Universidad de Costa Rica

Facultad de Educación
Escuela de Formación Docente

Memoria de Seminario de Graduación

Propuesta Curricular para la enseñanza de la Geometría Algebrizada en tercer ciclo de la Educación General Básica

Alejandra Alvarado Alvarado
Jennifer Aragón Monge
Jeremías Ramírez Jiménez
Berny Francisco Salas Solano
Marianela Salazar Segnini

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio

2010

SEMINARIO DE GRADUACIÓN

Propuesta Curricular para la enseñanza de la Geometría Algebrizada en tercer ciclo de la Educación General Básica

Tribunal examinador

Prof. William Alvarado Jiménez
Lector asesor

Prof. Edwin Castro Fernández
Lector

Prof. Ana Victoria Fonseca Rodríguez
Lector asesor

Prof. Bernardo Montero Bolaños
Director de seminario

Prof. Marielos Mora Moya
Lector

Memoria defendida por:

Alejandra Alvarado Alvarado

Jennifer Aragón Monge

Jeremías Ramírez Jiménez

Berny Francisco Salas Solano

Marianela Salazar Segnini

Dedicatoria

Al profesor Bernardo Montero Bolaños, nuestro maestro y sobre todo amigo, quien desde el principio creyó en nosotros, y sin cuyo apoyo, dedicación, visión y sabios consejos a lo largo de estos dos años, no habría sido posible llevar a buen término este proyecto.

Agradecimientos

Primero a Dios, luego a mis padres, a profesores y amigos que me brindaron su apoyo, y a mis compañeros de seminario con quienes fue un honor trabajar

Alejandra Alvarado Alvarado

Primeramente a Dios por ser el que me dio la vida, el que me ilumina siempre el camino. A mi madre, por su apoyo incondicional en todo momento, por ser mi inspiradora y motivadora. A toda mi demás familia que de una u otra manera me han ayudado a realizar este sueño, y por último, a mis compañeros que más que compañeros fueron y serán mis amigos.

Jennifer Aragón Monge

Gracias a mi familia, a todos los profesores que me brindaron su apoyo.

Jeremías Ramírez Jiménez

Deseo expresar mi infinito agradecimiento a Dios, por haberme prestado la vida y las facultades para poder alcanzar este logro; a mi familia, que siempre ha estado incondicionalmente a mi lado en los buenos y malos momentos; a mis profesores, que con su ejemplo han servido para buscar un constante crecimiento profesional y humano; a mis colegas, cuyos valiosos aportes han enriquecido nuestro trabajo; y a mis amigos, los verdaderos, que en todo este tiempo han sido refugio y consuelo para mi espíritu.

Berny Francisco Salas Solano

Gracias a mis padres, a mi hermana, a mi tito y a mi esposo, por apoyarme durante el camino. Gracias a todos los profesores que fueron parte de este proceso y a mis compañeros y amigos de seminario. Gracias a Dios por permitirme culminar esta valiosa experiencia.

Marianela Salazar Segnini

ÍNDICE

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta para abordar el estudio de la Geometría en el Tercer Ciclo de la Educación General Básica desde una perspectiva que permita reforzar dicha enseñanza, propiciando una mayor integración entre la Geometría y otras áreas de las matemáticas.

El propósito fundamental es plantear una propuesta para la organización de contenidos en el programa de estudios del Tercer Ciclo de la Educación General Básica que integre la geometría desde un enfoque algebrizado. La geometría algebrizada se perfila como una opción apropiada, ya que permite minimizar la perspectiva de separación desde la que se aborda actualmente la geometría, al integrar en su estudio herramientas algebraicas que posibilitan integrarla con otras áreas como lo es el álgebra.

De este modo, se incluye una propuesta detallada de lo que podría ser el Programa de Estudios de Matemática de sétimo, octavo y noveno año de la Educación General Básica, estructurado en dos grandes unidades temáticas por año, cada una con los aprendizajes esperados, actividades propuestas y recomendaciones para el docente

Como complemento de este documento se presentan otro capítulo dirigido al alumno, los cuales contienen la teoría correspondiente a las unidades de vectores y operaciones con vectores (sétimo año), y geometría elemental (octavo), explicada de modo que puedan servir de material de texto y consulta para el estudiante; y que contienen una serie de ejemplos y ejercicios.

Capítulo I

Introducción

1.1 Justificación

Durante décadas, la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en el tercer ciclo de la Educación General Básica en Costa Rica ha manifestado una serie de dificultades y deficiencias que tienen repercusión en el rendimiento académico de la población estudiantil. Se puede mencionar, por ejemplo, los frecuentes comentarios expresados por alumnos y docentes sobre las limitaciones existentes en el abordaje de los conceptos geométricos, incluso a un nivel elemental, así como su comprensión, interiorización y manipulación por parte de los alumnos.

Un caso concreto de esta situación se puede percibir en los resultados obtenidos por los estudiantes de secundaria en las pruebas nacionales de bachillerato, donde usualmente esta área presenta un bajo rendimiento. ([20]).

La demostración intuitiva de teoremas y propiedades constituye también una parte de la enseñanza de la geometría que se ha relegado a un segundo plano en las aulas de secundaria. Esto se debe, entre otros motivos a que las demostraciones, incluso las de los teoremas más elementales, se vuelven engorrosas, o hacen uso de conocimientos que el alumno no posee, no pudiendo explotar así su valor como herramienta didáctica en el proceso educativo.

Por otro lado, los conocimientos adquiridos en un área de la Matemática no son conocimientos aislados, sino que son fundamentales para el entendimiento de otros conceptos, por tanto las deficiencias en el área de geometría acarrean conflictos en el estudio de otras áreas, como la trigonometría.

Estas deficiencias se deben a una serie de situaciones dentro de las cuales cabe considerar el enfoque tradicional con que se ha abordado el estudio de la geometría. Desde este enfoque, surgen una serie de incongruencias entre los conceptos geométricos y trigonométricos. Por ejemplo, el concepto euclídeo de ángulo imposibilita hablar de ángulos de medidas menores o iguales que cero grados, o mayores o iguales que ciento ochenta grados, lo cual genera dificultad para generalizar el concepto de razón trigonométrica de un ángulo agudo, al de razón trigonométrica de un número real arbitrario; de este modo, una noción dinámica de ángulo visto como rotación, es más favorable y natural para trabajar en trigonometría.

Otro punto importante es la creciente utilización en el aula de la escuela secundaria de paquetes computacionales orientados hacia el estudio de la geometría. Dichos programas, en su mayoría, se enfocan y diseñan desde una perspectiva dinámica: una geometría de transformaciones, que pone sobre el tapete los desplazamientos, rotaciones, reflexiones, y dilataciones, para estudiar hechos geométricos. El abordaje tradicional de la geometría limita el aprovechamiento adecuado de los recursos y posibilidades que supone la utilización de este tipo de programas en el aula.

Todas estas consideraciones llevan a plantear la posibilidad de abordar el estudio de la geometría en el tercer ciclo desde una perspectiva que permita solventar en alguna medida las dificultades mencionadas en los párrafos anteriores. Es decir, desde una visión que permita una mayor integración entre la geometría y otras áreas de las matemáticas; contextualizar y abordar los nuevos conceptos de una manera más natural para el alumno; ampliar o modificar los conceptos matemáticos en función de contextos en los que serán aplicados en ciclos posteriores; y aprovechar las oportunidades que brinda el uso de paquetes informáticos en el estudio de la geometría.

En este trabajo se busca plantear una propuesta encaminada hacia el cumplimiento de esta meta. No se pretende que sea una propuesta acabada y rígida, sino una posible forma de abordar esta problemática: desde un enfoque algebrizado de la geometría. Es decir, un enfoque que se valga de las herramientas que brinda el álgebra lineal, y particularmente de la idea de vector, para un abordaje de los contenidos que permita zanjar las dificultades mencionadas.

La geometría algebrizada se perfila como una opción apropiada, ya que permite minimizar la perspectiva de separación desde la que se aborda actualmente la geometría, al integrar en su estudio herramientas algebraicas que posibilitan integrarla con otras áreas; en primer lugar con el álgebra, pues se apropia de su lenguaje, introduciendo gradual e intuitivamente nociones como la de función al hablar de simetrías, rotaciones, dilataciones, traslaciones y desplazamientos.

Esta perspectiva permite flexibilizar la teoría en aras de necesidades posteriores; por ejemplo, posibilita ampliar ciertos conceptos, como el de ángulo, que al ser visto como una rotación, facilita el hablar de ángulos mayores o iguales que ciento ochenta grados o menores que cero grados, visión más cercana a la noción de arco utilizada en trigonometría.

Por otro lado, al hacer uso del lenguaje algebraico, se espera que se facilite la demostración de ciertas propiedades y teoremas que bajo la geometría clásica resulta bastante engorrosa y dificulta la comprensión por parte del estudiantado.

Además, vista desde este enfoque, se vuelve una geometría de movimiento, lo que permite explotar la gran gama de paquetes computacionales existentes orientados hacia el estudio de la geometría, potencializando su utilización como herramienta didáctica.

