Universidad de Costa Rica

Escuela de Ingeniería

Una aplicación de la Teoría de matrices al Análisis Elástico

Tésis de Grado

Rodolfo Herrera Jiménez

Con gratitud

a mis padres

Prólogo

Contiene este trabajo la síntesis de una ardua labor de estudio e investigación en dos ramos de la Ingeniería ; a primera vista poco , pero en realidad profundamente vinculadas ; ellas son : la Teoría de Matrices y la Teoría Estructural . -

Entro en él a considerar las consecuencias de orden " estructural " que se desprenden de tratar un problema de orden básico y general por medio del Análisis Matricial . -

El análisis Vectorial y por ende la Teoría de Matrices nos aportan nuevos métodos de análisis y desarrollo en el campo de la Elasticidad.- No me he detenido a exponer los fundamentos de la Teoría de Matrices . - No lograría lo que me propongo con el espacio - que por economía - es limitado , si empezara con una introducción a las Matrices . - Mi objeto ha sido resolver el problema aquí presentado en una forma general y de ahí partir hacia los casos particulares , resolviendo uno en especial , por ser el de mayor importancia . -

Más bien dividí el Tema en tres partes , atendiendo el problema general , a la presentación del problema unitario y a su aplicación al caso de piezas rectas con el fin de comprobar las ecuaciones generales obtenidas.

El espíritu general del tema tratado , queda expuesto en parte en la Introducción . -

He intentado de todos modos ser lo más comprensible y espero poder haber resumido y expuesto en la forma más clara y elemental el tema tratado . -

Las cuartillas aquí expuestas sólo tienen valor si constituyen la expresión del estudio y comprensión que debe ser norma del auténtico profesional . - Es bajo este espíritu que he llevado a cabo este trabajo , y es por eso mismo que pido benevolencia al Honorable Tribunal para enjuiciar el valor de éste . -

Al final doy una bibliografía de las prestigiosas obras de la especialidad , que me ayudaron en el curso de mi labor a apreciar sugestivo un trabajo que sin entusiasmo podría parecer monótono . -

Muchos amigos me han concedido ayuda y consejo , por lo cual les estoy muy agradecido , pero en particular quiero dar las gracias al señor Ingeniero Luis González . -

Introducción

Las más importantes "teorías clásicas de estructuras indeterminadas " pueden ser ordenadas en tres divisiones mayores :

a) - El método de trabajo mínimo atribuido conjuntamente a Menabrea y a Castigliano (Italianos) ;
b) - El método general de estructuras indeterminadas , acreditadas primeramente a Maxwell (Inglés) , pero suplementado por Mohr y Müller - Bresbau (Alemanes) ;
c) - El método de pendiente y deflexiones (Slope Deflexion) de desarrollo comparativamente reciente ; fue formulado en los Estados Unidos en 1915 por G. A. Maney y extendido en 1925 por Ostenfeld un profesor Danés.

En los últimos 25 años los ingenieros , en su mayor parte Ingleses y Americanos , han creado y re-creado parte del viejo arte de "computar" . - Es así como la "ciencia del análisis numérico" ha desarrollado gran variedad de métodos de computación .

Los métodos denominados "métodos de aflojamiento " datan de Gauss , quien usó y recomendó el método básico , Seidel quien probó su convergencia para sistemas lineales . -

Fue Southewell quien redescubrió el método de Gauss y lo denominó de " Aflojamiento " (Relaxation). - El y su escuela han desarrollado el método y llevado su enorme aplicación a la ingeniería y ciencia . -

Luego Cross , el cual propuso métodos iterativos para la solución de vigas continuas en el año 1932. -

Por otra parte , el desarrollo de máquinas digitales amputadoras modernas ha dado ímpetu al uso de matrices por motivo de la facilidad con la cual las operaciones matriciales fundamentales pueden ser hechas con estos instrumentos de cálculo . -

Matrices fueron introducidas en la matemática por Cayley en 1857. -

Ellas dieron una notación compacta y flexible particularmente útil para trabajar con transformaciones lineales , y presentan un método organizado para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales . -

Es así que muchos problemas pueden ser concisamente formulados con su uso y resultados numéricos prácticos pueden ser obtenidos por medio de sus teoremas .-

La noción básica de los " Métodos de Aflojamiento" aplicada a la teoría estructural es la siguiente :

" en cualquier problema específico puede ser difícil obtener soluciones por ataque directo , es fácil sinembargo invertir este proceder y calcular las fuerzas o momentos que deben ser aplicados para mantener desplazamientos y rotaciones específicas ."

El principio fundamental de todo método indirecto es el siguiente :"podemos siempre determinar el error de una solución de tanteo"

En sí mismo este principio tiene poca utilidad práctica , porque una solución de tanteo tiene poco chance de ser aun aproximadamente exacta .-

El Método de Aflojamiento usa métodos de ajuste sistemático al aplicar una serie de " operaciones " , cada una, una solución indirecta de una clase particularmente simple , canalizando en esta forma una solución de tanteo , (ya sea buena o mala) , hasta que esté conforme con alguna norma de exactitud.-

En el Análisis Elástico de cualquier tipo de Estructura , la consideramos , como mera abstracción hecha para conveniencia matemática , reemplazada por un " diagrama esqueleto " en el cual los miembros son reemplazados por líneas y las uniones por " puntos nodales " en los cuales esas líneas se intersectan .-

El tipo de "operación " de caracter más simple que podemos aplicar sobre una estructura es la imposición de un " desplazamiento de nudo " o de una "rotación de un nudo " por las cuales un nudo es desplazado o rotado en su valor unitario y en alguna dirección especificada , todos los otros nudos siendo mantenidos fijos .-

Es claro que determinadas fuerzas y momentos serán requeridas para este propósito , no solamente en el nudo que es "movido ", sino también en cada nudo que esté conectado con él por algún miembro de la estructura , y , además que las ~~las~~ fuerzas y momentos tendrán "direcciones " las cuales diferirán (en general) de las del desplazamiento o rotación .-

Podemos calcular las fuerzas y momentos de cualquier nudo , de cualquier estructura , siempre que podamos hacerlo para cada extremo de un miembro componente único de ella , teniendo cualquier dirección especificada : esto es lo que se denomina el "problema unitario ".-

Su solución nos dará información respecto de cualquier desplazamiento o rotación que deseemos imponer ; y porque cuando se conozcan las fuerzas y momentos introducidos por cada desplazamiento o giro de nudo que sea posible , podremos entonces trabajar con cargas especificadas cualquiera aplicadas a cualquier determinada estructura . -

Es esta última parte del cálculo la que es el campo de los " Métodos de Aflojamiento "

El " problema unitario "es pues el problema básico para el planteamiento de una solución de cualquier estructura por medio de los Métodos de Aflojamiento ". -

Podemos plantearlo en la siguiente forma :
" Un miembro AB de una estructura cualquiera conecta dos puntos A, B, los cuales tienen una posición relativa cualquiera . -B siendo mantenido fijo , desplazamientos y rotaciones son impuestos sobre A. -

Qué fuerzas y momentos , en consecuencia , son impuestos sobre los nudos A y B ?. -

Es decir buscamos las Ecuaciones que nos relacionen los desplazamientos lineales y angulares relativos con un sistema de carga determinado o viceversa y la geometría de la pieza . -

Consecuencia directa del " problema unitario " es la Teoría de la Rigidez que desarrollaremos luego . -

El "problema unitario " ha sido resuelto en diversas formas para gran variedad de casos particulares , y aunque fue planteado y resuelto por varias maneras desde hace mucho tiempo , su desarrollo se ha aumentado en épocas comparativamente recientes.

El problema que nos planteamos en esta Tesis es la resolución del " problema unitario " para el caso general o lo que podríamos denominar " la resolución del problema unitario general "

Con el desarrollo de muchos instrumentos modernos de cálculo , el campo de aplicación del análisis matemático ha sido grandemente aumentado . - Entre ellas , el " Algebra de Matrices ", debido a la potencia y utilidad práctica en el análisis de ciertos problemas de importancia técnica , lleva la pauta . -

El hecho de que la " ley generalizada de Hooke " relaciona las fuerzas y deflexiones de estructuras lineales elásticas por transformaciones lineales , hace este sujeto particularmente bien adaptado a las aplicaciones del algebra matricial . -

Nos proponemos en este trabajo indicar un modo general de atacar el " problema unitario " por sus estructuras elásticas por intermedio del Algebra de Matrices . -

Capítulo Primero

Estudio de la barra Hiperestática

(1 . 1) LA PIEZA PRISMATICA

Hay una categoría de sólidos de grande importancia en las aplicaciones . - Nos referimos a las piezas llamadas " prismáticas ". -

En los cuerpos de forma alargada , en los que una dimensión (longitud) predomina sobre las otras dos (sección transversal) se obtiene la máxima sencillez de cálculo mediante un conjunto de abstracciones simplificadas que nos conducen a la noción denominada "pieza prismática ".

Una línea (recta , curva o alabeada) llamada directriz y por la ley de variación de una figura plana (sección normal) que se desplaza a lo largo de la directriz , de tal forma que su centro de gravedad recorre esta línea y su plano es siempre normal a ella , la definen geométricamente . -

Es claro así , que al desplazarse en esta forma el área plana a lo largo de la curva directriz , es engendrada la pieza . -

Consideraremos la pieza como unidimensional , considerando como única variable independiente la longitud de la directriz . -

Es conveniente referir la directriz a un marco Cartesiano de referencia $0\varepsilon_i$ caracterizado por un grupo de vectores unitarios $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (bases del sistema). -

Las coordenadas de la directriz están definidas paramétricamente en términos de la abscisa curvilínea l . - Escogemos como origen de ella , un punto arbitrario $l = o$. -

Las coordenadas de un punto P cualquiera , del cuerpo elástico las denotaremos por un vector o matriz columna :

$$x' = \begin{matrix} x_1(l) \\ x_2(l) \\ x_3(l) \end{matrix} \qquad (1.1.1.)$$

Para el estudio de las piezas alabeadas es necesario adoptar en unión con los ejes fijos , otro marco de referencia , las posiciones absolutas del cual están cambiando en alguna manera especificada . - Introduzcamos así , un triedo móvil $0\alpha_i$ en cada punto de la directriz . - Estos marcos están caracterizados por un grupo de vectores unitarios , o bases del sistema, α_1 , α_2 , α_3 , como notamos en fig. 1.1.1.

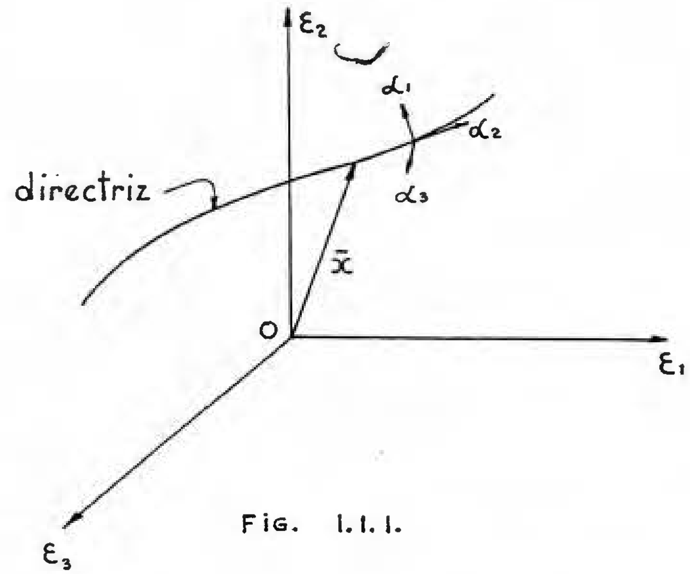


FIG. 1.1.1.

