UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Didáctica de la Matemática

Trabajo de Investigación Tutelada

SIGNIFICADO QUE LE ATRIBUYEN LOS FUTUROS PROFESORES AL CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

María Fernanda Vargas González

Julio, 2017

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso 2016/2017

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela del doctor D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y cotutela del doctor D. José Antonio Fernández Plaza, del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta María Fernanda Vargas González, dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática.

Fdo. María Fernanda Vargas González

Vº Bº del tutor

Juan F. Ruiz.

Fdo. Dr Juan Fco. Ruiz Hidalgo

Vº Bº del cotutor

Fdo. Dr José A. Fernández Plaza

RESUMEN

En este trabajo se detallan los resultados de un proceso de investigación cuyo objetivo principal era analizar el significado que expresan los profesores en formación acerca del concepto de derivada de una función en un punto. La investigación es de tipo cualitativa, de naturaleza descriptiva, en la que se estudian las respuestas dadas por 37 futuros profesores a unas tareas relacionadas con la definición, condiciones y relaciones de la derivada; además se profundiza en los sentidos y modos de uso que los participantes le atribuyen a este concepto matemático

SUMMARY

In this document you can find the results of a research process with the principal aim of analyzing the meaning of teachers in learning about the concept of derivative from a function at a point. The type of this research is qualitative, descriptive nature, in which the answers of 37 future teachers about tasks related with definition, conditions and relations of the derivative were analyzed. Further, it goes deep in senses and modes of use attributed by participants in this mathematic concept.

Este trabajo se realizó en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. *Pensamiento numérico de la Universidad de Granada*, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM193).

A mi esposo, por darme su apoyo incondicional en cada meta que me propongo, sin su amor y paciencia no lo hubiese logrado, esto es de ambos.

A mis padres que son el motor de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero expresar el más sincero agradecimiento a mi tutor, el Dr. Juan Francisco Ruiz Hidalgo, por todo su apoyo y guía en este proceso, por tanta dedicación, compromiso y esfuerzo invertido en este trabajo. De igual manera agradecer a mi cotutor el Dr. José Antonio Fernández Plaza por sus invaluables sugerencias y aportes.

Agradezco profundamente a la Universidad de Costa Rica, por confiar en mí y apoyar mi formación otorgándome la beca que hizo posible la realización del Máster y de este trabajo.

Gracias a mi amiga Mariló, por estar siempre ahí dándome ánimo y orientación en cada una de las etapas del trabajo, pero sobre todo por estar a mi lado a lo largo de todo toda esta experiencia. Igualmente a Diana por estar en todo momento pendiente de mi avance, su disposición fue muy importante para mí.

Por último pero no menos importante, agradecer a todos y cada uno de los profesores del Máster, por compartir su conocimiento y contribuir así de una u otra forma en la realización de este trabajo. Además a los profesores en formación que dedicaron tiempo en contestar las tareas del cuestionario, permitiendo así la realización de esta investigación.

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

PRESENTACIÓN

La Didáctica de la Matemática, como práctica investigativa en Educación Matemática "se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas así como de los planes para la preparación profesional de los educadores matemáticos" (Rico, Sierra y Castro, 2002, p. 37) y surge por la necesidad de entender, explicar y solucionar los distintos problemas que ocurren en los ya mencionados procesos.

Ahora bien, investigar en Educación Matemática no sólo supone intentar resolver problemas de aprendizaje, debe entenderse que el proceso va más allá, englobando la problemática desde una perspectiva más amplia en la que además del alumno, se involucra el profesor, el contexto y muchos otros aspectos sociales y psicológicos.

En ese sentido, la Maestría en Didáctica de la Matemática, impartida por la Universidad de Granada, forma a futuros investigadores para que aborden tan complejo objeto de estudio. El Trabajo Fin de Master (TFM), que se desarrolla como requisito para la obtención del título, supone una excelente forma de poner en práctica los conocimientos adquiridos e iniciarse en el área de la investigación.

Así, en el presente trabajo se describe el proceso de investigación desarrollado como parte del TFM, en el cual se pretende describir e interpretar una problemática educativa en la que los sujetos son los profesores en formación, y el objetivo es ahondar en significado que le atribuyen a un concepto matemático escolar: la derivada de una función en un punto.

Para esto contemplamos cinco capítulos; iniciamos describiendo el problema de investigación y la relevancia que tiene este tema, además planteamos los objetivos específicos que marcan el curso a seguir. En el segundo capítulo, abordamos la fundamentación teórica que sustenta nuestro trabajo; considerando, ente otros aspectos, la noción de significado de un contenido escolar que empleamos en el análisis e interpretación de los datos; así como el estudio de investigaciones previas que constituyen los antecedentes del trabajo. En el capítulo 3 describimos el método llevado a cabo para la recolección y análisis de datos.

Finalmente, en el capítulo 4 detallamos los resultados obtenidos, lo cual incluye la creación de perfiles del significado de derivada manifestados por los participantes. El último capítulo corresponde a conclusiones generales, limitaciones y posibles investigaciones que darían continuidad al trabajo aquí presentado.

CAPÍTULO I

El problema de investigación

La Matemática ha sido considerada de gran utilidad en la vida del hombre como herramienta que le permite resolver distintos problemas; desde aspectos cotidianos como las finanzas del hogar, hasta problemas en el ámbito de la medicina, ingeniería y economía.

Tal es el caso del cálculo diferencial e integral, quien con su creación y fundamentación promovió un gran auge en las Matemáticas durante los siglos XVI y XVII (Muñoz, 2017), destacándose en la actualidad como herramienta en la investigación de problemas científicos. Un caso particular es el concepto de derivada de una función, el cual nace fundamentalmente como respuesta a dos problemas prácticos: el cálculo de la velocidad instantánea y el determinar la recta tangente a una curva en un punto, y aunque la velocidad es una noción que surge de la observación y la experiencia de los personajes de la época, es la derivada quien permite su definición rigurosa (Alexandrov, Kolmogorov y Laurentiev, 2014). Destaca entonces el sentido práctico y funcional de dicho concepto, pues es una forma de definir y mejorar conceptos relativos al mundo exterior.

La relevancia de la Matemática, y específicamente de la derivada, ha generado que sea un contenido incluido en distintos currículos escolares a nivel mundial; particularmente en España, el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, establece que para este último ciclo, en el bloque de *análisis*, debe abordarse la derivada precisamente como herramienta para la resolución de problemas en diversos campos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015)

No obstante, la investigación en Educación Matemática ha evidenciado los diversos problemas que se presentan en la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes (p.e., Aspinwall, Haciomeroglu y Presmeg, 2008; Bingolbali y Monaghan, 2008; Hähkiöniemi, 2008; Orton, 1983); dado esto, y el bajo rendimiento evidenciado en

Matemática por alumnos de todas las edades, resulta imprescindible el desarrollo de investigaciones que permitan la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto.

En este caso, la problemática general puede abordarse de distintas maneras, podríamos centrarnos en el proceso de aprendizaje de los alumnos, en la enseñanza que se desarrolla, o bien profundizar aún más ahondando en la forma que visualiza el profesor este concepto matemático, que es quien finalmente se enfrentará a este gran reto que supone la enseñanza de la derivada.

Concretamente en España, el proceso de enseñanza de la Matemática, está a cargo de profesores cuya formación de grado es variada, encontrándose así matemáticos, físicos, ingenieros, estadísticos, arquitectos, entre otros. Por lo que su concepción y conocimientos de los conceptos a enseñar no es necesariamente la misma. Lo cual sin lugar a dudas es un elemento que interviene en el proceso. De ahí nuestro interés en investigar al respecto.

1.1 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Los estudios han mostrado que las dificultades en la comprensión de la derivada, no son exclusivas del alumnado y que por el contrario se extienden a los profesores (p.e., Badillo, Azcárate y Font, 2011; Noh y Kang, 2007). La complejidad entonces del proceso de enseñanza y aprendizaje de este contenido, ha implicado que desde la Didáctica de la Matemática, y particularmente desde la Didáctica del Análisis se haya abordado el cómo desarrollar la instrucción de la derivada con la intención de mejorar y facilitar su comprensión (p.e., Font, 2005; Maschietto, 2004); concluyéndose en algunos casos que la instrucción que se imparte está influencia considerablemente por la concepción y comprensión del profesor respecto al contenido matemático (p.e., Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2013).

Es decir, que el proceso de enseñanza estará, sin lugar a dudas, mediado de una u otra manera por la formación y el conocimiento matemático (y pedagógico) que posea el profesor; su forma de concebir un contenido escolar repercutirá en su instrucción y de alguna forma en el éxito que lleguen a tener sus alumnos (García, Azcárate y Moreno, 2006).

Dados los motivos citados anteriormente, resulta de interés para el presente trabajo determinar y analizar las concepciones que tienen los profesores en formación, respecto a un concepto matemático determinado; en este caso: la derivada de una función en un punto. En general, el problema de investigación que se plantea es **¿cuál es el significado que atribuyen los profesores en formación, al concepto de derivada de una función en un punto?** Se espera que iniciar con una indagación sobre el conocimiento matemático de los futuros profesores sirva de base a posteriores investigaciones para ahondar en elementos didácticos. Además que permita la toma oportuna de decisiones en cuanto a la formación y capacitación de los docentes.

La temática resulta de interés particular, pues en lo que respecta a la Didáctica del Análisis Matemático, existen pocas investigaciones enfocadas en el profesor (Azcárate, Camacho-Machín, González y Moreno, 2015), por lo que es un buen inicio aproximar la temática por medio de los futuros profesores.

La literatura muestra que el conocimiento que tienen los actuales o futuros profesores sobre la derivada de una función ha empezado a abordarse en los últimos años desde el enfoque de la semiótica o bien analizando que tan avanzado es el conocimiento que tiene el profesor respecto al tema. No obstante, nuestra intención difiere de los trabajos hasta ahora realizados al centrarse en el significado que tiene el futuro profesor respecto a la derivada: cómo la concibe, cómo la visualiza, cómo entiende sus propiedades y condiciones fundamentales, y finalmente para qué es útil.

1.1.1 Objetivos de investigación

Las primeras reflexiones referentes al problema de investigación, nos llevaron a plantearos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo entienden los futuros profesores el concepto de derivada?
- ¿Cuáles son los principales términos que utilizan y la notación a la que recurren al emplear la derivada?
- ¿De qué forma comprenden y emplean los principales aspectos y relaciones?
- ¿Cuáles son las principales situaciones en las que conciben la aplicabilidad de la derivada?

- ¿Existen diferentes perfiles sobre la concepción o el significado de la derivada?

Para dar respuesta a estas y otras interrogantes, y atendiendo al problema planteado, se propone como objetivo general el siguiente:

OG1. Analizar el significado que atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada de una función en un punto.

A su vez, para el desarrollo de este, se plantean los siguientes objetivos específicos:

OE1. Diseñar un instrumento que permita recoger las concepciones respecto al concepto de derivada que tienen los profesores en formación.

OE2. Determinar los principales términos y notaciones a los que hacen alusión los futuros profesores al trabajar el concepto de derivada.

OE3. Determinar los principales aspectos, condiciones y relaciones que destacan los futuros profesores de la derivada.

OE4. Determinar los sentidos y modos de uso que le atribuyen a la derivada.

OE5. Describir las concepciones de derivada dadas por los futuros profesores, a partir de las respuestas dadas.

OE6. Establecer uno o varios perfiles de significados atribuidos a la derivada.

En las conclusiones finales procederemos a valorar la consecución de estos objetivos así como dar respuesta a las preguntas de investigación que nos formulamos al inicio del estudio.

CAPÍTULO II

Fundamentación teórica

En este capítulo desarrollaremos nuestros referentes teóricos. Primeramente describiremos los aspectos que fundamentarán y sustentarán tanto la elaboración del cuestionario, como el análisis e interpretación de los datos y las conclusiones. Más concretamente, dado nuestro problema de investigación, abordaremos en este apartado los siguientes aspectos: el pensamiento matemático avanzado, el significado de conceptos matemáticos escolares, la introducción de la derivada en los libros de texto y las dimensiones de las tareas: problemas y ejercicios.

Posteriormente, en el último apartado de este capítulo, ahondaremos en algunas investigaciones que constituyen antecedentes a esta investigación, ya sea por su trabajo investigativo en cuanto a la comprensión y dominio del concepto de derivada por parte de estudiantes y profesores, o bien por su análisis del significado de conceptos matemáticos escolares.

2.1 PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

Dado que nuestro trabajo se sitúa dentro de la Didáctica del Análisis, es importante describir o referirnos al marco más amplio y general en el cual se enmarca nuestra investigación: el Pensamiento Matemático Avanzado (AMT por sus siglas en inglés). En el año 1985, dentro del grupo Psychology of Mathematics Education (PME), se conformó un subgrupo de trabajo cuyo objetivo era profundizar en temáticas referentes al proceso cognitivo que ocurre durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal.

Hasta ese momento las investigaciones en procesos cognitivos estaban enfocadas en los errores y dificultades que se detectaba en el alumnado, y principalmente en temas de Educación Primaria; sin embargo, con la creación de este subgrupo, se inicia el análisis de lo que llamaron el Pensamiento Matemático Avanzado (Azcárate y Camacho-Machín, 2003).

Esta designación ha generado ciertas dudas o confusiones; por un lado, ¿el término avanzado se refiere a la Matemática, al pensamiento o a ambos? (Azcárate y Camacho-Machín, 2003), asimismo ¿qué implica el término avanzado? pues suponer su existencia significa admitir que también hay un pensamiento matemático elemental, pero ¿qué es elemental en matemática? (Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005)

Sin lugar a dudas, establecer la diferencia entre lo que sería el pensamiento matemático avanzado y el elemental no es algo fácil. Es por esto que algunos autores se han preocupado por establecer algunos rasgos o aspectos que podrían determinar dicha diferencia. Así, Azcárate y Camacho-Machín (2003) señalan que hay una clara diferencia tanto en la complejidad de los contenidos como en los procesos involucrados en uno u otro pensamiento, destacando la abstracción, definición, demostración y formalización, como procesos que cobran mayor sentido en las matemáticas superiores.

Destacan además, que aunque estos procesos pueden no ser exclusivos del Pensamiento Matemático Avanzado, el papel que desempeñan es distinto; por ejemplo en las matemáticas elementales los objetos suelen describirse, mientras que en las matemáticas avanzadas las definiciones son necesarias para construir, a partir de estas, algunas propiedades. Lo anterior coincide con lo expuesto por (Tall, 1992) quien afirma que

> el paso a un pensamiento matemático más avanzado implica una transición difícil, desde una posición en la que los conceptos tienen una base intuitiva fundada en la experiencia, hasta donde se especifican mediante definiciones formales y sus propiedades reconstruidas mediante deducciones lógicas (p. 495).

Entonces, ¿cómo se define el Pensamiento Matemático Avanzado? Pues bien, puede entenderse como aquel pensamiento que requiere de un razonamiento deductivo y riguroso que se emplea al trabajar con nociones matemáticas que no son totalmente accesibles para nosotros a través de nuestros cinco sentidos (Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005, p. 17-18).

Ampliando lo anterior, Harel y Sowder (2005) señalan que un pensamiento matemático puede considerarse avanzado si implica al menos una de las siguientes tres condiciones, que lo caractericen como un obstáculo epistemológico:

- Tener rastros en la historia de las matemáticas
- Producir resultados adecuados en algunos contextos, pero que a su vez provoque conflicto en otros contextos diferentes.
- Y que al establecer un nuevo conocimiento esto no implique la ruptura del conocimiento anterior.

De este modo, tomando como referencia las dos definiciones dadas, consideramos que, sin importar si el término avanzado se refiere a la Matemática o bien al pensamiento, desde ambas perspectivas, la derivada forma parte del objeto de estudio de lo que denominamos Pensamiento Matemático Avanzado, tanto por ser parte de las matemáticas superiores, como por los distintos obstáculos y dificultades que supone su aprendizaje.

2.1.1 Marcos teóricos empleados

Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces y Törner (2016) con la intención de clarificar el panorama de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo, organizan los marcos teóricos más empleados de la siguiente manera:

a) Modelos cognitivos

Son varios los modelos enfocados en la manera en la que aprenden los individuos; particularmente en el Pensamiento Matemático Avanzado destacan:

- *Concepto imagen- concepto definición*: destaca la diferencia entre el concepto matemático definido formalmente y la representación cognitiva que tiene un individuo respecto a dicho concepto (Tall y Vinner, 1981).
- *Marco APOE*: es un modelo de aprendizaje matemático basado en la teoría constructivista de Piaget, el cual supone que la comprensión de un concepto se da mediante: acciones, procesos, objetos y estructuras (Dubinsky, 1991).
- *Teoría de las representaciones semióticas*: se centra en las relaciones mentales que existen para un individuo entre los registros semióticos y el significado de un concepto. Destaca la necesidad de no confundir un objeto con su representación;

además supone que comprender un concepto implica manejar al menos tres de sus representaciones (Duval, 1999).

- *Los tres mundos de la Matemática*: esta teoría considera que la formación de conceptos matemáticos involucra tres mundos matemáticos: el conceptual, el proceptual-simbólico y el formal axiomático (Tall, 2004).

b) Modelos socioculturales

Por otra parte, se distinguen al menos tres modelos o teorías socioculturales que han sido empleadas por investigaciones insertas en el Pensamiento Matemático Avanzado, ellas son:

- *Teoría de las Situaciones Didácticas*: el objeto central de esta teoría es la noción de situación, entendiéndose como el modelo ideal del sistema de relaciones entre estudiantes, maestro y entorno matemático. Aquí el conocimiento del alumno crece en un medio matemático mediante la acción, formulación y validación de procesos, optimizado por las interacciones con los compañeros y el profesor (Brousseau, 1997)
- *Teoría Antropológica de la Didáctica*: para modelar la actividad matemática, esta teoría utiliza la noción de un bloque práctico y otro teórico. El bloque práctico contiene tipos de tareas y técnicas para resolverlas. Mientras que el discurso que justifica las técnicas utilizadas, constituye el bloque teórico. Los trabajos desde este modelo se centran por lo general en describir lo que podría enseñarse y lo que realmente se enseñó (Chevallard, 1985).
- *Marco Común*: supone que el aprendizaje de la Matemática se da mediante la comunicación matemática y transición continua de significantes (palabras o símbolos que funcionan como un sustantivo). Los trabajos bajo este modelo se centran en analizar el discurso de los estudiantes y el de los profesores, así como la comunicación matemática entre ambos (Sfard, 2008).

De estos modelos, resulta de interés para este trabajo la distinción que establecen Tall y Vinner (1981) entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos, es decir, entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo. Diferenciando de este modo:

- *Concepto imagen:* que se utiliza "para describir la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados" (Tall y Vinner, 1981, p. 152); dicho concepto imagen se forma y evoluciona a partir de la experiencia del sujeto.
- *Concepto definición*: que se refiere a las "palabras usadas para especificar ese concepto" (Tall y Vinner, 1981, p. 152), es decir la definición formal que se emplea sobre dicho concepto.

Nos parece de utilidad lo que este modelo propone, ya que somos conscientes de que en nuestro trabajo ahondaremos, no en la definición del concepto derivada, sino propiamente en el concepto imagen que los futuros profesores tienen respecto a este.

2.2 SIGNIFICADOS DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS ESCOLARES

El significado de un concepto ha sido abordado ampliamente por autores como Frege (1996) quien estableció la diferencia entre signo y significado. Para él el significado de un concepto viene dado por una terna semántica compuesta por: un signo, símbolo o término; una referencia o concepto y por un sentido.

Dicho trabajo ha sido adaptado y desarrollado específicamente para significados de conceptos y contenidos propios de las matemáticas escolares (Rico, 2012; Rico, 2013; Rico y Moreno, 2016), considerando para su análisis tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación, y los sentidos y modos de uso. La relación entre estos se representan en la figura 1.