En Costa Rica, si bien este enfoque no se ha desarrollado en secundaria, y apenas se ha trabajado con él en algunos cursos especializados, particularmente en la Universidad de Costa Rica, sí se han llevado a cabo propuestas, desde distintos enfoques, las cuales se pueden encontrar en diversos trabajos finales de graduación.

Sin embargo, a nivel internacional, no es una propuesta reciente. Muestras de este modelo se encuentran en diversos países, en particular Francia, donde se comenzó a desarrollar desde los años sesenta, y se ha ido mejorando. Y en América Latina, países como Cuba y Chile ([22]) lo han efectuado con resultados favorables en sus programas de secundaria. De hecho, es un enfoque recomendado por diversos organismos internacionales vinculados al área de la Educación ([30])

A la luz de los hechos mencionados, se ha desarrollado el presente seminario, que tiene como propósito plantear una propuesta para la organización de contenidos en el programa de estudios del Tercer Ciclo de la Educación General Básica que integre la geometría desde un enfoque algebrizado.

Para ello ha sido necesario reorganizar y reestructurar los demás contenidos de los programas vigentes, de modo que el programa resultante sea un programa integrado e integrador, y la secuencia de contenidos desarrollados permita incorporar gradualmente la geometría algebrizada de una forma natural, tomando en cuenta las bases necesarias para su comprensión: números reales, álgebra elemental, vectores, y nociones intuitivas de geometría euclídea.

De este modo, se incluye una propuesta detallada de lo que podría ser el Programa de Estudios de Matemática de sétimo, octavo y noveno año de la Educación General Básica, estructurando cada año en dos grandes unidades temáticas, relacionadas entre sí, y con las unidades de los años anteriores y posteriores.

Además de la organización de contenidos, se brinda una justificación de dicho orden para el docente, considerando los aspectos de cada tema a los que debe dar énfasis, en aras de su funcionalidad y concatenación con contenidos posteriores; y se propone, para cada sección ejemplos de los ejercicios que deben trabajarse; considerando nivel de dificultad del ejercicio, nivel cognoscitivo del estudiante, y posterior aplicación del tema como cimiento para la comprensión de nuevos conceptos.

En resumen, la propuesta se estructura en dos unidades por nivel, para cada una de las cuales se desglosan los contenidos y conocimientos esperados, así como aptitudes deseadas, y planteando al docente sugerencias de actividades para introducir cada contenido, relacionándolos entre sí, y abriendo espacios para que se visualice su aplicación en niveles posteriores. Finalmente, se propone una serie de ejercicios modelo, como guía para el profesor, en el desarrollo de sus lecciones.

Se ha buscado mantener los contenidos presentes en el actual programa. Sin embargo, ha sido necesario reorganizarlos, y en algunos casos, mover determinados temas de un nivel a otro, anterior o posterior. También ha sido necesario incluir unidades nuevas, principalmente una que abarque los contenidos de vectores, que actualmente no se consideran, y se ha introducido algunos contenidos en las otras unidades, con el fin de sentar las bases necesarias para un adecuado desarrollo de la Geometría desde el enfoque propuesto.

Como complemento de este documento se presentan dos textos más, dirigidos al alumno, los cuales contienen la teoría correspondiente a las unidades de vectores y operaciones con vectores (sétimo año), y geometría elemental (octavo), explicada de modo que puedan servir de material de texto y consulta para el estudiante; y que contienen una serie de ejemplos y ejercicios.

Como cabría esperar, un seminario de este tipo no puede considerar únicamente aspectos concernientes a los temas matemáticos que serán desarrollados, sino también sobre la Didáctica de las Matemáticas, y en particular sobre la Didáctica de la Geometría. De esta manera, se ha consultado referencias bibliográficas en torno a los dos grandes ejes que orientan este trabajo.

Sobre Geometría, se estudió a profundidad diversos libros de texto franceses y estadounidenses que trabajaban el tema de la Geometría afín, abordándolo desde diversos enfoques. Para ello se desarrollaron sesiones de estudio teóricas durante el primer semestre del seminario, donde se trabajo con geometría de transformaciones, geometría proyectiva, y geometría afín. En primera instancia, puede estudiarse de manera general la geometría proyectiva (que engloba todas las demás subgeometrías: euclídea, hiperbólica, etcétera), de modo que se deduzcan de aquélla las propiedades particulares de ésta. Tal estudio puede hacerse desde un enfoque clásico o algebraico, llegando a verificarse que ambos son equivalentes ([29]).

Por otro lado, un abordaje algebraico de la geometría en general, y de la geometría euclídea en particular, puede darse a través de dos caminos. Se puede partir de un enfoque algebraico, partiendo de las nociones de espacios vectoriales y, asumiendo que el alumno posee cierto conocimiento del álgebra lineal, de modo que a partir de ciertas premisas, pueda demostrar algunos de los resultados que, desde el enfoque tradicional, resultan ser axiomas (por ejemplo, el quinto postulado de Euclides), así como los teoremas clásicos de la geometría euclídea, usando para ello la herramienta algebraico-vectorial ([13]).

Pero también puede recorrerse este camino en un sentido inverso. Es decir, partir de los axiomas y postulados clásicos de la geometría euclídea, e ir construyendo, de manera gradual la herramienta algebraico-vectorial que permite al estudiante, en algún momento, trascender los alcances de la visión clásica, para llegar a plantear situaciones más enriquecedoras y significativas ([12]).

Se ha optado por trabajar desde este último abordaje, pues es el que más se adapta a la realidad cognoscitiva de los estudiantes costarricenses, que al ingresar a sétimo año han incorporado en sus esquemas mentales ciertas nociones básicas de Geometría Euclídea clásica. Por ello resulta más natural partir de estos conceptos, e introducir los conocimientos necesarios en otras áreas (números reales, vectores, y álgebra elemental) para conformar gradualmente una estructura encaminada hacia el desarrollo de una geometría algebrizada.

El segundo aspecto alrededor del cual se estructura la propuesta, lo conforma el referente didáctico. Con respecto a éste, se desarrollaron de forma paralela las sesiones de estudio de Geometría, reuniones donde se estudiaba y discutía diversas teorías didácticas, dentro de las cuales se pueden mencionar la teoría de la Transposición Didáctica de Yves Chevallard ([8]), la teoría de la De-transposición Didáctica formulada por Antibi y Brousseau ([3]), la teoría de Situaciones de Brousseau ([7]), y la teoría de Espacios de Trabajo Geométricos de Alain Kuzniak ([18]).

En este caso no se optó por ubicarse dentro de una teoría didáctica específica. Antes bien, se decidió seleccionar aspectos de las diversas teorías que fueron considerados pertinentes a la realidad del sistema educativo costarricense. Esto teniendo en cuenta el hecho de que todas las teorías arriba mencionadas son gestadas en contextos ajenos al que circunscribe la presente propuesta; por lo cual, una sola de ellas sería insuficiente para modelar las situaciones que se viven en las aulas costarricenses. Pero cada una de ellas aporta diversos aspectos que, en conjunto, se complementan, y pueden adaptarse a la situación del Sistema Educativo Nacional.

Para terminar, cabe recalcar que este trabajo no pretende ser una propuesta acabada, definitiva y mucho menos rígida; si no que pretende ser un primer intento por plantear una manera de organizar y desarrollar en el aula los contenidos de Matemática a lo largo del tercer ciclo de la Educación General Básica, que permita, además de integrar de modo significativo los diversos contenidos en los tres niveles, abordar el estudio de la Geometría desde un enfoque que ha resultado enriquecedor y provechoso en la experiencia de otros países tanto de América Latina como de otras latitudes.

1.2 Referente Metodológico

En el presenta capítulo se expone la metodología seguida para realiza el trabajo. La elaboración de la propuesta del programa de estudio y del material para el alumno se desarrolló como un proceso dinámico y de cambio constante.

En primera instancia se planificó la secuencia de contenidos para los diferentes niveles y simultáneamente a ello se realizó el desarrollo de contenidos para el material para el alumno y para el programa de estudio. Durante el avance del trabajo se realizaron diversas modificaciones para el mejoramiento del documento.

Durante el desarrollo del presente seminario de investigación se llevaron a cabo varias etapas de trabajo que a continuación se detallan:

1.2.1 Estudio y análisis de fuentes bibliográficas

El estudio y análisis de fuentes bibliográficas se realizó inicialmente con material recomendado sobre el tema de Geometría Afín. De esta forma se realizó un estudio detallado de temas matemáticos relacionados con nuestra propuesta, como son el álgebra lineal, la geometría proyectiva, entre otros; con los cuales se trabajaron resúmenes y exposiciones de los mismos.