El vector α_2 es tangente a la directriz , y los vectores α_1 , α_3 , coincidirán con los ejes principales de inercia de la sección en cualquier punto . -

La base del segundo sistema $O\alpha_i$ (sistema móvil) puede ser puesta en términos de la del primero $O\varepsilon_i$ por medio de una expresión lineal

$$\alpha_i = a_{i1}\varepsilon_1 + a_{i2}\varepsilon_2 + a_{i3}\varepsilon_3 = \sum_j a_{ij}\,\varepsilon_j \qquad (i=1,2,3) \qquad (1.1.2)$$

Es decir en notación matricial

$$\alpha = E\,A' \qquad (1.1.2)$$

en donde α y E son matrices hilera , a saber

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ ) \; ; \; \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \qquad (1.\ 1\ .3)$$

y A' es la matriz transpuesta de $A = \| a_{ij} \|$ la cual es la matriz de coeficientes en la transformación lineal . - En otra forma , puede aparecer como una multiplicación matricial de A por la matriz transpuesta ε' , $\alpha' = A\,\varepsilon'$. Aquí α y ε' serían matrices columna . -

Ahora, dos bases de vectores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nos darán dos grupos de coordenadas x_i y x_i^* para cada vector $\bar{\eta}$.

Las nuevas coordenadas del vector $\bar{\eta}$ en términos de las antiguas , pueden ser escritas en notación de matrices en la siguiente forma :

$$X = X^* A \ , \ \text{o} \ \ X^* = X A^{-1} \qquad (1.1.4)$$

justamente como si fueran las ecuaciones para una transformación lineal biunívoca . -

Como en nuestro caso estamos usando sistemas Euclideanos, la nueva base $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, será normal - ortogonal - .- Esto significa que la matriz de coeficientes A es ortogonal y el inverso A^{-1} es también ortogonal e igual a A'. -

Entonces las componentes $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$ y ξ_1, ξ_2, ξ_3 de cualquier vector medido respectivamente paralelo a los ejes fijos y a los ejes en movimiento en fig. 1.1 estarán conectadas por la sustitución lineal

$\xi = A\bar{\xi}$, ξ y $\bar{\xi}$ matrices columna y en la cual

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.1.5)$$

en donde a_{51}, a_{52}, a_{53}, denotan los cosenos directores de los ejes típicos en movimiento $O\alpha_i$ referidos a los fijos $O\varepsilon_i$

El siguiente diagrama ortogonal, el cual relaciona las direcciones α_i con las direcciones fijas ε_i, nos ayudará a aclarar lo anterior :

	ε_1	ε_2	ε_3
α_1	l_1	m_1	n_1
α_2	l_2	m_2	n_2
α_3	l_3	m_3	n_3

(1.1.6)

En donde l_i, m_i, n_i, son los cosenos directores de los respectivos ejes .- La matriz A de transformación será :

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \qquad (1.1.7)$$

Asumimos aquí que el determinante de la matriz A

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} l_2 & m_2 & n_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = +1 \qquad (1.1.8)$$

Esto puede siempre ser arreglado por una escogencia determinada de las direcciones $O\alpha_i$, $O\alpha_3$

Consecuencias del esquema ortogonal que describimos, tenemos las siguientes relaciones entre los cosenos directores :

$$
\begin{aligned}
l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1 \\
m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1 \\
n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ell_1 m_1 + \ell_2 m_2 + \ell_3 m_3 &= 0 \\
m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= 0 \\
\ell_1 n_1 + \ell_2 n_2 + \ell_3 n_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ell_2 &= m_1 n_3 - n_1 m_3 \\
m_2 &= \ell_3 n_1 - n_1 \ell_3 \\
n_2 &= \ell_1 m_3 - m_1 \ell_3
\end{aligned}
\tag{1.1.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\ell_1 &= m_3 n_2 - m_2 n_3 \\
m_1 &= \ell_2 n_3 - n_2 \ell_3 \\
n_1 &= m_2 \ell_3 - \ell_2 m_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ell_3 &= n_1 m_2 - n_2 m_1 \\
m_3 &= \ell_1 n_2 - n_1 \ell_2 \\
n_3 &= m_1 \ell_2 - m_2 \ell_1
\end{aligned}
$$

(1 . 2.)

Planteamiento del Problema

El problema que nos ocupa puede plantearse así :

El sólido elástico descrito está sujeto a un sistema de fuerzas activas (sistema activo)general , actuando entre las secci ones - l = o a l .-

Esta solicitación de fuerzas exteriores es contrarrestada , en el equilibrio , por las " reacciones " de sustentación que actuarán en los " apoyos " o sistema reactivo . - El sistema reactivo depende :

a) Del sistema activo
b) De las condiciones de apoyo
c) De la geometría de la pieza

a) Conocemos el sistema activo cuando se conocen la magnitud , dirección y punto de aplicación de las fuerzas que constituyen el sistema solicitante . - En consecuencia estas fuerzas son función del parámetro l . -

Este sistema de fuerzas exteriores reales (de masa y de superficie) puede ser sustituido en su conjunto en el cálculo por uno mecánicamente equivalente (igual resultante y momento) o en nuestro caso por un vector resultante R (l) y un vector momento M (l) , los cuales suponemos referidos al sistema fijo de referencia $O\varepsilon_i$

En notación matricial :

$$R' = \bar{R}(l) = \begin{bmatrix} R_1 (l) \\ R_2 (l) \\ R_3 (l) \end{bmatrix} \quad \text{vector fuerza} \qquad (1.2.1)$$

$$M' = \bar{M}(l) = \begin{bmatrix} M_1 (l) \\ M_2 (l) \\ M_3 (l) \end{bmatrix} \quad \text{vector momento}$$

Aquí R' y M' denotan matrices columna (R y M matrices hilera) .- (Ver fig 1.2.1.)

b) Se conocen las condiciones de apoyo cuando se - pueden determinar las rotaciones y desplazamientos de los apoyos (directa o indirectamente). -

c) Está conocida la geometría de la pieza cuando se conocen sus dimensiones y la ecuación de su directriz . -

Suponemos conocidas las características físicas y geométricas de la pieza y sus condiciones de sustentación . -

Nos proponemos encontrar las ecuaciones que ligan los " esfuerzos internos " en cualquier punto en la directriz de la pieza con las " deformaciones " respectivas y por consiguiente el " sistema reactivo ".

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

(1.3) - Esfuerzos Internos y las Fuerzas Exteriores

Demos al cuerpo una separación hipotética virtual - (cuerpo libre) en cualquier punto arbitrario de abscisa curvilínea l = 0 . -

No se alterará el estado equilibrio (o de movimiento) en la pieza , si aislada y conservando las fuerzas activas , sustituímos la acción que sobre él ejercía el resto suprimido del cuerpo por fuerzas aplicadas sobre la superficie del corte y distribuidas convenientemente . -

Denominaremos estas fuerzas , distribuidas sobre la superficie del corte virtual y que producen la inalterabilidad del comportamiento mecánico de la pieza aislada como " esfuerzos o reacciones internas".

Estos esfuerzos se les considera , distribuidos de un modo continuo sobre la sección , y a cada punto de ella corresponde una reacción llamada unitaria (por unidad de área) , que es la razón límite entre el esfuerzo total que corresponde a una cierta área que comprende el punto de magnitud de esta área , cuando la extensión de la misma decrece , tendiendo anularse . -

Sabemos que a cada punto que se considera en un - cuerpo y para cada orientación de un corte virtual en él , corresponderá un esfuerzo unitario interno o tensión para cualquier orientación de la sección - virtual . -

Con relación a las tensiones internas no se pretende determinar los esfuerzos elementales . -

Nuestro corte es aquel que determina una "dirección principal " de carga estática , es decir aquella en la cual el desplazamiento - en un punto producido por una fuerza actuando en esa dirección en él es paralelo a la fuerza . -

Deseamos sólo conocer los esfuerzos internos totales que actúan sobre la sección , es decir , la suma o integral de las acciones , elementales sobre esta cara a los largo del área de la sección . -

Las tensiones internas en la sección $l = 0$ tendrán una resultante $\bar{S}$ de componentes s_1 , s_2 , s_3 y un momento $\bar{Q}$ de componentes q_1 , q_2 , q_3 con respecto a los ejes fijos . -

En notación de matrices si S' y Q' denotan matrices columna , luego

$$S' = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad \text{, fuerza resultante de tensión}$$

$$Q' = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad \text{, momento resultante} \qquad (1.3.1)$$

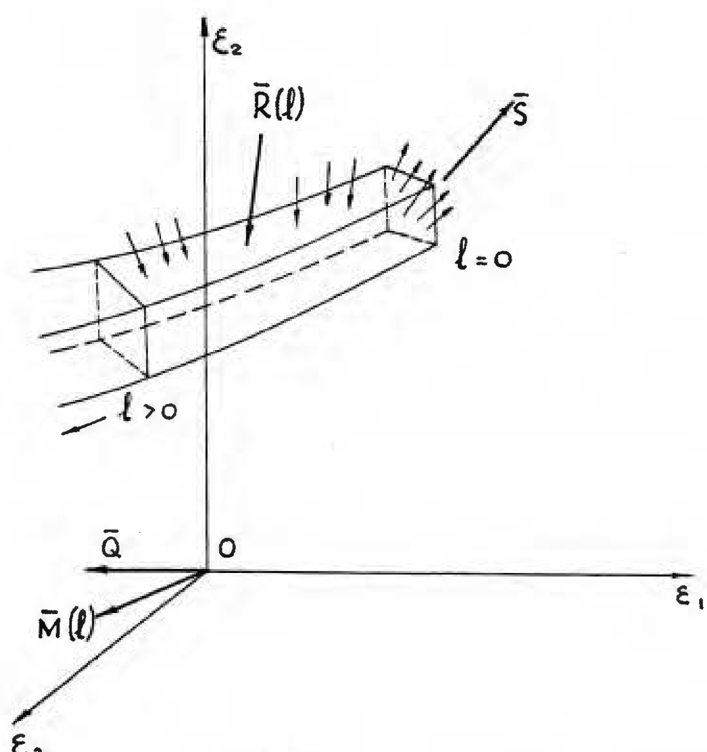


FIG. 1.3.1

Cada acción $\bar{S}$ tiene tres componentes con respecto a la pieza , o lo que es lo mismo en relación al triedro móvil $O\alpha_i$ a saber :

a) Componente normal a la cara , τ_2
b) En el plano de la cara y normal a las aristas , τ_3
c) En el mismo plano y paralela a estas aristas , τ_1

La suma de las componentes elementales que constituyen la resultante a) denominada esfuerzo normal τ_2 darán a su vez un momento respecto al centroide de la cara , el cual denominamos momento flector

Las componentes de b) proporcionan el esfuerzo tangencial τ_3 y el momento de torsión y las de c) nos dan el esfuerzo tangencial τ_1 y el momento flector

Los esfuerzos totales incógnitos son 6 por cada cara que se seccione . -

Para relacionar los esfuerzos internos entre sí y con las fuerzas exteriores es necesario equilibrar el resto de la pieza ($l > o$) haciendo consideración de las fuerzas internas que se desarrollan al cortar la pieza por una sección normal en el punto arbitrario P (l) de coordenadas definidas por el vector $\bar{x}$ y que equilibran el resto de la barra constituida por el conjunto de abscisa curvilínea superior a la de P (l) . -

Para ello aplicamos a su equilibrio (estática) o a su movimiento (dinámica) las ecuaciones generales de la Mecánica Racional.