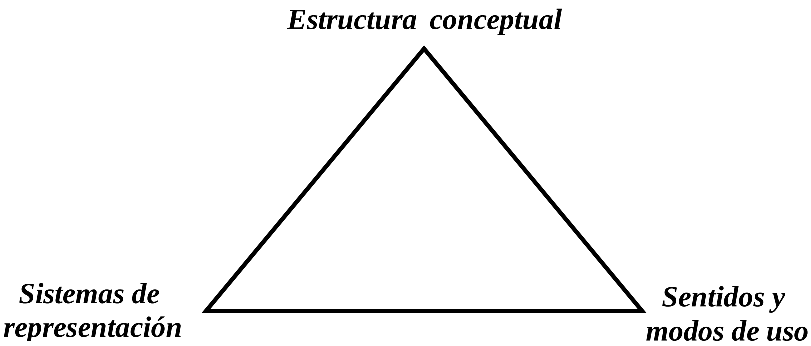


Figura 1. Triángulo semántico de un concepto matemático escolar

De este modo, en la matemática escolar comprender el significado de un concepto implica "conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas" (Rico, 2016, p. 94).

A continuación describiremos cada uno de estos componentes; además, con la intención de clarificar cada uno de ellos se plantean ciertos criterios cognitivos que permiten analizar cómo "se entiende, se aprenden y se utilizan [los conocimientos matemáticos] por usuarios y escolares" (Rico, 2016, p. 89). Dichos criterios fueron desarrollados por Hiebert y Lefevre (1986) y retomados en Rico (1997) y en Rico y Moreno (2016).

2.2.1 Estructura conceptual

Se entiende por estructura conceptual al conjunto de conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y proposiciones, así como sus criterios de veracidad, asociados a un contenido matemático. Para la caracterización de esta estructura se plantean tres campos o categorías generales: campo conceptual, campo procedimental y campo actitudinal. Sin embargo, para efectos de este trabajo sólo se consideraran las dos primeras, y las abordaremos según lo expuesto en Rico y Moreno (2016).

a) Campo conceptual

Concibiendo el concepto como aquello con lo que pensamos. Se entiende este campo como el conjunto de conceptos y relaciones que hacen alusión al contenido matemático, aquí son tan importantes las unidades, de forma individual, como la red que construyen.

Según su nivel de concreción y complejidad, estos conceptos pueden clasificarse en tres niveles de la siguiente manera:

- Los *hechos* que son las unidades de información más simples en las que se incluyen:
    - Términos: que se refieren a las palabras con las que designamos el concepto o sus relaciones. Pueden referirse a términos propios de la Matemática o no.
    - Notaciones: se consideran los signos y símbolos empleados para expresar alguna idea de forma precisa y breve.
    - Convenios: entendidos como acuerdos consensuados en la comunidad matemática para transmitir información sin caer en ambigüedades y sin necesidad de explicaciones.
    - Resultados: son el producto de relaciones entre conceptos, los cuales generalmente son memorizados y suponen herramientas con las cuales trabajar.

  En general, estos hechos hacen tangible el concepto.

- Los *conceptos y relaciones* asociados al contenido, entendido concepto como una serie de hechos conectados entre sí.
- Y las *estructuras conceptuales* que son redes de conceptos que eventualmente pueden dar origen a conceptos más complejos.

b) Campo procedimental

En esta otra categoría se consideran las operaciones, propiedades y métodos matemáticos involucrados en el contenido. Al igual que en el caso anterior, se distinguen tres niveles de dificultad:

- Las *destrezas* que son los procedimientos definidos para ese contenido en el que se pueden incluir expresiones simbólicas, figuras y otros signos. Se caracterizan por ser unidades que promueven acciones y transformaciones.
- Los *razonamientos* que son las relaciones de inferencia que se establecen entre los conceptos y que se expresan mediante una secuencia argumental.
- Y finalmente las *estrategias* que se pueden definir como procesos que se realizan dentro de una estructura conceptual.

2.2.2 Sistemas de representación

El uso de representaciones ha sido de gran relevancia en la Educación Matemática; esto ha provocado que su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina se analice desde distintas perspectivas. Su relevancia radica en que "para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos" (Hiebert, 1992, p. 66).

Ahora bien, una forma de entender qué es una representación es la dada por Castro y Castro (1997) quienes afirman que "las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características más relevantes" (p. 96). En ese sentido, se distinguen dos grandes familias de representaciones, las simbólicas y las gráficas de quienes a su vez se desprenden los siguientes tipos de representaciones: simbólico, gráfico, numérico y verbal.

Cada sistema de representación dispone de reglas y convenios que permiten su manipulación. Asimismo cada uno de ellos pone de manifiesto determinadas propiedades del concepto.

Así, para este trabajo se considerará el conjunto de signos, gráficos y reglas que se ponen de manifiesto al evocar el significado de concepto de derivada.

2.2.3 Sentidos y modos de uso

Para Ruiz-Hidalgo (2016) "las diversas formas de entender, expresar y usar un concepto constituyen su significado conjuntamente" (p. 139); es por ello que para finalizar el análisis del significado de un concepto, se incluye el estudio de los diversos sentidos y modos de uso del mismo; se consideran en esta categoría aquellos términos, contextos, fenómenos, situaciones o problemas que están presentes al referirnos al concepto y que le dan sentido. Por lo tanto, para este trabajo se prestará atención a las siguientes componentes:

- A los distintos *términos y modos de usos* cotidianos empleados por los futuros profesores al referirse a la derivada, ya que estos ayudarán a conocer sus diversos sentidos.
- A los *contextos* matemáticos que da respuesta el concepto, se trata de identificar ¿Qué tipo de problemas usan este concepto? es decir su función.
- Las *situaciones* en las que tiene aplicación y se trabaja el concepto.

Para clarificar la diferencia entre estos tres componentes, consideremos el concepto de *integral definida*. Existen dos sentidos que caracterizan a la integral; por un lado encontramos un sentido de medida, o bien podemos visualizarla como un proceso contrario a la derivación. Así cada uno de estos sentidos implica términos y modos de uso distintos, inmersos contextos y situaciones variadas. Por ejemplo en cuanto al sentido de la medida, este puede aplicarse en un contexto de cálculo de áreas o bien de volúmenes, los cuales a su vez se dan en distintas situaciones: de la vida cotidiana, laborales o científicas.

Veamos otro ejemplo más concreto, un problema en el que se involucra la derivada puede ser el siguiente:

> Un objeto se mueve con movimiento rectilíneo de modo tal que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - 2t$ metros por segundo. Halle:
>
> a) el desplazamiento del objeto durante los tres primeros segundos.
> b) la distancia recorrida durante ese tiempo.

En el problema anterior, el contexto matemático de la integral puede entenderse como el cálculo de la antiderivada que permite analizar el espacio recorrido en un movimiento dada su velocidad; además, el problema se enmarca en una situación de la Física.

2.3 EL CONCEPTO DE DERIVADA EN LOS LIBROS DE TEXTO

Dado que nuestro trabajo se centra en el concepto de derivada, consideramos pertinente analizar la definición, interpretación, notación, principales aspectos y teoremas que abordan los libros de texto al *introducir el concepto*. Para ello revisamos a Burgos (2007) y a Spivak (2012); la escogencia de estos se debe a que ambos son los libros más sugeridos en los las guías docente de los cursos de Cálculo de las Universidades españolas (Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo, en prensa).

Los aspectos aquí destacados nos permitirán, además de tomarlos en cuenta en la construcción del instrumento, considerarlos en el análisis de datos.

2.3.1 Definición de derivada

Al definir la derivada de una función en un punto, en Spivak (2012) se lee:

> La función f es diferenciable en a si existe el
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> En este caso, dicho límite se representa mediante $f'(a)$ y de denomina derivada de f en a.

Por su parte, Burgos (2007) entra en mayor detalle y destaca:

> Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función, definida en un intervalo I, y consideremos un punto (fijo) $a \in I$. Se dice que f es derivable en a si existe y es finito el siguiente límite, que se denota por $f'(a)$ y se llama derivada de f en a:
>
> $$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Aspectos relevantes

De las definiciones dadas y de algunos comentarios posteriores que se pueden apreciar en los libros, sobresalen los siguientes aspectos

- La derivada se define en un punto de acumulación del dominio de la función.
- La derivada de una función en un punto es un número real
- Para que el límite que define la derivada exista debe satisfacerse que los siguientes límites

  $$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{y} \quad f'(a^-) = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

  existan y sean iguales. Estos límites laterales se denominan derivada laterales (por la derecha y por la izquierda respectivamente).

2.3.2 Interpretaciones de la derivada

En ambos libros destacan las dos interpretaciones siguientes:

- *Geométrica:* señala la derivada como la pendiente de la recta tangente a la función f en el punto a.
- *Física:* dada la función posición de un objeto respecto al tiempo, su derivada se interpreta como la velocidad instantánea de dicho objeto en el tiempo a.

Aludiendo al hecho de que estas interpretaciones son a su vez los problemas que dieron origen al concepto.

2.3.3 Notación

En términos generales, aunque a lo largo del tema emplean distintas notaciones, al introducir el concepto, la notación empleada para la derivada de una función en un punto es:

- $f'(a)$
- $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$
- $D[f(a)]$

Aunque ambos autores utilizan principalmente la primera de ellas.

2.3.4 Teoremas

Tanto Spivak (2012) como Burgos (2007), destacan como primer resultado importante, de carácter necesario, la relación entre la continuidad y derivabilidad de una función:

- Si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en ese punto.

Al respecto, señalan además que el recíproco no es cierto, es decir, que una función continua no necesariamente es diferenciable.

Con este primer teorema, y con los aspectos mencionados anteriormente, es posible entonces, establecer condiciones necesarias y suficientes para la derivabilidad de una función en un punto.

- *Condición necesaria:* del teorema se desprende que si f no es continua, entonces no es derivable. Así se establece como condición necesaria para la derivabilidad la continuidad de la función en el punto.

- *Condición suficiente:* de lo anterior tendríamos que una función es derivable en un punto si y sólo si es continua en ese punto y además que las derivadas laterales existen y son iguales.

Finalmente, contemplamos otro resultado importante, que aunque no es uno de los teoremas que presenten los libros al introducir el concepto, si es de los primeros en cuanto a sus aplicaciones; incluso Spivak (2012) lo plantea como el teorema que para él, justifica el para qué de la derivada. Así contemplamos entonces, el siguiente teorema:

- Sea f una función definida en (a, b). Si x es un punto máximo o mínimo de f en (a, b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x) = 0$.

En términos generales, los aspectos de la estructura conceptual que consideraremos para este trabajo, se sintetizan en la figura 2.

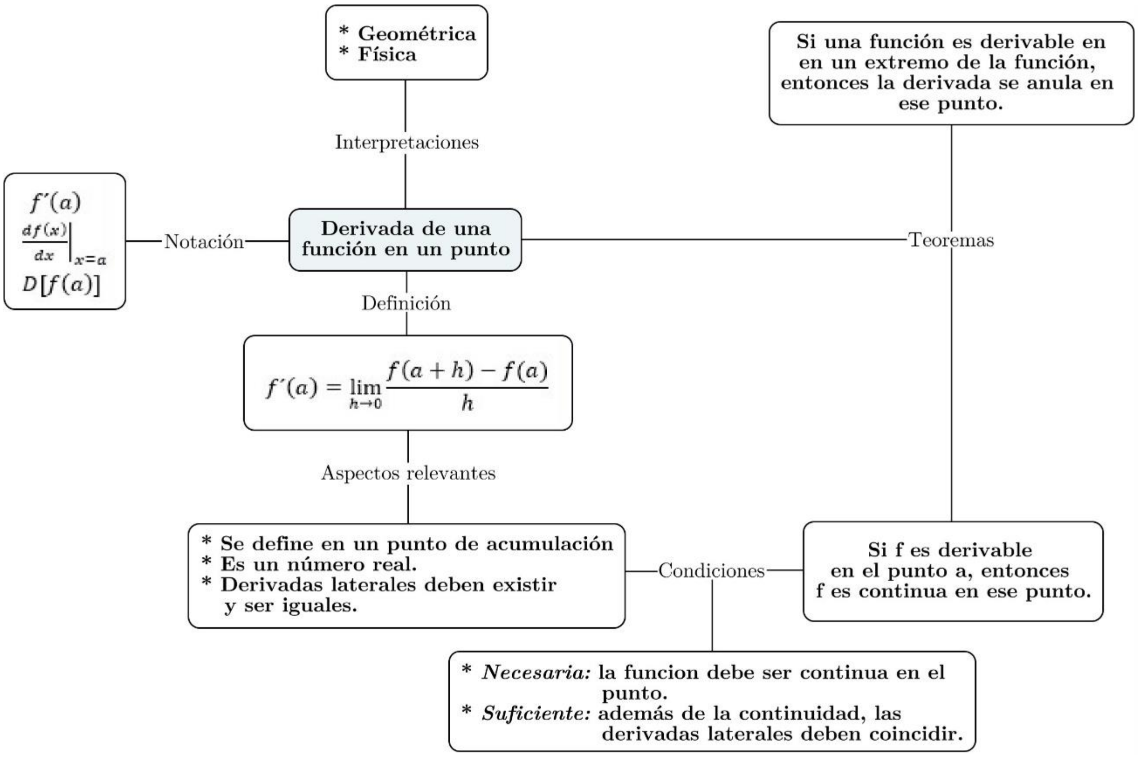


Figura 2. Concepto de derivada en los libros de Cálculo

2.4 DIMENSIÓN DE LAS TAREAS: EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Para indagar el significado que le atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada, se les solicitó a los participantes redactar un problema cuya solución involucrara la derivada de una función en un punto.

Sin embargo, dado que “el término problema se ha utilizado en la clase de matemática con un sentido muy general, considerándolo incluso sinónimo de otros términos como tarea o ejercicio” (Ramírez y Moreno, 2016, p. 267), consideramos pertinente clarificar la diferencia entre ellos; además esto nos dará pie para analizar si la tarea propuesta por los participantes es o no un problema.

Ponte (2004) indica que en toda tarea se caracteriza principalmente por dos aspectos: su dificultad y su estructura. Planteando que la dificultad varía entre los polos “accesible” y “difícil”, mientras que por su estructura la tarea puede catalogarse como “abierta” o “cerrada”. Y que al cruzar ambas dimensiones o aspectos es posible distinguir cuatro tipos de tarea, tal como lo muestra la figura 3.

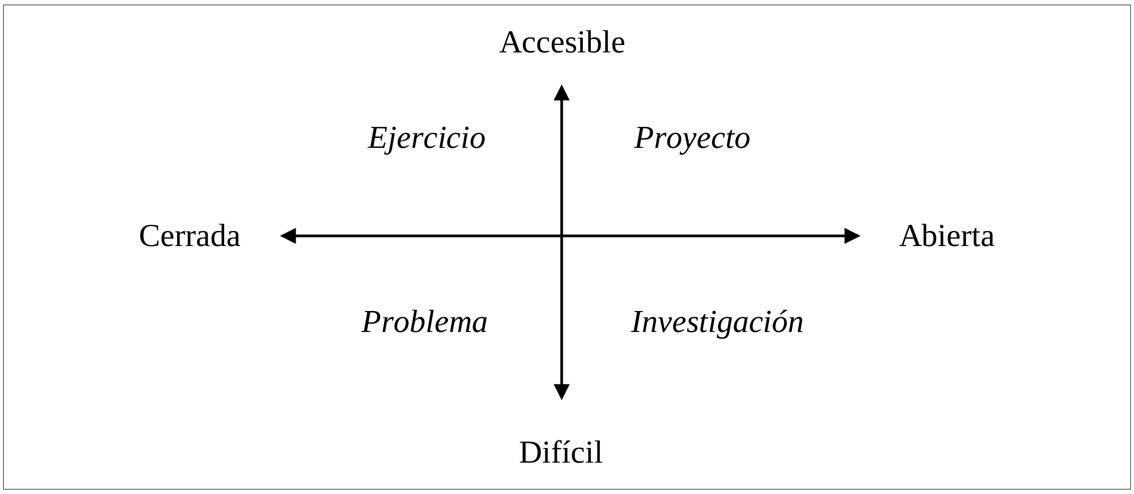


Figura 3. Clasificación tareas de Ponte

Así se tiene que una tarea puede ser un ejercicio, un problema, un proyecto o bien una investigación; en nuestro caso es de suponer que los sujetos darán una tarea cerrada por lo que nos interesa establecer la diferencia entre las dos primeras.

Sin embargo, Ponte (2004) señala que la dificultad para establecer esta distinción es que lo que puede suponer un problema para una personas, para otros puede ser un ejercicio sencillo. Pero que debe entenderse que la principal diferencia está en que un problema supone un grado de dificultad apreciable. Mientras que el ejercicio es una cuestión que se puede resolver fácilmente y su función es poner en práctica y consolidar los conocimientos ya adquiridos. Asimismo, aclara que en ambos tipos de tarea debe estar claramente establecido lo que se da y lo que se pide, además de que pueden presentarse tanto en contextos matemático como en no matemático.

Retomando esta idea, Ramírez y Moreno (2016) refinan la diferencia entre ambas, afirmando que “hablamos de problema cuando la tarea supone un reto, ya que su método de resolución no se conoce de antemano. Cuando se conoce se trata de un ejercicio” (p. 267).

2.5 ANTECEDENTES

Primeramente debemos aclarar que no se halló en la revisión bibliográfica algún trabajo con objetivos similares a los propuestos en esta investigación para el concepto matemático de la derivada. No obstante, la relevancia de este tópico en la Educación Matemática ha implicado que desde ya hace muchos años sea el centro de atención en diversas investigaciones con distintos propósitos.

Tras la búsqueda y estudio de la bibliografía, nos es posible establecer al menos dos temáticas como antecedentes: por un lado se encuentran los trabajos que han abordado de una u otra forma la comprensión que tienen distintos sujetos sobre la derivada y por otra parte aquellas investigaciones en las que se ha ahondado en los significados de conceptos matemáticos escolares. A continuación nos referiremos a cada una de ellas.

2.5.1 Estudios sobre el conocimiento que se tiene sobre la derivada

La literatura nos muestra que el concepto de derivada ha sido abordado en distintas investigaciones desde diversos enfoques o perspectivas, hallándose trabajos clásicos y de lectura obligatoria como el de Orton (1983). Sin embargo no es posible destacar aquí todos los trabajos relacionados al concepto de derivada, por lo que destacaremos sólo unos pocos por su interés para el trabajo.

Para una mejor clasificación de los trabajos analizados, separaremos aquellos cuyo sujeto fue el estudiante, de aquellos centrados en el profesor.

a) Comprensión y esquema de la derivada en estudiantes

En esta línea se encontraron trabajos muy interesantes, entre los cuales están:

- Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2013) quienes explican el desarrollo del esquema de derivada desde una perspectiva piagetiana, considerando para ellos tres niveles de desarrollo. En el análisis de datos se identifican el tipo de relaciones que los estudiantes son capaces de establecer, concluyendo que aquellos resultados en los que interfiere la equivalencia lógica presentan gran dificultad, por lo que su uso consiente es un indicador en el desarrollo del esquema.
- Por otra parte, Ariza y Llinares (2009) para estudiar el desarrollo del esquema, se proponen analizar cómo usan los estudiantes el significado del concepto de derivada en la resolución de problemas, y más aún cuáles son sus niveles de aplicación y comprensión.
- Finalmente, otro trabajo con aportes importantes es el de Bingolbali y Monaghan (2008) quienes propusieron una reinterpretación del concepto imagen expuesto por Tall y Vinner en la década de los 80, considerando que no puede considerarse solo el enfoque cognitivo sino que además debe integrarse el contexto de aprendizaje, es decir, apoyarse en teorías socioculturales. En su trabajo concluyen que los alumnos desarrollan un concepto imagen influenciado por la enseñanza que reciben, la cual a su vez está estrechamente relacionada con el departamento al que pertenecen; es decir no es lo mismo la enseñanza para ingenieros que para matemáticos.