Posteriormente, se realizó un estudio de literatura francesa sobre Teorías Didácticas como lo son la Transposición Didáctica de Chevallard, y la Teoría de Situaciones de Brousseau, y se subrayó de cada una los aspectos que serían relevantes para el trabajo. De esta forma, el presente trabajo propone utilizar técnicas didácticas de ambas teorías, debido a que la realidad costarricense es muy distinta al contexto en los que se desarrollaron dichas teorías. También se consultaron otras teorías, dentro de las cuales cabe mencionar la teoría de Espacios de Trabajo en Geometría, de Alain Kuzniak y la de Detransposición Didáctica, de Antibi y Brousseau.

Por último, fue necesario consultar el programa de estudio de matemática del tercer ciclo del MEP [21] y los programas de estudio de secundaria franceses [19] para analizar la secuencia de contenidos de ambos programas y los objetivos propuestos.

1.2.2 Elaboración de un referente de trabajo

El estudio y análisis de las fuentes bibliográficas permitió construir un referente teórico matemático y un referente teórico didáctico sobre el cual se desarrollara la propuesta del plan de estudio y el material para el alumno. Estos referentes teóricos dan lugar a una serie aspectos que se tomaron en cuenta para el desarrollo del trabajo.

Como primer punto, se establece la necesidad de realizar un cambio en la secuencia de los contenidos de los niveles de sétimo, octavo y noveno, con el fin de crear una secuencia lógica que permita desarrollar los temas actuales vinculándolos con los temas nuevos que se van a proponer en el plan.

Como segundo punto, se planteó la necesidad de implantar dentro del programa de estudio, una serie de ejemplos que muestren al docente el tipo de actividades que se recomiendan desarrollar, además de los aprendizajes esperados y una serie de recomendaciones sobre los diferentes temas. Esto particularmente en relación a los nuevos contenidos, y la forma de relacionarlos con los actuales.

Como último punto, la bibliografía matemática permitió establecer qué temas son los que se van a incorporar en la propuesta y de qué forma se van a desarrollar. Esta etapa del trabajo constituyó una de las más importantes, porque permitió determinar cómo realizar la transposición didáctica del saber sabio a saber a enseñar.

1.2.3 Elaboración de la Propuesta del Plan de Estudio y el Material para el alumno.

Como se especificó al inicio de este apartado, la elaboración de la propuesta del plan de estudio y el material para el alumno fue un proceso simultáneo, en donde para cada tema se realizó un análisis de los conocimientos previos y las utilidades en los temas posteriores. De esta forma se fue realizando una transposición didáctica, en donde se transformó el saber sabio a saber enseñado.

La elaboración de actividades para los diferentes temas se realizó tomando en cuenta la importancia del juego y el aprendizaje significativo dentro enseñanza de la matemática, de manera que muchas de las actividades se desarrollaran con situaciones de la vida cotidiana para el estudiante. Además se enfatiza la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento lógico matemático.

Capítulo II

Referente conceptual

2.1 Didáctica de las Matemáticas

En este apartado se definirán los conceptos referentes a la didáctica de la matemática que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Se comenzará haciendo una clarificación de los distintos saberes relacionados con la enseñanza de las matemáticas: Epistemología, saber matemático, saber pedagógico, y saber didáctico.

2.2 Epistemología y Matemática

La Epistemología se define como la rama de la Filosofía que estudia el origen del conocimiento científico, así como los criterios socialmente reconocidos dentro de la comunidad científica para su validación, y las características de los procesos de desarrollo de dicho conocimiento ([27]).

La cuestión de las características particulares del conocimiento se vuelve importante en un trabajo como el presente, puesto que se centra en una propuesta para el desarrollo en secundaria de un conjunto específico de contenidos: la geometría. Se procederá, entonces a plantear un acercamiento a la naturaleza de los conocimientos matemáticos.

Sierpinska y Lerman mencionan la existencia de teorías que estudian la naturaleza de los objetos matemáticos desde una perspectiva sociológica, dentro de las cuales podemos mencionar las siguientes ([27]):

- Piaget, con su teoría constructivista plantea que el conocimiento existe en tanto que construcción mental, personal y significativa, que permite al individuo desenvolverse en su entorno.
- Kitcher, en su propuesta naturalista, afirma que el conocimiento matemático es un constructo histórico y otorga importancia a la práctica dentro del quehacer matemático.
- Wittgenstein coincide en afirmar que hacer matemáticas es una actividad social, y que la validez de los objetos matemáticos está delimitada por su uso.
- Vigotsky plantea la importancia del contexto social en los aprendizajes, afirmando que un aprendizaje es considerado válido y significativo en tanto que sea útil dentro de la sociedad en la que se inscribe, el ser humano aprende por la interacción con otros grupos humanos.

Estas teorías, si bien explican en mayor o menor medida los procesos de aprendizaje que se desarrollan en el aula, y aportan algunos aspectos relevantes para el presente trabajo, lo hacen de manera muy general, y no consideran en sus propuestos las particularidades que encierra una disciplina como la Matemática, y particularmente, la geometría.

Por otro lado, existen teorías que hacen hincapié en la naturaleza de los objetos matemáticos, en tanto que los consideran conocimientos científicos válidos y existentes, independientemente de las construcciones mentales que realicen los individuos(en nuestro caso particular, el alumno), acerca de ellos, o de las instituciones sociales en que se inscriben (de manera particular, las instituciones educativas). Estas teorías tienen sus orígenes en el estudio particular del hecho educativo en Matemáticas, como es el caso de las teorías didácticas francesas, dentro de las cuales se pueden citar ([27]):

- La teoría de Ives Chevallard plantea como problema fundamental la existencia de un saber formal aceptado por la comunidad matemática, denominado saber sabio, así como de un proceso consciente y consensuado de modificación, y eventualmente simplificación de tal conocimiento, hasta hacerlo apropiado para su enseñanza en los centros educativos en forma de saber a enseñar y saber enseñado, existiendo también una serie de instituciones involucradas en tal proceso. Esta teoría se conoce con el nombre de Transposición Didáctica.

- La teoría de Guy Brousseau formula la necesidad de propiciar en el aula situaciones de aprendizaje apropiadas, que le permitan al alumno aprehender significativamente los conocimientos matemáticos, en este proceso entran en juego toda una serie de actores e instituciones. Esta teoría se denomina Teoría de Situaciones.

Desde la perspectiva de las teorías francesas, la epistemología está estrechamente relacionada con la cuestión didáctica en tanto que, para que exista una teoría sólida sobre los procesos de enseñanza aprendizaje, ésta debe considerar como uno de sus ejes fundamentales las características propias de los contenidos que se enseñarán. En los siguientes apartados se profundizará sobre este aspecto.

2.3 Didáctica

En este trabajo se concebirá la didáctica, y en particular la didáctica de la matemática, como una disciplina científica, que se encarga de estudiar el hecho educativo, según lo apunta Kuzniak, el saber didáctico "se caracteriza por un esfuerzo de teorización de tipo científico sobre los fenómenos de transmisión de conocimientos a los estudiantes" ([15], p 7).

La didáctica de las matemáticas, como se mencionó antes, es una ciencia que está relacionada estrechamente con la naturaleza de los objetos que se pretende enseñar, por lo cual es fundamental que considere no sólo aspectos pedagógicos, relacionados con el docente, el alumno, y las metodologías utilizadas, si no también aspectos epistemológicos, como lo apunta Kuzniak: "En matemática, al menos en la corriente en la que nos inscribimos, se trata de una teorización no psicoligizante en estrecha relación con la epistemología de los objetos matemáticos" ([15], p 7). De este modo, se formula una visión de la didáctica que trasciende la concepción tradicional en donde interactúan únicamente el docente y el alumno, para abrir paso a una visión más amplia, dentro de la cual el saber matemático es un eje fundamental en el proceso educativo. Kuzniak plantea la noción de sistema didáctico, constituido por la interacción de tres elementos, a saber: el alumno, el docente y el saber matemático propiamente dicho. Este sistema se estructura en dos niveles distintos: el primero corresponde a los centros de formación de profesores donde el futuro docente tiene un primer acercamiento a los saberes matemáticos formales, así como al sistema educativo elemental, el cual constituye, a su vez, el segundo nivel del sistema didáctico.

Ahora bien, dado que en el primer nivel de dicho sistema se manejan conocimientos matemáticos formales, el docente de secundaria realiza, consciente o inconscientemente, un proceso de simplificación de tales conocimientos a la hora de enseñarlos, de modo que sólo sea necesario para el alumno conocer ciertos aspectos de la teoría matemática formal que los justifica y valida, para poder operar con ellos en las situaciones planteadas en el aula. Si esta simplificación no se lleva a cabo de manera consciente y planificada, puede generar que los contenidos por enseñar se descontextualicen, perdiendo toda relación con el contenido matemático que les dio origen, convirtiéndose, por tanto, en contenidos carentes de significado. Este fenómeno recibe el nombre de desnaturalizacion simplificada (([15], p 9).

Puesto que la didáctica se encarga de estudiar los fenómenos que tienen que ver con los procesos de transmisión del conocimiento, debe también considerar los fenómenos de simplificación y transposición que se operan por parte del docente. En este sentido, será necesario valerse de teorías que expliquen y modelen tales fenómenos, a continuación se profundizará sobre las premisas de algunas de estas posiciones teóricas. Mencionadas en el apartado anterior.