Entonces , en P (l) tenemos :

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \bar{R} + \bar{S} && \text{, resultante} \\ \bar{K} &= \bar{M} + \bar{Q} && \text{, momento respecto a } O\varepsilon_i \\ \bar{N} &= \bar{K} + \bar{T} \times \bar{x} && \text{, momento respecto a P (l)} \end{aligned} \qquad (1.3.2)$$

Todas las matrices columna referidas al sistema fijo $O\varepsilon_i$. -

Estas dos ecuaciones vectoriales (6 ecuaciones analíticas) nos dan :

Tres ecuaciones de anulación de la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la pieza (estática) ,

Otras tres ecuaciones de anulación del momento de las mismas fuerzas , en el equilibrio . -

Como hemos visto las fuerzas que intervienen son : las tensiones sobre las dos secciones del corte virtual y las fuerzas exteriores que actúan sobre su masa (vgr. la gravedad) o sobre la superficie (exteriores) . - Las fuerzas exteriores que aparecen en estas ecuaciones figuran única mente por su resultante y su momento .-

Es conveniente para el análisis ulterior , transformar las ecuaciones anteriores refiriéndolas al triedo móvil .-

Luego ,

$$t = T\,A^{-1} \quad t \text{ y } T \text{ matrices hilera}$$
$$t' = A\,T' \quad t' \text{y } T' \text{matrices columna} \qquad (1.3.3)$$

en donde

$$t' = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz columna} \qquad (1.3.4.)$$

y

t_1 = esfuerzo cortante según el eje $\mathcal{E}_1$
t_2 = esfuerzo normal según el eje $\mathcal{E}_2$
t_3 = esfuerzo cortante según el eje $\mathcal{E}_3$

en P (1) .

En consecuencia

$$t' = A\,(R' + S') \qquad (1.3.5)$$

De igual manera haremos con el momento respecto al centro de gravedad de la sección :

$$m = N\,A^{-1} \text{ , siendo } m \text{ y } N \text{ matriceshilera,}$$
$$m' = A\,N' \text{ , siendo } m' \text{y } N' \text{matrices columna} \qquad (1.3.6)$$

en donde

$$m' = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \qquad (1.3.7)$$

y

m_1 = momento flector en torno al eje $\mathcal{E}_1$
m_2 = Momento de torsión respecto al eje $\mathcal{E}_2$
m_3 = momento flector en torno al eje $\mathcal{E}_3$

en P (1)

La expresión N puede ser puesta en otra forma al expresar , el producto vectorial $\bar{T} \times \bar{x}$ en notación de matrices en la forma que sigue :

$$\bar{T} \times \bar{x} = X\,T' \qquad (1.\ 3.\ 8.\ )$$

En donde X es la siguiente matriz antisimétrica :

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0 & x_3(1) & -x_2(1) \\ -x_3(1) & 0 & x_1(1) \\ x_2(1) & -x_1(1) & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.\ 3.\ 9)$$

Entonces

$$N' = K' + XT' = (M' + Q') + XT' \qquad (1.\ 3.\ 10)$$

Luego

$$\begin{aligned} m' &= A\,(M + Q)' + AXT' \\ m &= A\,(M + Q)' + AX\,(R + S)' \end{aligned} \qquad (1.\ 3.\ 11)$$

En resumen , las ecuaciones referidas al triedo móvil - son :

$$\begin{aligned} t' &= A\,(R + S)' \\ m' &= A\,(M + Q)' + AX\,(R + S)' \end{aligned} \qquad (1.\ 3.\ 12)$$

Las ecuaciones (1. 3. 12) nos relacionan los " esfuerzos" existentes en una sección de $l = o$, con las fuerzas activas y con los esfuerzos resultantes en cualquier otra sección de abscisa curvilínea $l > o$ de pieza . -

(1.4) Ecuaciones - Deformación - Esfuerzo

Las ecuaciones que restan hasta completar el sistema que permita determinar las incógnitas , se obtienen del siguiente modo :

para la deformación se toman como incógnitas las tres componentes del recorrido elástico del centro de la sección referidas , al sistema de ejes coordenados trirrectangulares móviles , con origen en el punto considerado .-

El conocimiento del recorrido elástico de cada punto de la directriz determina la directriz deformada y fija también el corrimiento de cualquier otro punto de la masa de la pieza , de acuerdo a las hipótesis elásticas .- Es decir , calcular la deformación de la pieza en función de las tres componentes incógnitas del corrimiento elástico de su centro .-

Las tensiones elementales sobre las caras seccionadas virtualmente y cuyas componentes hemos designado por a) , b) , c) , están ligadas a la deformación de la barra por las ecuaciones fundamentales de la elasticidad tridimensional .-

Analicemos un elemento infinitesimal de pieza PP' comprendido entre las abscisas l (P) y $l + dl$ (P') .- Como dijimos en el número anterior (1.3) para los ejes principales de inercia o " direcciones principales " la deformación se produce a lo largo de su propia dirección , presentándose sólo alargamientos o contracciones δ_i , es decir el desplazamiento producido por una fuerza actuando en una de esas direcciones es paralela a la fuerza .-

Considerar el punto P centroide del área considerada de la pieza y referida al sistema de coordenada móvil , en este caso con origen en P .-

Sea una carga unitaria aplicada en P en la dirección ε_1 ; luego si las fuerzas aplicadas en P y los desplazamientos estáticos que ellas producen están relacionadas por la Ley de Hooke , esta carga producirá desplazamientos f_{11} , f_{21} , f_{31} , en las direcciones α_1 , α_2 , α_3 , respectivamente .-

Similarmente sean los desplazamientos producidos por cargas unitarias en las direcciones α_2 , α_3 iguales a f_{12} , f_{22} , f_{32} , y f_{13} , f_{23} , f_{33} respectivamente .-

Los desplazamientos $\delta_1 , \delta_2 , \delta_3$ de un punto P debidos a una fuerza P que tiene componentes p_1 , p_2 , p_3 , en las direcciones coordenadas son

$$\begin{aligned} \delta_1 &= f_{11}\, p_1 + f_{12}\, p_2 + f_{13}\, p_3 \\ \delta_2 &= f_{21}\, p_1 + f_{22}\, p_2 + f_{23}\, p_3 \\ \delta_3 &= f_{31}\, p_1 + f_{32}\, p_2 + f_{33}\, p_3 \end{aligned} \qquad (1.4.1.)$$

Los coeficientes f_{ij} son las flexibilidades , y la matriz cuadrada $F = \| f_{ij} \|$ (I. 4.2) es llamada " matriz flexibilidad "

Es demostrable que si el cuerpo es conservativo , de - forma que no pueda servir como fuente de energía , $f_{ij} = f_{ji}$, de tal manera que la matriz F es simétrica y satisface la ecuación

$$F = F' \tag{1.4.3}$$

En general , también la ecuación puede ser resuelta para las componentes de fuerza p_1 , p_2 , p_3 , y escritas así :

$$\begin{aligned} p_1 &= C_{11}\delta_1 + C_{12}\delta_2 + C_{13}\delta_3 \\ p_2 &= C_{21}\delta_1 + C_{22}\delta_2 + C_{23}\delta_3 \\ p_3 &= C_{31}\delta_1 + C_{32}\delta_2 + C_{33}\delta_3 \end{aligned} \tag{1.4.4.}$$

Los coeficientes C_{ij} son llamados los " coeficientes de rigidez " ; la matriz cuadrada $c = \| C_{ij} \|$ (1.4.5.) es denominada la " Matriz rigidez " y satisface la siguiente relación :

$$C = F^{-1} \tag{1. 4 . 6.}$$

Es decir , la matriz rigidez es la inversa de la matriz flexibilidad . -

También si el cuerpo es conservativo , C es simétrica y $C_{ij} = C_{ji}$, o $C = C'$ (1.4. 7 .)

En el caso que analizamos , como estamos asumiendo una dirección principal de carga estática , entonces la matriz flexibilidad será la siguiente :

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & O & O \\ O & f_{22} & O \\ O & O & f_{33} \end{bmatrix} \tag{1 . 4.8}$$

una matriz diagonal , en la cual f_{11} , f_{22} , f_{33} , son los coeficientes de flexibilidad , propiedades del miembro considerado .

En adelante denotaremos la matriz F en la siguiente - forma más simple :

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & O & O \\ O & f_2 & O \\ O & O & f_3 \end{bmatrix} \tag{1.4.9.}$$

en la cual f_1 , y f_3 son los coeficientes de deformación por cizallamiento que dependen de la características de la sección y f_2 es el coficiente de deforma - ción por esfuerzo normal , cuyo valor es el siguiente :

$$f_2 = \frac{1}{EA} \qquad (1.4.10)$$

en la cual

E denota el módulo de Young para el material
A el área de la sección transversal del miembro

De acuerdo a lo que antecede la ecuación matricial qúe que liga los esfuerzos con las deformaciones , la podemos expresar en la siguiente forma , referida a los ejes móviles :

$$d\delta' = F\, t' dl \qquad (1.4.11.)$$

en donde

$d\delta'$ = matriz columna , desplazamiento elemental de la sección P respecto a la P'

t' = matriz columna de significado conocido
dl = diferencial de longitud P-P'
F = matriz diagonal denominada MATRIZ FLEXIBILIDAD

Referida la ecuación a los ejes fijos la ecuación (1.4.11) es :

$$d\delta' = A' F t' \, dl \qquad (1.4.12.)$$

La matriz $d\delta'$ podemos representarla así :

$$d\delta' = \begin{bmatrix} d\delta_1 \\ d\delta_2 \\ d\delta_3 \end{bmatrix} \qquad (1.4.13)$$

en donde los coeficientes $d\delta_i$ representan los desplazamientos elementales inducidos en P por los esfuerzos t_i respectivos .-

Como la sección P tendrá un giro respecto a P' por la acción $\overline{m}$, consideraciones iguales a las anteriores se deben hacer -

Si representamos el giro por un vector o matriz columna $d\theta'$(giro elemental) , la ecuación que lo liga con los momentos $\overline{m}$ es la siguiente , referida a los ejes móviles :

$$d\theta' = G\, m' dl \qquad (1.4.14.)$$

ecuación matricial en la cual

$d\theta'$ = denota una matriz columna o vector rotación de la sección P respecto a P'
dl y $\overline{m}$ =son de significado conocido , y G

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{bmatrix} \qquad (1.4.15)$$

es la matriz que denominaremos " Matriz rotacional "

Los coeficientes g_i de la matriz rotacional tienen el siguiente significado :

$g_1 = \frac{1}{EI_1} = \frac{1}{EAk_1^2}$ es la rigidez a la flexión con - respecto al eje α_1

$g_2 = {}^1/C$ es la rigidez torsional de la sección transversal Aquí C es un coeficiente más complejo que depende de las características de la sección , y

$g_3 = \frac{1}{EI_3} = \frac{1}{EAk_3^2}$ es la rigidez a la flexión con - respecto al eje α_3

Aquí :

E , A significados conocidos
I_1 , I_3 denotan momentos de inercia respecto a los ejes indicados por el subíndice
k_1 , k_3 radios de giro de las secciones respectivas . -

La matriz se puede representar en la siguiente forma :

$$d\theta' = \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \end{bmatrix} \qquad (1.4.16)$$

en la cual los coeficientes $d\theta_i$ representan los giros elementales inducidos por los respectivos momentos m_i en la sección considerada . -

Respecto a los ejes coordinados fijos la ecuación (1 . 4 .14) será :

$$d\theta' = A' G\, m' dl \qquad (1.4.17)$$

(1.5) Movimiento elástico relativo : ecuaciones

Para obtener el movimiento elástico relativo de la sección l_o respecto a la sección l necesitamos hacer el siguiente análisis :

Asumimos como hipótesis que no existe deformación en toda la pieza excepto en la longitud diferencial dl de P P'. -

Analizaremos así la acción (aislada) que el elemento de barra , entre l y l + dl , produce en determinada sección , decir en el punto P_o de la directriz , que corresponde a $l = L_o$, suponiendo inmóvil la sección P' correspondiente a l + dl . -

La pieza total estará ahora formada por dos trozos rígidos separados por el elemento infinitesimal dl deformable . - Mantenemos fija la parte de abscisa l superior a P' e investigamos el movimiento del segundo trozo rígido . -