De manera específica, en cada uno de estos trabajos es posible hallar una o varias conclusiones de interés para nuestro trabajo, de las cuales destacamos:

- Se confirma en diversas ocasiones las dificultades e inconsistencias que tienen los estudiantes para comprender el concepto de derivada (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2013).
- Existe cierta tendencia por parte de los alumnos al predominio del registro algebraico; sin embargo aquellos que manejan tanto el registro algebraico como el gráfico muestran una mejor comprensión del concepto (Ariza y Llinares, 2009).
- Un resultado interesante es que los estudiantes de matemática recurren a utilizar la pendiente de la recta tangente para referirse a la derivada mientras que los

estudiantes de ingeniería lo hacen mediante tasa de cambio (Bingolbali y Monaghan, 2008).

b) Conocimiento del profesor

A pesar de que las investigaciones centradas en el profesor y su concepción o conocimiento de la derivada no son muchas, destacaremos a continuación tres trabajos que nos dan una importante guía al respecto.

- García, Azcárate y Moreno (2006) describen las creencias, concepciones y el conocimiento profesional, respecto a la derivada, que tiene un grupo de profesores universitarios venezolanos que imparten cálculo a estudiantes de ciencias económicas. La investigación se centró en: errores más frecuentes, opinión respecto al contenido de los programas de estudio, método para introducir el tema y cómo lo evalúan.
- En Pino-Fan, Godino, Font y Castro (2012) y Pino-Fan, Godino y Font (2014) indagan en el conocimiento que posee el profesor específicamente acerca del concepto de derivada; lo anterior desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS). El trabajo pone de manifiesto las dificultades al resolver las tareas relacionadas con la derivada, incluso aquellas que solo involucraban un conocimiento común.
- Finalmente, Badillo et al. (2011) amplían las herramientas que ofrece el modelo cognitivo APOE, con la teoría de los registros semióticos de Duval y el EOS; para analizar la comprensión que tienen los profesores sobre los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$. Los autores señalan la relevancia del tema, destacando que para tener un esquema coherente con el concepto de derivada es necesario la coordinación de estos esquemas.

En esta línea enfocada en el profesor (o futuro profesor), resaltamos las siguientes conclusiones:

- Los profesores reconocen que en cuanto a la derivada, otorgan más importancia al aspecto matemático que a sus aplicaciones en distintos ámbitos. Lo anterior dado a que las aplicaciones que pueden implementar para el desarrollo de sus clases resultan muy genéricas, evidenciándose carencias al en este sentido (García, Azcárate y Moreno, 2006).

- Respuestas dadas por futuros profesores a ciertas tareas, evidencia la desconexión entre la noción de función derivada y derivada en punto, asimismo la no distinción entre velocidad media y velocidad instantánea (Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2012; Pino-Fan, Godino y Font, 2014).
- Otros errores o dificultades que se detectan son: complejidad para coordinar los objetos derivada de una función en un punto y pendiente de la recta tangente en ese punto, confundir la expresión $f´(x)$ con la expresión de la recta tangente a la curva en un punto (Badillo et al., 2011).

En términos generales, los trabajos analizados y que constituyen antecedentes a ésta investigación, en cuanto al trabajo desarrollado sobre la derivada de una función en un punto, permiten apreciar que si bien al inicio la atención estaba centrada en el estudiante y el proceso de enseñanza, esta se ha extendido al dominio que posee el profesor sobre el concepto.

Asimismo las investigaciones sobre la comprensión de la derivada tanto en alumnos como en profesores han detectado ciertas deficiencias, confirmando la complejidad que el aprendizaje de la derivada supone. Lo cual resalta la importancia de la temática, incitando a seguir profundizando al respecto.

2.5.2 Estudios sobre significados de conceptos escolares

Otros trabajos que sirven de referencia y antecedente para la investigación aquí desarrollada son aquellos TFM que también centraron su atención en los significados que atribuyen estudiantes y profesores a los distintos conceptos escolares, los cuales además han dado lugar a publicaciones y comunicaciones fuera del máster. A continuación mencionamos algunos de ellos:

- Ente los primeros trabajos hallados en esta línea está el de Castro-Rodríguez (2010), quien se propuso identificar las concepciones de los estudiantes para maestro sobre el concepto de fracción.
- Otro trabajo en esta línea, fue el desarrollado por Fernández-Plaza (2011) quien estudio los significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto.

- De forma similar Martín-Fernández (2013) analizó los significados que se atribuían a las razones trigonométricas.
- Por otra parte, Vílchez (2014) determinó el significado que dan los estudiantes a número entero.
- Asimismo, García (2014) analizó las concepciones manifestadas por el alumnado de bachillerato respecto al concepto de asíntota horizontal.
- Análogamente, Estrella (2015) describe perfiles a partir de respuestas dadas por estudiantes de bachillerato, sobre el significado de la noción de tendencia, asociadas al concepto de límite finito de una función en un punto.
- Del mismo modo, Ruiz-Ratia (2016) analizó el significado que atribuyen los alumnos de primaria al concepto de fracción.
- Mientras Salinas (2016) analizó el significado del concepto de porcentaje con estudiantes chilenos de sétimo año.

Lo anterior permite afirmar que las investigaciones en torno al significado de los conceptos escolares han tomado relevancia en los últimos años. Por otra parte, cabe destacar que en esta línea la cantidad de investigaciones en Pensamiento Matemático Avanzado es menor, por lo que resulta de interés incrementar el trabajo en esta dirección.

CAPÍTULO III

Metodología de investigación

En este capítulo describiremos el método empleado para llevar a cabo esta investigación. Intentaremos relatar con el mayor detalle posible lo desarrollado, aunque somos conscientes de que resulta imposible plasmar todo el trabajo ejecutado. En los siguientes apartados ahondaremos en el tipo de estudio, los sujetos participantes, la elaboración y aplicación del instrumento, así como los métodos empleados para el análisis de los datos.

3.1 TIPO DE ESTUDIO

El trabajo desarrollado es de tipo cualitativo, cuyo alcance es de naturaleza exploratoria y descriptiva (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Exploratoria ya que se propone profundizar en una temática poco estudiada, lo cual se respalda tras la revisión de la literatura. Además tal como lo mencionan Hernández et al. (2010) también son de carácter exploratorio aquellas investigaciones en las que “deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas” (p. 79) y en nuestro caso el análisis del significado que atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada, examinado bajo el marco del significado de un contenido escolar, no se ha hecho.

Del mismo modo, la investigación se enmarca como descriptiva ya que su fin último es detallar los distintos significados –cómo lo entienden, utilizan e interpretan- evocados por los futuros profesores de matemática, respecto a la derivada de una función en un punto.

3.2 SELECCIÓN DE LOS PARTICIPANTES

El trabajo se llevó a cabo con estudiantes del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, de la Universidad de Granada. Se consideró para ello un grupo de 37 alumnos que cursaban la asignatura Aprendizaje y Enseñanza de las

Matemáticas, durante el curso académico 2016/2017. Es importante mencionar que los participantes fueron seleccionados intencionalmente y por disponibilidad.

El grupo estaba conformado de la siguiente manera: 17 mujeres y 20 hombres de los cuales su carrera o formación de grado se distribuía como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1
Formación de los participantes

Carrera de grado	Cantidad de estudiantes
Matemática	26
Ingeniería	7
Física	1
Estadística	1
Arquitectura	1
Sin información	1

Cabe destacar que la mayoría de los participantes asegura tener experiencia impartiendo clases particulares aunque no en instituciones educativas formales.

3.3 INSTRUMENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS

Para la recolección de datos se diseñó un cuestionario semántico. Este tipo de instrumento tiene por objetivo "recoger palabras, términos, símbolos, gráficas, descripciones, explicaciones y otras notas que expresan y representan un modo de apropiación por cada sujeto del concepto considerado" (Martín, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2016, p. 56). Debe destacarse que con el cuestionario se pretendía identificar las nociones (correctas o no) que expresan los profesores en formación respecto al concepto de derivada, ya que no es intención del estudio, ni la finalidad de los cuestionarios semánticos, realizar una valoración de dicho conocimiento.

La idea era que mediante preguntas de respuesta abierta los futuros profesores evidenciaran su manera de entender la derivada, algunas propiedades principales, las representaciones con las que la expresan y sus aplicaciones.

Tras la revisión de los libros de textos (apartado 2.3) se llevó a cabo la elaboración y diseño del instrumento, para ello se desarrollaron 5 reuniones con el tutor y cotutor en las que se discutió la pertinencia de cada una de las tareas propuestas. Asimismo, solicitamos la colaboración de otros estudiantes del máster para que valoraran el instrumento y dieran sugerencias al respecto. Esto nos permitió mejorar redacción, cambiar el orden de las preguntas y detectar algunos errores en simbología.

Finalmente, se realizaron dos cuestionarios de tal forma que nos permitiera recolectar más información al respecto (Ver anexo #1). Cada cuestionario contempló tres tareas; cuyo enfoque y finalidad era el siguiente:

Tarea 1: definición de derivada

En la primera tarea de ambos cuestionarios se les solicitó, a los futuros profesores, definir con sus propias palabras el concepto de derivada; el objetivo era conocer en términos generales como definen dicho concepto, los elementos o características destacan y alguna forma de representación que les evoque la noción.

Tarea 2: verdadero o falso

En esta tarea se les pedía a los participantes justificar la veracidad o falsedad de dos enunciados dados respecto a la derivada. De este modo se podrán analizar, en esta investigación, cuatro enunciados referentes a la derivada (dos de cada cuestionario) y las argumentaciones dadas por futuros profesores.

Para la construcción de estos enunciados se consideraron propiedades y características elementales de la derivada tales como:

- Condiciones necesarias y suficientes para la derivabilidad de una función en un punto.
- La relación existente entre derivabilidad y continuidad de la función.
- Relación entre puntos máximos y mínimos de una función y su derivada en ese punto.
- Relación entre la derivada de una función en un punto y la recta tangente a la curva en ese punto.

La idea en esta tarea era poder ampliar la concepción que reflejaron los futuros profesores en la definición dada respecto a la derivada, a partir de las argumentaciones proporcionadas sobre su forma de entender las propiedades particulares de esta.

Tarea 3: aplicaciones

Finalmente, para entender un concepto matemático, no basta con analizar sus propiedades; un aspecto importante es saber su aplicación y utilidad en distintos contextos. Para ello con la tercera tarea se espera obtener información de cómo entienden los futuros profesores la derivada en términos de aplicaciones.

En el cuestionario 1 se les planteó una situación contextualizada, la cual se pretendía fuera analizada por los estudiantes como una aplicación de la derivada de una función en un punto; por otra parte, en el cuestionario 2 se les invitó a los participantes a escribir las aplicaciones o situaciones en las que ellos consideraban se utilizaba la derivada, además de escribir un problema al respecto.

3.4 DESCRIPCIÓN DE LA RECOLECCIÓN DE DATOS

Tal como se indicó anteriormente los participantes cursaban la asignatura Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, cuyo profesor ya les había explicado sobre su participación en la investigación.

Así, la recolección de datos tuvo lugar el primero de febrero de 2017 a las 16:00 en el aulario de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Se les brindó aproximadamente 45 minutos para que respondieran al instrumento.

No se realizó ninguna organización particular de las mesas, ni distribución de estudiantes, sino que en la ubicación habitual de la clase la investigadora repartió de forma alternada ambas opciones de cuestionario. La investigadora proporcionó de manera general las instrucciones. Durante la realización, el profesor del grupo acompañó a la investigadora durante todo el proceso y ambos resolvieron dudas intentando no influir demasiado en la resolución. No hubo ninguna incidencia relevante durante la sesión.

Al final, 19 estudiantes contestaron al cuestionario 1 mientras que 18 alumnos lo hicieron al cuestionario 2. La investigadora agradeció la colaboración a los participantes y se retiró.

3.5 MÉTODO PARA EL ANÁLISIS DE DATOS

El principal método para analizar los datos, fue el denominado *análisis de contenido*, no obstante, en la etapa final de la investigación, nos permitimos emplear otro método llamado *análisis clúster*, con el cual esperábamos agrupar las respuestas obtenidas y así establecer perfiles. A continuación explicamos de manera breve en que consiste cada uno y su aplicación en este trabajo.

3.5.1 Análisis de contenido

Este método se puede definir como un proceso sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación, que permite hacer inferencias válidas y confiables respecto a nuestro tema de interés (McMillan y Schumacher, 2005); particularmente, nos dará la oportunidad de inferir el significado que dan los futuros profesores al a derivada, al interpretar las respuestas dadas a cada una de las tareas.

Para Rico y Fernández-Cano (2013) el análisis de contenido es uno de los métodos más extendidos para el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas y cualitativas en los contenidos de la comunicación; el cual "se ha venido utilizando en educación matemática como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas" (p. 11).

Su utilidad, en la Educación Matemática, radica en que nos brinda la posibilidad, entre otras cosas, de:

- Descubrir patrones en el discurso.
- Contrastar una hipótesis previa
- Inferir significados interpretativos en un texto. (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 9)

Además nos permite un adecuado manejo de la información obtenida mediante preguntas abiertas.

El análisis de contenido se efectúa por medio de la codificación que nos permite destacar las características relevantes de un mensaje, lo cual a su vez facilita la descripción y análisis de los datos (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

A pesar de que no existe una manera "correcta" de analizar los datos, ya que puede efectuarse de distintas formas y mediante distintos "caminos", el proceso que desarrollamos se basa en la propuesta realizada por Rico y Fernández-Cano (2013) y que describimos a continuación:

- *Delimitar el corpus de contenido a analizar:* en este caso el corpus a analizar serán las respuestas dadas por los futuros profesores a las distintas tareas propuestas en los cuestionarios elaborados.
- *Concretar la unidad de análisis:* entendiendo unidad de análisis como el registro más simple sobre el cual basar el análisis y cuya selección depende de los objetivos de investigación (Hernández et al., 2006, p. 358); en cada una de las tareas detallaremos la unidad de análisis que se utilizó ya que esta varió según la pregunta realizada, en algunos casos se utilizó términos, notaciones, representaciones, argumentos y otros como la unidad de análisis. Lo anterior debido a que la información aportada por cada tarea era distinta.
- *Localizar o inferir en el texto la unidad de análisis*: esta etapa se realizó repetidas veces con la intención de asegurarnos no dejar de lado información pertinente y relevante.
- *Denominar, definir e interpretar las categorías:* asumiendo las categorías como las características o aspectos que presenta la comunicación, y en las cuales se clasifican las unidades de análisis; estas fueron determinadas de dos formas:
    - Por un lado, nuestro marco teórico nos permitió establecer algunas categorías, e incluso unidades, de forma previa (proceso deductivo).
    - Sin embargo, tras los primeros análisis, fue posible establecer categorías y subcategorías que emergieron de los datos (proceso inductivo), aunque debemos reconocer que surgen de alguna forma de nuestro marco teórico dado que es quien nos indicó que observar y detallar.
- *Codificar y cuantificar:* es importante aclarar que no en todos los aspectos analizados resultó de interés la cuantificación.
- *Relacionar entre si e interpretar las categorías establecidas:* cada aspecto analizado intentamos relacionarlos entre sí; en la medida de lo posible intentamos relacionar los resultados obtenidos en cada tarea. Además aunque el análisis se realizó de forma individual (por tarea) el objetivo era que de forma integral pudiésemos observar el significado de la derivada.
- *Relacionar el proceso de análisis con la cuestión que se indaga*: este aspecto se intentó hacer desde el inicio del análisis, identificando la terna del significado en

cada una de las tareas, que nos permitiera de manera global dar respuesta al problema planteado.

Lo anterior respalda el método seleccionado, como un análisis riguroso, sistemático y verificable (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 9).

En el siguiente capítulo precisaremos el análisis desarrollado en cada tarea.

3.5.2 Análisis clúster

Para finalizar nuestra investigación recurrimos al análisis clúster o de conglomerados, cuyo objetivo principal es la clasificación de los casos en grupos relativamente homogéneos a partir de un conjunto de variables clasificatorias (Arraiza, 2006).

En nuestro caso utilizamos este análisis con la intención de visualizar de manera sintetizada las distintas concepciones evocadas sobre el concepto de derivada. La idea era mediante el análisis, realizar una agrupación que no era posible detectar de manera explícita a través de los datos observados. En este caso agrupamos a los alumnos según la manifestación o no de algunas variables cuya presencia podía identificarse en las respuestas dadas.

Debemos mencionar que para ejecutar el análisis empleamos el programa *RStudio*, el cual se caracteriza por ser un software libre.

Tipos de análisis clúster

Existen varios tipos de análisis clúster, nosotros empleamos dos de ellos:

- *Método jerárquico aglomerativo:* este análisis comienza con tantos clúster como objetos tengamos que clasificar y en cada paso se recalculan las distancias entre los grupos existentes y se unen los grupos más similares o menos disimilares. El algoritmo acaba con un clúster conteniendo todos los elementos, formando una jerarquía (Universidad de Granada, 2017).
  Para esto se emplea una matriz de proximidades (distancias o similaridades) como base para el agrupamiento. En nuestro caso, al tratarse de variables cualitativas, empleamos medidas de similitud, y aunque existen varias de ellas probamos con aquellas que atribuyen un mayor énfasis a la coincidencia de la presencia de la variable y no tanto a la ausencia. Experimentamos así con las medidas de *Russel, Ochiai*, *Dice* y *Jaccard*; aunque cada medida hacia sus propias agrupaciones

debemos reconocer que con todas se obtenían la misma cantidad de grupos solo que distribuidos de distinta manera.

Por otra parte, el análisis jerárquico puede desarrollarse mediante distintos métodos, entre los más usados están:

- Single: la distancia entre dos clúster es la que hay entre los dos individuos más próximos de uno y otro grupo.
- Average: la distancia entre dos clúster es la media entre todos los pares posibles de casos (uno de cada clúster).
- Complete: la distancia entre dos clúster es la distancia que existe entre los individuos más separados de ambos grupos (Pérez, 2004).

Es importante mencionar que para este trabajo utilizamos el último, aunque el más empleado es average con él no se apreciaban claramente los grupos que podían conformarse. Y nuestro objetivo con el análisis era precisamente poder agrupar a los participantes para de este modo establecer los distintos perfiles.

Ahora bien, para visualizar el resultado del proceso jerárquico, se empleó un dendrograma, el cual resultó de gran ayuda para decidir el número de grupos que podrían representar nuestros datos.

- *Método de partición iterativa (kmeans):* el método consiste en separar las observaciones en *k* clúster, de manera que cada dato pertenezca a un grupo y sólo a uno. El algoritmo busca de forma iterativa:
  - Los centroides de los *k* clusters.
  - Asigna cada individuo a un clúster (Universidad de Granada, 2017).

Al ser iterativo se van usando los resultados de la partición anterior para mejorar la siguiente.

En realidad este fue el método que empleamos, pues el análisis jerárquico lo utilizamos únicamente para establecer el número inicial de grupos (Ver anexo #2).

Es necesario aclarar que esta es una técnica totalmente exploratoria cuya finalidad fue la de sugerirnos ideas respecto a los grupos y el comportamiento de las variables analizadas (Universidad de Granada, 2017).

CAPÍTULO IV

Análisis de los datos

En el siguiente apartado presentaremos la descripción e interpretación de los datos. Para ello llevaremos a cabo primeramente un análisis por tarea. Debemos mencionar que decidimos no analizar las respuestas de la tarea tres del primer cuestionario, pues ya teníamos suficiente información. Finalmente, sintetizamos los resultados obtenidos, describiendo perfiles del significado de derivada que manifestaron los futuros profesores.

