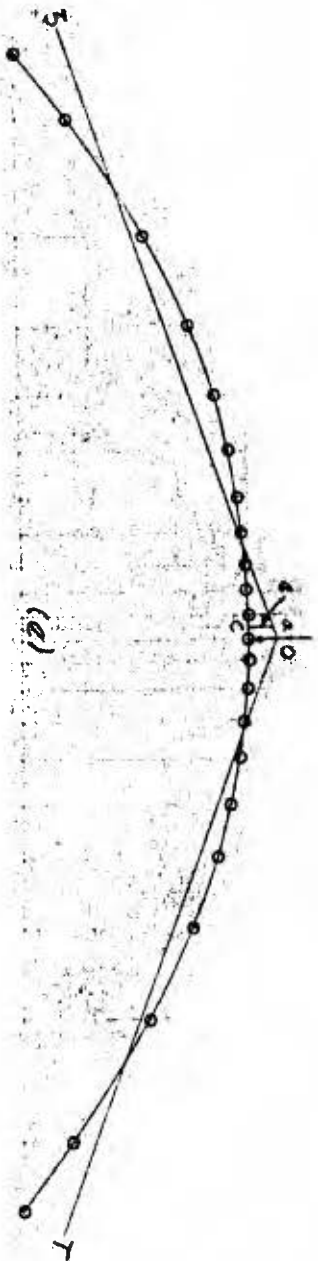


	Mc	Hc	Vc
Carga unitaria en punto 1	+0.905	1.415	0.491
Carga unitaria en punto 2	+0.647	1.400	0.455
Carga unitaria en punto 3	+0.401	1.362	0.412
Carga unitaria en punto 4	+0.175	1.297	0.364
Carga unitaria en punto 5	-0.011	1.198	0.311
Carga unitaria en punto 6	-0.159	1.048	0.250
Carga unitaria en punto 7	-0.236	0.858	0.188
Carga unitaria en punto 8	-0.237	0.600	0.119
Carga unitaria en punto 9	-0.143	0.282	0.050

Primero colocamos la carga unitaria en el punto 1 ( derecha ),  
luego de los valores puestos arriba obtenemos

$$e = \frac{Mc}{Hc} = \frac{0.905}{1.415} = 0.64$$

Es obvio que si dibujamos Lb en (c) Fig.4 en escala conveniente igual a Vc = 0.491 y dibujamos bd igual a Hc = 1.415, obtenemos Ld, la cual es la resultante en la clave (c) debida a una carga unitaria en el punto 1. Luego si dibujamos Ca = e obtenemos el punto a que está la resultante. Enseguida pasamos a través de a una línea paralela a Ld ( línea O3 ) que representa la posición de la resultante a la izquierda del punto 1 debida a una carga unitaria en el punto 1. Es evidente que el empuje en cualquier sección a la izquierda del punto 1. debido a una carga unitaria en el punto 1. puede ser obtenido resolviendo la resultante Ld perpendicularmente a la sección y la otra componente a lo largo de la sección será el cortante en esa sección .