2.4 Transposición Didáctica

La teoría de transposición didáctica se fundamenta en la existencia de un saber científico o saber sabio, el cual se hace llegar a los alumnos del sistema educativo formal por medio de un proceso denominado de transposición, en el cual, el saber sabio sufre una serie de modificaciones, adaptaciones y en general una simplificación, hasta hacerlo apropiado para ser enseñado en las aulas ([23], p 24). Este proceso no es lineal, si no que se da de forma cíclica, dándose momentos de realimentación que sirven para encaminarlo.

La transposición desde el saber sabio al saber enseñado se lleva a cabo en dos etapas, una externa, y la otra interna. La primera etapa, de transposición externa, se lleva a cabo a un nivel macro, cuando se definen los contenidos curriculares contenidos en el plan de estudio. En esta etapa se da la discusión, por parte de especialistas en distintos campos relacionados con el proceso educativo de los temas que se incluirán, o no, en el currículo oficial, y la organización de estos a lo largo de los años de escolarización formal, plasmada en los programas de estudio oficiales. Tal discusión genera la transformación del saber sabio en saber a enseñar.

La segunda etapa, llamada de transposición interna, se da en el aula, donde el docente convierte el saber a enseñar, distinto de por sí del saber científico que le dio origen, en saber enseñado, por medio de creaciones didácticas.

En medio de estas dos etapas, Chevallard ubica una esfera intermedia, un lugar donde "vive" el conocimiento, el cual denomina noosfera, constituida por todas las instituciones y personas involucradas en el proceso: universidades, matemáticos, profesores universitarios, especialistas en planificación y desarrollo curricular, ministerio de educación, profesores de primaria y secundaria, casas editoriales, etcétera. La labor de la noosfera, de manera general es la de orientar el proceso de transposición de los saberes, propiciando espacios de discusión, planteamiento de propuestas, evaluación de resultados y realimentación ([23], p 45).

También es función de la noosfera ejercer activamente el principio de vigilancia epistemológica, el cual tiene por objetivo velar porque el proceso de transposición no degenere en una descontextualización y vaciamiento de significados de los saberes enseñados en relación con los saberes científicos que los originaron. De esta manera, se regula entonces la producción de materiales didácticos y libros de texto, la capacitación de los docentes, y demás aspectos, en aras de no distorsionar el conocimiento matemático que se lleva a las aulas, al punto que se vuelva irreconocible ([23], p 48)

2.5 Paradigmas y Espacios de Trabajo Geométrico

La geometría se puede concebir de dos formas según lo afirma Kuzniak; una de ellas es la concreta, la cual reduce la geometría a la apropiación de conocimientos espaciales a partir de la manipulación de artefactos, la otra es la abstracta, que considera la geometría como el estudio de estructuras, es decir, una geometría más teórica.

Dado que ambas concepciones coexisten y muchas veces no son reconocidas de forma clara por el docente, es necesario integrar dentro del campo de la didáctica una epistemología explícita de la geometría, que parta de una vigilancia epistemológica, así pues, Kuzniak adopta de Khun la palabra paradigma, la cual "designa el conjunto de creencias, técnicas y valores que utiliza un grupo de científico. Ellos fijan la manera correcta de proponer un problema y emprender su solución" ([15], p 15). Esta concepción a su vez, repercute en la escogencia de los métodos y ejemplos que son planteados al alumno en el aula.

Al respecto se plantean dos hipótesis ([15], p 15):

- La existencia de diferentes paradigmas explica en parte la desarticulación de los saberes que se ha manifestado a nivel escolar en diferentes ciclos.

- Los formadores de docentes, los futuros profesores y los educadores en ejercicio se sitúan en paradigmas distintos, lo cual ocasiona malentendidos pedagógicos.

Ahora bien, partiendo del desarrollo histórico de la geometría, se puede apreciar la existencia de tres paradigmas geométricos ([15], p 18):

- La Geometría I (Geometría natural): Se centra en la observación, la intuición, la manipulación y la modelización de la realidad a partir de instrumentos concretos. Su fin es tecnológico y utilitarista.
- La Geometría II (Geometría axiomática natural): Tiene como fuente trascender la observación y la manipulación, abstrayendo sus resultados para lograr la formulación de un sistema de leyes hipotético-deductivas, que dan sentido al sistema, más allá de la situación que describen. Su fin es la modelización por medio de la axiomatización.
- La Geometría III (Geometría axiomática formalista): En ella se rompe el lazo entre los modelos geométricos y la realidad. Alcanza el mayor nivel de abstracción y se estudian las estructuras geométricas en sí mismas. Su fin es el razonamiento lógico formal.

Un aspecto importante para tener una visión epistemológica clara de la didáctica de la geometría es el concepto de espacio de trabajo. El espacio de trabajo de la geometría está integrado, según Kuzniak, por tres elementos, a saber: el espacio real y local de la geometría, el modelo teórico y los artefactos.

Espacio local y real: En general, la geometría estudia y teoriza sobre el espacio que considera formado por puntos y conjuntos de puntos; sobre éste espacio se hacen axiomatizaciones, teorías, distintas geometrías, etcétera; este es el espacio real de toda geometría. Pero cada geometría, y en particular cada paradigma geométrico, poseen también un espacio de trabajo local distinto. Así, la geometría axiomática formalista, dado su mayor nivel de abstracción, estudia el espacio como tal, sus propiedades, etcétera. La geometría axiomática natural, teoriza sobre *ciertos* subconjuntos del espacio, así se habla por ejemplo de figuras, y este es su espacio local. La geometría natural, por otro lado, tiene como espacio local de trabajo, uno más concreto, pues trabaja primordialmente a partir de objetos físicos.

Modelo teórico: Se fundamenta en el paradigma a partir del cual se aborde el estudio de la geometría, así, en la geometría natural, el modelo surge a partir de la observación de la realidad y debe ser entonces fiel a la realidad que se modela. En la geometría axiomática natural, el modelo teórico asumido puede servir para explicar el mundo físico, pero lo trasciende, y tiene existencia propia. Finalmente, en la geometría axiomática formalista, el modelo es puramente teórico, y no guarda relación directa con la realidad física.

Artefactos: Son las herramientas de las que se vale cada paradigma para desarrollar su análisis y sus estudios, y constituyen el aspecto más visible del espacio de trabajo. Varían de una geometría a otra, así por ejemplo, el uso de la regla en el paradigma natural y en el axiomático natural varía, pues en el primero la regla es graduada, mientras que en el segundo se usa sin marcas.

Espacio de trabajo personal: Ante un problema, los expertos saben reconocer el paradigma geométrico que resulta útil para poder interpretarlo y resolverlo, lo hacen gracias a un espacio de trabajo geométrico que dominan perfectamente. Sin embargo, cuando este tipo de situaciones son presentadas ya no a un experto ideal, sino a un individuo real (el alumno o el docente), éste lleva a cabo un tratamiento del problema en lo que Kuzniak denomina el espacio de trabajo geométrico personal.

Dependiendo de la geometría utilizada, es posible que para un mismo problema se tengan espacios de trabajo geométrico de referencia distintos, sin embargo, el individuo trabaja en su espacio geométrico personal, de manera que es él quien decide en cuál espacio de referencia ubicarse para abordar el problema. Lo anterior conlleva en ocasiones a malentendidos pedagógicos, puesto que por ejemplo, el individuo podría abordar un problema propio de la llamada Geometría II, con la utilización de artefactos de la Geometría I.

2.6 Teoría de Situaciones Didácticas

Los malentendidos pedagógicos antes mencionados resultan en gran parte de la naturaleza de la situación propuesta a los estudiantes por parte de los docentes, por lo tanto, se puede considerar esta problemática en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau.