4.1 ANÁLISIS POR TAREA

Para realizar el análisis de contenido, se transcribieron todas las respuestas de los cuestionarios, codificando a cada sujeto participante mediante la letra S y un número del 1 al 37. Posteriormente, con la intención de analizar cada tarea de forma separada, tomamos las respuestas obtenidas para cada una de ellas, manteniendo el código asignado para cada sujeto.

En términos generales, el análisis se desarrolló de la siguiente manera:

- Nuestro marco teórico nos permitió establecer de manera deductiva las primeras categorías y unidades de análisis, por lo que nuestro trabajo consistió inicialmente en identificarlas y clasificarlas.
- No obstante, los datos obtenidos permitieron además plantear algunas categorías emergentes en algunos aspectos (análisis inductivo).

A continuación presentamos el análisis de cada una de las tareas.

4.1.1 Tarea 1: definición de la derivada

Tal como se indicó en el capítulo anterior, la primera tarea propuesta en ambos cuestionarios consistía en que cada sujeto expresara con sus palabras la definición de derivada de una función en un punto.

Una revisión general de las respuestas, nos permitió darnos cuentas que era posible identificar, según nuestro marco teórico, aspectos de los tres componentes del significado de un contenido matemático escolar: estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos o modos de uso que dan los sujetos participantes al concepto de derivada.

De este modo el primer trabajo realizado consistió en tomar fragmentos de las respuestas dadas y separarlas en las categorías correspondientes. Obteniendo para cada uno de los componentes, los siguientes resultados:

a) Estructura conceptual

El proceso de análisis desarrollado para esta primera tarea, permitió identificar que el principal aspecto que emerge, según nuestro marco teórico, son los hechos. Por lo tanto, una primera inspección al respecto, se centró en determinar los términos que emplearon los futuros profesores en su definición.

Una vez identificados los términos que emplearon, se detectó que era posible categorizar estos en al menos tres grupos, por un lado aquellos términos que utilizaban como símil de la derivada, por otro las palabras que empleaban como adjetivo y finalmente aquellas palabras que servían de apoyo para la definición, la tabla 2 resume los principales términos identificados.

Tabla 2

Términos utilizados al definir derivada

Categoría	Términos	Frecuencia
Palabras empleadas como apoyo	Función continua	2
Palabras empleadas como símil de derivada	Pendiente	20
	Recta tangente	20
	Límite	2
	Límite del cociente incremental	3
	Cambio	2
	Media	1
	Variación	1
	Variación instantánea	1
Palabras utilizadas como adjetivo	Valor	7
	Número real	1
	Integral	1
	Derivable	3
	Aplicación lineal	1
	Incremento infinitesimal	1
	Velocidad	1

A estos términos deben adicionarse las palabras: *derivada, función y punto* que emplearon más de la mitad de los futuros profesores al iniciar su definición; sin embargo no las consideramos en la tabla ya que forman parte del concepto a definir. Asimismo, es importante mencionar, que los términos *pendiente* y *recta tangente*, aunque en frecuencia coinciden, no fueron empleados siempre de forma conjunta.

Una vez identificados los términos, se procedió a detectar la notación empleada en la definición dada sobre derivada, en la tabla 3 se muestran los principales resultados.

Tabla 3

Notación utilizada al definir derivada

Aspecto	Notación
Punto	a, x_0 y x
Dominio	A, D y $\mathbb{R}$
Función	f y $f(x)$
Derivada en un punto	$f'(x_0)$ y $f'(a)$
Otros	$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
	$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

En este sentido es reducida la variedad de notación empleada por los sujetos participantes, asimismo, capta nuestra atención que la simbología empleada es aquella establecida por convenio en la Matemática; por ejemplo todos los que nombran una función lo hacen mediante la letra f, además los puntos siempre fueron denotados por a o x_0; lo cual es indicio del fuerte arraigo en el uso de esta notación.

Sobresale además que solamente tres de los participantes hicieron mención explícita de la notación de derivada; es decir, a pesar de que hay más respuestas en las que utilizan esta notación, lo hacen de manera conjunta a la definición mediante límite, sin destacar que se trate de su notación. En términos generales, no se detecta relevancia ni frecuencia en el uso de notación al definir la derivada.

**** Definiciones dadas***

Ahora bien, al determinar términos, convenios y notaciones del campo conceptual empleado por los futuros profesores al definir la derivada, detectamos que de forma general era posible clasificar las definiciones dadas en cinco tipos:

I. *La derivada como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto:* en esta categoría se incorporaron aquellas respuestas en las que definieron la derivada de la función como, y solamente como, la pendiente de la recta tangente, incluyendo respuestas de tipo:

   - *La derivada es la pendiente de la función.*
   - *La derivada es el valor de la recta tangente.*
   - *La derivada es el punto tangente a la función.*

   Aunque es claro que estas expresiones no definen la derivada exactamente como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, por su similitud y relación fueron incorporadas en esta categoría todas aquellas definiciones que emplearon como palabras clave recta, tangente o pendiente, asumiendo de algún modo que la intención del participante iba en esa dirección.

II. *La derivada como límite:* en esta categoría se incluyen aquellas definiciones en las que el sujeto consideró la derivada como el límite de cociente incremental, ya sea porque lo describió de esta forma o porque lo expresara de manera simbólica.

III. *La derivada como pendiente de la recta tangente y como límite:* aquí se consideraron las respuestas de los sujetos que hicieron alusión a ambos aspectos en su definición.

IV. *La derivada como pendiente de la recta tangente y otro:* aquí incorporamos las respuestas que hacían alusión a la derivada como pendiente de la recta tangente, pero también mencionaban que se podía interpretar como un cambio o variación.

V. *Otras definiciones:* finalmente, se encontraron definiciones particulares que no calzan en ninguno de los casos anteriores, por lo que se agruparon en esta categoría.

En la tabla 4 se aprecia la cantidad de respuestas que hay en cada categoría:

Tabla 4
Tipo de definición dada y su frecuencia

Categoría	Cantidad de respuestas
La derivada sólo como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto	16
La derivada sólo como límite	4
La derivada como pendiente de la recta tangente y como límite	8
La derivada como pendiente de la recta tangente y otro	6
Otras definiciones	3

En este sentido, llama la atención que de los sujetos participantes (37 futuros profesores), 30 de ellos (el 81%) hacen referencia a la derivada como la pendiente de la recta tangente, o al menos a alguna aproximación a esto, de hecho la categoría en la que más respuestas se ubican es aquella en la que el sujeto consideró la derivada únicamente como la pendiente de la recta tangente.

Ahora bien, aunque la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva fue la definición que predominó, percibimos que la intención no era exactamente la misma en todos los casos, pues no todos los participantes se referían a la pendiente de la recta tangente, empleando el mismo verbo, dejando ver que en algunos casos no estaban definiendo, sino expresando o describiendo. En la tabla 5 se pueden apreciar los verbos utilizados.

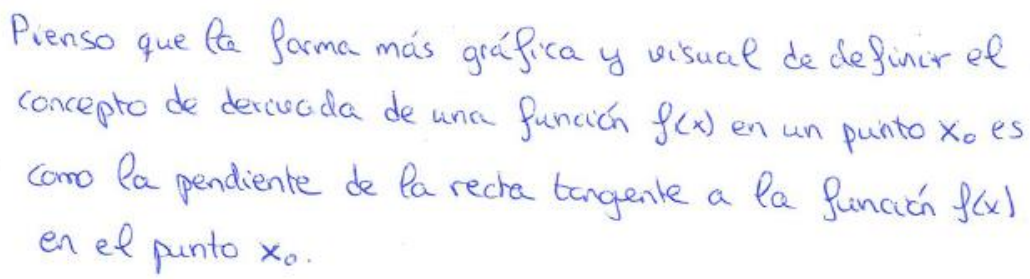
Tabla 5

Verbos empleados al definir derivada como pendiente de la recta tangente

Verbo	Frecuencia
Es	16
Representa	4
Dice	1
Indica	1
Corresponde	1
Coincide	1
Ninguno	6

Esto resulta interesante pues de una u otra forma reconocen que más que su definición están haciendo referencia a un modo de interpretar o utilizar la derivada.

Se puede asegurar entonces, que en el caso de la derivada, su interpretación geométrica es la que más prevalece, incluso algunos participantes destacan que esta forma de definirla permite una mejor visualización, tal como se aprecia en la figura 4 en la que se muestra en la respuesta dada por el sujeto S7.



Pienso que la forma más gráfica y visual de definir el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 es como la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_0.

Figura 4. Respuesta dada por S7, a la cuestión 1

Por otra parte, llama la atención que sólo cuatro de los participantes hayan recurrido de forma exclusiva a la definición de derivada mediante el límite. Además, la mayoría de los participantes que consideraron el límite, destacan ésta definición como la "formal" o "clásica", y describen otras definiciones como "básicas" o "intuitivas".

Ahora bien, sin importar la categoría en la que se ubique la respuesta, a excepción de un futuro profesor, ningún otro hizo referencia a la condiciones necesarias que debe cumplir la función, ni a sus elementos, para poder definir la derivada de una función en un punto dado. Por ejemplo, sólo dos respuestas hacen alusión a la función continua en su definición, sin embargo uno de ellos lo establece como condición suficiente para la existencia de la derivada. De las respuestas dadas, quizá la más similar a la que aparece en los libros y que contempla más aspectos es la que se muestra en la figura 5.

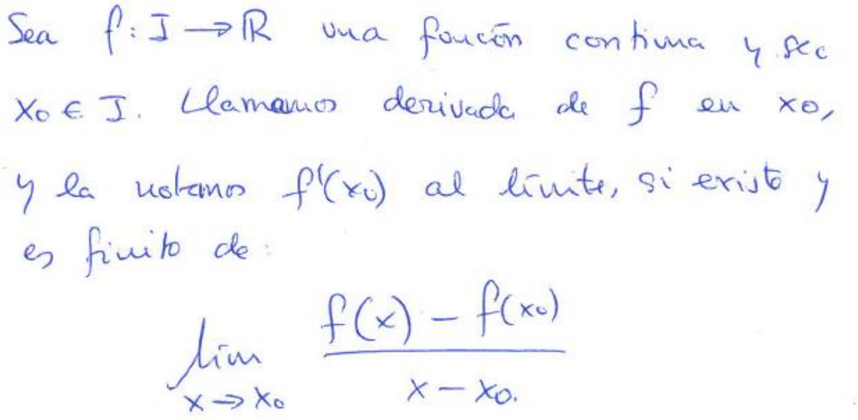


Figura 5. Respuesta dada por S4, a la cuestión 1

En términos generales, destaca la poca rigurosidad de las definiciones dadas. Como se mencionó en la descripción de las categorías, algunos estudiantes definían la derivada como la función tangente, el punto tangente, o bien otros colocaban simplemente la expresión algebraica del límite del cociente incremental sin mencionar nada al respecto; además, sólo unos cuantos hacen referencia a la derivada como un valor finito, por ejemplo.

b) Sistemas de representación

Aunque la tarea no solicitaba el uso de ningún sistema de representación en particular, por lo que la mayoría de las respuestas se encuentran de forma verbal, cerca de la mitad de los participantes (17 de ellos) complementaron su definición empleando representación simbólica y/o gráfica.

En cuanto a la representación simbólica, se determinó el uso de las siguientes expresiones:

- $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- $y = f(a) - f'(a)(x - a)$
- $y = ax + b.$

Aquellas definiciones en las que emplearon el límite, presentan pequeñas variaciones en cuanto a la notación del punto, ya sea como a o bien como x_0. Debe mencionarse que predominaron aquellas respuestas en las que colocan la expresión del límite, pero sin igualarlo a la notación de derivada f'.

Respecto a la ecuación de la recta tangente $y = f(a) - f'(a)(x - a)$, es utilizada solo por un participante quien lo hace para ilustrar que la derivada es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto a. Mientras la expresión $y = ax + b$ es acompañada de una representación gráfica en la que junto a la recta tangente se escribe dicha ecuación.

En relación a las representaciones gráficas, cuatro sujetos realizaron un dibujo de una curva y una recta tangente a ella en un punto. Sin embargo, sólo uno de ellos relacionó de alguna manera la representación utilizada con la derivada de la función, como se muestra en la figura 6.

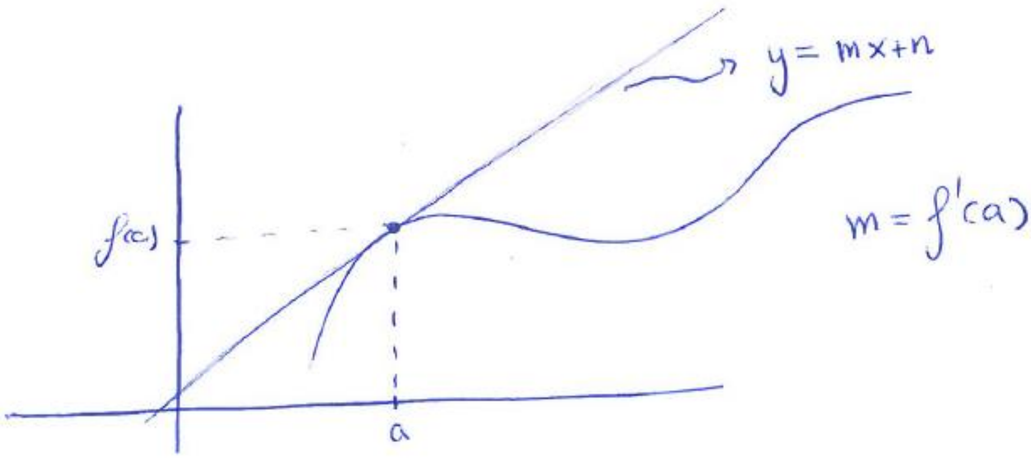


Figura 6. Gráfica realizada por S2, en la cuestión 1

Los otros tres participantes solo dibujaron la curva y la recta sin más detalle, aunque de forma general, todos los que utilizaron representación gráfica lo hicieron a modo de ilustración.

Por otra parte, solo en el caso de S2 se evidencia el uso tanto a la representación gráfica como simbólica; la gráfica ilustraba su definición de derivada como pendiente de la recta tangente; además, sin hacer mayor referencia, agregó de forma simbólica la definición de derivada como el límite del cociente incremental.

c) Sentidos y modo de uso

En esta primera tarea, el sentido que predomina al definir la derivada es como pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado. Aunque una de las respuestas destacó la derivada como velocidad media e instantánea, y otros más se refirieron a ella como un cambio, variación o crecimiento.

4.1.2 Tarea 2: verdadero y falso

En esta sección analizaremos las respuestas y argumentos dados por los participantes a los enunciados propuestos en la tarea 2. Los aspectos aquí analizados amplían en buena medida la estructura conceptual del significado de derivada que evidenciaron los futuros profesores en sus respuestas a la tarea 1.

Para realizar el análisis correspondiente, además de resumir los argumentos empleados y verificar que acertaran la veracidad del enunciado; prestamos atención a los aspectos que se describen en la tabla 6, referentes al razonamiento empleado por el futuro profesor.

Tabla 6
Categorías para el análisis de los razonamientos empleados

Aspecto	Categorías	Descripción
Interpretación en la que basa el razonamiento	Geométrica	Consideramos que el razonamiento del futuro profesor se basa en una interpretación geométrica si su argumento se fundamenta en aspectos que visualiza en la gráfica dada.
	Variacional	El razonamiento se apoya en una interpretación variacional si recurre en su argumento a la definición, resultados y relaciones establecidas dentro de la derivada, o bien si acude a procedimientos algebraicos.
Pertinencia del razonamiento empleado	Adecuado	Se consideró un razonamiento adecuado, si la vía elegida para su argumentación es apropiada para el enunciado particular. Esto sin importar si lo realiza de manera correcta o no.
	No adecuado	Por el contrario, el razonamiento se contempló como no adecuado, cundo el camino elegido para la justificación no es acertado para el enunciado específico.

Tabla 6
Categorías para el análisis de los razonamientos empleados

Aspecto	Categorías	Descripción
Tipo de razonamiento	Definición	El argumento empleado hace referencia a aspectos propios de la definición de derivada. Por ejemplo a la necesidad de que la derivada se defina en un punto de acumulación del dominio de la función.
	Consecuencia gráfica de la definición	El argumento se refiere a aspectos meramente gráficos, por ejemplo al hecho de que la derivada se indefine en puntos angulares o "picos" de la gráfica de la función.
	Implicación directa	Consideramos un razonamiento de este tipo si el argumento se apoya en algún resultado o propiedad en forma de implicación directa, por ejemplo "si una función es derivable, entonces es continua".
	Implicación contrarrecíproca	De forma análoga al anterior, en este tipo se contemplaron los argumentos basados en la negación de una implicación, por ejemplo "si no es continua, entonces no es derivable".
	Algebraico	Su argumento se basa únicamente en procesos algebraicos.
	Otro	Incluimos aquí el razonamiento fundado en argumentos que no encajan en ninguna de las clasificaciones anteriores. Y que se tratan de argumentos muy particulares.
Modo de empleo del argumento	Correcto	Aquí incorporamos los argumentos que fueron empleados de manera correcta aunque no fueran válidos o pertinentes para el enunciado analizado.
	Incorrecto	Esta categoría incluye los argumentos que presentan fallos o errores en su ejecución. Ya sea error de cálculo o alguna implicación o afirmación falsa.

El análisis lo realizamos para cada uno de los enunciados propuestos.

Enunciado #1

La situación presentada fue la que se muestra en la figura 7.

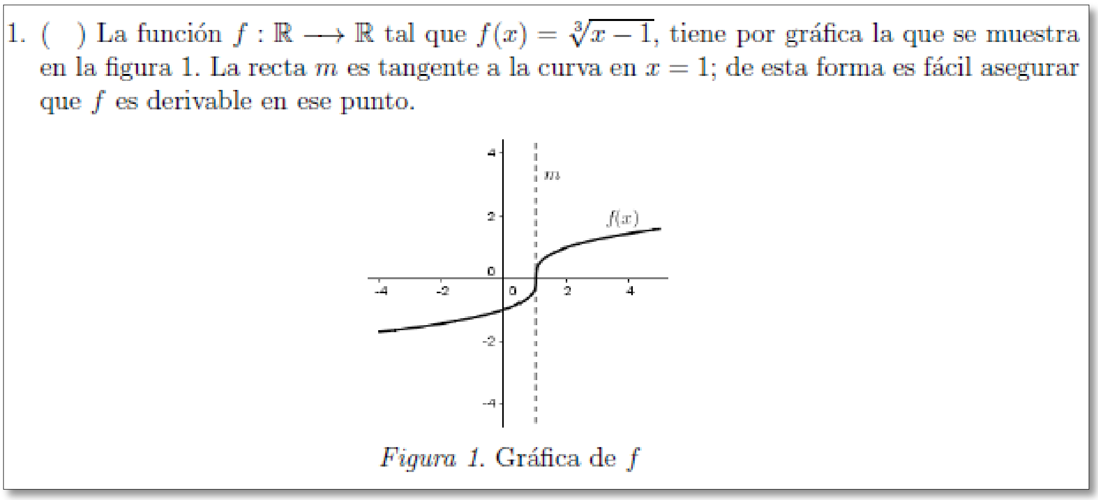

1. ( ) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, tiene por gráfica la que se muestra en la figura 1. La recta m es tangente a la curva en $x = 1$; de esta forma es fácil asegurar que f es derivable en ese punto.