Empyze

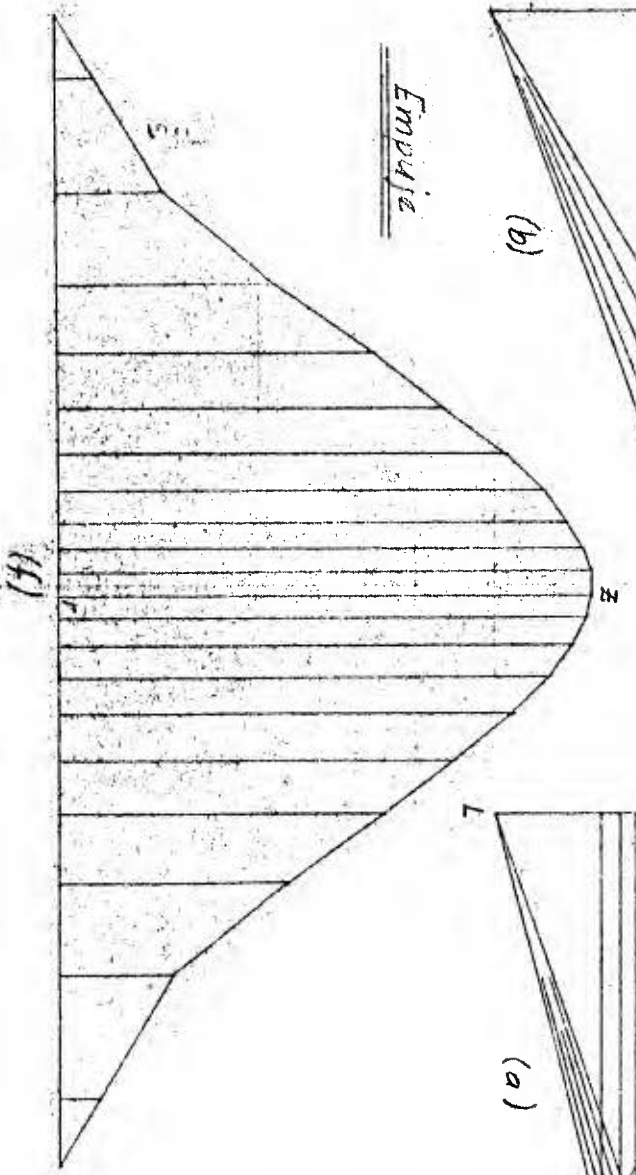


Figura 4

Teniendo la resultante Ld a la izquierda del punto l, la resultante a la derecha del punto l debido a una carga unitaria en el punto l. puede ser obtenida dibujando LL' igual a la unidad y trazando L'd. Como se ve, L'd es la resultante a la derecha del punto l. debida a una carga unitaria en el punto l., y la posición de la resultante a la derecha del punto l debida a una carga unitaria en el punto l. está representada por la línea OT la cual se dibuja paralela a L'd. Ahora, si dibujamos LN perpendicular a la sección transversal en el punto l., y Nd perpendicular a L'N, obtenemos el empuje que está representado por la línea L'N, y Nd representa el cortante en el punto l., ambos debidos a una carga unitaria en el punto l.

Luego si ponemos en (f) la ordenada Zr igual a L'N, obtendremos el punto z que está en la línea de influencia para empuje. Ahora, supongamos que la carga unitaria se ha movido del punto l. el punto z. Si hacemos Lt igual al cortante en la clave y Tg igual al empuje en la clave, ambos debidos a una carga unitaria en Z., podemos obtener L'q, y dibujando qs obtendremos L's que representa el empuje en el punto l debido a una carga unitaria en el punto Z., y sq representa el cortante. Luego, dibujando la ordenada en (f) directamente debajo del punto Z igual a L's, tenemos otro punto de la línea de influencia para empuje. Procediendo del modo descrito se logra la línea de influencia completa para empuje mostrada en (f). Debe ser notado que el diagrama (a) se aplica a cargas en la mitad derecha del arco y el diagrama (b) a cargas en la mitad izquierda del arco.

Es necesario hacer notar que tanto el cortante como el empuje cambian abruptamente en el punto para el cual se está sacando la línea de influencia . La causa de esto está en que si la carga que está en el punto  $l$  se mueve un infinitesimal hacia la derecha del punto  $l$ , la resultante actuando a lo largo de  $OS$  será considerada para la determinación de empujes y cortantes en el punto  $l$  ; y si la carga unitaria se moviera un infinitesimal hacia la izquierda del punto  $l$ , la resultante actuando a lo largo de la línea  $OT$  será considerada para determinar empujes y cortantes. En los diagramas (c) y (d) de la figura 4. está indicado el método que se siguió en este trabajo para construir las líneas de influencia, método que está basado en lo dicho anteriormente . Lo que se hizo fue, simplemente, determinar en cada diagrama los valores del cortante y el empuje en todos los puntos para cierta posición de carga. En el diagrama (d) están dibujados los cortantes y empujes en cada punto para cuando la carga unitaria se encuentre en el punto  $l$ . derecho; en el diagrama (c) están indicados los empujes y cortantes en cada división cuando la carga unitaria está en el punto  $l$  izquierdo . Este método es esencialmente el mismo descrito en los párrafos anteriores, la única diferencia estriba en el procedimiento .