Entonces la sección en Po girará un ángulo θ idéntico a (1. 4. 15) , y el punto Po de coordenadas definidas por el vector $\bar{x}o$ respecto a los ejes fijos tendrá un desplazamiento equivalente a :

$$\begin{aligned} d\Delta_o' &= d\delta' + d\theta' \times \overline{PPo} \\ &= d\delta' + d\theta \times (\bar{x}o - \bar{x}) \end{aligned} \qquad (1.5.\ 1 .)$$

El producto vectorial incluído puede ser escrito en otra forma y

$$d\Delta_o' = d\delta' + (Xo - X) d\theta' \qquad (1 .5.2)$$

en donde

X tiene el significado de (1. 3. 9)
Xo es la matriz X particularizada para el vector $\bar{x}o$
Xo = X (lo)

Podemos resumir las ecuaciones matriciales anteriores (1. 5. 2) (1. 4. 11) y (1. 4. 14) :

$$\begin{aligned} (1.4.11) &= d\delta' = A'F\, t'dl \\ (1 .4.14) &= d\theta' = A'G\, m'dl \\ (1.5.2) &= d\Delta_o' = d\delta' + (Xo - X) d\theta' \end{aligned} \qquad (1.5.4)$$

y las ecuaciones elásticas definitivas serán :

$$\begin{aligned} d\theta' &= A'G\ m'dl \\ d\Delta_o' &= A'F\ t'dl + (Xo - X) d\theta' \end{aligned} \qquad (1.5\ .6)$$

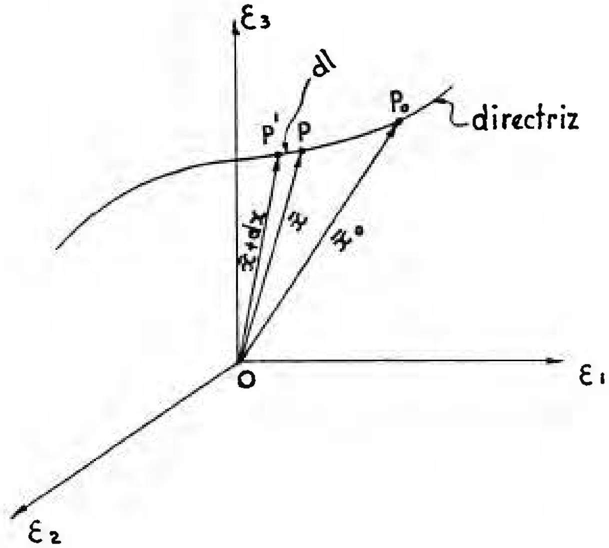


FIG. 1.5.1

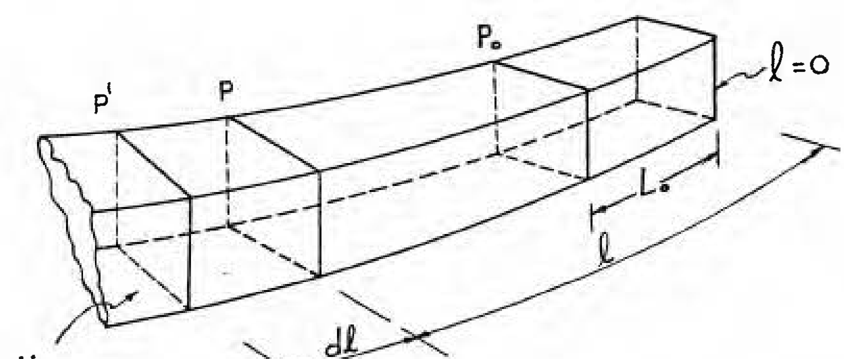


FIG. 1.5.2

(1-3-12) , y haciendo las respectivas sustituciones , tendremos :

$$d\theta' = A'\left[G A (M' + Q') + G A X (R' + S')\right] dl$$

es decir

$$d\theta' = A' G A (M + Q)' dl + A' G A X (R + S)' dl$$

$$d\Delta'_o = A' F A (R + S)' dl + (Xo - X)\left[A' G A (M + Q)' dl + A' G A X (R + S)' dl\right] \qquad (1.5.7.)$$

La integración de las ecuaciones (1.5.7.) nos darán el movimiento elástico relativo de la sección de l=Lo y l =L. - (P_o a P)

Las matrices resultantes de la integración y que dependen de las características físico-geométricas de la pieza así como de las cargas activas que actúen sobre ella pueden ser denotadas en la siguiente forma :

$$\beta_1 = \int_{L_o}^{L_1} A' G A \, dl$$

$$\alpha_1 = \int_{L_o}^{L_1} A' G A X \, dl \qquad (1. 5. 8.)$$

$$\gamma_1 = \int_{L_o}^{L_1} A' G A M \, dl + \int_{L_o}^{L_1} A' G A X R \, dl$$

$$\beta_2 = \int_{L_o}^{L_1} (Xo - X) A' G A \, dl \qquad (1. 5. 9)$$

$$\alpha_2 = \int_{L_o}^{L_1} A' F A \, dl + \int_{L_o}^{L_1} (Xo - X) A' G A X \, dl$$

$$\gamma_2 = \int_{L_o}^{L_1} A' F A R \, dl + \int_{L_o}^{L_1} (Xo - X) A' G A X R \, dl + \int_{L_o}^{L_1} (Xo - X) A' G A M \, dl$$

(1 . 6) Ecuaciones Finales de " deformación - esfuerzo "

Entonces las ecuaciones matriciales generales de " deformación - esfuerzo " entre dos puntos cualquiera sobre la directriz de la pieza elástica general son las siguientes ; despues de llevar a cabo la integración :

$$\begin{aligned} \theta' &= \alpha_1 S' + \beta_1 Q' + \gamma_1 \\ \Delta'_o &= \alpha_2 S' + \beta_2 Q' + \gamma_2 \end{aligned} \qquad (1.\ 6.\ 1.)$$

En el caso hiperestático general , son desconocidos los coeficientes de las matrices S' y Q' respecto a OE_i , los cuales son los esfuerzos internos en la sección que arbitrariamente hemos tomado como origen de las abscisas curvilíneas . -

El movimiento relativo de ciertas secciones , será el que impongan las condiciones de sustentación de la pieza . - Al suponer conocidas las condiciones de los apoyos , podremos determinar las constantes respectivas . -

Las ecuaciones (1. 6. 1.) pueden ser escritas en la siguiente formá :

$$\begin{bmatrix} \theta' \\ \Delta'_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S' \\ Q' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \qquad (1.\ 6\ .\ 2.\ )$$

$$\varepsilon = D \lambda_o + \gamma \qquad (1\ .\ 6\ .\ 3\ .\ )$$

en donde , observando (1.6.2.)

D = denota la matriz cuyos elementos son las matrices de integración $\alpha_1, \beta_1\, \alpha_2, \beta_2$. - Es una matriz de orden (6 x 6) , cuadrada . - Podríamos denominarla la " matriz de influencia "

λ_o = representa la " matriz esfuerzo en l = o " cuyos elementos son los vectores o matrices columna S' y Q', es una matriz (1 x 6) de orden, y rectangular . -

γ = la podemos denominar la " matriz activa " pues sus elementos son los vectores o matrices columna γ_1 , γ_2 , es de orden (1 x 6) - (observar 1. 5. 8 y 1. 5. 9) . -

ε = es la "matriz deformación" , constituida por los vectores θ' y Δ'_o , es de orden (1 x 6) .

Las matrices de (1. 6. 3.) están constituidas por elementos que son submatrices o matrices minores de elementos . - Se puede decir que la ecuación (1. 6. 2.) es la (1. 6. 3) pero con las matrices particionadas en blocks . -

La ecuación (1.6.3.) puede ser resuelta para λ_o así :

$$\lambda_o = D^{-1} (\varepsilon - \gamma) \qquad (1.6.4.)$$

en la cual D^{-1} es el inverso de D. -

Es decir , dados Θ' y Δ_o' , podemos encontrar S' y Q' , los esfuerzos y momentos internos de la sección en l = o . -

Obtención de D^{-1}

D es una matriz cuadrada de 6 x 6 con 2p=6 hileras , particionada en 4 matrices cuadradas de 3 x 3 , p = 3 hileras . -

El inverso de D lo denominaremos E , donde ED = U matriz unitaria de orden 2p = 6 . - Sea E particionada en la siguiente forma :

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{en la cual}$$

A , B , C , D , son matrices cuadradas de p = 3 hileras .

Como $E = D^{-1}$ tenemos :

$$RM = U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_p & 0 \\ 0 & U_p \end{bmatrix}$$

en la cual U_p es una matriz unitaria de orden p = 3.

Entonces :

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 = U_p \; ; \; A\beta_1 + B\beta_2 = O$$
$$C\alpha_1 + D\alpha_2 = O \; ; \; C\beta_1 + D\beta_2 = U_p \qquad (1.6.5.)$$

En donde O es una matriz cuadrada cero de orden p = 3 , - Estas ecuaciones pueden ser resueltas con álgebra ordinaria , excepto que debe tenerse cuidado al llevar a cabo las operaciones en orden correcto . - La solución es :

$$\begin{aligned} A &= -\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} \\ B &= \alpha_2^{-1} \\ C &= \beta_1^{-1} \\ D &= O \end{aligned} \qquad (1.6.6.)$$

luego

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} & \alpha_2^{-1} \\ \beta_1^{-1} & O \end{bmatrix} \qquad (1.6.7.)$$

Como podemos observar de (1.6.7.) hay que calcular los recíprocos de únicamente dos matrices α_2 y β_1 . -

La ecuación (1.6.4.) puede ser reescrita en forma particionada en la manera siguiente :

$$\begin{bmatrix} S' \\ Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} & \alpha_2^{-1} \\ \beta_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \Theta' \\ \Delta_0' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \right] \qquad (1.6.8)$$

Dados los valores de S' y Q' en la sección $l = o$ podemos - calcular los " esfuerzos " en cualquier otra sección de abscisa l . -

Las ecuaciones definitivas son obtenidas , si sustituimos los valores de S' y Q' de (1.6.8) en las ecuaciones (1.3.12) , a saber :

$$\begin{aligned} t' &= A\,(S' + R') \\ m' &= A\,(Q' + M') + A\,X\,(R' + S') \end{aligned} \qquad (1.3.12)$$

referidas al triedo móvil . -

El problema planteado en éste capítulo queda con ello resuelto . -

Capítulo Segundo

El Problema Unitario General con piezas cualesquiera

(2.1) PROBLEMA UNITARIO

Podemos establecerlo como sigue :

" Sea MF una pieza elástica alabeada , teniendo orientación arbitraria , de material y sección transversal uniforme , la que conecta dos puntos M y F - de una determinada estructura . -

Mantengamos F fijo e impongamos desplazamientos Δ y rotaciones θ en el extremo M. -

Qué fuerzas y momentos , en consecuencia , son - impuestas por el miembro sobre los nudos F y M ?