Figura 1. Gráfica de f

Figura 7. Primer enunciado de la tarea 2, cuestionario 1

Este enunciado fue el que más acertaron los participantes, en cuanto a su veracidad; fue contestado por 19 de los futuros profesores y solamente dos de ellos consideraron el enunciado como verdadero. En un caso se debe a que determina algebraicamente la función $f'(x)$, pero algunos errores en su cálculo lo llevan a concluir que $f'(1) = 0$, afirmando entonces que la función es derivable.

El otro caso llama un poco más la atención, ya que calcula los límites laterales de la función derivada, cuando x se aproxima a 1, concluyendo que al ser iguales a $+\infty$, la función es derivable. Esto es interesante, pues no considera la necesidad de que el límite que define la derivada sea un número real.

Ahora bien, de las 17 respuestas que indicaron que el enunciado era falso, es posible separar los argumentos dados en dos grupos: por un lado aquellos que dieron un argumento aceptable y por otra parte los que a pesar de que tuvieron la intención, su justificación no tiene sentido con el enunciado presentado. En cada caso categorizaremos los argumentos empleados.

a) Argumentos aceptables

En este grupo se encuentran 10 de las respuestas dadas. Emergen principalmente 4 argumentos:

- La pendiente de la recta tangente dada es infinita, lo cual hace a la función no derivable.
- Los límites laterales de $f'(x)$ cuando x tiende a 1 no coinciden.
- $f'(x)$ se indefine en $x = 1$.
- Que exista recta tangente, no implica que la función sea derivable en el punto de tangencia.

Destacamos el primero de los argumentos mencionados, ya que los tres participantes que lo emplean señalan que la derivada no puede ser infinita, que debe tener un valor para estar definida; entendemos aquí que se refieren a que la derivada es un valor real. Es interesante que en la primera tarea solo uno de los participantes hizo mención de esto; incluso, como señalamos anteriormente uno de los participantes que aseguró que el enunciado era verdadero lo hizo justamente por no tomar en consideración este aspecto.

Por otra parte, el último argumento presentado, aunque solo fue empleado por un sujeto, aclara que la derivada permite determinar la recta tangente, pero que al contrario no siempre es cierto, aunque no explica por qué.

b) Argumentos sin sentido

De los futuros profesores, 7 de ellos a pesar de acertar que el enunciado era falso, emplean un argumento que no es coherente con lo planteado, o bien no dan ninguno, las respuestas halladas son:

- No es derivable.
- Aunque gráficamente sabemos que es derivable, no es fácil asegurarlo, hay que probar que los límites laterales coinciden.
- La recta dada no es la tangente en ese punto.
- La función no es continua y por tanto no derivable.

Estas respuestas dejan ver que no entienden por qué la función no es derivable o incluso que la consideran derivable pero lo que rechazan es que el enunciado afirme "que es fácil asegurar" que la función sea derivable.

*** Análisis del razonamiento empleado**

Ahora bien, con el objetivo de analizar el razonamiento empleado por los futuros profesores, nos enfocamos en el tipo de argumento empleado y en los aspectos descritos en la tabla 6.

Para este primer enunciado detectamos que tres participantes emplearon dos argumentos, mientras que tres de los sujetos no utilizaron ninguno que permitiera analizar el razonamiento. Por lo tanto, para este caso se estudió un total de 19 casos.

Inicialmente pudimos observar que había 5 razonamientos apoyados en una interpretación geométrica, mientras que 14 de ellos recurrieron a una interpretación variacional. Asimismo, en cuanto a la pertinencia del razonamiento empleado, dos de ellos se consideraron no adecuados para el enunciado planteado, aunque debe mencionarse que no coinciden precisamente con los casos de los participantes que lo catalogaron como verdadero.

Ahora, en cuanto al tipo de razonamiento utilizado, se destaca la diversidad encontrada, la tabla 7 muestra la frecuencia con la que se halló cada tipo.

Tabla 7
Tipo de razonamiento empleado en el enunciado 1, tarea 2

Tipo de razonamiento	Frecuencia
Definición	2
Consecuencia grafica de la definición	1
Implicación contrarrecíproca	3
Implicación directa	5
Algebraico	5
Otros	3

Sobresaliendo entonces los razonamientos de tipo algebraico y aquellos que hacen uso de alguna implicación directa.

Por otra parte, la elección de un razonamiento adecuado o pertinente para el enunciado particular, no siempre implicó un desarrollo correcto del mismo. De igual manera, un razonamiento pudo ser correcto aunque no fuera válido o adecuado para el caso particular. Por ejemplo, en este primer enunciado se hallaron 13 argumentos correctos, a pesar de que eran 17 los razonamientos adecuados; es decir, no siempre que el futuro profesor seleccionó un razonamiento apropiado, logró ejecutarlo bien. Esto debido a:

- Errores de cálculo.
- Considerar aspectos de la función que en realidad no estaban presentes.
- No contemplar los aspectos de la definición de derivada.

Un ejemplo de lo anterior se muestra en la figura 8 en la que se aprecia la respuesta dada por S6, en donde elegir un razonamiento algebraico era adecuado para el enunciado dado, pero su ejecución es incorrecta, ya que cometió un error de cálculo al derivar la raíz cúbica.

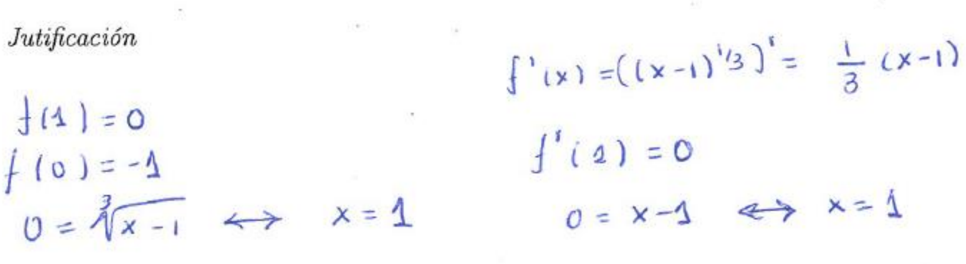


Figura 8. Respuesta dada por S6, al enunciado 1 de la tarea 2

Finalmente prestamos atención a los tipos de razonamiento que más se desarrollaron de forma correcta e incorrecta. Evidenciándose para este enunciado que la implicación directa y contrarrecíproca fueron las que se emplearon mayormente con corrección, mientras que de los argumentos incorrectos se hallan principalmente en razonamientos algebraicos.

Enunciado #2

Aquí les pedimos analizar la afirmación que se encuentra en la figura 9.

2. ( ) Para la función $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$; tal que $f(x)=x^3+2x-1$, se cumple que f es derivable en $x=1$, y además $f'(1)=5$.

Figura 9. Segundo enunciado de la tarea 2, cuestionario 1

Este enunciado es sin lugar a dudas el que más sorprendió en cuanto a respuestas obtenidas, pues sólo 7 de los participantes indicaron que el enunciado era falso argumentando que no tenía sentido hablar de derivabilidad en una función con dominio discreto, ya que esta no sería continua, además, para que una función posea derivada en un punto es necesario que éste sea de acumulación; asimismo un futuro profesor destaca que en la derivada se involucra el cálculo de límites lo cual no se define en un dominio discreto.

Sin embargo, algo que captó nuestra atención fue que 12 de los sujetos afirmaron que el enunciado era verdadero; los argumentos o justificaciones empleados se pueden resumir de forma general en la verificación de que $f'(1) = 5$, los métodos empleados para ello fueron:

- Determinar algebraicamente $f'(x)$ y evaluar en $x = 1$, o bien,
- Usar la definición de $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, y calcular límites laterales.

El primer método es el que predominó, siendo utilizado por 10 de los participantes.

Más de la mitad de quienes consideraron verdadero el enunciado señalan en su argumento la necesidad de que la función sea continua para poder ser derivable. Esto llama la atención en dos sentidos. Por un lado, que destaquen esta condición necesaria a pesar de no haberla considerado para definir la derivada en la primera tarea propuesta. Y por otra parte, que aseguren que la función dada es continua, afirmando que "al ser un polinomio que no se indefine en los naturales" se verifica la continuidad; incluso se encuentran respuestas como la que se aprecia en la figura 10, en la que se muestra una "prueba" de que la función analizada es continua.

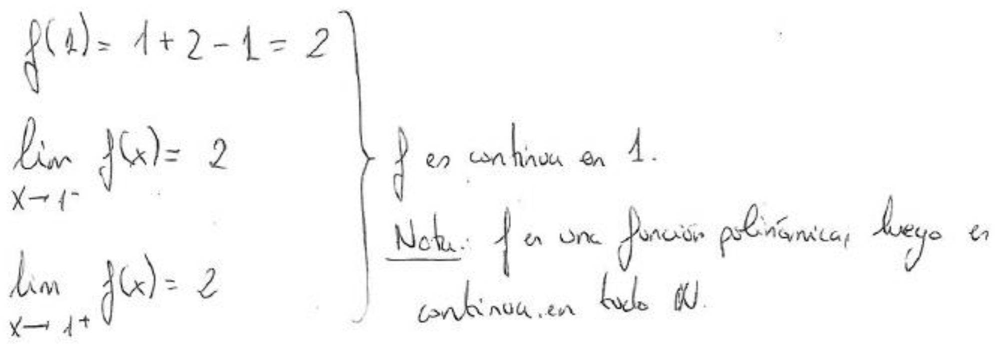


Figura 10. Porción del argumento empleado por S10, al enunciado 2

Finalmente resaltamos que 5 de los participantes que aseguran que el enunciado es verdadero no consideran la necesidad de probar o verificar que la función sea derivable, les basta con mostrar algebraicamente que $f'(1) = 5$, detectándose nuevamente la importancia que le asignan al trabajo algebraico.

*** Análisis del razonamiento empleado**

En este enunciado, tres de los participantes recurrieron a dos argumentos distintos, por lo que en total se analizaron 22 argumentos.

Dado el tipo de enunciado prevaleció la interpretación variacional; es decir, todos los razonamientos requirieron de hacer uso de la definición, algún resultado o bien algún proceso algebraico para argumentar su elección de veracidad al enunciado.

En cuanto a razonamiento utilizado, se detecta que 17 de ellos no eligen adecuadamente la vía de argumentación, incluso algunos de los futuros profesores que indicaron acertadamente que el enunciado era falso. En este enunciado particular resaltan razonamientos no pertinentes dado a que, como se indicó anteriormente, se consideró la función dada como continua, lo que los llevó a argumentos no adecuados.

Ahora bien, dejando de lado la validez del razonamiento utilizado, se aprecia que 17 de los argumentos son correctos, mientas que los otros 5 caen en la falla de considerar la continuidad de la función o bien el hecho de que las derivadas parciales coincidan, como condiciones suficientes para la derivabilidad.

Destacamos que a pesar de que los razonamientos empleados no fueron adecuados para este enunciado, 17 de los argumentos son correctos, aunque no en este contexto. Por ejemplo, en la figura 11 se puede observar un argumento que aunque está correcto, pues algebraicamente lo es, no es adecuado en el contexto del enunciado presentado, en el que es necesario usar la definición de derivada.

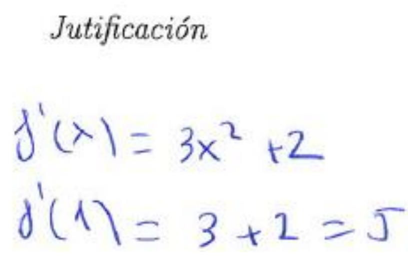


Figura 11. Respuesta dada por S1, al enunciado 2 de la tarea 2

De manera similar a este, se hallaron 11 argumentos que a pesar de no ser válidos para el enunciado, se consideraron como correctos.

Por otra parte, en cuanto al tipo de razonamiento, la tabla 8 muestra los razonamientos utilizados en este enunciado.

Tabla 8
Tipo de razonamiento empleado en el enunciado 2, tarea 2

Tipo de razonamiento	Frecuencia
Definición	5
Algebraico	9
Implicación directa	7
Implicación contrarrecíproca	1

Tal como se puede apreciar, el razonamiento empleado mayormente fue el algebraico, y aunque los cálculos se realizaron correctamente, no tenía sentido lo que se realizó para la función dada en el enunciado.

Enunciado # 3

Se presentó la afirmación que se presenta en la figura 12

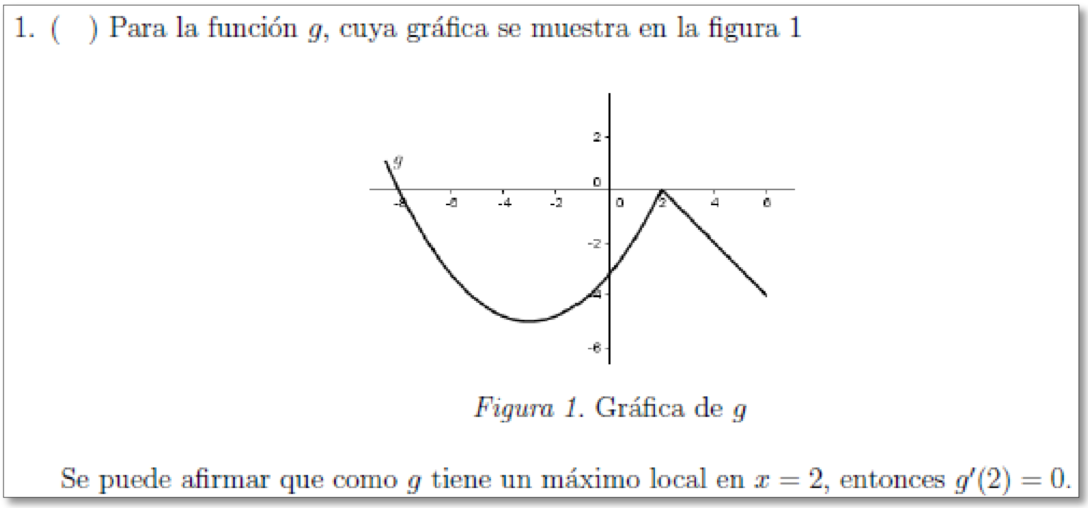

1. ( ) Para la función g, cuya gráfica se muestra en la figura 1

Figura 1. Gráfica de g

Se puede afirmar que como g tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

Figura 12. Primer enunciado tarea 2, cuestionario 2

Este enunciado fue resuelto por 17 participantes ya que uno de ellos no lo contestó. Aquí la mayoría de los sujetos sostiene que el enunciado es falso (12 de ellos), y en términos generales sus argumentos pueden resumirse en cuatro categorías, algunas de ellas incluso en subcategorías, tal como se muestra a continuación:

1. *En puntos donde la gráfica presenta "picos" no es posible definir la derivada:* este argumento es el que se presenta con mayor frecuencia ya que 6 de los participantes se apoyan en él. Entre las respuestas que emplean este argumento pueden distinguirse dos subcategorías:
    - Quienes no justifican porqué en los "picos" la función no es derivable.
    - Aquellos que agregan alguna razón del por qué: algunos participantes aseguran que la presencia de "picos" provoca que no exista una única recta tangente o que los límites laterales de la derivada no coincidan, incluso un sujeto afirma que esto implica que no haya máximo ni continuidad en ese punto.
2. *La función no es derivable*: algunos no justifican porqué aseguran que el enunciado es falso y se limitan a decir que la función no es derivable en ese punto. De las 3 respuestas que emplearon este argumento solo un estudiante adicionó "hay un cambio brusco en la monotonía".
3. *Los límites laterales de la derivada en ese punto no coinciden:* hallamos dos argumentos de este tipo.
4. *La pendiente de la recta tangente es ese punto es infinita, por tanto no es derivable:* este argumento fue empleado únicamente por un futuro profesor.

Resaltamos el hecho de que aunque la mayoría tiene claro que la función no es derivable en el punto dado, no logran argumentar el porqué, incluso muestran ciertas confusiones como el caso del estudiante que empleó el último argumento quien además asegura que la función no es continua en el punto dado.

Ahora bien, también se hallaron 5 respuestas que afirmaron que el enunciado era verdadero, básicamente sus argumentos fueron:

1. *La derivada se anula en los extremos de una función*: cuatro de los participantes que consideraron como verdadero el enunciado recurren a este resultado, sin embargo, no toman en consideración que esto es cierto siempre que la función sea derivable.
2. *No existe tangente, por tanto es cero*: este argumento fue empleado por un sujeto, sin dar mayor explicación.

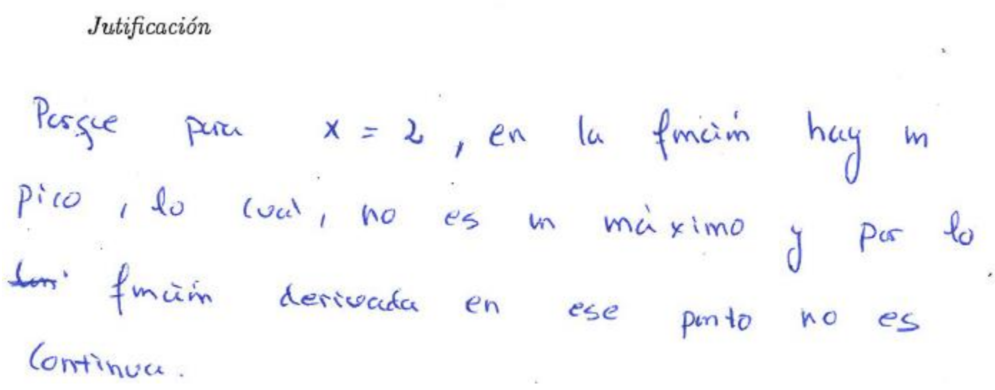
*** Análisis del razonamiento empleado**

En este enunciado, se detectaron dos respuestas que no tenían sentido analizarlas, ya que no dieron ningún argumento, por lo que no podíamos inferir nada sobre el razonamiento; por otra parte uno de los participantes empleó dos justificaciones distintas, por lo que en total se analizaron 16 argumentos.

Para este enunciado, los futuros profesores emplearon un razonamiento basado tanto en la interpretación geométrica como la variacional, de modo que 8 argumentos se agruparon en cada una de las categorías. Además se encontró que 12 de los razonamientos eran adecuados al tipo de enunciado propuesto; de los cuales, 9 se ejecutaron de manera correcta.

Los 4 razonamientos considerados no adecuados para el enunciado, se basaron en el hecho de que la derivada se anula en puntos extremos dela función, lo cual es correcto, siempre y cuando la función sea derivable en ese punto, y precisamente por ese motivo no era válido para el enunciado propuesto.

En total 3 de los argumentos fueron incorrectos, aunque se asocian en este caso a razonamientos adecuados, pero que fallan principalmente por afirmaciones erróneas, tal como se visualiza en la figura 13, en la que se aprecia que su argumento se basa en que la derivada no se define en "picos" de la gráfica; lo cual es válido o adecuado, sin embargo el argumento posterior es incorrecto.


Jutificación

Porque para x = 2, en la función hay un pico, lo cual, no es un máximo y por lo función derivada en ese punto no es continua.

Figura 13. Respuesta dada por S36, al enunciado 3 de la tarea 2

Por último, en la tabla 9 se agrupan los razonamientos empleados para este enunciado según su frecuencia.

Tabla 9
Tipo de razonamiento empleado en el enunciado 3, tarea 2

Tipo de razonamiento	Frecuencia
Consecuencia gráfica de la definición	7
Implicación directa	4
Implicación contrarrecíproca	3
Otro	1

Así, puede apreciar como sobresale particularmente el razonamiento basado en la consecuencia gráfica de la derivada.

Enunciado #4

La figura 14 muestra el enunciado presentado.