## Cálculo de las cargas que llegan al arco.

### a) Carga viva.

Si el puente estuviera cargado en sus cuatro vías a los arcos exteriores les llega aproximadamente  $3/16$  de la carga total y al arco interior  $10/16$  de la misma.

$$p \times l = 64 \times 40 = 2560 \text{ lbs. (A.A.S.H.O lane load)}$$

$$3/16 \times p \times l = 480 \text{ lbs.}$$

Quiere decir que para esa condición de carga cada columna del arco exterior va a transmitir :

$$480 \times 15.5 = 7400 \text{ lbs.}$$

En el caso de la concentración tenemos:

$$2260 \times 40 = 90400 \text{ lbs.} = pl.$$

$$3/16 \times pl = 17000 \text{ lbs.}$$

### b) Carga muerta .

Los valores que se usarán son los que se calcularon en los marcos .

### Momentos debidos a carga muerta y carga viva.

Teniendo las líneas de influencia es muy sencillo calcular estos momentos : sabiendo el valor de las cargas que, por medio de las columnas, llegan al arco, aquéllos se multiplican por la ordenada correspondiente de la línea de influencia . Cuando se trata del peso propio se multiplica el peso de cada división por la ordenada correspondiente en la línea de influencia.

**Ejemplo .** Calcularemos los momentos para carga muerta y carga viva en el punto k.

Carga muerta ( Ver el resumen de esfuerzos al final del cálculo de los marcos ).

Debido al peso de la losa y marcos

$$M = - 0.171 \times 36.2 - 0.553 \times 76.8 - 0.611 \times 62.3 + 1.090 \times 62.3 \\ + 0.176 \times 76.8 = - 5.2 \text{ K - m}$$

Debido al peso propio

$$M = - 0.089 \times 19.83 - 0.148 \times 11.21 - 0.202 \times 7.42 - 0.109 \times 5.22 \\ 0.137 \times 4.00 + 0.469 \times 2.92 + 0.041 \times 2.24 - 0.213 \times 1.81 \\ - 0.070 \times 1.46 - 0.160 \times 1.39 = - 8.03 \text{ k-m}$$

$$\text{Momento de carga muerta} = - 5.20 - 8.03 = - 13.23 \text{ k-m}$$

Carga viva ( Ver cargas calculadas en los párrafos anteriores)

Momento negativo máximo.

$$M = ( 0.171 + 0.553 + 0.611 ) \times 13.9 - 31.6 \times 0.611 = - 20.26 \text{ k-m}$$

Momento positivo máximo.

$$M = ( 1.090 + 0.176 ) \times 13.9 + 31.6 \times 1.090 = - 27.91 \text{ k-m}$$

Momentos flectores debidos a cambios de temperatura

Sustituyendo en la Ec.(7) ( Art. 7-I ) tenemos :

$$H_t = \frac{6 \times 10^6 \times 30.48 \times 2 \times 10^6 \times 10 \times 10}{2 \times 17.8 [ 1 \times 31.57 - (10.66)^2 ]} \times (3.28 \times 12)^2 =$$

$$H_t = \dagger 31.5 \text{ k. ( Empuje en la clave )}$$

Sustituyendo en Ec.(3) ( Art. 7-I ) obtendremos :

$$M_t = - \frac{31.5 \times 10.66}{10} = - 33.6 \text{ k-m}$$

Sustituyendo en Ec. (1) ( Art. 7 - I ) o por el método indicado en la Fig. 7 ( Art. 7 - I ) obtendremos los siguientes momentos flectores :

Clave	$M = - 33.6 \text{ K-m}$
Punto 1	$M = - 33.6 + 31.5x0 = - 33.6 \text{ k-m}$
Punto 2	$M = - 33.6 + 31.5x0.03 = -32.7 \text{ k-m}$
Punto 3	$M = - 33.6 + 31.5x0.04 = -32.3 \text{ k-m}$
Punto 4	$M = - 33.6 + 31.5x0.07 = -31.4 \text{ k-m}$
Punto 5	$M = - 33.6 + 31.5x0.27 = -25.1 \text{ k-m}$
Punto 6	$M = -33.6 + 31.5x0.52 = -17.2 \text{ k-m}$
Punto 7	$M = -33.6 + 31.5x0.86 = -6.5 \text{ k-m}$
Punto 8	$M = -33.6 + 31.5x1.50 = +13.7 \text{ k-m}$
Punto 9	$M = -33.6 + 31.5x2.69 = +51.2 \text{ k-m}$
Punto 10	$M = -33.6 + 31.5x4.68 = +113.9 \text{ k-m}$
Apoyo	$M = -33.6 + 31.5x6.10 = 158.7 \text{ k-m}$

Empujes debidos a carga muerta y carga viva

Los empujes máximos se calculan fácilmente mediante la línea de influencia; las mismas cargas que se usaron para calcular los momentos se usarán para calcular los empujes,

Ejemplo . Calcularemos los empujes máximos en el punto 4.