La barra la consideramos referida a un sistema fijo de referencia y definidas sus coordenadas por un vector $\bar{x} = \bar{x}\,(\,l\,)$. - El origen de la abscisa curvilínea l será el punto medio de la longitud total L de la directriz . - Los extremos de la pieza corresponderán a los valores siguientes de l :

$$\begin{aligned} l_o &= -L/2 \quad \text{extremo M} \\ l &= +L/2 \quad \text{extremo F} \end{aligned} \qquad (2.1.1.)$$

En el extremo M , el cual se mueve , Δ y θ denotarán :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \text{vector desplazamiento de M} \\ \bar{\theta} &= \text{vector rotación de M} \end{aligned}$$

y así denotaremos por ${}_M\bar{t}$ y ${}_M\bar{m}$ las correspondientes fuerzas y momentos actuando en el extremo M movido :

$$\begin{aligned} {}_M\bar{t} &= \text{vector fuerza en M} \\ {}_M\bar{m} &= \text{vector momento en M} \end{aligned} \qquad (2.1.2.)$$

referidos al sistema coordenado fijo . -

En el extremo fijo F denominaremos a las fuerzas y momentos inducidos por ${}_F\bar{t}$ y ${}_F\bar{m}$, en donde

$${}_F\bar{t} = -{}_M\bar{t} \quad \text{denota el vector fuerza en F}$$
$${}_F\bar{m} = -\left({}_M\bar{m} + {}_M\bar{t} \times \bar{x}_F\right) \quad \text{denota el vector momento en F} \qquad (2.1.3.)$$

referido a los ejes fijos . -

Es fácil ver cuales fuerzas y momentos en consecuencia son ejercidas por el miembro sobre los nudos :

En el nudo que se ha movido :

$$\bar{t}_M , \bar{m}_M = -\left({}_M\bar{t}\,,{}_M\bar{m}\right) \qquad (2.\,1.4)$$

y en el nudo fijo :

$$\begin{aligned} \bar{t}_F &= {}_M\bar{t} \\ \bar{m}_F &= {}_M\bar{m} + {}_M\bar{t} \times \bar{x}_F \end{aligned} \qquad (2.1.5.)$$

(2.2) Solución

Dados los movimientos relativos Δ y θ entre los dos puntos M y F podemos aplicar las ecuaciones (1.6.8) y (1.6.1) del capítulo anterior , haciendo las siguientes consideraciones :

a) los valores de $\bar{M}$ y $\bar{R}$ en este caso serán nulos ,pues asumimos que no hay cargas a través de la luz ;

b) Los límites de integración serán $-\frac{L}{2}$, $+\frac{L}{2}$ de acuerdo a (2.1.1.). -

En consecuencia , γ_1 y γ_2 son nulos para éste caso y

$$\alpha_1 = \int_{-L/2}^{L/2} A' G A X \, dl$$

$$\beta_1 = \int_{-L/2}^{L/2} A' G A \, dl \qquad (2.2.1.)$$

$$\alpha_2 = \int_{-L/2}^{L/2} A' F A \, dl + \int_{-L/2}^{L/2} (Xo_M - X) A' G A X \, dl$$

$$\beta_2 = \int_{-L/2}^{L/2} (Xo_M - X) A' G A \, dl \qquad (2.2.2)$$

en donde Xo_M es X particularizada para el punto M , es decir :

$$Xo_M = X(lo) = X(-L/2) \qquad (2.2.3)$$

Entonces las ecuaciones que representan el giro y el desplazamiento de las secciones extremas ($l = \pm L/2$) según (1.6.1.) son las siguientes en nuestro caso particular :

$$\begin{aligned} \theta' &= \alpha_1 S' + \beta_1 Q' \\ \Delta' &= \alpha_2 S' + \beta_2 Q' \end{aligned} \qquad (2.2.4.)$$

cuya solución para S' y Q' es según (1.6.8.)

$$\begin{bmatrix} S' \\ Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} & \alpha_2^{-1} \\ \beta_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ \Delta' \end{bmatrix} \qquad (2.2.5)$$

Para el caso que analizamos las ecuaciones (1.3.12) se deducen como sigue :

$$\begin{aligned} t' &= A\,S' \\ m' &= A\,Q' + A\,X\,S' \end{aligned} \qquad (2.2.6)$$

ó ordenando :

$$\begin{aligned} t' &= A\,I\,S' + O\,A\,Q' \\ m' &= A\,X\,S' + I\,A\,Q' \end{aligned} \qquad (2.2.7)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas haciendo uso de blockes como sigue :

$$\begin{bmatrix} t' \\ m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AI & O \\ AX & AI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S' \\ Q' \end{bmatrix} \qquad (2.2.8.)$$

es decir :

$$\begin{bmatrix} t' \\ m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ AX & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S' \\ Q' \end{bmatrix} \qquad (2.2.9.)$$

referidas a los ejes móviles .-

Refiriendo las ecuaciones (2.2.9) al sistema fijo , obtenemos :

$$\begin{bmatrix} t' \\ m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S' \\ Q' \end{bmatrix} \qquad (2.2.10)$$

Sustituyendo en (2.2.9) o en (2.2.10) los valores de S' y Q' obtenidos mediante (2.2.5) deducimos :

$$\begin{bmatrix} t' \\ m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} & \alpha_2^{-1} \\ -X\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1}+\beta_1^{-1} & X\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ \Delta' \end{bmatrix} \qquad (2.2.11)$$

en la cual t' y m' son los esfuerzos y momentos en una sección cualquiera de abscisa curvilínea l , referidas a los ejes fijos .-

Las fuerzas y momentos actuando en el extremo M movido serán

$$\begin{bmatrix} {}_M t' \\ {}_M m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} & \alpha_2^{-1} \\ -X_{oM}\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1}+\beta_1^{-1} & X_{oM}\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ \Delta' \end{bmatrix} \qquad (2.2.12)$$

en la cual X_{oM} es X particularizada para X (lo $= -l/2$) .-

Las fuerzas y momentos inducidos en F (fijo) resultan :

$$\begin{bmatrix} {}_F t' \\ {}_F m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} & \alpha_2^{-1} \\ -X_{oF}\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1}+\beta_1^{-1} & X_{oF}\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ \Delta' \end{bmatrix} \qquad (2.\ 2.\ 13)$$

en donde $X_{oF} = X\ (l = +L/2)$

Las ecuaciones (2.2.12) y (2.2.12) nos resuelven el problema que planteamos en una forma general en (2.1)

La matriz
$$\begin{bmatrix} -\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} & \alpha_2^{-1} \\ -X\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1}+\beta_1^{-1} & X\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \qquad (2.\ 2.14)$$

la denominaremos la " matriz de influencia " .-

Podemos resumirla expresándola en la forma siguiente :

$$Y = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad (2.\ 2\ \ 15)$$

en la cual las matrices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tienen el significado que se deduce de (2.2.12) y (2.2.15) , siendo matrices de orden (3 x. 3).-

Los componentes de las matrices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son denominados comunmente " coeficientes de influencia " .-

En el capítulo siguiente haremos un análisis más detallado de estas matrices .-

Capítulo Tercero

El Problema Unitario General

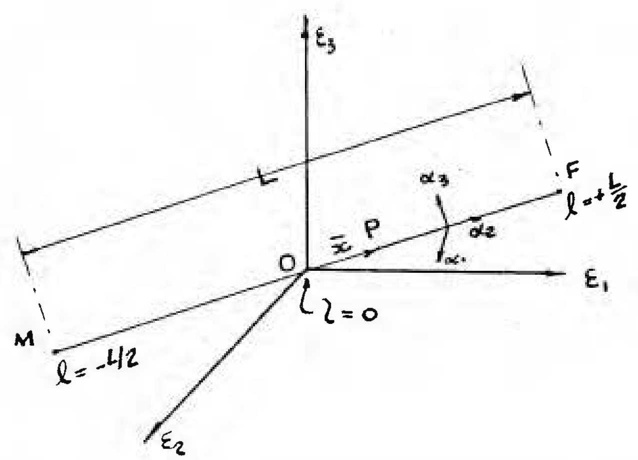
con piezas rectas

(3.1) PROBLEMA UNITARIO

El planteo del problema es el mismo al caso expuesto en el capítulo precedente con la única diferencia en que ahora , " la pieza es recta " , y al igual que antes , con rigidez uniforme a la flexión . -

Investiguemos entonces las distorsiones producidas por desplazamientos terminales en un miembro M F de orientación arbitraria , y uniforme en sección transversal y en material . -

Consideraremos la directriz de la pieza referida a un sistema de referencia $O\varepsilon_i$, el cual para facilitar , lo consideraremos con su origen O en el punto medio de la pieza , o lo que es lo mismo en l = o como abscisa curvilínea . - Ver fig (3.1.1.)



Fig(3. 1. 1)

La ecuación de la directriz será $\bar{x} = l \cdot \bar{k}$ (3.1.1.) en donde $\bar{k}$ es vector unitario sobre la directriz :

$$\bar{k} = \cos\alpha\, \varepsilon_1 + \cos\beta\, \varepsilon_2 + \cos\gamma\, \varepsilon_3 \, . \qquad (3.1.\ 2)$$

Aquí

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = l_2\\ \cos\beta = m_2\\ \cos\gamma = n_2\end{array}\right\}$$ son los cosenos directores de la línea respecto a los ejes fijos. - (3. 1. 3)

Las ecuaciones paramétricas de la línea serán :

$$x_1 = l\, l_2 \;;\; x_2 = l m_2 ,\; x_3 = l\, n_3 \qquad (3.\ 1\ .\ 4)$$

La matriz A de transformación será constante e igual a:

$$A = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$ Con las propiedades expuestas en el capítulo I. (3. 1 . 5)

En consecuencia :

$$X = \begin{bmatrix} o & ln_2 & -lm_2 \\ -ln_2 & o & ll_2 \\ lm_2 & -ll_2 & o \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} o & n_2 & -m_2 \\ -n_2 & o & l_2 \\ m_2 & -l_2 & o \end{bmatrix} \qquad (3.1.6)$$

Despreciaremos , en el estudio presente , la deformación debida a los esfuerzos cortantes , es decir asumiremos que los coeficientes por cizallamiento f_1 y f_3 son cero ; luego de ecuación (1.4.9)

$$F = \begin{bmatrix} o & o & o \\ o & f_2 & o \\ o & o & o \end{bmatrix} = \text{constante} \qquad (3.1.7.)$$

expresión en la cual $f_2 = \frac{1}{EA}$ coeficiente elástico por esfuerzo normal . -

También

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & o & o \\ o & g_2 & o \\ o & o & g_3 \end{bmatrix} = \text{constante} \qquad (3.1.8)$$

de significación igual a (1.4.16) F y G son constantes debido a la constancia de la sección transversal y el material de la pieza , condiciones asumidas anteriormente . -

Con los datos obtenidos con las expresiones (3.1.5.) , (3.1.6.) , (3.1.7.) y (3.1.8) estamos en capacidad de plantear las ecuaciones (2.2.12) que resuelven el problema . - Es necesario entonces calcular el valor de la matriz de influencia "Y" para este caso particular que estudiamos. -

(3. 2) Cálculo de $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$

Si denominamos con Z a la siguiente matriz antisimétrica

$$Z = \begin{bmatrix} o & n_2 & -m_2 \\ -n_2 & o & l_2 \\ m_2 & -l_2 & o \end{bmatrix} \qquad (3.2.1)$$

entonces obtenemos en (3.1.6) lo siguiente :

$$X = l\,Z \qquad (3.2.2.)$$

y X_{OM} será :

$$X_{OM} = -\frac{L}{2} Z = \frac{L}{2} Z' \qquad (3.2.3)$$

expresión en la cual Z' es el transpuesto de Z. -

También

$$(X_{OM} - X) = \left(\frac{L}{2} + l\right) Z' \qquad (3.2.4)$$

Si denotamos a $A'GA$ por K , y llevamos a cabo las operaciones matriciales indicadas ,

$$K = \begin{bmatrix} \Sigma gi\, li^2 & \Sigma gi\, mi\, li & \Sigma gi\, ni\, li \\ & \Sigma gi\, mi^2 & \Sigma gi\, mi\, ni \\ & & \Sigma gi\, ni^2 \end{bmatrix} \qquad (3.2.5)$$

matriz simétrica y constante -

El término $A'GAX$ puede ser arreglado en la forma siguiente

$$A'GAX = KX = l\,KZ = l\,W \qquad (3.2.6.)$$

La matriz (KZ) = W es una matriz constante e igual

$$W = \begin{bmatrix} l_1 l_3(g_1 - g_3) & g_1 l_1 m_3 - g_3 l_3 m_1 & g_1 l_1 n_3 - g_3 l_3 n_1 \\ g_1 m_1 l_3 - g_3 m_3 l_1 & m_1 m_3(g_1 - g_3) & g_1 m_1 n_3 - g_3 m_3 n_1 \\ g_1 n_1 l_3 - g_3 n_3 l_1 & g_1 n_1 m_3 - g_3 n_3 m_1 & n_1 n_3(g_1 - g_3) \end{bmatrix} \qquad (3.2.7)$$