En esta teoría se habla de situaciones didácticas y situaciones adidácticas, las cuales coexisten en el aula y, de algún modo, en conjunto garantizan un auténtico aprendizaje, por lo que trascienden la inmediatez de las actividades programadas por el docente para una clase. Según Brousseau, una situación adidáctica surge, para el alumno, en el momento en que se enfrenta a un problema donde deba utilizar sus conocimientos sin la orientación explícita del docente ([7], p 30):

> *Entre el momento en que el estudiante acepta el problema como si fuera suyo, y el momento en que produce su respuesta, el docente se abstiene de interferir y sugerirle el conocimiento que desea hacer surgir. El alumno sabe bien que el problema fue planteado para ayudarle a adquirir un nuevo fragmento de conocimiento, pero también debe saber que este conocimiento es enteramente justificado por la lógica interna de la situación, y que puede construirlo sin recurrir a ninguna justificación didáctica. No solo puede hacerlo, si no que debe hacerlo, porque habrá realmente adquirido este conocimiento sólo cuando sea capaz de usarlo por sí mismo en situaciones en las cuales se encuentre fuera de cualquier contexto de enseñanza y en la ausencia de dirección intencional alguna. Tal situación se llama una situación adidáctica.*

Por otro lado, una situación didáctica se refiere a todas aquellas problemáticas que son propuestas de manera explícita por el docente a fin de poner en juego el saber, de manera que permiten una rica interacción entre el estudiante y el medio de aprendizaje. En palabras del propio autor ([7], p 31):

> *La situación o problema escogido por el docente es una parte esencial de la situación de ampliación en la cual el docente busca devolver al estudiante una situación adidáctica que le proporcione una interacción lo más independiente y fructífera posible. Para este propósito, de acuerdo con el caso, el docente comunica o se abstiene de comunicar información, preguntas, métodos de enseñanza, heurísticas, etc. Se ve entonces envuelto en un juego con el sistema de interacción del estudiante con el problema que le plantea. Este juego, o situación de ampliación, es la situación didáctica.*

El concepto de medio -*milieu*- es fundamental en la comprensión de este juego de interacciones y situaciones. Brousseau afirma que el medio es "el sistema que se opone al sistema de enseñanza o, más bien, el sistema previamente enseñado" ([7], p 57). Es decir, el medio está conformado por el sistema en el que se encuentra inmerso el estudiante, y a partir del cual se plantearán nuevas situaciones de enseñanza considerando sus aprendizajes actuales, sus conocimientos previos, etcétera; el medio dependerá entonces, en gran medida, de las situaciones, tanto didácticas como adidácticas, a las cuales se ha enfrentado con anterioridad el alumno, y es, por su naturaleza, adidáctico, pues constituye en sí mismo una situación en la cual los nuevos conocimientos no están del todo contextualizados. En este punto, es posible hacer una comparación entre lo que se concibe como medio según Brousseau y lo antes dicho sobre los Espacios de Trabajo Geométrico (ETG), pues tal y como lo establece Kuzniak: "el medio depende de la situación, mientras que el ETG es una referencia independiente de la situación dada" ([15], p 29).

En este juego de interacciones entre el alumno y el docente, que se inscribe en un medio, y en el cual se suceden situaciones tanto didácticas como adidácticas que se orientan a la consecución de nuevos aprendizajes, es claro que las percepciones del docente y del alumno respecto a las situaciones planteadas son dispares, y en muchas ocasiones, divergentes, por lo cual es imprescindible que se clarifiquen de alguna manera las reglas del juego. Esta clarificación de reglas, de los roles que cada una de las partes (docente y alumno) desempeñan, y de las expectativas que cada uno posee del otro, así como de sus responsabilidades dentro del sistema, y de lo que "ganan" apegándose a las reglas, es lo que se conoce como contrato didáctico. Las normas que rigen ese contrato son, en algunos casos, puestas de manifiesto por parte del docente explícitamente, mientras que en otras, el alumno va apropiándose de ellas vía interacción clase – alumno. Algunas de las consecuencias de este contrato son ([7], p 32):

- El docente debe crear condiciones suficientes para la apropiación del conocimiento y debe reconocer cuando éste ocurre.
- El alumno debe ser capaz de satisfacer éstas condiciones.
- El contrato didáctico debe continuar a cualquier costo.
- El docente asume que el aprendizaje anterior y las nuevas condiciones proveen posibilidades para nuevos aprendizajes.

Anteriormente también se mencionó que la interpretación de un problema por *parte del* estudiante depende en gran medida de la elección de paradigma que éste lleve a cabo, pues bien, en este sentido es importante lo que se llama el contrato didáctico, en el cual el docente establece los cambios que deben efectuarse para la correcta *interpretación* y solución de un problema planteado. Por ejemplo, en los primeros niveles de la enseñanza de la geometría, el alumno está acostumbrado a que sus procedimientos están en estrecha relación con el dibujo que se le presenta, pero es necesario un cambio de contrato en cuanto a la posición de la *figura como* elemento central, puesto que en niveles superiores "la figura no es una prueba". Este ejemplo constituye un caso en donde las normas del contrato se modifican de manera implícita, generando dificultades entre lo que el docente espera del alumno cuando resuelve un problema, y lo que el alumno cree que el docente espera de él.

2.7 Detransposición Didáctica

En el apartado sobre Transposición Didáctica se mencionó que ésta se refiere a una adaptación del llamado saber sabio al saber a enseñar y de éste al saber enseñado. Sin embargo, en algunas ocasiones es preciso realizar el proceso inverso, esto es, retomar el saber enseñado y devolverse al saber sabio, dicho proceso se llama detransposición didáctica, que en palabras de Antibí y Brosseau se refiere al proceso que "transforma un saber enseñado previamente, los conocimientos y las situaciones asociadas en otro saber enseñado, más próximo al saber sabio, o a un saber proyectado por la institución escolar (...) se puede decir que la detransposición transforma una praxología escolar en otra más ancha y más sabia". ([3], p 52).

Un ejemplo en el cual se hace necesaria la detransposición es cuando se estudian los números reales. Por la formación de la escuela el alumno cree que si $a^2 = b^2$ entonces $a = b$, pero esto es válido sólo para el caso de números positivos, por lo cual es fundamental hacer explícito este cambio en el aula, y que de esta manera, el alumno sepa que ante esta situación podría ser que $a = b$ o bien que $a = -b$.

Es importante destacar que las equivocaciones de esta índole por parte de los estudiantes no pueden ser evitadas ni corregidas con anticipación, por lo cual el proceso de detransposición es relevante y complementario al de transposición didáctica.

2.8 Las Teorías Didácticas y la Propuesta

Para el planteamiento del programa de estudios con Geometría Algebrizada que se propone en este trabajo, el cual incluye competencias, contenidos y actividades con estrategias metodológicas; no se adopta por completo una teoría de las anteriormente mencionadas, sino que se toman en cuenta aspectos relevantes de cada una de ellas.

Por ejemplo, para el establecimiento de los contenidos curriculares y su organización es necesario un proceso en el cual el saber matemático se adapte al nivel de los estudiantes, sobre todo en unidades nuevas, como es el caso de las transformaciones isométricas y vectores; de este modo, se realiza un proceso similar al de transposición externa expuesto en la Teoría de Chevallard (no exactamente, puesto que no se cuenta con la noosfera como tal). Incluso en unidades que ya formaban parte del programa de estudios, como es el caso de números reales, se retomó el saber formal para poder dar otras herramientas a los alumnos, como lo son los axiomas de campo, los cuales se les presentan como propiedades.

En el programa propuesto se incluye además una guía teórica para las unidades de Vectores y Geometría, la cual pretende contribuir al proceso de transposición interna, puesto que se describe con detalle cómo pueden ser estudiados los temas en el aula. En este apartado, se le presenta a los profesores cómo los alumnos pueden contar con nociones intuitivas procurando no modificar la naturaleza de los contenidos mismos, para que así no se lleguen a simplificaciones extremas que desemboquen en argumentaciones sin sentido (es decir, se procura evitar la desnaturalización simplificada que plantea Kuzniak). Con esto se unifican los criterios en cuanto a cuáles contenidos enseñar y de qué manera hacerlo, y se simplifica la labor de vigilancia epistemológica.

Por otra parte, la detransposición didáctica también está presente en este programa de estudios, por ejemplo con el concepto de ángulo. En la escuela se maneja su definición euclídea, pero ésta debe ajustarse no sólo para que sea compatible con la Geometría en movimiento, sino también para facilitar el camino hacia el estudio de la Trigonometría, tal y como se explica en el programa.

Como se mencionó anteriormente, los contenidos y la guía teórica se acompañan de actividades que pretenden responder a las competencias establecidas con anterioridad. Para ello, las actividades se presentan de forma detallada, con las instrucciones para poder ser llevadas a cabo, y con una explicación para el docente, en la cual se le informa sobre el propósito específico de la actividad en el momento en el que se propone realizar, y también posteriormente, puesto que algunas actividades sirven de base para el estudio de ciertos temas en el futuro.

El programa de estudios propuesto pretende dar una idea de la manera en cómo puede llevarse a cabo la interacción entre el docente, el estudiante y el medio (retomando la Teoría de Situaciones de Brousseau) puesto que con la descripción de las actividades se ofrecen algunos ejemplos de situaciones didácticas enriquecedoras para el alumno, y se proponen modos en los que éste puede involucrarse en situaciones adidácticas que le permitan interactuar con los contenidos y entrenarse a través de problemas, para posteriormente ser capaz de enfrentarse a los retos de la vida.

La descripción de las actividades permite además que el profesor identifique el espacio de trabajo que se utilizará para abordar las diferentes situaciones. En el caso de Geometría y retomando los paradigmas expuestos por Kuzniak, se puede apreciar que la mayoría de las actividades se realizan desde el paradigma denominado Geometría I, mientras que otras serían orientadas a trabajarse de manera que poco a poco se fuera dando un acercamiento a la Geometría II, por ejemplo, en algunas actividades se presentan ejercicios en los cuales se pueden utilizar artefactos propios de ambos paradigmas.

Es así como se han retomado las diferentes teorías didácticas para la formulación de un programa de estudio, el cual pretende ser una guía detallada para que el docente pueda llevar a la práctica las argumentaciones teóricas, expuestas en los apartados anteriores.