Debido al peso de losa y marcos así como de carga viva

$$P = 43.6x0.40 + 84.2x1.50 + 69.7x2.70 + 17.0x1.37 = 355.22 \text{ k}$$

Debido a su propio peso

$$P = 0.246x19.83 + 0.689x11.21 + 1.311x7.42 + 1.821x5.22 \\ + 2.206x4.00 + 2.502x2.92 + 2.705x2.24 + 2.736x1.81 \\ + 2.900x1.46 + 2.931x1.39 = 67.40 \text{ k}$$

$$P (\text{ total } ) = 355.22 + 67.40 = 422.62 \text{ k Empuje máximo}$$

### Momentos debidos a acortamiento del arco

Para determinar los momentos debidos a acortamiento del arco, es necesario determinar primero el valor del esfuerzo de compresión promedio ( $f$ ) debido a empuje directo. El valor del esfuerzo de compresión en cada punto se obtiene dividiendo el empuje en el punto por la sección transformada del arco en ese punto .

Los valores de las secciones transformadas son los siguientes :

$$\text{Punto 1} - A = 0.67 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.474 \text{ m}^2$$

$$\text{Punto 2} - A = 0.68 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.480 \text{ m}^2$$

$$\text{Punto 3} - A = 0.72 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.504 \text{ m}^2$$

$$\text{Punto 4} - A = 0.76 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.528 \text{ m}^2$$

$$\text{Punto 5} - A = 0.81 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.558 \text{ m}^2$$

$$\text{Punto 6} - A = 0.83 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.600 \text{ m}^2$$

$$\text{Punto 7} - A = 0.94 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.636 \text{ m}^2$$

$$\text{Punto 8} - A = 1.03 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.690 \text{ m}^2$$

$$\text{Punto 9} - A = 1.16 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.768 \text{ m}^2$$

$$\text{Punto 10} - A = 1.36 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.888 \text{ m}^2$$

$$\text{Clave} - A = 0.67 \times 0.60 + 0.0072 \times 10 = 0.474 \text{ m}^2$$

Dividiendo los empujes máximos entre estas secciones obtenemos los siguientes valores de  $f$  :



$$\begin{aligned}
\text{Punto 1} - f &= 338.60 + 0.474 = 714.35 \text{ k/m}^2 \\
\text{Punto 2} - f &= 338.60 + 0.480 = 705.42 \text{ k/m}^2 \\
\text{Punto 3} - f &= 338.60 + 0.504 = 671.83 \text{ k/m}^2 \\
\text{Punto 4} - f &= 355.22 + 0.528 = 672.77 \text{ k/m}^2 \\
\text{Punto 5} - f &= 390.13 + 0.558 = 699.16 \text{ k/m}^2 \\
\text{Punto 6} - f &= 366.85 + 0.600 = 611.42 \text{ k/m}^2 \\
\text{Punto 7} - f &= 375.41 + 0.636 = 590.27 \text{ k/m}^2 \\
\text{Punto 8} - f &= 391.02 + 0.690 = 566.70 \text{ k/m}^2 \\
\text{Punto 9} - f &= 391.95 + 0.768 = 510.35 \text{ k/m}^2 \\
\text{Punto 10} - f &= 389.01 + 0.888 = 438.07 \text{ k/m}^2 \\
\text{Clave} - f &= 388.97 + 0.474 = 820.61 \text{ k/m}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= 7000 \text{ k/m}^2 \\
f \text{ ( promedio )} &= \frac{7000}{11} = 636 \text{ k/m}^2
\end{aligned}$$

11

Sustituyendo en Ec.(8) Art. (7-I) tenemos

$$\begin{aligned}
H_s &= \frac{f L N}{2c [ N \sum y^2 - (\sum y)^2 ]} = \frac{636 \times 30.48 \times 10}{2 \times 17.8 [ 10 \times 31.57 - (10.66)^2 ]} \\
&= 30.4 \text{ K.}
\end{aligned}$$