Obtengamos ahora el término $(X_{OM} - X)\, A'GA$:

$$(X_{OM} - X)\, A'GA = \left(\frac{L}{2} + l\right) Z'.K = \left(\frac{L}{2} + l\right) V \qquad (3,2.8)$$

en donde V es una matriz constante :

$$V = \begin{bmatrix} l_1 l_3 (g_1 - g_3) & g_1 m_1 l_3 - g_3 m_3 l_1 & g_1 n_1 l_3 - g_3 n_3 l_1 \\ g_1 l_1 m_3 - g_3 l_3 m_1 & m_1 m_3 (g_1 - g_3) & g_1 n_1 m_3 - g_3 n_3 m_1 \\ g_1 l_1 n_3 - g_3 l_3 n_1 & g_1 m_1 n_3 - g_3 m_3 n_1 & n_1 n_3 (g_1 - g_3) \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

El producto matricial $(X_{OM} - X) A' G A X$ puede ser expresado así :

$$(X_{OM} - X) A' GAX = (\frac{L}{2} + 1) Z' K 1 Z = (\frac{L}{2} + 1) 1 (Z' K Z) = (\frac{L}{2} + 1) 1 U \quad (3.2.10)$$

Aquí U es una matriz simétrica y constante , a saber :

$$U = \begin{bmatrix} g_3 l_1^2 + g_1 l_3^2 & g_3 m_1 l_1 + g_1 m_3 l_3 & g_3 n_1 l_1 + g_1 n_3 l_3 \\ & g_3 m_1^2 + g_1 m_3^2 & g_3 n_1 m_1 + g_1 n_3 m_3 \\ & & g_3 n_1^2 + g_1 n_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

El término $A' F A$ será :

$$A' F A = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

$$A' F A = \begin{bmatrix} h_2 l_2^2 & h_2 l_2 m_2 & h_2 l_2 n_2 \\ & h_2 m_2^2 & h_2 n_2 m_2 \\ & & h_2 n_2^2 \end{bmatrix} = h_2 J = \text{constante} \quad (3.2.13)$$

expresión en la cual J es una matriz simétrica y constante :

$$J = \begin{bmatrix} l_2^2 & l_2 m_2 & l_2 n_2 \\ & m_2^2 & n_2 m_2 \\ & & n_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.14)$$

Con los datos que preceden podemos calcular $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_2$, según (2.2.1) y (2.2.2.) :

$$\alpha_1 = \int_{-L/2}^{L/2} W l \, dl = \frac{l^2}{2} W \Big]_{-L/2}^{L/2} = 0 \quad (3.2.16)$$

$$\beta_1 = \int_{-L/2}^{L/2} K \, dl = LK$$

$$\alpha_2 = \int_{-L/2}^{L/2} h_2 J\, dl + \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{L}{2} + l \right) l\, U\, dl$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 = h_2 J\, L + \dfrac{L^3}{12} \cdot U \\ \beta_2 = \displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{L}{2} + l \right) V\, dl = \frac{L^2}{2} V \end{array}\right\} \quad (3.\ 2.\ 16)$$

Las expresiones para K , U y V ya han sido obtenidas y en consecuencia β_1, β_2, y α_1 están determinadas .- Nos falta únicamente efectuar la suma matricial de α_2 en (3. 2. 16) .- El resultado de esa operación nos da la siguiente expresión para :

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} Lh_2 l_2^2 + \frac{L^3}{12}(g_1 l_3^2 + g_3 l_1^2) & Lh_2 m_2 l_2 + \frac{L^3}{12}(g_1 m_3 l_3 + g_3 m_1 l_1) & Lh_2 n_2 l_2 + \frac{L^3}{12}(g_1 n_3 l_3 + g_3 n_1 l_1) \\ & Lh_2 m_2^2 + \frac{L^3}{12}(g_1 m_3^2 + g_3 m_1^2) & Lh_2 n_2 m_2 + \frac{L^3}{12}(g_1 n_3 m_3 + g_3 n_1 m_1) \\ & & Lh_2 n_2^2 + \frac{L^3}{12}(g_1 n_3^2 + g_3 n_1^2) \end{bmatrix} \quad (3.\ 2.\ 17)$$

Luego α_2 es una matriz simétrica y constante .-

(3. 3.) Cálculo de α_2^{-1} y β_1^{-1}

Con los cuatro valores calculados α_1, β_1, α_2, β_2 podemos plantear las ecuaciones (2.2.4.) , o lo que es igual calcular la matriz de influencia Y-

Para calcular las matrices componentes α, β, γ, δ de Y para poder llevar a cabo las operaciones indicadas es necesario primero calcular los inversos α_2^{-1} y β_1^{-1}

La obtención de un inverso para la matriz α_2 es una operación muy laboriosa .- Daremos aquí únicamente su resultado final

$$\alpha_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Lh_2} l_2^2 + \frac{12}{L^3}(B_1 l_3^2 + B_3 l_1^2) & \frac{1}{Lh_2} m_2 l_2 + \frac{12}{L^3}(B_1 m_3 l_3 + B_3 m_1 l_1) & \frac{1}{Lh_2} n_2 l_2 + \frac{12}{L^3}(B_1 n_3 l_3 + B_3 n_1 l_1) \\ & \frac{1}{Lh_2} m_2^2 + \frac{12}{L^3}(B_1 m_3^2 + B_3 m_1^2) & \frac{1}{Lh_2} n_2 m_2 + \frac{12}{L^3}(B_1 n_3 m_3 + B_3 n_1 m_1) \\ & & \frac{1}{Lh_2} n_2^2 + \frac{12}{L^3}(B_1 n_3^2 + B_3 n_1^2) \end{bmatrix}$$

(3. 3. 1)

expresión en la cual

$$B_1 = \frac{1}{g_1} \qquad y \qquad B_3 = \frac{1}{g_3} \qquad (3.\ 3.\ 2.)$$

En el caso del inverso β_1^{-1} el procedimiento es sencillo, en efecto, si $\beta_1 = LK$ luego $\beta_1^{-1} = (LK)^{-1} = \frac{1}{L}(A'GA)^{-1} = \frac{1}{L}A'G^{-1}A$ (3. 3. 3.)

$$\beta_1^{-1} = \frac{1}{L} A' G^{-1} A \qquad (3.\ 3.\ 4.)$$

El inverso G^{-1} de G es el siguiente :

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1/g_1 & o & o \\ o & 1/g_2 & o \\ o & o & 1/g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & o & o \\ o & C & o \\ o & o & B_3 \end{bmatrix} \qquad (3.\ 3.\ 5.)$$

en la cual $C = \frac{1}{g_2}$ y B_1 y B_3 son los mismos de (3. 3. 2). -

Si efectuamos las operaciones en (3. 3. 4.) obtenemos la siguiente matriz simétrica para β_1^{-1} :

$$\beta_1^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 l_1^2 + C l_2^2 + B_3 l_3^2 & B_1 l_1 m_1 + C l_2 m_2 + B_3 l_3 m_3 & B_1 l_1 n_1 + C l_2 n_2 + B_3 l_3 n_3 \\ & B_1 m_1^2 + C m_2^2 + B_3 m_3^2 & B_1 m_1 n_1 + C m_2 n_2 + B_3 m_3 n_3 \\ & & B_1 n_1^2 + C n_2^2 + B_3 n_3^2 \end{bmatrix}$$

(3. 3. 6.)

———— o ————

(3. 4.) Cálculo de la Matriz de Influencia

Repitamos la expresión para la " matriz de influencia "

$$Y = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} & \alpha_2^{-1} \\ -X_{om}\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} + \beta_1^{-1} & X_{om}\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad (3.\ 4.\ 1.)$$

a) Cálculo de α :

$$\alpha = -\alpha_2^{-1}(\beta_2\beta_1^{-1})$$

$$(\beta_2\beta_1^{-1}) = \frac{L^2}{2} V \frac{1}{L} A' G^{-1} A = \frac{L}{2} Z' A' G A A' G^{-1} A = \frac{L}{2} Z'$$

Luego :

$$\alpha = -\alpha_2^{-1}\left(\frac{L}{2} Z' \right) \qquad (3.4.2.)$$

Realizando las operaciones necesarias , obtenemos :

$$\alpha = \frac{6}{L^2} = \begin{bmatrix} l_1 l_3 (B_3 - B_1) & B_3 m_3 l_1 - B_1 m_1 l_3 & B_3 n_3 l_1 - B_1 n_1 l_3 \\ B_3 l_3 m_1 - B_1 l_1 m_3 & m_1 m_3 (B_3 - B_1) & B_3 n_3 m_1 - B_1 n_1 m_3 \\ B_3 l_3 n_1 - B_1 l_1 n_3 & B_3 m_3 n_1 - B_1 m_1 n_3 & n_1 n_3 (B_3 - B_1) \end{bmatrix} \qquad (3.4.3.)$$

b) Cálculo de γ :

$$\gamma = - X_{OM}\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1} + \beta_1^{-1} = X_{OM}\left(-\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1}\right) + \beta_1^{-1}$$

$$\gamma = \frac{L}{2} Z'\left(-\alpha_2^{-1}\beta_2\beta_1^{-1}\right) + \beta_1^{-1} = \frac{L}{2} Z'\alpha + \beta_1^{-1} \qquad (3.4.4.)$$

Entonces , calculando el primer sumando , llegamos a la siguiente matriz simétrica :

$$\frac{L}{2} Z'\alpha = \begin{bmatrix} B_1 l_1^2 + B_3 l_3^2 & B_1 m_1 l_1 + B_3 m_3 l_3 & B_1 n_1 l_1 + B_3 n_3 l_3 \\ & B_1 m_1^2 + B_3 m_3^2 & B_1 n_1 m_1 + B_3 n_3 m_3 \\ & & B_1 n_1^2 + B_3 n_3^2 \end{bmatrix} \qquad (3.4.5.)$$

Así , γ , haciendo la suma matricial indicada es :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \frac{C}{L} l_2^2 + \frac{4}{L}(B_1 l_1^2 + B_3 l_3^2) & \frac{C}{L} l_2 m_2 + \frac{4}{L}(B_1 l_1 m_1 + B_3 l_3 m_3) & \frac{C}{L} l_2 n_2 + \frac{4}{L}(B_1 l_1 n_1 + B_3 l_3 n_3) \\ & \frac{C}{L} m_2^2 + \frac{4}{L}(B_1 m_1^2 + B_3 m_3^2) & \frac{C}{L} m_2 n_2 + \frac{4}{L}(B_1 m_1 n_1 + B_3 m_3 n_3) \\ & & \frac{C}{L} n_2^2 + \frac{4}{L}(B_1 n_1^2 + B_3 n_3^2) \end{bmatrix}$$

(3. 4. 6)

c) Cálculo de δ :

$$\delta = X_{OM}\alpha_2^{-1} = \frac{L}{2} \cdot Z' \alpha_2^{-1} \qquad (3.4.7)$$

La expresión anterior nos da :

$$\delta = \frac{6}{L^2} = \begin{bmatrix} l_1 l_3 (B_3 - B_1) & B_3 l_3 m_1 - B_1 l_1 m_3 & B_3 l_3 n_1 - B_1 l_1 n_3 \\ B_3 m_3 l_1 - B_1 m_1 l_3 & m_1 m_3 (B_3 - B_1) & B_3 m_3 n_1 - B_1 m_1 n_3 \\ B_3 n_3 l_1 - B_1 n_1 l_3 & B_3 n_3 m_1 - B_1 n_1 m_3 & n_1 n_3 (B_3 - B_1) \end{bmatrix} \qquad (3.4.8)$$

d (Cálculo para $\beta = \alpha_2^{-1}$ lo encontramos en (3. 3.1)

Con la"matriz de influencia " para el punto M calculada, tenemos resuelto el problema unitario en piezas rectas , pues la ecuación (2. 2. 12) queda planteada .-

En los números que siguen haremos un estudio más completo de las matrices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y el cual nos explique el significado físico de sus componentes .-

--------- 0 ---------

(3. 5.) Los coeficientes de influencia

Las " componentes " de las matrices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son denominadas comunmente " coeficientes de influencia "

La notación de " coeficientes de influencia " fue introducida en el análisis estructural , por SOUTHWELL , y nos permitirá expresar en una forma concisa las relaciones (2.2.12) y estudiar el significado estructural de las matrices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y por consecuencia el de la matriz de influencia Υ. .-

Los coeficientes los podemos denotar de la siguiente manera :

$\widehat{\rho_i \rho_j}$ = denotan las fuerzas en la dirección ρ_i que llegan a un nudo como resultado de desplazamientos en las direcciones ρ_j

$\widehat{r_i r_j}$ = denotan los momentos en la dirección r_i que se inducen como resultado de rotaciones respecto a ejes r_j (pares de dirección igual al movimiento de las agujas de un reloj).-

$\widehat{\rho_i r_j}$ = denotan las fuerzas en la dirección ρ_i que llegan por el efecto de rotaciones respecto a ejes r_j

$\widehat{r_i \rho_j}$ = denotan los momentos en la dirección r_i que son inducidos como consecuencia de desplazamientos en la dirección ρ_j (3. 5.1.)