2.9 Referente Histórico Matemático

Uno de los principales antecedentes de la Geometría de las transformaciones se dio con Gerard Desargues (1593-1662) y Blaise Pascal (1623-1662), quienes trabajaron la Geometría proyectiva desde un enfoque axiomático. Sin embargo, éste no transcendió debido a que la Geometría Analítica de Descartes (1596-1650), en su momento, resultó ser más atractiva. De ahí que la Geometría Proyectiva se sumió en un olvido temporal hasta la unificación de las Geometrías hecha por Felix Klein (1849-1925).

En 1871, Klein descubrió que las geometrías euclideanas y no euclideanas son casos particulares de la Geometría Proyectiva. Así, este matemático establece una nueva forma de ver la Geometría y de definirla como:

> "El estudio de aquellas propiedades de un conjunto S que permanece invariante cuando los elementos de S son objetos de una transformación de algún grupo de transformaciones" ([2]).

Para él, cada Geometría podría verse como la correspondencia de un grupo de transformaciones, de esta forma, la Geometría afín nace como un subgrupo del grupo proyectivo, y de esta se deriva también la Geometría Euclidea, como el grupo de transformaciones isométricas. ([29]) (Ver figura)

Con este nuevo enfoque se logra retomar el interés por la Geometría Proyectiva, debido a que sus métodos eran más prácticos que los puramente sintéticos.

De ahí, comienza el esfuerzo de algunos matemáticos por llevar a la práctica este enfoque de transformaciones en todos los niveles. Uno de los más importantes se da con Jean Dieudonné (1906-1992), quien en el Congreso de Royaumount (1959, Francia), critica fuertemente el uso de los métodos sintéticos en Geometría y aboga por el uso de la geometría de transformaciones, ya que según él, el método de Euclides y de Hilbert es obsoleto; y que desde el punto de vista del álgebra lineal se puede abarcar todos los problemas actuales de secundaria con mucha mayor facilidad e incluso otros problemas más que no se trataban anteriormente. Además, reprendía la falta de coherencia existente entre la enseñanza de la secundaria y la enseñanza universitaria, ya que muchos de los contenidos de secundaria no son en lo absoluto necesarios en la universidad mientras que muchos que serían de utilidad no se enseñan. ([9])

Entre los cambios en la enseñanza de la Matemática que se promulga en el Congreso de Royaumount están la incorporación de temas a los programas de estudio como la teoría de conjuntos, el álgebra abstracta, el álgebra lineal, la geometría afín, entre otras. También se propuso un giro en cuanto a las aptitudes, habilidades y destrezas matemáticas que se esperaban fomentar en el estudiantado; y se manifestó la necesidad de integrar la geometría en otras áreas de la matemática.

Como consecuencia de este Congreso se genera una Reforma de las Matemáticas Modernas y con ello, los países participantes optan por alguno de estos dos enfoques, tal como el caso de los Estados Unidos, que eligió el seguir enseñando la Geometría Euclídea axiomática, tal y como lo plantea David Hilbert (1862-1943), cuyas ideas dieron origen al Mathematics Study Group (SMSG); y el caso de Francia y Bélgica, que optaron por el enfoque de las transformaciones.

2.10 Situación en Latinoamérica

En América, este movimiento se introduce principalmente bajo la influencia de la denominada Matemática Moderna, que se origina en los Estados Unidos, y se propaga por toda Latinoamérica gracias a la labor de SMSG.

Este movimiento estuvo representado por Marshall Stone (1903-1989) en la Primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática, en Bogotá 1961, la cual obtuvo como principal logro la creación de Comité Interamericano para la Enseñanza de la Matemática (CIAEM) y el cual acogió la reforma de la Matemática Moderna. Los avances de la misma fueron revisados en la segunda conferencia Interamericana de Educación Matemática, Lima 1966.

Sin embargo, algunos países, aunque en conferencias pasadas se había acogido la reforma de la Matemáticas Moderna, decidieron cambiar de *enfoque* y unirse a la enseñanza de la Geometría mediante su algebrización. Tal es el caso de Cuba, quien con la Revolución Cubana 1959, busca apoyo en el mundo, consiguiéndolo en la República Democrática Alemana (RDA), en la que este enfoque era seguido.

A través de la influencia que la RDA y la Unión Soviética ejercen en Cuba, se comienza a estudiar la Geometría desde el enfoque de Felix Klein (1849-1925), obteniéndose así una algebrización básica de la geometría en los programas de estudio cubanos.

Junto con los belgas, particularmente Papy (1920-sf), Cuba crea el Instituto Barona, con el fin de formar profesores y tener un lugar para poner en práctica la didáctica de las matemáticas diferente a la Francesa. A raíz de lo anterior, se comienza con las ideas de transformar la educación secundaria, siendo los pioneros en ensayar programas de estudio siguiendo la propuesta de Alemania.

Otro país que decidió cambiar de enfoque fue Chile, aunque, la iniciativa chilena de asumir una enseñanza de la Geometría Algebrizada es de más reciente cuño. Se da en los años ochenta e inspirados en la Reforma Matemática realizada en Francia.

2.11 Situación en Costa Rica

En nuestro país, esta reforma llegó alrededor de los años setenta, cuando en la Universidad de Costa Rica se realizan intentos de introducir en los programas de ciertas carreras universitarias cursos de Álgebra Geométrica. Sin embargo, dada la falta de formación de los docentes en el campo y al énfasis exageradamente teórico que se le dio, dejando de lado el aspecto de resolución de problemas, la idea no rindió los resultados esperados; razón por la cual, en 1980 se abandona la iniciativa volviendo al enfoque tradicional.

Recientemente, debido a la iniciativa de algunos profesores, se modificaron los contenidos de los cursos de Geometría I y II impartidos en la Universidad de Costa Rica, con el propósito de integrar el álgebra lineal como herramienta para desarrollar los temas de geometría euclídea.

Sin embargo, estos esfuerzos se han realizado solo a nivel universitario, y los escasos resultados obtenidos no han trascendido a la Educación General Básica. A pesar de ello, se puede apreciar en los Programas de Estudio del Ministerio de Educación Pública como algunos contenidos intentan combinar aspectos provenientes tanto del enfoque tradicional como el de la geometría de transformaciones; tal vez queriendo introducir un matiz novedoso en los programas. Sin embargo, estas modificaciones se han efectuado un tanto a la ligera, sin tomar en cuenta las consideraciones necesarias para poder establecer una adecuada y significativa integración de los nuevos temas. Un ejemplo de esta situación es el caso del tema de Simetría Axial en octavo año; el cual siendo un tema que debiera abordarse con el lenguaje propio de las transformaciones, se trabaja de una forma muy tradicional.

En Costa Rica, solamente se han realizado unas cuantas investigaciones al respecto, entre esas esta "La Enseñanza de la Geometría" Brenes, V. y otros., en la cual se evidencia la situación de la enseñanza de esta rama en Costa Rica y se desarrolla algunas propuestas para mejorar las debilidades que ésta presenta. En la misma, las autoras dedican un capítulo a explicar brevemente los conceptos básicos de la Geometría Proyectiva y sus subgeometrías como la Afín, con el fin de lanzar al menos a nivel universitario el estudio de la Geometría desde el enfoque de Klein.

A nivel de maestría, se desarrolla una tesis titulada "Geometría Afín: una propuesta" de la autora Lilliana Jiménez, dirigida a profesores de secundaria y de universides con el propósito de evidenciar y dar a conocer, más ampliamente, este nuevo enfoque en Costa Rica.

Capítulo III

Programa de estudio

El presente programa de estudio muestra una sugerencia secuencial de contenidos para el desarrollo de los temas propuestos en el trabajo de investigación para el tercer ciclo de la Educación general Básica, es decir, sétimo, octavo y noveno año.

Cada año está estructurado en dos unidades temáticas, a saber:

- Sétimo año:
  - Conjunto de números reales
  - Vectores en el plano
- Octavo año:
  - Álgebra
  - Nociones elementales de geometría
- Noveno año:
  - Geometría de triángulos
  - Trigonometría

Al estudiar la propuesta del programa el docente podrá notar, en primer lugar, que el orden de los contenidos respecto a su disposición en los programas vigentes ha sido modificado, si bien se ha procurado no remover ninguno de los temas actuales (salvo por las unidades referentes a estadística, por considerarse que estos contenidos pueden introducirse gradualmente en las demás unidades con ejercicios de aplicación y contextualización). Por el contrario, se ha buscado introducir nuevas temáticas, que sirvan para complementar las ya existentes, en función del abordaje de la geometría desde el enfoque propuesto.

En segundo lugar, notará el docente que la estructura del programa ha sido modificada, de manera que no se presentan las tradicionales columnas de objetivos, contenidos, procedimientos, valores y actitudes, y criterios de evaluación.