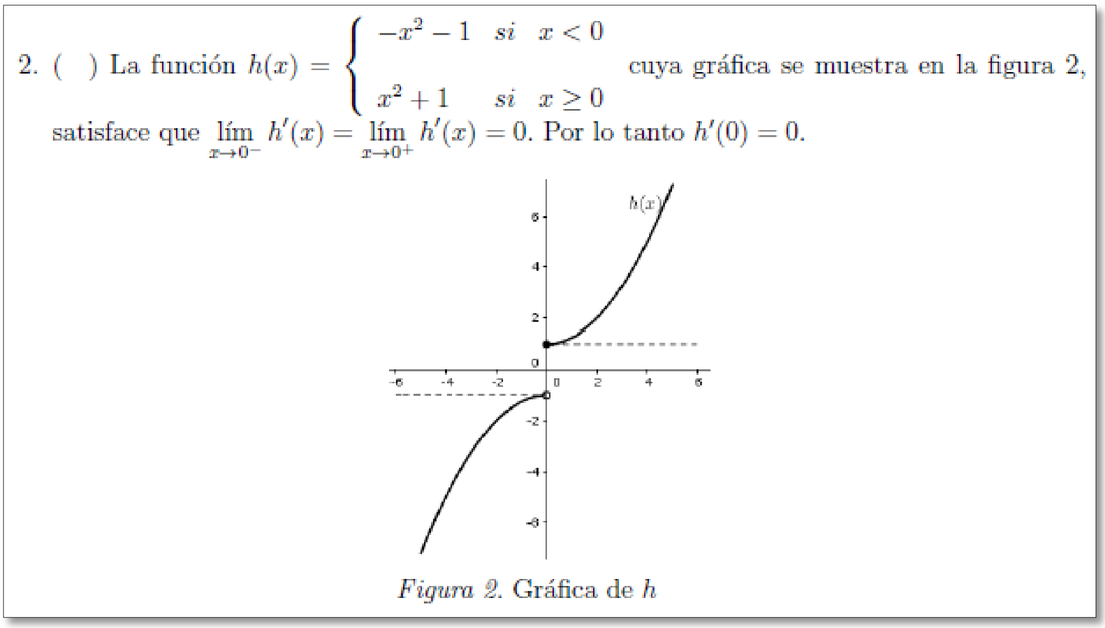

2. ( ) La función $h(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ cuya gráfica se muestra en la figura 2, satisface que $\lim\limits_{x \to 0^-} h'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h'(x) = 0$. Por lo tanto $h'(0) = 0$.

Figura 2. Gráfica de h

Figura 14. Segundo enunciado tarea 2, cuestionario 2

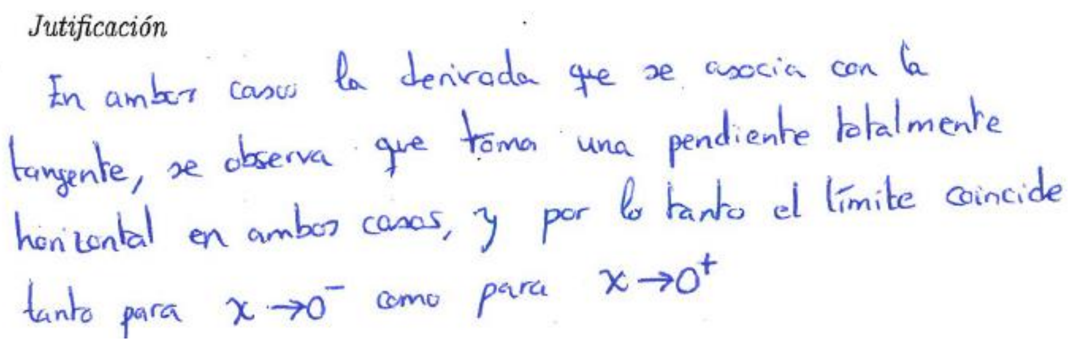
De las 18 respuestas obtenidas, 7 de ellas afirman que el enunciado es verdadero, de los cuales 6 justifican que al derivar los criterios dados y evaluarlos en cero, el valor en ambos casos coincide, de forma que $h´(0) = 0$. Resulta interesante la respuesta dada por S30 quien además señaló que la función no es continua y por tanto no derivable, sin embargo dado que $\lim\limits_{x \to 0^-} h´(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h´(x)$, entonces el enunciado es verdadero. El caso restante justifica la validez de la afirmación, ya que en ambos casos la recta tangente es horizontal por lo que la pendiente es igual a cero.

Los 11 futuros profesores que por el contrario consideran el enunciado como falso, basan su argumento en que la función no es continua y por tanto no derivable, dos de ellos emplea el razonamiento: si fuera verdad que es derivable, entonces sería continua y no lo es.

*** Análisis del razonamiento empleado**

En este último caso analizamos 19 argumentos, dado que uno de los participantes empleó dos distintos. Aquí la mayoría de los futuros profesores empleó argumentos desde una interpretación variacional, a excepción de uno de ellos que lo hizo desde la geométrica.

De los razonamientos empleados 12 de ellos se consideran como adecuados, y fueron precisamente lo utilizados por los participantes que indicaron apropiadamente que el enunciado era falso. Ahora bien, pese a que se emplearon 7 razonamientos no adecuados, todos los argumentos utilizados se contemplan como correctos, para ilustrar esto se puede observar la respuesta que se encuentra en la figura 15, en la que se puede apreciar como lo que manifiesta en su argumento es cierto, es correcto; sin embargo no le es útil o ni suficiente para para validar lo que se expone en el enunciado correspondiente.



Jutificación

En ambos casos la derivada que se asocia con la tangente, se observa que toma una pendiente totalmente horizontal en ambos casos, y por lo tanto el límite coincide tanto para $x \to 0^-$ como para $x \to 0^+$

Figura 15. Respuesta dada por S21, al enunciado 3 de la tarea 2

En general esto sucedió con la mayoría de los que afirmaron que el enunciado era verdadero. Así, se aprecia en este enunciado (al igual que en algunos otros) que el fallo principal en el razonamiento se debe a considerar como suficientes aspectos que en realidad son necesarios.

Por último, en la tabla 10 se contempla el tipo de razonamiento empleado en este enunciado. Destacándose aquí el razonamiento por implicación contrarrecíproca como el más empleado.

Tabla 10
Tipo de razonamiento empleado en el enunciado 4, tarea 2

Tipo de razonamiento	Frecuencia
Implicación directa	6
Implicación contrarrecíproca	10
Algebraico	3

4.1.3 Tarea 3: aplicación de la derivada

Tal como detallamos en el capítulo 2, comprender un concepto matemático, implica entender los modos de uso, contextos, fenómenos y situaciones en los que está involucrado. Es por ello que en el cuestionario dos, en la tarea tres les solicitamos a los participantes escribir tres aplicaciones en las que se utiliza la derivada de una función en un punto, además de redactar un problema cuya solución involucrara dicho concepto. A continuación describimos los resultados de las respuestas dadas.

a) Aplicaciones de la derivada

En esta primera parte, los participantes anotaron 60 aplicaciones en las que se involucra la noción de derivada, recordemos que se le solicitaron tres a cada uno y este cuestionario fue resulto por 18 sujetos, sin embargo algunos de ellos dieron más aportes. Las aplicaciones dadas pueden agruparse en los siguientes contextos:

- Estudiar la monotonía y concavidad de la función
- Determinar puntos máximos, mínimos y de inflexión
- Determinar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto
- Integrar
- Calcular el Polinomio de Taylor
- Resolver ecuaciones diferenciales
- Estudiar trayectoria de cuerpos
- Determinar velocidad y aceleración de objetos
- Determinar relación entre variables estadísticas

- Optimización en la resolución de problemas varios: poblaciones, beneficios de una empresa.

Dados los datos que aportan en las respuestas, observamos que dichos contextos pueden categorizarse en al menos cinco tipos de *situaciones:*

- *Situación matemática:* se incluyen en esta categoría todas aquellas aplicaciones de la derivada que forman parte de prácticas propias de la disciplina matemática.
- *Situación física:* se consideran aquellas situaciones relativas a la rama de la física.
- *Situación estadística:* se incluyen los contextos relacionados con la estadística.
- *Situación laboral:* contemplamos aquí la optimización se situaciones empresariales o laborales.

Debemos mencionar que los participantes solo indicaron la aplicación, las categorías de contextos y situaciones presentadas, son un esfuerzo realizado por organizar los aportes dados por los futuros profesores.

Ahora bien, una vez categorizadas las respuestas obtenidas, se detectó que la situación que más predominó fue la matemática, con un total de 44 aplicaciones en esta línea; seguida de la física con 14, la laboral y la estadística con 1 cada una. Llama la atención entonces, que la mayoría de los futuros profesores destaque el uso de la derivada dentro de la misma disciplina, visualizando en menor medida su aplicación en la resolución de problemas de distinta índole. Aunque debemos mencionar que muchas de las aplicaciones se colocaron dentro de una situación matemática por no tener más detalles, pues en realidad estas pueden ser empleadas en múltiples situaciones, tal es el caso de la optimización.

En cuanto a los contextos matemáticos, destacan por frecuencia el determinar la ecuación de la recta tangente (nuevamente destaca este modo de uso), el estudio de la monotonía de una función, así como el de hallar los puntos máximos y mínimos de una función. De los contextos en situaciones físicas, sobresale el cálculo de la velocidad. Los otros contextos fueron mencionados una o dos veces únicamente.

b) Problema en el que se involucra la derivada

Tal como se mencionó anteriormente, esta tercera tarea contaba con una segunda parte en la que se les solicitaba a los futuros profesores, ya no mencionar el contexto en el que se aplica el concepto de derivada, sino redactar un problema en cuya resolución estuviera implícita. Los participantes no tenían que resolverlo, solo plantearlo.

Aunque se les solicitó redactar un problema; algunos de ellos aportaron dos o tres; además dos de los participantes no propusieron un problema, sino que dieron un contexto adicional a los que habían mencionado en la primera parte de la tarea. Así, en total se analizaron 20 propuestas de problema.

Nuestro trabajo se enfocó entonces en analizar el tipo de problema planteado y determinar el contexto y la situación en la que se encuentra cada uno con el fin de identificar los principales sentidos que atribuyen al concepto de derivada.

En términos generales los problemas propuestos se adaptaron bastante bien a las situaciones ya establecidas en la primera parte; sin embargo, dado que ahora si disponíamos de más detalles respecto a la aplicación, se pudo ser más específico al establecer las situaciones; por lo tanto además de las situaciones anteriores se añadieron las siguientes:

I. *Situación astronómica:* un participante destacó el uso de la derivada en situaciones astronómicas, refiriéndose al trabajo con ondas y trayectorias en cuerpos espaciales.
II. *Situación personal/laboral:* incluimos aquí aquellos casos en los que la situación podría referirse a algo personal o bien laboral, por ejemplo la optimización en la construcción de una caja; no aclarándose su finalidad.
III. *Situación económica/empresarial:* aquí se considera los problemas que hacen referencia a contextos económicos de una empresa, como la optimización en la producción y la obtención de beneficios.
IV. *Situación del entorno natural:* incluidos aquí los problemas que tienen que ver con aspectos de la naturaleza, por ejemplo uno de los participantes propuso un problema que tiene que ver con el cálculo de la pendiente de una montaña.

En la tabla 11 mostramos los principales contextos, en la situación correspondiente y la frecuencia en la que se presentan en los problemas analizados.

Tabla 11
Situaciones y contextos de los problemas propuestos

Situación	Contexto	Frecuencia
Astronomía	Calcular ondas y trayectorias de objetos espaciales*	1
Matemática	Análisis de funciones	5
	Determinar la recta tangente	2
	Resolver ecuaciones diferenciales	1
	Calcular distancias	1
Personal/laboral	Optimización en la construcción de objetos	3
Económica/empresarial	Análisis de funciones económicas	5
Física	Calcular la velocidad	3
Entorno natural	Determinar pendiente de la recta tangente	1

Nota. * = Propuso el contexto pero no se redactó el problema al respecto

Se puede observar como a pesar de que el modo de uso que más predominó en la primera tarea que fue la pendiente de la recta tangente, y que incluso destacaba en la primera parte de ésta, aquí tiene menos presencia; sobresaliendo el análisis de funciones, principalmente el determinar la monotonía y puntos extremos de una curva, tanto en situaciones económicas como matemáticas.

*** Tipo de tarea propuesta**

Un análisis más allá del sentido del problema propuesto, permite detectar que de los 20 enunciados analizados solo 11 de ellos suponen realmente un problema, los 9 restantes se caracterizan más por ser un ejercicio usual al estudiar el tema. Un ejemplo de esto, es el que se puede observar en la figura 16, en el que se establece un ejercicio con un contexto meramente matemático en el que se establece de forma directa lo que se debe hacer.

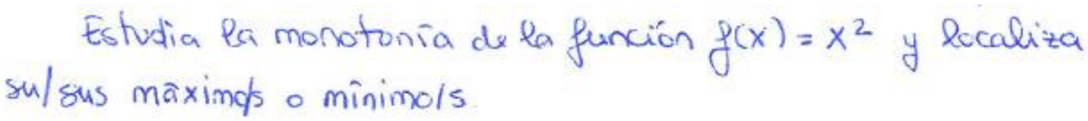

Estudia la monotonía de la función $f(x) = x^2$ y localiza su/sus máximo/s o mínimo/s.

Figura 16. Problema propuesto por S28

Por otra parte, 2 de los enunciados propuestos pueden resolverse sin necesidad de involucrar la derivada de la función, un ejemplo de ello se puede apreciar en la figura 17.

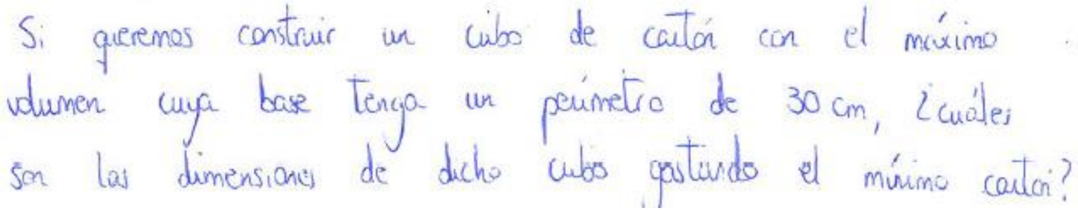

Si queremos construir un cubo de cartón con el máximo volumen cuya base tenga un perímetro de 30 cm, ¿cuáles son las dimensiones de dicho cubos gastando el mínimo cartón?

Figura 17. Problema propuesto por S23

En este caso, el problema planteado tuvo la intención de ser de optimización, sin embargo su resolución no requiere más que conocer cómo se calcula el perímetro del cuadrado. De forma similar, en otra respuesta, un sujeto plantea un ejercicio para determinar la pendiente de la recta tangente en un punto, pero la función que da es una recta, por lo que sin necesidad de derivar se podría identificar el valor de la pendiente. No obstante, ambos problemas fueron cuantificados en los contextos citados en la tabla 11, ya que el objetivo en ese caso era determinar el sentido y los contextos, en el que se aplica la derivada, que destacan los futuros profesores.

Adicionalmente, tres de los problemas planteados no podían resolverse por falta de datos o información, tal es el caso del problema de la figura 18, en el que se detecta nuevamente la intención de proponer un problema de optimización, sin embargo tal como está escrito no podría resolverse.

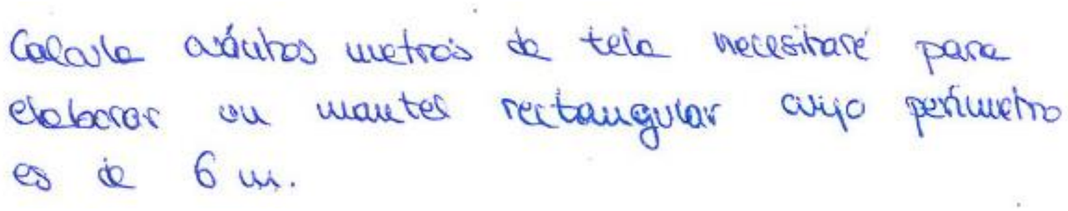

Calcula cuántos metros de tela necesitaré para elaborar un mantel rectangular cuyo perímetro es de 6 m.

Figura 18. Problema propuesto por S24

Finalmente, mencionar que en términos generales los problemas y ejercicios propuestos no son complejos, empleando en su mayoría funciones polinómicas a excepción de dos casos: uno que emplea una función racional y otra que es la da en su forma paramétrica.

4.2 PERFILES DEL SIGNIFICADO DE DERIVADA

Tras un estudio a las respuestas dadas a cada una de las tareas propuestas, consideramos pertinente realizar un análisis más general, que englobe los aspectos más relevantes de las respuestas dadas *por participante*, lo cual nos permita una visualización más amplia del significado de derivada que pusieron de manifiesto.

Para esto tomamos las respuestas dadas a las tareas 1 y 2, y nos preocupamos por detectar en ellas (de forma integral) la presencia o ausencia de los elementos de la derivada que estaban involucrados. Un análisis detallado de la definición y los argumentos nos permitió observar que existía cierta tendencia a destacar unos u otros elementos y aunque podíamos identificar aquellos que eran citados con mayor frecuencia, no era fácil delimitar o definir perfiles a simple vista. Es por ello que decidimos recurrir a una herramienta estadística que nos ayudara a determinar grupos de participantes (respuestas) que de una u otra forma tuvieran similitud, y así delimitar los perfiles.

Acudimos al programa *R* para realizar un análisis clúster que nos agrupara a los participantes de manera oportuna. Para dicho análisis consideramos las siguientes variables:

- Define la derivada mediante el límite.
- Considera al menos uno de los requisitos o aspectos de la definición de derivada en un punto: ser un punto de acumulación y la derivada es un número real.
- Toma en cuenta al menos una de las siguientes condiciones: la función debe ser continua en el punto, las derivadas laterales deben coincidir.
- Reconoce la existencia de la relación entre la derivada de una función en un punto y la continuidad, o bien entre la derivada y los valores extremos de una función.
- Hace alusión a la interpretación geométrica de la derivada: la derivada como pendiente de la recta tangente.
- Emplea algún tipo de representación simbólica.
- Hace uso de álgebra de derivadas.

Aunque a lo largo del análisis por tarea se identificaron otros aspectos, estos son los que de una u otra forma responden a los elementos de la derivada considerados en la construcción del instrumento, y que además eran variables que podían identificarse sin problema en datos que se tenían. Es importante aclarar que para este análisis sólo nos fijamos en la presencia o ausencia de la variable en la respuesta de cada futuro profesor, sin considerar si esta se había presentado de forma correcta o incorrecta.

Dado que utilizamos dos versiones del cuestionario, era esperable que los argumentos empleados no hicieran alusión a los mismos aspectos o propiedades de la derivada, y aunque si hay muchas similitudes se decidió primeramente realizar un análisis por separado, aunque finalmente presentaremos los resultados considerando los datos de ambos cuestionarios de manera conjunta.

4.2.1 Perfiles de la derivada para el primer cuestionario

Tras aplicar el método *k-means* a los datos del primer cuestionario, obtenemos tres grupos conformados como se aprecia en la tabla 12.

Tabla 12
Distribución de los grupos para los perfiles del cuestionario 1

Grupo	Participantes	Porcentaje que lo conforma
1	S2, S3, S7, S8, S9, S10, S14, S15 y S16	47%
2	S1, S5, S6, S11, S12, S13, S17 y S19	42%
3	S4 y S18	11%

Se aprecia como la mayoría de los participantes se ubican principalmente en los dos primeros grupos. Siendo el tercero un caso más particular. Ahora bien, estos grupos presentan una concepción bien delimitada, su caracterización se puede observar en la figura 19.