Las siguientes identidades son consecuencia de la Relación Recíproca de Maxwell :

$$\left.\begin{array}{lll} \widehat{\rho_i \rho_j} = \widehat{\rho_j \rho_i} & , & \widehat{r_i r_j} = \widehat{r_j r_i} \\ \widehat{\rho_i r_j} = \widehat{r_i \rho_j} & , & \widehat{r_i \rho_j} = \widehat{\rho_i r_j} \end{array}\right\} \qquad (3.\ 5\ \ 2.)$$

Los coeficientes de influencia aquí considerados son evidentemente propiedades del miembro cuyos nudos son movidos .- Dadas las dimenciones y el material de una estructura , podemos tabular los datos para cada miembro .-

Las matrices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pueden ser escritas de la notación anterior en la siguiente simple forma

$$\alpha = \begin{bmatrix} \widehat{\rho_1 r_1} & \widehat{\rho_1 r_2} & \widehat{\rho_1 r_3} \\ \widehat{\rho_2 r_1} & \widehat{\rho_2 r_2} & \widehat{\rho_2 r_3} \\ \widehat{\rho_3 r_1} & \widehat{\rho_3 r_2} & \widehat{\rho_3 r_3} \end{bmatrix} \qquad (3.5.3)$$

anti-simétrica

$$\beta = \begin{bmatrix} \widehat{\rho_1 \rho_1} & \widehat{\rho_2 \rho_1} & \widehat{\rho_3 \rho_1} \\ \widehat{\rho_1 \rho_2} & \widehat{\rho_2 \rho_2} & \widehat{\rho_3 \rho_2} \\ \widehat{\rho_1 \rho_3} & \widehat{\rho_2 \rho_3} & \widehat{\rho_3 \rho_3} \end{bmatrix} \qquad (3.5.4.)$$

simétrica

$$\gamma = \begin{bmatrix} \widehat{r_1 r_1} & \widehat{r_2 r_1} & \widehat{r_3 r_1} \\ \widehat{r_1 r_2} & \widehat{r_2 r_2} & \widehat{r_3 r_2} \\ \widehat{r_1 r_3} & \widehat{r_2 r_3} & \widehat{r_3 r_3} \end{bmatrix} \qquad (3.5.5.)$$

simétrica

$$\delta = \begin{bmatrix} \widehat{r_1 \rho_1} & \widehat{r_1 \rho_2} & \widehat{r_1 \rho_3} \\ \widehat{r_2 \rho_1} & \widehat{r_2 \rho_2} & \widehat{r_2 \rho_3} \\ \widehat{r_3 \rho_1} & \widehat{r_3 \rho_2} & \widehat{r_3 \rho_3} \end{bmatrix} \qquad (3.5.6.)$$

anti-simétrica

De acuerdo a las expresiones anteriores podemos denotar los coeficientes de influencia como sigue :

$$\begin{aligned} \widehat{\rho_1 \rho_1} &= \frac{EA}{L} l_2^2 + \frac{12}{L^3} (B_3 l_1^2 + B_1 l_3^2) , \\ \widehat{\rho_2 \rho_2} &= \frac{EA}{L} m_2^2 + \frac{12}{L^3} (B_3 m_1^2 + B_1 m_3^2) , \\ \widehat{\rho_3 \rho_3} &= \frac{EA}{L} n_2^2 + \frac{12}{L^3} (B_3 n_1^2 + B_1 n_3^2) , \end{aligned} \qquad (3.5.7)$$

continúa en la siguiente pag.

$$\widehat{\rho_3\rho_2} = \widehat{\rho_2\rho_3} = \frac{EA}{L} m_2 n_2 + \frac{12}{L^3} (B_3 m_1 n_1 + B_1 m_3 n_3)$$
$$\widehat{\rho_1\rho_3} = \widehat{\rho_3\rho_1} = \frac{EA}{L} n_2 l_2 + \frac{12}{L^3} (B_3 n_1 l_1 + B_1 n_3 l_3)$$
$$\widehat{\rho_2\rho_1} = \widehat{\rho_1\rho_2} = \frac{EA}{L} l_2 m_2 + \frac{12}{L^3} (B_3 l_1 m_1 + B_1 l_3 m_3)$$

$$\widehat{r_1 r_1} = \frac{C}{L} l_2^2 + \frac{4}{L} (B_1 l_1^2 + B_3 l_3^2)$$
$$\widehat{r_2 r_2} = \frac{C}{L} m_2^2 + \frac{4}{L} (B_1 m_1^2 + B_3 m_3^2)$$
$$\widehat{r_3 r_3} = \frac{C}{L} n_2^2 + \frac{4}{L} (B_1 n_1^2 + B_3 n_3^2) \qquad (3.5.7)$$

$$\widehat{r_3 r_2} = \widehat{r_2 r_3} = \frac{C}{L} m_2 n_2 + \frac{4}{L} (B_1 m_1 n_1 + B_3 m_3 n_3)$$
$$\widehat{r_1 r_3} = \widehat{r_3 r_1} = \frac{C}{L} n_2 l_2 + \frac{4}{L} (B_1 n_1 l_1 + B_3 n_3 l_3)$$
$$\widehat{r_2 r_1} = \widehat{r_1 r_2} = \frac{C}{L} l_2 m_2 + \frac{4}{L} (B_1 l_1 m_1 + B_3 l_3 m_3)$$
$$\widehat{r_1 \rho_1} = \widehat{\rho_1 r_1} = \frac{6}{L^2} (B_3 - B_1) l_1 l_3$$
$$\widehat{r_2 \rho_1} = \widehat{\rho_1 r_2} = \frac{6}{L^2} (B_3 l_1 m_3 - B_1 l_3 m_1)$$
$$\widehat{r_1 \rho_2} = \widehat{\rho_2 r_1} = \frac{6}{L^2} (B_3 m_1 l_3 - B_1 m_3 l_1)$$
$$\widehat{r_2 \rho_2} = \widehat{\rho_2 r_2} = \frac{6}{L^2} (B_3 - B_1) m_1 m_3$$
$$\widehat{r_3 \rho_2} = \widehat{\rho_2 r_3} = \frac{6}{L^2} (B_3 m_1 n_3 - B_1 m_3 n_1)$$
$$\widehat{r_1 \rho_3} = \widehat{\rho_3 r_1} = \frac{6}{L^2} (B_3 n_1 l_3 - B_1 n_3 l_1)$$
$$\widehat{r_2 \rho_3} = \widehat{\rho_3 r_2} = \frac{6}{L^2} (B_3 n_1 m_3 - B_1 n_3 m_1)$$
$$\widehat{r_3 \rho_3} = \widehat{\rho_3 r_3} = \frac{6}{L^2} (B_3 - B_1) n_1 n_3$$
$$\widehat{r_3 \rho_1} = \widehat{\rho_1 r_3} = \frac{6}{L^2} (B_3 l_1 n_3 - B_1 l_3 n_1)$$

(3. 6.) Ecuaciones Deformación - Esfuerzo

La ecuación (2. 2. 12) puede ser resuelta en las dos ecuaciones matriciales que siguen :

$$t' = \alpha \Theta' + \beta \Delta'$$
$$m' = \gamma \Theta' + \delta \Delta' \qquad (3.6.1.)$$

Así mismo (3. 6. 1.) se puede representar en otra forma a saber :

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} \qquad (3.\ 6.\ 2.\ )$$

Ecuaciones en las cuales t_i , m_i , θ_i y Δ_i son las componentes de " esfuerzo " y deformación " respectivamente , en el punto M de la pieza .-

Las ecuaciones (3.6.1.) podríamos denominarlas las ecuaciones de " Slope - Deflexion " generalizadas a estructuras en el espacio tridimencional .-

Encontremos la representación analítica de (3. 6.2.).- Viene representada por 6 ecuaciones :

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \widehat{\rho_1\rho_1}\Delta_1 + \widehat{\rho_2\rho_1}\Delta_2 + \widehat{\rho_3\rho_1}\Delta_3 + \widehat{\rho_1 r_1}\theta_1 + \widehat{\rho_1 r_2}\theta_2 + \widehat{\rho_1 r_3}\theta_3 \\ t_2 &= \widehat{\rho_1\rho_2}\Delta_1 + \widehat{\rho_2\rho_3}\Delta_2 + \widehat{\rho_3\rho_2}\Delta_3 + \widehat{\rho_2 r_1}\theta_1 + \widehat{\rho_2 r_2}\theta_2 + \widehat{\rho_2 r_3}\theta_3 \\ t_3 &= \widehat{\rho_1\rho_3}\Delta_1 + \widehat{\rho_2\rho_3}\Delta_2 + \widehat{\rho_3\rho_3}\Delta_3 + \widehat{\rho_3 r_1}\theta_1 + \widehat{\rho_3 r_2}\theta_2 + \widehat{\rho_3 r_3}\theta_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3.6.3.\ )$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \widehat{r_1\rho_1}\Delta_1 + \widehat{r_1\rho_2}\Delta_2 + \widehat{r_1\rho_3}\Delta_3 + \widehat{r_1 r_1}\theta_1 + \widehat{r_2 r_1}\theta_2 + \widehat{r_3 r_1}\theta_3 \\ m_2 &= \widehat{r_2\rho_1}\Delta_1 + \widehat{r_2\rho_2}\Delta_2 + \widehat{r_2\rho_3}\Delta_3 + \widehat{r_1 r_2}\theta_1 + \widehat{r_2 r_2}\theta_2 + \widehat{r_3 r_2}\theta_3 \\ m_3 &= \widehat{r_3\rho_1}\Delta_1 + \widehat{r_3\rho_2}\Delta_2 + \widehat{r_3\rho_3}\Delta_3 + \widehat{r_1 r_3}\theta_1 + \widehat{r_2 r_3}\theta_2 + \widehat{r_3 r_3}\theta_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3.6.4.)$$

Las ecuaciones anteriores están referidas a los ejes fijos y nos resuelven el problema planteado .-

Usando (3.6.3.) y (3.6.4.) , podemos calcular los efectos de cualquier desplazamiento de nudo que sea requerido , sobre cualquier - miembro particular , y en consecuencia sobre todos los miembros que llegan a cualquier nudo en particular .-

(3. 7.) Miembros con igual rigidez a la flexión

Las expresiones (3. 5. 7.) pueden ser simplificadas cuando el miembro tiene la misma rigidez a la flexión contra doblamiento en todos los planos , y entonces $B = B_1 = B_3$ (decir)

De acuerdo a (1. 1. 9) para los cosenos directores , podemos reemplazar las expresiones (3. 5. 7.) por :