Para el empuje en la clave debido al acortamiento del arco

Sustituyendo en Ec.(7), Art.(7-I) tenemos :

$$M_s = - \frac{H_s \sum y}{N} = \frac{30.4 \times 10.66}{10} = -32.4 \text{ k-m}$$

para el momento flector en la clave debido a acortamiento del arco. Sustituyendo los valores de arriba en Ec.(9) Art.(7-I) :

$$e = \frac{H_s}{H_s} = \frac{32.4}{30.4} = 1.07 \text{ m}$$

para la excentricidad en la clave. Teniendo la excentricidad, los momentos en el arco debidos a acortamiento pueden ser determinados de manera como se explicó para cambios de temperatura; desde luego que los momentos debidos a cambios de temperatura son proporcionales al empuje en la clave. De este modo obtenemos los siguientes valores de los momentos debidos a acortamiento del arco :

Clave	$M = -33.6/31.5 \times 30.4 = -32.4 \text{ k-m}$
Punto 1	$M = -33.6/31.5 \times 30.4 = -32.4 \text{ k-m}$
Punto 2	$M = -32.7/31.5 \times 30.4 = -31.6 \text{ k-m}$
Punto 3	$M = -32.3/31.5 \times 30.4 = -31.2 \text{ k-m}$
Punto 4	$M = -31.4/31.5 \times 30.4 = -30.3 \text{ k-m}$
Punto 5	$M = -25.1/31.5 \times 30.4 = -24.2 \text{ k-m}$
Punto 6	$M = -17.2/31.5 \times 30.4 = -16.6 \text{ k-m}$
Punto 7	$M = -6.5 /31.5 \times 30.4 = -6.3 \text{ k-m}$
Punto 8	$M = 13.7/31.5 \times 30.4 = 13.2 \text{ k-m}$
Punto 9	$M = 51.2/31.5 \times 30.4 = 49.4 \text{ k-m}$
Punto 10	$M = 113.9/31.5 \times 30.4 = 109.9 \text{ k-m}$
Apoyo	$M = 158.7/31.5 \times 30.4 = 153.1 \text{ k-m}$

Estos momentos pueden combinarse con los momentos debidos a cambios de temperatura y carga muerta y viva total.

Haciendo cálculos similares a los anteriores obtenemos los momentos debidos a acortamiento del arco cuando está con carga nada más en la mitad de la luz. Esos momentos son los siguientes:

Clave	$M = - 22.7 \text{ k-m}$
Punto 1	$M = - 22.7 \text{ k-m}$
Punto 2	$M = - 22.1 \text{ k-m}$
Punto 3	$M = - 21.8 \text{ k-m}$
Punto 4	$M = - 21.2 \text{ k-m}$
Punto 5	$M = - 16.9 \text{ k-m}$
Punto 6	$M = -11.6 \text{ k-m}$
Punto 7	$M = - 4.4 \text{ k-m}$
Punto 8	$M = + 9.2 \text{ k-m}$
Punto 9	$M = 34.6 \text{ k-m}$
Punto 10	$M = 76.9 \text{ k-m}$
Apoyo	$M = 107.2 \text{ k-m}$

#### Empujes y cortantes debidos a cambios de temperatura

Si siguiendo el método explicado en el Art. ( Ver Fig. ), obtenemos el diagrama para empujes y cambios de temperatura mostrado en la figura 5, dibujando IJ a una escala conveniente e igual a  $H_t = 31.5 \text{ k}$  ( Dado en Art. ( ) ) y describiendo el semicírculo y dibujando desde I los rayos de empuje, que son paralelos a la tangente en el punto correspondiente, y luego dibujando los correspondientes rayos de cortante desde J.

Luego I2 representa el empuje en 2 y J2 representa el cortante en 2. Midiendo con escala estos rayos obtenemos los siguientes valores para empuje debidos a cambio de temperatura :