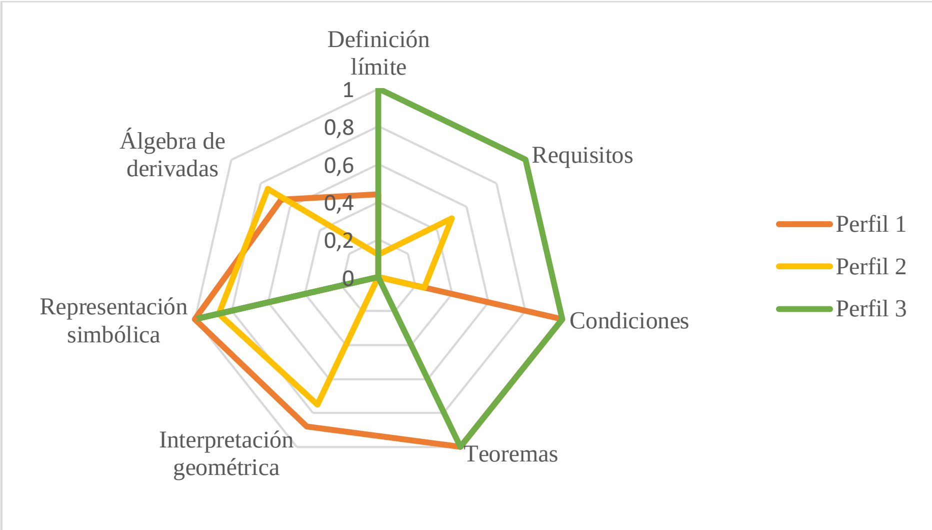


Figura 19. Perfiles de derivada según datos del cuestionario 1

En el gráfico se puede apreciar como el grupo 1 se identifica por un perfil de la derivada en el que ésta es definida esencialmente por su interpretación geométrica, mientras que sus argumentos se basan en el uso de teoremas y condiciones, apoyados para ello en representaciones simbólicas y el álgebra de derivadas.

Por su parte, el grupo 2, aunque también define la derivada mediante su representación geométrica, sus argumentos son principalmente algebraicos, apoyados para ello en la representación simbólica.

Finalmente, el grupo 3, destaca por definir la derivada únicamente como límite, usando para ello notación simbólica, considerando además los requisitos y aspectos necesarios, los cuales emplean en sus argumentos junto a los teoremas y condiciones.

En términos generales, sobresale el hecho de que el único perfil que destaca por el uso del límite y los requisitos para su definición, está conformado por la menor cantidad de participantes. Destacándose una mayor concentración de los participantes en aspectos simbólicos-algebraicos y teoremas, para su argumentación, y una definición principalmente dada por la interpretación geométrica de la derivada.

4.2.2 Perfiles de la derivada para el segundo cuestionario

Para estos datos, el método *k-means* distribuye a los participantes en los tres grupos tal como se muestra en la tabla 13.

Tabla 13
Distribución de los grupos para los perfiles del cuestionario 2

Grupo	Participantes	Porcentaje que lo conforma
1	S20, S23, S27, S28, S29, S30, S31 y S37	44%
2	S21, S22, S32 y S33	22%
3	S24, S25, S26, S34, S35 y S36	34%

En este caso vemos que los participantes están distribuidos en los grupos de manera más homogénea; en este caso no se consideró la variable de requisitos ni la de condiciones, dado que la primera de ellas estuvo ausente en todos los participantes, y por el contrario la de condiciones siempre estuvo presente. Por lo que esto lo consideramos al definir los perfiles, sin embargo, eliminarlos del análisis nos permitió visualizar de mejor manera las agrupaciones según las otras variables. Los resultados del análisis se muestran en la figura 20.

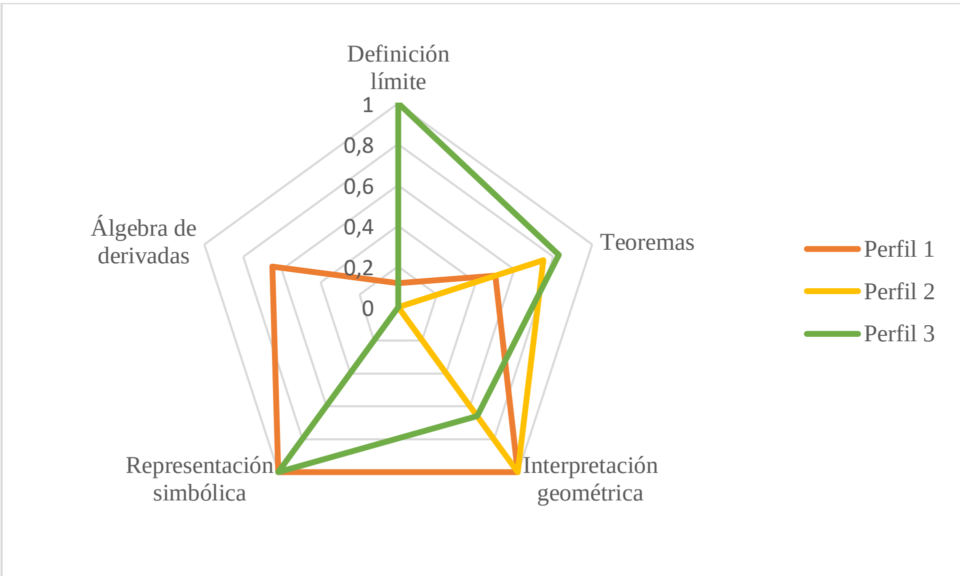


Figura 20. Perfiles de derivada según datos del cuestionario 2

Podemos observar como el grupo 1, refleja un perfil de derivada caracterizado principalmente por su definición mediante la interpretación geométrica, y la recurrencia al álgebra para verificar el cumplimiento de las condiciones o bien de teoremas.

El perfil dos, es interesante dadas las pocas variables, aquí la derivada se define como la pendiente de la recta tangente, y la argumentación se basa en implicaciones referentes a condiciones o teoremas.

En tercer grupo los futuros profesores emplean la definición de derivada mediante límite de manera predomínate, de ahí su uso de representación simbólica, mientras que la interpretación geométrica es más un complemento. Aquí la argumentación se basa nuevamente en implicaciones dadas por las condiciones o teoremas.

4.2.3 Perfil de la derivada puesto de manifiesto por los futuros profesores (ambos cuestionarios)

Realizamos ahora el análisis incluyendo las respuestas a ambos cuestionarios. En este caso con el análisis clúster jerárquico observábamos 5 grupos, y por medio del método *kmeans* estos se distribuyeron tal como se ve en la tabla 14.

Tabla 14
Distribución de los grupos para los perfiles de derivada manifestados

Grupo	Participantes	Porcentaje que lo conforma
1	S2, S7, S8, S10, S14, S15, S24, S25, S26, S28, S30 y S34	32%
2	S1, S5, S6, S13, S17, S19, S20, S27 y S31	24%
3	S4, S12 y S18	8%
4	S3, S16, S21, S22, S23, S29, S32, S33 y S37	24%
5	S9, S11, S35 y S36	12%

En la tabla se puede observar cómo pese a la conformación de 5 grupos, en realidad hay tres de ellos que tienen mayor presencia, es decir que más cantidad de participantes emplean tal perfil.

Los aspectos que consideran cada uno de los grupos conforman los perfiles que se aprecian en la figura 21.

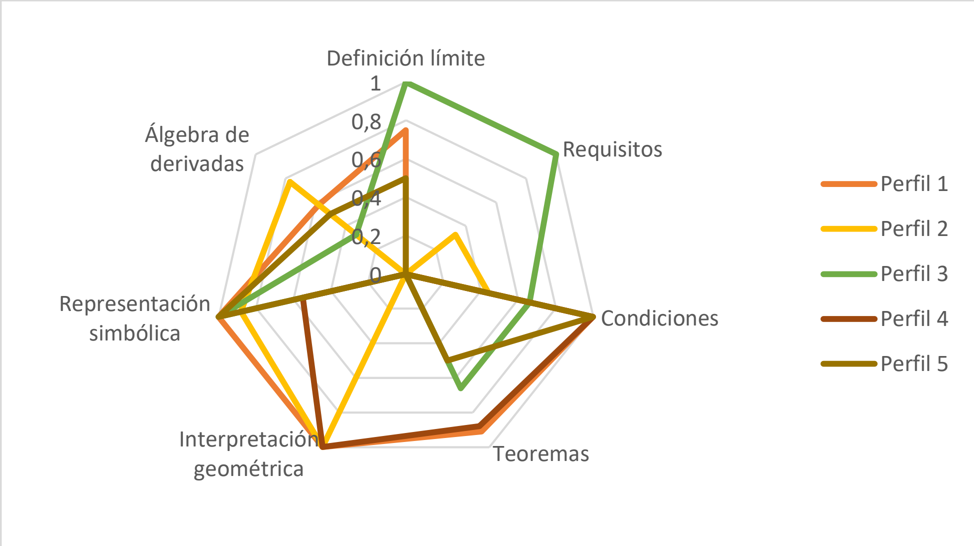


Figura 21. Perfiles de la derivada evocados por los participantes

El primer perfil, el cual fue empleado por la mayoría de los participantes, se caracteriza por definir la derivada mediante su interpretación geométrica, pero haciendo también alusión al límite; además para argumentar se basan principalmente en las condiciones y teoremas, expresando sus ideas por medio representación simbólica.

El segundo grupo se diferencia por definir la derivada únicamente mediante su interpretación geométrica, y por darle relevancia al trabajo algebraico como herramienta para argumentar.

Por el contrario, el perfil tres se identifica por definir la derivada empleando sólo el límite, también por basar sus argumentos en los requisitos, condiciones y teoremas. Llama la atención, como es el único perfil que sobresale por tomar en consideración los requisitos o aspectos indispensables para definir la derivada en un punto, y a su vez es el que está conformado por el menos número de participantes.

El cuarto grupo, al igual que el segundo define la derivada recurriendo a su interpretación geométrica, pero sus argumentos se fundamentan de manera directa en condiciones o teoremas. Se detecta cierta similitud entre este y el primer grupo diferenciándose por el no uso de la definición mediante límite.

Por último, el perfil 5, lo conforma un caso particular de sujetos, en donde algunos definieron la derivada mediante límite, pero otros emplearon descripciones muy particulares y específicas. Este perfil apoya sus argumentos especialmente en las condiciones, aunque también emplean teoremas, para lo cual algunos se apoyan en representaciones simbólicas.

En términos generales podemos decir que se identifican por un lado a los que podríamos llamar *geométricos-variacionales* (perfil 1), quienes además de la interpretación geometría consideran la definición mediante limite y sus condiciones y resultados; los *geométricos-elementales* (perfil 4), los cuales recurren a la interpretación geométrica y a los principales resultados y condiciones .

Asimismo, hallamos a los *geométricos-algebraicos* (perfil 2), a los *formalistas* (perfil 3) que se distinguen por ser los únicos que se basan exclusivamente en la definición y los requisitos implícitos; y como caso particular los *simbólicos-elementales* (perfil 5) quienes ponen de manifiesto pocos elementos de la derivada.

CAPÍTULO V

Conclusiones

Para finalizar, dedicamos un capítulo a sintetizar las conclusiones tras el proceso de investigación. Para ello analizaremos el grado de cumplimiento de los objetivos, el aporte de la investigación, algunas limitaciones presentadas, para terminar mencionando algunas líneas de investigación abiertas a raíz del trabajo realizado.

5.1 CONCLUSIONES GENERALES EN FUNCIÓN DE LOS OBJETIVOS PLANTEADOS

Al iniciar el proceso de investigación nos propusimos indagar sobre el significado que atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada de una función en un punto, y para ello nos fijamos 6 objetivos específicos. El primero de ellos consistía en la elaboración de un instrumento adecuado que nos permitiera recolectar información oportuna. Consideramos que el cuestionario diseñado e implementado satisfizo con lo propuesto en el objetivo, ya que su estructura nos permitió por medio de pocas tareas conocer la forma en la que entienden los futuros profesores, la definición y algunas características de la derivada.

El objetivo dos pretendía determinar la notación y los términos empleados por los futuros profesores al trabajar con la derivada, éste fue posible cumplirlo gracias a las respuestas dadas por los participantes principalmente a la tarea 1, aunque se complementó con la tarea 2; como vimos en el capítulo anterior, detectamos una gran cantidad de términos empleados por los sujetos al trabajar con la derivada y la notación más empleada.

Ahora bien, la tarea 2, propuesta en ambos cuestionarios, nos dio la oportunidad de ahondar en la forma en la que visualizan los futuros profesores los principales resultados y aspectos de la derivada (objetivo 3). Y en términos generales, los resultados obtenidos en ese sentido sorprendieron, pues las respuestas fueron muy variadas, las cuales aportaron muchos datos interesantes. Uno de ellos por ejemplo fue el papel relevante que ocupa el cálculo de algebraico en cuanto a la derivada, además como algunos resultados son asumidos o memorizados sin poder explicar el porqué del mismo.

Por otra parte, con las respuestas dadas a las tareas 1 y 2, logramos identificar algunos sistemas de representación que se emplean al trabajar con la derivada, sobresaliendo el simbólico, aunque también se detectó el uso del gráfico principalmente como ilustración. Aunque este aspecto no fue contemplado en los objetivos, sin lugar a dudas resultan de gran valor en el entendimiento del significado dado a la derivada por parte de los participantes.

La tarea 3, por su parte, nos ayudó a identificar los sentidos y modos de uso que destacan de la derivada, lo cual era precisamente nuestro cuarto objetivo. Al respecto obtuvimos una variada gama de situaciones y contextos en los que los futuros profesores identifican la derivada. Resulta interesante que pese a ser la interpretación geométrica el aspecto más referenciado para definir la derivada, al pedirles redactar un problema al respecto, existe cierta tendencia a problemas meramente matemáticos, sin considerar los problemas de rectas tangentes.

Ahora bien, el logro satisfactorio de los primero cuatro objetivos específicos nos dio las herramientas necesarias para captar la concepción que tienen los futuros profesores sobre la derivada (objetivo 5). De hecho, en los distintos análisis desarrollados por la tarea intentamos resaltar aquellos elementos o componentes que desde nuestro marco teórico conforman el significado de un concepto; así pudimos analizar y describir la forma en la que entienden la estructura conceptual de la derivada, así como los sentidos y modos.

De manera general, en cuanto a la estructura conceptual destaca la interpretación geométrica de la derivada, constituyéndose como el aspecto con más arraigo respecto al concepto. Por otra parte pudimos observar como tiene más valor los resultados relacionados a la derivada, que los propios aspectos elementales de la definición. Sobresale también que aunque los futuros profesores son conscientes de que existe una relación entre la derivada y la continuidad, o la derivada y los valores extremos de una función, no los manejan o recuerdan de manera correcta, al menos no la mayoría.

Otro aspecto que pudimos analizar y que es de gran interés, tiene que ver con el razonamiento que emplea el futuro profesor al reflexionar sobre la derivada. Llama mucho la atención como recurren especialmente al razonamiento algebraico, o al establecimiento de alguna implicación; pero que basan en menor medida su razonamiento en aspectos de definición, por ejemplo. Asimismo, pudimos observar como principal deficiencia en cuanto a la ejecución de un razonamiento, el considerar como verdaderas implicaciones directas que no lo son.

Ahora bien, en lo que corresponde a los sistemas de representación, aunque no esperábamos poder ahondar mucho en este aspecto, detectamos que la representación gráfica surge de manera natural al entender la derivada mediante su interpretación geométrica; asimismo, la representación simbólica necesaria que se evidencia es la que tiene que ver con el límite que la define y su notación. Además resalta de nuevo al realizar distintos procesos algebraicos.

Asimismo, en cuanto a los sentidos y modos de uso, encontramos que aunque los futuros profesores destacan la interpretación geométrica al referirse a la derivada, visualizan el uso de esta especialmente dentro de la misma disciplina matemática, principalmente en el análisis de funciones, cálculo de rectas tangentes a la curva o bien en la optimización.

Finalmente, el objetivo 6, lo conseguimos al utilizar el análisis clúster con las variables que ya anteriormente habíamos detectado, o bien que esperábamos estuviesen presentes dado el instrumento diseñado. Nos encontramos con que según lo puesto de manifiesto era posible establecer al menos 5 perfiles de significado.

En términos generales podemos ver como el cumplimiento satisfactorio del objetivo 1, facilitó el logro de los siguientes, la tabla 15 muestra la relación entre el cuestionario y el cumplimiento de los objetivos restantes.

Tabla 15
Cumplimiento de los objetivos en función del instrumento elaborado

Objetivo específico	Tarea relacionada
OE1	Todas
OE2	Tarea 1
OE3	Tarea 2
OE4	Tarea 3
OE5	Tareas 1 y 2
OE6	Todas

Destacamos de este modo la relevancia y el papel tan fundamental que cumple el instrumento de recolección de datos en un cumplimiento adecuado de los objetivos. Y que incluso permitió profundizar en más aspectos de los esperados.

5.2 APORTES DEL ESTUDIO

Las investigaciones realizadas hasta el momento en Didáctica de la Matemática, sobre la derivada de una función, mostraban la necesidad de profundizar en esta temática. Los resultados obtenidos, refuerzan algunas de las conclusiones obtenidas en otros trabajos; por ejemplo, aunque el trabajo de Bingolbali y Monaghan (2008) se desarrolló con estudiantes de grado, nos encontramos nuevamente con la recurrencia a la pendiente de la recta tangente al referirse a la derivada. Asimismo, en cuanto a aplicaciones, aunque se contó con una variada gama de aplicaciones, al igual que García, Azcárate y Moreno (2006), podemos afirmar que se le da más importancia a las situaciones matemáticas que a aplicaciones en otras áreas.

Ahora bien, tal como mencionábamos en el capítulo 1 de la investigación, conocer el significado que le atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada permite examinar la forma en la que entienden dicho concepto; lo cual a su vez posibilita entender algunos problemas que surgen a raíz de la concepción creada respecto a este.

Las investigaciones desarrolladas en esta línea han mostrado diversas dificultades que presentan los profesores en cuanto a este tema, sin embargo, ahora conocemos los aspectos primarios y específicos que pueden estar generando dichas confusiones y dificultades. Pues podemos observar que, de alguna manera, los significados que se tienen de la derivada son parciales, pues no se halló un solo caso que tomara en consideración los distintos aspectos. Además se aprecian confusiones existentes respecto a las condiciones y los primeros resultados de la derivada. De este modo, el principal aporte de esta investigación consiste en la generación de un conocimiento práctico que esperamos pueda ser útil en la toma de decisiones oportunas y adecuadas en la formación inicial y permanente de profesores.

5.3 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Consideramos que la principal limitación enfrentada se debe a que con la intención de querer plantear un cuestionario no muy extenso, dividimos los ítems en dos instrumentos, lo cual nos aportó gran información, pero a su vez nos dificultó mucho el poder integrar las respuestas dadas a cada uno de ellos. Pues aunque en ambos se abordaban aspectos y relaciones de la derivada, no eran los mismos.

5.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Resulta un proceso muy enriquecedor analizar tan minuciosamente cada detalle de las respuestas dadas por un sujeto respecto a un concepto tan particular. Aunque nos fue posible profundizar en muchos aspectos del significado de la derivada, existe mucho por estudiar. Algunas líneas en las que se puede ahondar son:

- Aunque en este trabajo se estudió bastante la estructura conceptual, no se pudo analizar la relación entre conceptos más complejos, ni el uso de razonamientos que conformen una estrategia. Aspectos que merece la pena estudiar a futuro.
- Pese a que se obtuvieron algunos datos sobre los sistemas de representación utilizados en la derivada, valdría la pena dedicar un trabajo al respecto en el que puedan valorarse los cuatros sistemas.
- Podría reproducirse un estudio similar pero con docentes en ejercicio que permita analizar la evolución que se tiene de los conceptos conforme a la experiencia. O bien si los resultados son similares.
- Finalmente, resultaría interesante desarrollar una investigación en la que se pueda establecer la relación que existe entre las concepciones de los profesores y la de los estudiantes.