Se ha optado por desarrollar el programa de una forma más detallada, donde las columnas de objetivos y criterios de evaluación han sido sustituidas por el apartado de "Aprendizajes esperados", en el cual se explican las habilidades que se espera que el alumno haya adquirido al finalizar la respectiva unidad, procurando relacionar significativamente cada aprendizaje con el anterior y con los siguientes, de modo que ello sirva para delimitar el nivel de alcance esperado en cada objetivo.

En un segundo apartado, que sustituye las actuales columnas de contenidos y procedimientos, y que se ha denominado "secuencia de contenidos y actividades sugeridas", se enumeran los contenidos correspondientes a cada unidad; y para cada uno de ellos se muestran ejemplos de actividades que puede llevar a cabo el docente para trabajar dichos contenidos en el salón de clase, así como sugerencias de ejercicios para asignar a los alumnos. Esto con el fin de que el docente pueda apreciar el nivel de profundidad o de formalización mínimo que se espera en cada unidad, y con cada contenido, teniendo en cuenta el nivel cognitivo del alumno y la interrelación del contenido con los temas que posteriormente se estudiarán.

Es por ello que las actividades y los contenidos están organizados en una secuencia que permita su introducción de una forma sencilla, tomando como punto de salida nociones intuitivas que pueda tener el alumno, y partiendo de situaciones concretas y cercanas al estudiante, pero procurando no caer en situaciones absurdas y sin sentido, como muchas veces sucede al intentar contextualizar los temas matemáticos a la realidad de los estudiantes. A la vez, notará el profesor como el nivel de abstracción y formalización de los conceptos, así como de los ejemplos planteados, se va aumentando de una manera gradual pero constante, desde sétimo hasta llegar al noveno año.

Finalmente, debe recordarse que la propuesta en ningún momento pretende ser algo acabado, por lo que las actividades y los ejercicios propuestos no son algo que deba seguirse al pie de la letra, sino solamente un ejemplo o guía para el profesor, en cuanto al tipo de ejercicios a abordar, el nivel de complejidad, y sugerencias metodológicas para trabajar en la clase. En este aspecto, se invita al docente a indagar sobre otras situaciones significativas que le permitan contextualizar los temas estudiados, así como a buscar o plantear nuevos ejercicios.

3.1 Sétimo año

3.1.1 Unidad 1: Números Reales

Introducción

A lo largo de toda la Educación General Básica y la Educación Diversificada, el estudio del conjunto de los números reales, sus subconjuntos, propiedades, y axiomas de campo, son un eje central, imprescindible para la comprensión e integración de los demás contenidos del programa. El surgimiento histórico de los subconjuntos reales (naturales, enteros, racionales e irracionales), a partir de las necesidades económicas y sociales del ser humano, la operacionalización con números reales, y las diversas interpretaciones y aplicaciones de este tema, son un conocimiento que trasciende los aprendizajes adquiridos en la unidad, y se torna esencial a la hora de interpretar e interiorizar significativamente otras temáticas, por ejemplo el álgebra, donde por medio del lenguaje algebraico se generalizan los resultados aritméticos; o a la hora de resolver ecuaciones e inecuaciones.

Por tal motivo, se considera que el estudio y conocimiento apropiado del conjunto de los números reales por parte del estudiante, constituye el primer paso en la comprensión significativa de las temáticas a las que éste se enfrentará durante los cinco años de educación matemática en secundaria, por lo que se ubica como primera unidad en sétimo año.

Por otro lado, y dado el nivel de complejidad que, formalmente hablando, posee el estudio de un tema como lo es el conjunto de los números reales, se recomienda que dicho conocimiento se adquiera de una manera intuitiva, orientado hacia una visión práctica del mismo, de modo que facilite al estudiante, en última instancia, operar con números reales, para luego aplicar estas operaciones y sus propiedades en otros contextos, como lo hará en años posteriores de su educación.

El énfasis debe darse, entonces, no hacia la memorización vacía de axiomas, teoremas, y caracterizaciones de conjuntos, sino hacia la consideración de estos para operar con números reales en un contexto aritmético. Es decir, de modo general, la teoría debe estar al servicio de las aplicaciones prácticas, y no al contrario. Los ejercicios formulados deben procurar, si bien no trivializarse, tampoco complicarse innecesariamente. Debe recordarse que el fin de la unidad es que el alumno desarrolle de manera global las destrezas necesarias para operar con números reales.

Finalmente, se recomienda al docente, que al desarrollar los diferentes contenidos de esta unidad, tenga en cuenta la interrelación entre los diversos aspectos tratados, y mantenga un hilo conductor a lo largo de las lecciones, de modo que se perciba la integración de las diferentes secciones. Además, es necesario considerar que el énfasis de la unidad debe darse en una dirección aplicativa y operacional, sin que se dejen de lado los aspectos teóricos, y procurando no caer en la mecanización de los ejercicios y contenidos. Por este motivo, se invita al docente a procurar un nivel apropiado en los ejercicios que se desarrollen durante las sesiones prácticas y tareas asignadas a los alumnos, intentando relacionar gradualmente los contenidos con otras áreas donde su empleo sea necesario posteriormente.

Aprendizajes esperados

Se espera que, al finalizar esta unidad, los estudiantes se encuentren en capacidad de:

1. Identificar los distintos subconjuntos de IR (IN, Z, Q) en sus diversas notaciones: por extensión ó por comprensión, según sea el caso.
2. Identificar y representar números reales (naturales, enteros, racionales e irracionales) en sus distintas notaciones: enteros, fracciones, expansiones decimales, expresiones radicales y otras notaciones particulares (π, $\sqrt{2}$, e)

3. Establecer relaciones de orden entre los elementos de IR por medio de diferentes estrategias, entre ellas:
    a. Relacionar intuitivamente los elementos de IR y los puntos de una recta.
    b. Establecer sistemas de coordenadas para una recta.
    c. Determinar la abscisa de un punto en una recta dotada con un sistema de coordenadas.
4. Interpretar el significado de los axiomas de campo de IR, para su utilización en la resolución de operaciones con números reales.
5. Efectuar operaciones con números reales: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación, combinación de operaciones.
6. Determinar el valor absoluto de un número real dado.
7. Identificar intervalos reales abiertos, cerrados, semiabiertos, acotados y no acotados en sus distintas notaciones, para efectuar operaciones con ellos (unión e intersección)

Secuencia de contenidos y actividades sugeridas

1. Subconjuntos de IR

Con este contenido se pretende que el alumno se familiarice con los elementos de los subconjuntos de IR, y que se habitúe a representarlos y utilizarlos en diversas situaciones cotidianas, por medio del uso de diferentes estrategias didácticas.

Se introducirá así la noción de número entero, haciendo énfasis en la idea de los enteros negativos, como opuestos de los números naturales, a partir de situaciones en las que se destaque el signo de un número como un desplazamiento en cierta dirección.

Luego se introducirá la idea de números racionales, a partir de las nociones de fracciones estudiadas en la enseñanza primaria.

Posteriormente se abordará la idea de número irracional, a partir de ejemplos concretos de expansiones decimales infinitas no periódicas, y casos particulares conocidos por los alumnos, como el caso de Pi. El abordaje de estos conceptos se dará planteando al alumno actividades donde deba poner en práctica sus capacidades de razonamiento.

A pesar de este orden de los contenidos, el docente debe hacer hincapié desde el principio, en que se trabajará en el conjunto de los números reales; y en que muchas de las propiedades que se van a deducir para los casos particulares de *Z* o Q, serán válidas posteriormente en IR; de modo que se debe explicitar cuando se esté delante de esas propiedades.

En el presente texto se mencionan algunos resultados importantes, presentados en cajas sombreadas con colores, utilizando simbología matemática, con el fin de que el alumno se vaya familiarizando con ella. El docente debe recordar, sin embargo, que el uso de la misma no debe estar por encima de la comprensión de los conceptos o de la propiedad.

Actividad 1.1: Medidas de Temperatura

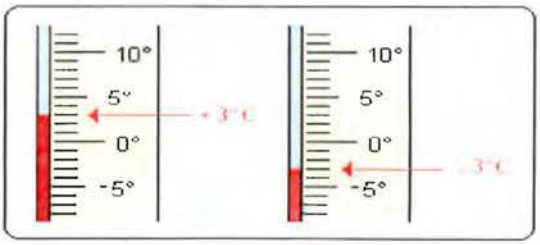
Con esta actividad se pretende que los estudiantes se familiaricen con los números enteros en situaciones reales y así, apreciar la utilidad y necesidad de trabajar con ellos.

Se puede utilizar esta actividad como iniciación el tema de los números enteros, durante el proceso de aprendizaje del orden en IR, o bien, cuando se enseñe el opuesto de un número real; queda a criterio del docente en cuál o cuáles circunstancias aplicarlo.