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{\rho_1\rho_1} = \widehat{\rho_2\rho_2} = \widehat{\rho_3\rho_3} = 12\frac{B}{L^3} + F\times(\ell_2^2, m_2^2, n_2^2) , & & & \\
\widehat{\rho_3\rho_2} = \widehat{\rho_2\rho_3} = F m_2 n_2 , & \widehat{\rho_1\rho_3} = \widehat{\rho_3\rho_1} = F n_2 \ell_2 , & \widehat{\rho_2\rho_1} = \widehat{\rho_1\rho_2} = F \ell_2 m_2 , & \\
\widehat{r_1 r_1} , \widehat{r_2 r_2} , \widehat{r_3 r_3} = 4\frac{B}{L} + G\times(\ell_2^2, m_2^2, n_2^2) , & & & \\
\widehat{r_3 r_2} = \widehat{r_2 r_3} = G m_2 n_2 , & \widehat{r_1 r_3} = \widehat{r_3 r_1} = G n_2 \ell_2 , & \widehat{r_2 r_1} = \widehat{r_1 r_2} = G \ell_2 m_2 , & \\
\widehat{r_1\rho_1} = \widehat{\rho_1 r_1} & = \widehat{r_2\rho_2} = \widehat{\rho_2 r_2} & = \widehat{r_3\rho_3} = \widehat{\rho_3 r_3} = 0 , & (3.7.\ 1) \\
-\widehat{r_2\rho_3} = -\widehat{\rho_3 r_2} & = \widehat{r_3\rho_2} = \widehat{\rho_2 r_3} & = 6\frac{B}{L^2}\ell_2 , & \\
-\widehat{r_3\rho_1} = -\widehat{\rho_1 r_3} & = \widehat{r_1\rho_3} = \widehat{\rho_3 r_1} & = 6\frac{B}{L^2} m_2 , & \\
-\widehat{r_1\rho_2} = -\widehat{\rho_2 r_1} & = \widehat{r_2\rho_1} = \widehat{\rho_1 r_2} & = 6\frac{B}{L^2} n_2 , &
\end{array}
$$

en donde $F = \frac{EA}{L} - 12\frac{B}{L^3}$, $G = \frac{C-4B}{L}$

Fuerzas y momentos impuestos sobre los nudos

Las cantidades t_1 , t_2 , t_3 , m_1 , m_2 , m_3 , en (3. 6. 3) y (3. 6. 4.) son las fuerzas y momentos que llegan sobre el miembro en su extremo (M) el cual se movió como se explicó en el Capítulo 2 . -

Es así evidente y de acuerdo a las expresiones (2. 1. 4.) y

(2.1.5.) , que las fuerzas y momentos que como consecuencia son ejercidos - por el miembro sobre los " nudos " son los siguientes :

" en el nudo que se movió en el aflojamiento "

$$t_1m\ ,\ t_2m\ ,\ t_3m\ ,\ (m_1)_M\ ,\ (m_2)_M\ ,\ (m_3)_M = -(t_1,\ t_2,\ t_3,\ m_1,\ m_2,\ m_3) \qquad (3.\ 7.\ 2)$$

y en el nudo fijo :

$$t_{1F}\ ,\ t_{2F}\ ,\ t_{3F} = t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3 \qquad (3.\ 7.\ 3)$$

$$\begin{aligned} (m_1)_F &= m_1 + L\,(n_2 t_2 - m_2 t_3) \\ (m_2)_F &= m_2 + L\,(l_2 t_3 - n_2 t_1) \\ (m_3)_F &= m_3 + L\,(m_2 t_1 - l_2 t_2) \end{aligned}$$

Usando estas fórmulas podemos calcular directamente los coeficientes de influencia que son necesarios para obtener las fuerzas y momentos sobre los nudos fijos y en movimiento . -

Los resultados que obtenemos serán dados para el caso de $B_1 = B_3 = B$. -

En este entendido obtenemos :

" Para los coeficientes de influencia adecuados al nudo que es fijo "

$$\widehat{\rho_1\rho_1}_F = \widehat{\rho_2\rho_2}_F = \widehat{\rho_3\rho_3}_F = 12\frac{B}{L^3} + F\,x(l_2^2, m_2^2, n_2^2)\ ,$$

$$\widehat{\rho_3\rho_2}_F = \widehat{\rho_2\rho_3}_F = F m_2 n_2\ ,\quad \widehat{\rho_1\rho_3}_F = \widehat{\rho_3\rho_1}_F = F n_2 l_2\ ,\quad \widehat{\rho_2\rho_1}_F = \widehat{\rho_1\rho_2}_F = F l_2 m_2\ ,$$

$$\widehat{r_1r_1}_F = \widehat{r_2r_2}_F = \widehat{r_3r_3}_F = -2\frac{B}{L} + H\,x(l_2^2, m_2^2, n_2^2)\ ,$$

$$\widehat{r_3r_2}_F = \widehat{r_2r_3}_F = H m_2 n_2\ ,\quad \widehat{r_1r_3}_F = \widehat{r_3r_1}_F = H n_2 l_2\ ,\quad \widehat{r_2r_1}_F = \widehat{r_1r_2}_F = H l_2 m_2\ , \qquad (3.\ 7.\ 4)$$

$$\widehat{r_1\rho_1}_F = \widehat{\rho_1r_1}_F = \widehat{r_2\rho_2}_F = \widehat{\rho_2r_2}_F = \widehat{r_3\rho_3}_F = \widehat{\rho_3r_3}_F = 0\ ,$$

$$\widehat{r_2\rho_3}_F = -\widehat{\rho_3r_2}_F = -\widehat{r_3\rho_2}_F = \widehat{\rho_2r_3}_F = 6\frac{B}{L^2}\,l_2\ ,$$

$$\widehat{r_3\rho_1}_F = -\widehat{\rho_1r_3}_F = -\widehat{r_1\rho_3}_F = \widehat{\rho_3r_1}_F = 6\frac{B}{L^2}\,m_2\ ,$$

$$\widehat{r_1\rho_2}_F = -\widehat{\rho_2r_1}_F = -\widehat{r_2\rho_1}_F = \widehat{\rho_1r_2}_F = 6\frac{B}{L^2}\,n_2\ ,$$

en donde $\quad F = \frac{EA}{L} - 12\frac{B}{L^3} \qquad H = \frac{C+2B}{L}$ $\quad$ y

" para los coeficientes de influencia apropiados al extremo que ha sido movido "

$$\widehat{\rho_1\rho_1}_M\,,\ \widehat{\rho_2\rho_2}_M\,,\ \widehat{\rho_3\rho_3}_M = -12\frac{B}{L^3} - F\times\left(\ell_2^2, m_2^2, n_2^2\right)$$

$$\widehat{\rho_3\rho_2}_M = \widehat{\rho_2\rho_3}_M = -Fm_2n_2\ ,\ \widehat{\rho_1\rho_3}_M = \widehat{\rho_3\rho_1}_M = -Fn_2\ell_2\ ,\ \widehat{\rho_2\rho_1}_M = \widehat{\rho_1\rho_2}_M = -F\ell_2m_2\ ,$$

$$\widehat{r_1r_1}_M\,,\ \widehat{r_2r_2}_M\,,\ \widehat{r_3r_3}_M = -4\frac{B}{L} - G\times\left(\ell_2^2, m_2^2, n_2^2\right)$$

$$\widehat{r_3r_2}_M = \widehat{r_2r_3}_M = -Gm_2n_2\ ,\quad \widehat{r_1r_3}_M = \widehat{r_3r_1}_M = -Gn_2\ell_2\ ,\ \widehat{r_2r_1}_M = \widehat{r_1r_2} = -G\ell_2m_1\ ,$$

$$\widehat{r_1\rho_1}_M = \widehat{\rho_1r_1}_M \qquad = \widehat{r_2\rho_2}_M = \widehat{\rho_2r_2}_M \qquad = \widehat{r_3\rho_3}_M = \widehat{\rho_3r_3}_M = 0\ , \tag{3.7.5}$$

$$\widehat{r_2\rho_3}_M = \widehat{\rho_3r_2}_M = \qquad = -\widehat{r_3\rho_2}_M = -\widehat{\rho_2r_3}_M \qquad = 6\frac{B}{L^2}\ell_2\ ,$$

$$\widehat{r_3\rho_1}_M = \widehat{\rho_1r_3}_M \qquad = -\widehat{r_1\rho_3}_M = -\widehat{\rho_3r_1}_M \qquad = 6\frac{B}{L^2}m_2\ ,$$

$$\widehat{r_1\rho_2}_M = \widehat{\rho_2r_1}_M \qquad = -\widehat{r_2\rho_1}_M = -\widehat{\rho_1r_2}_M \qquad = 6\frac{B}{L^2}n_2\ ,$$

en donde $\quad F = \frac{EA}{L} - 12\frac{B}{L^3}\ , \qquad G = \frac{C-4B}{L}$

-En el caso estudiado el miembro MF tiene ambos extremos " rígidamente unidos " .-

Indudablemente , pueden suceder casos en los cuales uno , dos o tres componentes de rotación sean resistidos en un nudo en particular ; y el proceder en otros casos es obvio .-

(3. 8.) Casos Particulares

Muchos casos particulares pueden ser obtenidos de las expresiones derivadas para los coeficientes de influencia en el capítulo que precede .-

Los casos más importantes que se deducen de las ecuaciones anteriores son los que se refieren a " Estructuras Planas " .-

El " problema unitario " es resuelto en los siguientes casos de importancia :

a) " Pieza de orientación cualquiera , esforzada por fuerzas en su propio plano "

Los coeficientes de influencia para éste caso son obtenidos , si la pieza es de sección transversal uniforme , de las expresiones (3.7.4) ó (3.7.5) cuando los términos que contienen B y C son omitidos y haciendo - $n_2 = 0$, de forma que el miembro caiga en el plano ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) . -

b) Si en el caso a) hacemos $m_2 = 0$ (y en consecuencia - $l_2 = \pm 1$) obtenemos los coeficientes de influencia cuando la pieza es horizontal. Las ecuaciones que se obtendrán serán las conocidas de " slope deflection " .

c) En el caso b) las ecuaciones obtenidas son aplicables a vigas continuas sobre soportes ya sean rígidos o elásticos . - Asumiendo soportes rígidos obtenemos el " problema unitario " del " Método Cross " , el cual emplea " rotaciones de nudo " pero no desplazamientos de nudo . -

d) Cuando B = 0 (de tal forma que todos los momentos flexionantes desaparecen) las rotaciones no tienen efecto , y obtenemos el problema unitario cuando la pieza de sección transversal uniforme pertenece a una estructura " plana " con " nudos articulados " . -

e) " Pieza de orientación cualquiera , esforzada por fuerzas transversales "

En este caso $n_2 = 0$ como en a) , la " rigidez torsional " C debe ser usada , y B como antes es la rigidez a la flexión (uniforme) del miembro . - Ahora sinembargo , B se relaciona a la flexión que envuelve deflexiones perpendiculares al plano ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) ; previamente estaba relacionada con este plano . -

BIBLIOGRAFIA

1.- Relaxation Methods por Southwell

2.- Structural Theory Sutherland Bowman

3.- Structural Theory Grinter

4.- Advanced Strength of Materials de Den Hartog

5.- Analysis of Statically Indeterminate Structures de Parcel Moorman

6.- Modern Mathematics for Eugineer de Beckenbach

7.- A Survey of Modern Algebra de Birkhoff y McLane

8.- Análisis Vectorial por Phillips

9.- Mecánica Racional por Luis González

10.- Elementary Matrices de Frazer y Duncan

11.- Elasticidad y Resistencia de Materiales M, Velasco de Pando

12.- Elasticity por Timoshenko

13.- Elasticidad Teórica y Experimental de Arangoa

14.- Les Méthodes Modernes de la Resistance des Materiause Fontviolant

15.- El Hormigón Armado por Saliger