REFERENCIAS

Alexandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. y Laurentiev, M. A. (2014). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de Las Ciencias*, *27*(1), 121–136.

Arraiza, M. (2006). *Guía práctica de análisis de datos*. Andalucía, España: JUNTA DE ANDALUCÍA. Conserjería de Innovación, Ciencia y Empresa.

Aspinwall, L., Haciomeroglu, E. y Presmeg, N. (2008). Students' verbal descriptions that support visual and analytic thinking in calculus. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA 30* (Vol. 2). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Azcárate, C. y Camacho-Machín, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de La Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 135–149.

Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M. y Moreno, M. (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna, España: Universidad de La Laguna: Servicio de Impresiones.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f´(a) y f´(x) en profesores de matemática. *Enseñanza de Las Ciencias*, *29*(2), 191–206.

Bingolbali, E. y Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 19–35.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. y Törner, G. (Eds.). (2016). *Teaching and Learning of Calculus, ICME-13 Topical Surveys*. Hamburgo, Alemania: Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics 1970-1990*. (M. Cooper, N. Balacheff, R. Sutherland y V. Warfield, Trans.). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable* (Segunda edición). Madrid, España: McGraw Hill.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95–124). Barcelona, España: Horsori.

Castro-Rodríguez, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial* (Trabajo Final de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. En F. Hit y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st pme-na international conference* (Vol. 1, pp. 3–26). Cuernavaca, México.

Edwards, B. S., Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15–25.

Estrella, M. (2015). *Significados escolares de la noción de tendencia de una función en un punto. Perfiles y singularidades* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio.* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación matemática IX* (pp. 111–128). Córdoba, España: SEIEM.

Frege, G. (1996). Sobre sentido y referencia. En G. Frege (Ed.), *Escritos filosóficos*. Madrid, España: Tecnos.

García, E. (2014). *Concepciones manifestadas por el alumnado de bachillerato respecto al concepto de asíntota horizontal. Estudio exploratorio.* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de los profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *9*(1), 85–116.

Hähkiöniemi, M. (2008). Durability and meaningfulness of mathematical knowledge – the case of the derivative concept. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA 30* (Vol. 3, pp. 113–120). Morelia, México: Cinvestav/UMSNH.

Harel, G. y Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 27–50.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación* (Quinta edición). México: McGraw Hill.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (Cuarta edición). México, D.F.: McGraw Hill.

Herrera, M., Velasco, M. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (en prensa). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada.

Hiebert, J. (1992). Learning and teaching with understanding. En T. Carpenter (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65–97). New York, NY: Macmillan.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: In introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Abingdon, Reino Unido: Routledge.

Martín, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de Las Ciencias*, *34*(3), 51–71.

Martín-Fernández, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio* (Trabajo Final de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Maschietto, M. (2004). The introduction of calculus in 12th grade: The role of artefacts. En *Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 273–280). Bergen, Noruega: PME.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa: una introducción conceptual* (Quinta edición). Madrid, España: Pearson Educación, S. A.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial Del Estado*, *37*(3), 169–546.

Muñoz, J. (2017). *La invension del cálculo infinitesimal. Leibniz*. Barcelona, España: RBA.

Noh, J. y Kang, O. (2007). Exploring the idea of curriculum materials supporting teacher knowledge. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 17–23). Seoul, Corea del Sur: PME.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 235–250.

Pérez, C. (2004). *Técnicas de análisis multivariable de datos*. Madrid, España: Pearson Educación, S. A.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2014). Explorando aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial. En M. González, M. Codes, D. Anau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 513–522). Salamanca, España: SEIEM.

Pino-Fan, L., Godino, J., Font, V. y Castro, W. (2012). Key epistemic features of matheatical knowledge for teachining the derivative. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceeding of the 36th coference of the internacional group for the psycholog of mathematics education* (Vol. 3, pp. 297–304). Taipei, Taiwan: PME.

Pino-Fan, L., Godino, J., Font, V. y Castro, W. (2013). Prospective teacher´s specializd content knowledge on derivative. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (Vol. 8, pp. 3195–3205). Antalya, Turkey: CERME.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25–34). Barcelona, España: Graó.

Ramírez, R. y Moreno, A. (2016). Complejidad y estructura de las tareas escolares. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de la didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 259–273). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de Matemáticas para Educación Secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (Vol. 12). Barcelona, España: Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, (1), 39–63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (33), 11–27.

Rico, L. (2016). Matemática y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85–100). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 1–22). Granada, España: Comares.

Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento Didáctica de la Matemática. *Revista de Educación*, *328*, 35–58.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139–152). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Ruiz-Ratia, P. (2016). *Significados de las fracciones por alumnos de educación primaria.* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Salinas, M. (2016). *Significados escolares del concepto de porcentaje.* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema*, *27*(45), 281–302.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Spivak, M. (2012). *Calculus* (Tercera edición). Barcelona, España: Reverté.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. En D. A. Grouws (Ed.), *NCTM handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495–511). New York, NY: Macmillan.

Tall, D. (2004). The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *23*(3), 29–33.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Universidad de Granada. (2017). Entorno Virtual de autoaprendizaje de la estadística. Retrieved from http://wpd.ugr.es/~bioestad/

Vílchez, M. (2014). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de E.S.O respecto al concepto de número entero*. Universidad de Granada, Granada, España.

ANEXOS

ANEXO # 1

Cuestionarios aplicados versiones 1 y 2

Departamento de Didáctica de la Matemática

Grupo FQM-193. "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico"

Cuestionario 1

Noción de derivada de una función en un punto

Estimado alumno,

El grupo *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico*, del Departamento de Didáctica de la Matemática, ha elaborado este cuestionario como parte de una investigación que está llevando a cabo la Universidad de Granada.

Su opinión e información serán muy útiles para nosotros. En el cuestionario que va a realizar, inicialmente le solicitamos algunos datos personales. A continuación tendrá que realizar unas tareas relacionadas con la noción de derivada de una función en un punto.

Antes de seguir adelante, es importante que tome en consideración lo siguiente:

1. No se trata de una prueba de evaluación. Realícelo con tranquilidad e interés.
2. Sus respuestas serán confidenciales.
3. Procure responder a todas las preguntas.
4. Imagine que un compañero va a leer sus respuestas, por tanto, procure incluir todas las aclaraciones necesarias para que entienda sin dificultad lo que quiere expresar.
5. Si se equivoca, tache la respuesta (una raya) y corríjala aparte.

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto "Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación"(EDU2015- 70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN), entre cuyos objetivos está mejorar los programas de formación para profesores de matemáticas.

Gracias por su colaboración.

Datos personales

1. Género: ☐ Masculino ☐ Femenino
2. Edad:
3. Carrera de grado:
4. Experiencia docente:

ACTIVIDAD $N^{o}1$

Exprese con sus propias palabras, una definición para el concepto de derivada de una función en un punto.

ACTIVIDAD N^o2

Se presentan dos enunciados referidos a una función y su derivada. Coloque V o F en el paréntesis de cada enunciado, según sea verdadero o falso. Justifique su elección.

1. ( ) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, tiene por gráfica la que se muestra en la figura 1. La recta m es tangente a la curva en $x = 1$; de esta forma es fácil asegurar que f es derivable en ese punto.

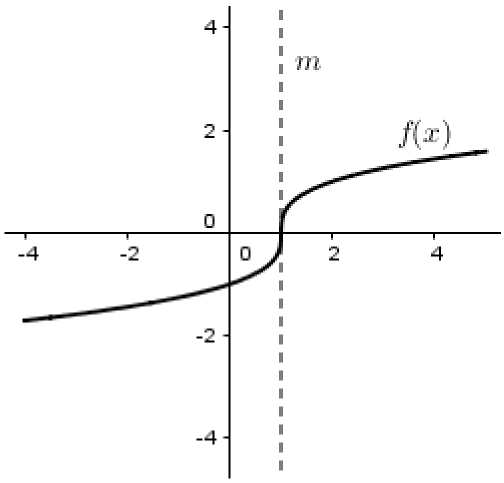


Figura 1. Gráfica de f

Jutificación

2. (   ) Para la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$; tal que $f(x) = x^3 + 2x - 1$, se cumple que f es derivable en $x = 1$, y además $f'(1) = 5$.

Jutificación

ACTIVIDAD N^o3

Analice la siguiente situación:
La gráfica de la figura 2 describe el movimiento de dos atletas, del mismo equipo, durante una carrera de relevos:

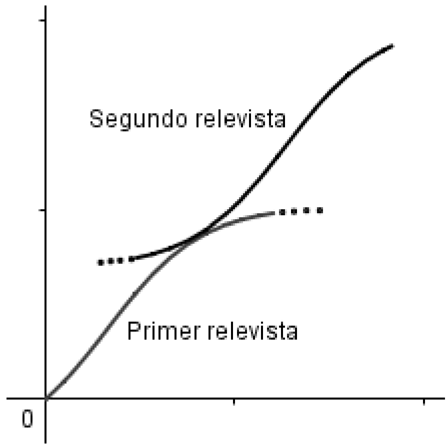


Figura 2. Comportamiento de relevistas.

a) Indique las variables que están representadas.

b) Señale en la gráfica el instante de entrega del "testigo"e interprete el significado de la derivada de ambas funciones en tal instante.

c) ¿Por qué el segundo relevista empieza a correr antes de recibir el "testigo"?
Dibuje en la misma gráfica otra que modele la entrega del "testigo"si el segundo relevista espera en reposo. ¿Cuál de las dos alternativas es mejor? Justifique.

Departamento de Didáctica de la Matemática

Grupo FQM-193. “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”

Cuestionario 2

Noción de derivada de una función en un punto

Estimado alumno,

El grupo *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico*, del Departamento de Didáctica de la Matemática, ha elaborado este cuestionario como parte de una investigación que está llevando a cabo la Universidad de Granada.

Su opinión e información serán muy útiles para nosotros. En el cuestionario que va a realizar, inicialmente le solicitamos algunos datos personales. A continuación tendrá que realizar unas tareas relacionadas con la noción de derivada de una función en un punto.

Antes de seguir adelante, es importante que tome en consideración lo siguiente:

1. No se trata de una prueba de evaluación. Realícelo con tranquilidad e interés.
2. Sus respuestas serán confidenciales.
3. Procure responder a todas las preguntas.
4. Imagine que un compañero va a leer sus respuestas, por tanto, procure incluir todas las aclaraciones necesarias para que entienda sin dificultad lo que quiere expresar.
5. Si se equivoca, tache la respuesta (una raya) y corríjala aparte.

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto "Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación"(EDU2015- 70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN), entre cuyos objetivos está mejorar los programas de formación para profesores de matemáticas.

Gracias por su colaboración.

Datos personales

1. Género: ☐ Masculino ☐ Femenino
2. Edad:
3. Carrera de grado:
4. Experiencia docente:

ACTIVIDAD $N^{o}1$

Exprese con sus propias palabras, una definición para el concepto de derivada de una función en un punto.

ACTIVIDAD $N^o 2$

Se presentan dos enunciados referidos a una función y su derivada. Coloque V o F en el paréntesis de cada enunciado, según sea verdadero o falso. Justifique su elección.

1. (   ) Para la función g, cuya gráfica se muestra en la figura 1

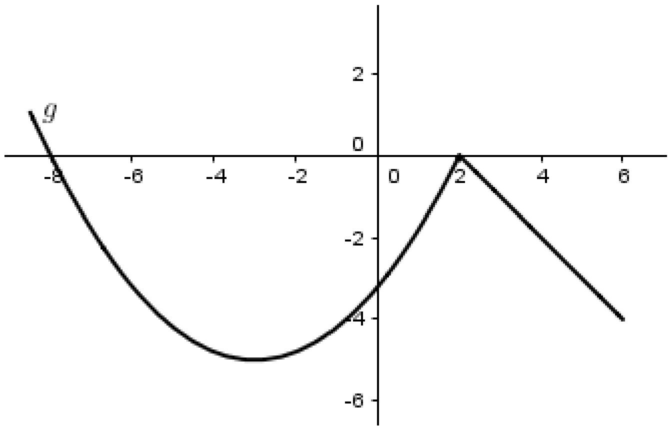


Figura 1. Gráfica de g

Se puede afirmar que como g tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

Jutificación

2. (   ) La función $h(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ cuya gráfica se muestra en la figura 2, satisface que $\lim\limits_{x \to 0^-} h'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h'(x) = 0$. Por lo tanto $h'(0) = 0$.

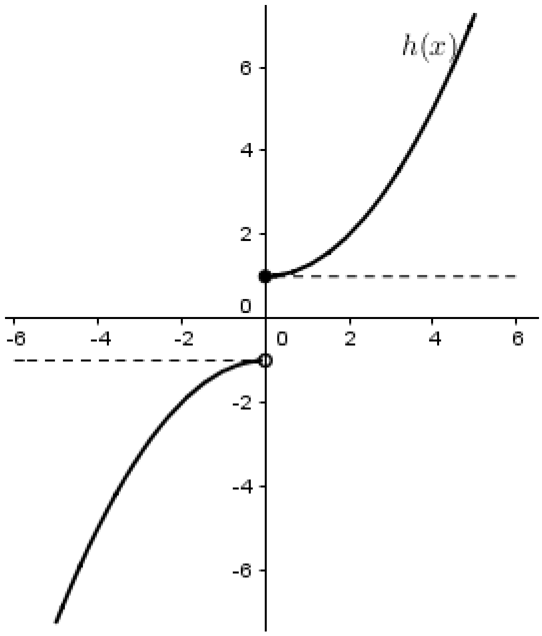


Figura 2. Gráfica de h

Jutificación

ACTIVIDAD $N^o 3$

1. Indique al menos tres aplicaciones en las que se utiliza el concepto de derivada.

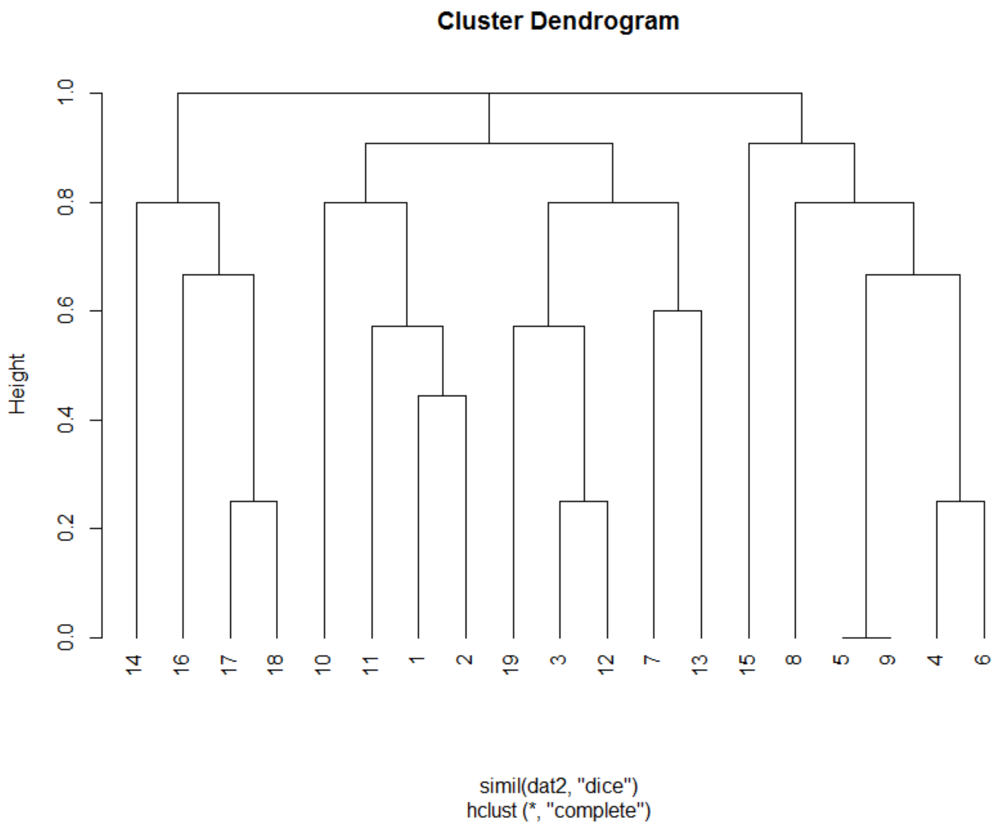
2. Plantee un ejemplo de problema de alguna de las aplicaciones mencionadas.

ANEXO # 2

Dendrogramas clúster jerárquico

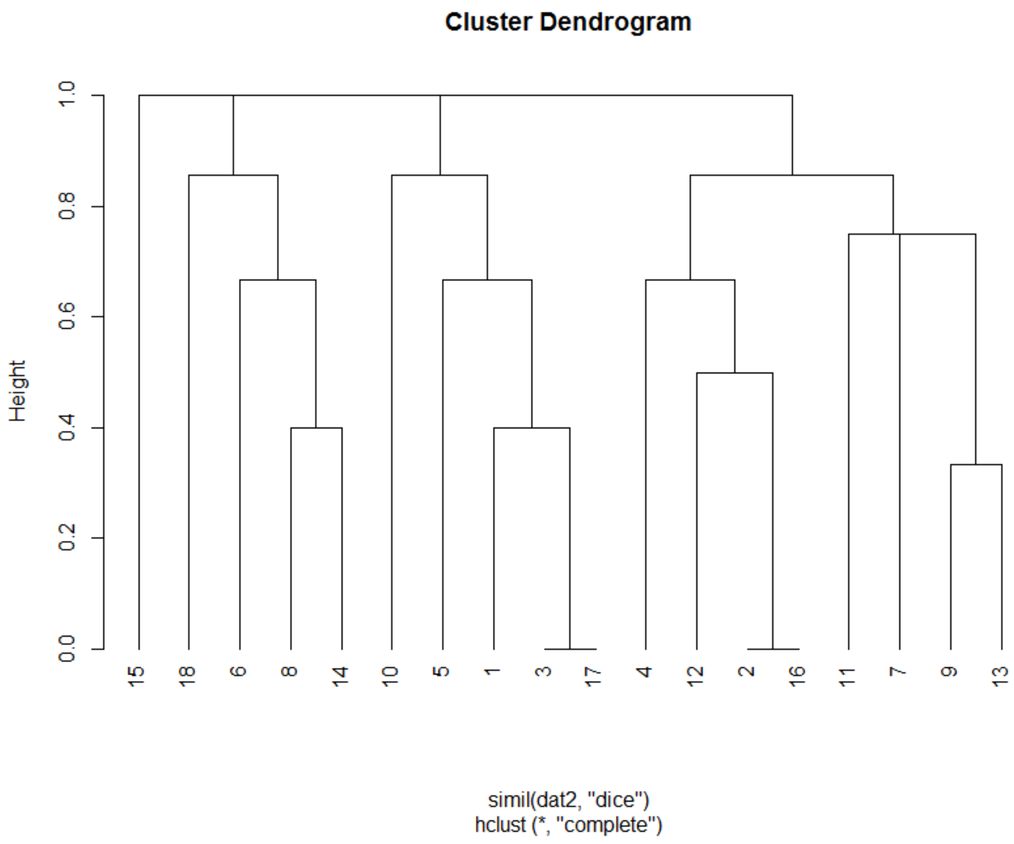
Dendrograma clúster jerárquico, datos cuestionario 1

Variables consideradas: definición límite, requisitos, condiciones, teoremas, interpretación geométrica, representación simbólica y álgebra de derivadas



Dendrograma clúster jerárquico, datos cuestionario 2

Variables consideradas: definición límite, teoremas, interpretación geométrica, representación simbólica y álgebra de derivadas.



Dendrograma clúster jerárquico, datos de ambos cuestionarios

Variables consideradas: definición límite, requisitos, condiciones, teoremas, interpretación geométrica, representación simbólica y álgebra de derivadas