Clave	$-31.5 \text{ k}$
Punto 1	$-31.5 \text{ k}$
Punto 2	$-31.4 \text{ k}$

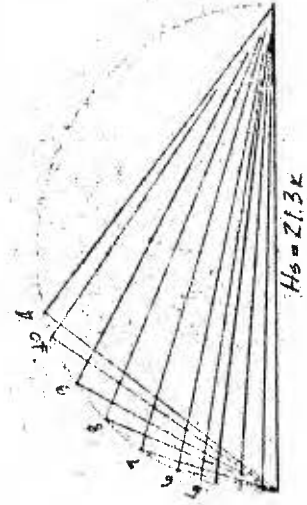
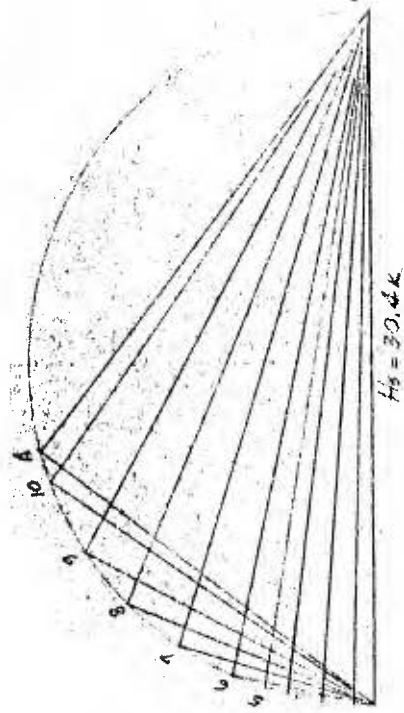
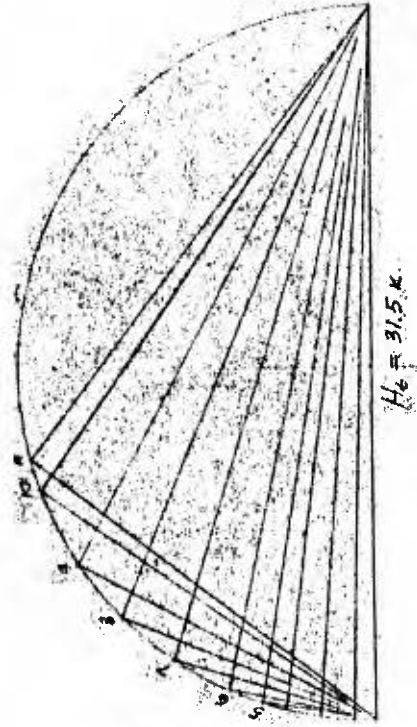


Figura 5

Punto 3	31.4 k
Punto 4	31.2 k
Punto 5	31.0 k
Punto 6	30.7 k
Punto 7	30.0 k
Punto 8	29.0 k
Punto 9	27.7 k
Punto 10	25.8 k
Arranque	24.9 k

Empujes y cortantes debidos a acortamiento del arco

Los empujes y cortantes debidos a acortamiento del arco cuando el arco soporte carga muerta y viva totales se obtiene construyendo el diagrama I' B 5 J' ( Fig. 5 ) de la misma manera que para cambios de temperatura y construyendo el diagrama I'' B 5 J'' para cuando el arco soporta carga viva en la mitad del arco y carga muerta total.

Midiendo con escala los rayos en el diagrama I'B5J' obtenemos los siguientes valores que son cuando el arco soporta carga viva y muerta totales :

Clave	$P = 30.4 \text{ k}$
Punto 1	$P = 30.4 \text{ k}$
Punto 2	$P = 30.4 \text{ k}$
Punto 3	$P = 30.4 \text{ k}$
Punto 4	$P = 30.2 \text{ k}$
Punto 5	$P = 30.1 \text{ k}$
Punto 6	$P = 29.8 \text{ k}$

Punto 7	$P = 29.1 \text{ k}$
Punto 8	$P = 28.1 \text{ k}$
Punto 9	$P = 26.8 \text{ k}$
Punto 10	$P = 25.0 \text{ k}$
Arranque	$P = 24.1 \text{ k}$

Y los siguientes valores cuando el arco está cargado con carga viva en la mitad de su luz :

Clave	$P = 21.3 \text{ k}$
Punto 1	$P = 21.3 \text{ k}$
Punto 2	$P = 21.3 \text{ k}$
Punto 3	$P = 21.3 \text{ k}$
Punto 4	$P = 21.2 \text{ k}$
Punto 5	$P = 21.1 \text{ k}$
Punto 6	$P = 20.9 \text{ k}$
Punto 7	$P = 20.4 \text{ k}$
Punto 8	$P = 19.7 \text{ k}$
Punto 9	$P = 18.7 \text{ k}$
Punto 10	$P = 17.6 \text{ k}$
Arranque	$P = 16.9 \text{ k}$

Para diseñar las secciones del arco es necesario combinar, momentos y empujes para obtener los máximos :

Punto	M(c.m)	M(p.p)	$\bar{M}(c.v)$	$\bar{M}(c.v)$	$M_s(c.v.)$	$M_s(\frac{1}{2}c.v)$	$\bar{M}(c.v)$	$\bar{M}(c.v)$	M(T°)
clave	-19.2	-3.13	4.26	-9.13	-32.4	-22.7	1.33	-6.15	-33.60
1	-19.2	-3.29	6.61	-9.75	-32.4	-22.7	3.13	-6.83	-33.60
2	-12.8	-5.12	13.82	-10.76	-31.6	-22.1	8.49	-7.12	-32.70
3	-9.0	-6.70	20.13	-13.63	-31.2	-21.8	13.04	-8.58	-32.30
4	-5.2	-8.03	27.91	-20.26	-30.3	-21.2	18.34	-10.90	-31.40
5	-7.1	-7.36	19.58	-22.67	-24.2	-16.9	11.77	-13.04	-25.10
6	-12.1	1.00	22.61	-25.82	-16.6	-11.6	12.24	-16.15	-17.20
7	-4.7	2.65	31.18	-27.34	-6.3	-4.4	19.07	-19.97	-6.50
8	4.6	7.96	31.71	-22.12	13.2	9.2	20.03	-11.59	13.70
9	4.0	11.70	21.91	-21.01	49.04	34.6	17.22	-5.34	51.20
10	57.0	-0.38	43.23	-37.66	109.9	76.9	27.52	-16.17	113.9
Arr.	169.7	-5.92	79.68	-66.01	153.01	107.2	57.05	-22.85	158.7

Punto	E(c.m)	E(c.v)	E(p.p)	E(M <sup>T</sup> c.v.)	E(Mc.v.)	E(T°)	E(a.c.v )	E(a <sub>1/2</sub> cv)
clave	278.30	53.60	62.48	4.88	24.43	31.5	30.4	21.3
1	283.92	54.68	63.64	31.89	35.20	31.5	30.4	21.3
2	283.92	54.68	63.64	31.96	37.34	31.4	30.4	21.3
3	283.92	54.68	63.64	31.96	34.68	31.40	30.04	21.3
4	297.89	57.33	67.40	25.60	34.08	31.2	30.2	21.2
5	331.24	58.89	69.84	34.19	34.45	31.0	30.1	21.1
6	307.83	59.02	70.30	27.73	39.38	30.7	29.8	20.9
7	314.99	60.42	71.79	26.82	46.56	30.0	29.1	20.4
8	328.33	62.69	73.34	30.21	47.07	29.0	28.1	19.7
9	329.14	62.81	76.36	24.41	35.14	27.7	26.8	18.7
10	326.59	62.42	77.28	45.62	30.53	25.8	25.0	17.6
Arr.	326.76	62.21	78.04	44.08	31.58	24.9	24.1	16.9



División	M	E	M	E	M	E	Sección	Acero
Clave	-96.32	472.38	-90.53	425.34	5.32	399.92	0.67x0.80	20 # 10
1	-96.29	480.54	-90.50	446.12	7.97	441.83	0.67x0.80	20 # 10
2	-91.48	480.44	-86.76	448.75	10.62	441.86	0.68x0.80	20 # 10
3	-90.35	480.44	-87.48	445.37	20.93	441.86	0.72x0.80	20 # 10
4	-89.10	501.22	-92.22	462.02	33.44	450.97	0.76x0.80	16 # 8
5	-80.71	538.67	-85.97	505.40	21.22	493.74	0.81x0.80	14 # 8
6	-65.90	515.35	-73.44	482.62	23.88	465.74	0.88x0.80	14 # 8
7	-36.91	524.40	-53.74	497.76	40.51	472.02	0.94x0.80	16 # 8
8	65.51	540.26	76.67	489.63	-20.67	511.60	1.03x0.80	16 # 8
9	138.70	541.61	129.97	483.62	-28.20	497.53	1.16x0.80	20 # 8
10	316.19	535.79	303.58	506.55	-29.39	486.92	1.36x0.80	22 # 8
Arran.	549.63	534.71	535.49	503.93	26.48	487.68	1.45x0.80	22 # 11

En esta tabla están indicados los momentos máximos en cada sección debidos a tres condiciones de carga :

- a) Carga para obtener empuje máximo
- b) Carga para obtener momento máximo negativo
- c) Carga para obtener momento máximo positivo

De estas tres se escogió la más desfavorable y así obtuvimos las cantidades de

**acero correspondientes a cada sección.-**