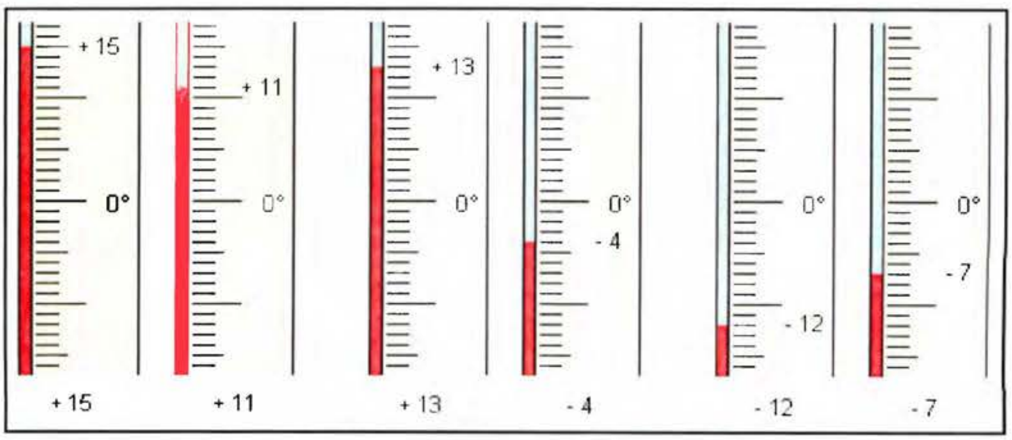
Note que este tipo de ejercicios induce al estudiante a trabajar con un sistema de coordenadas en la recta, lo que permite hablar de una "recta numérica", con lo cual a su vez, se introduce la noción de función, al establecerse una correspondencia entre los números reales (o enteros, en este caso particular) y los puntos de una recta; concepto que debe ser formalizando gradualmente.

Al concluir este apartado, el alumno debe poseer una visión global del conjunto de los números enteros y algunas de sus características, especialmente aquellas necesarias para orientarlo hacia la resolución de operaciones.

Instrucciones: A continuación se presenta un termómetro con medidas en grados centígrados. Designemos con el signo "+" a las superiores a 0° C y con el signo "-" a las inferiores a 0° C, tal y como se muestra en los siguientes ejemplos:



a. En cada caso, compare las temperaturas con el signo conveniente: "<" o ">".



b. Se dice que dos números enteros son opuestos el uno del otro, cuando presentan la misma magnitud, pero distinta dirección. En el caso de las temperaturas registradas en el termómetro, dos temperaturas son opuestas cuando tienen el mismo valor, pero diferente signo. Sabiendo esto, determine cuáles son los números opuestos a los indicados en cada uno de los termómetros anteriores.

+15 es opuesto de	____	+13 es opuesto de	____	- 12 es opuesto de	____
+11 es opuesto de	____	- 4 es opuesto de	____	- 7 es opuesto de	____

c. ¿Cuál es el opuesto de cero? _____

Note el docente que, por medio de esta actividad, se introduce de manera muy natural el concepto de inverso aditivo en IR, el cual, por sencillez, se manejará simplemente con el nombre de opuesto. Este tema se puede posteriormente generalizar al conjunto de los números reales, de modo que se aproveche para mencionar la existencia y unicidad de los opuestos para cada número real distinto de cero, sin caer en el error de complicar o formalizar demasiado el concepto.

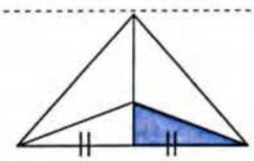
Actividad 1.2. Fracciones equivalentes, amplificación y simplificación de fracciones

Esta actividad busca familiarizar al alumno con el concepto de fracción equivalente, a la vez que pretende mostrar el proceso de simplificación y amplificación de fracciones como una herramienta útil para obtener fracciones equivalentes, lo cual, a su vez, se vuelve necesario más adelante para sumar o restar fracciones heterogéneas.

En esta actividad se trabaja específicamente con fracciones positivas, para facilitar una representación gráfica de las mismas y su consecuente visualización por parte del alumno. Sin embargo, dado que el estudiante ha trabajado en la unidad anterior con números negativos, el docente deberá en cierto momento, antes de dar por concluido el apartado, extender estas representaciones a las fracciones negativas.

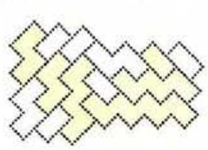
Debe tenerse en cuenta que el propósito principal de este apartado es acercar al alumno a la noción de conjunto de números racionales; por lo cual, no debe quedarse el desarrollo del tema solamente en la aplicación de la actividad, sino que esta debe servir como medio para ir formalizando la noción de Q. De esta manera, conforme se avance en los ejercicios, el profesor deberá velar para que se vaya trabajando otras posibles representaciones de tales números, entre ellas la notación decimal y mixta; de modo que, concluido el apartado, el alumno posea una comprensión general de Q como conjunto.

Instrucciones: A continuación se muestra una serie de representaciones gráficas para diversas fracciones. Determine a cuál fracción corresponde y escriba dos fracciones equivalentes a ella.

a) 

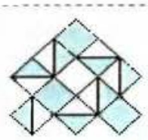
Fracción representada: $\frac{1}{6}$

Fracciones equivalentes: $\frac{2}{12}$ y $\frac{4}{24}$

b) 

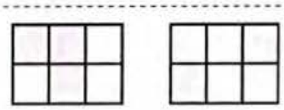
Fracción representada:

Fracciones equivalentes:

c) 

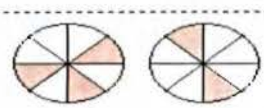
Fracción representada:

Fracciones equivalentes:

d) 

Fracción representada:

Fracciones equivalentes:

e) 

Fracción representada:

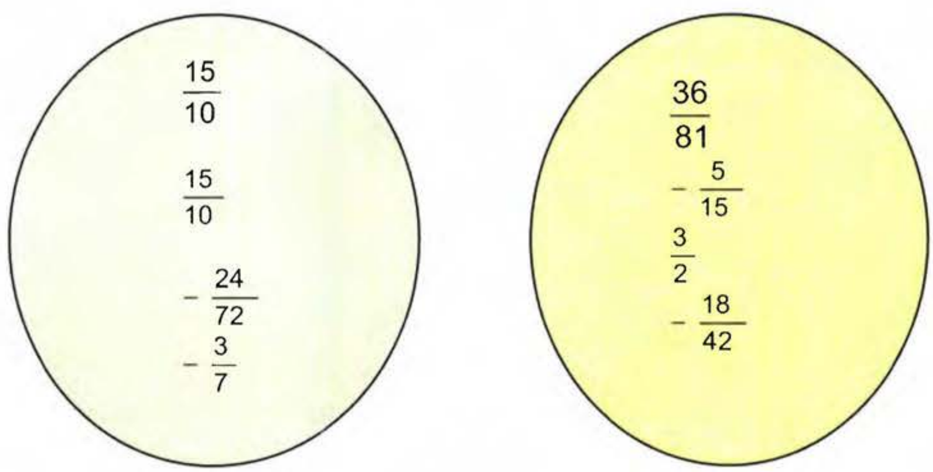
Fracciones equivalentes:

Ejercicios:

A. *Determine dos fracciones equivalentes a cada una de las que se le presentan a continuación*

Fracción dada	Fracción equivalente A	Fracción equivalente B
$\frac{3}{5}$		
$\frac{-6}{4}$		
$\frac{24}{12}$		

B. A continuación se le presentan dos conjuntos de fracciones, uno verde y uno amarillo. Asocie las fracciones del conjunto verde con una o varias fracciones que sean equivalentes a ellas, ubicadas en el conjunto amarillo.



Cuando se trabaje con fracciones, el docente deberá introducir gradualmente las diversas representaciones de un número racional, y el algoritmo para pasar de una notación a otra, haciendo énfasis particularmente en las expansiones decimales, y las características de estas para un número racional (es decir, finitas o infinitas periódicas). Esto por cuanto las expansiones se volverán una herramienta importante cuando se introduzca, en actividades posteriores, la noción de números irracionales.

En este punto, es fundamental hacer al alumno una serie de observaciones, encaminadas a la construcción de la idea de la completitud de IR. Cuando se trabaje en conjuntos como $\mathbb{Z}$ y Q, el profesor deberá hacer observaciones intuitivas sobre el hecho de que, ni los números enteros, ni los números racionales "completan la recta numérica", es decir, que existen puntos de la recta, los cuales no se pueden representar con números enteros o racionales, por lo que debe existir otra "clase de números" que completen esos "huecos" en la recta.

Una estrategia para esto consiste, a manera de ejemplo, en jugar con las expansiones decimales de los números racionales, las cuales, como el alumno sabe, son finitas o infinitas periódicas, y plantearle al alumno la idea de "construir" de forma intuitiva un número cuya expansión decimal sea infinita pero no periódica, de modo que el alumno visualice el patrón con que se está construyendo dicho número, por ejemplo, se puede hablar de números como $0.1234567891011121314151617181920212223 24\ldots$, o bien $1.0100100010000100000 1\ldots$; $0.1011001110001111000 0\ldots$; $0.135791113151719\ldots$; ó $0.2468101214161820 22\ldots$

Actividad 1.3: Aproximación de algunos números irracionales

A continuación se presentan tres actividades en las que se puede trabajar con números irracionales mediante la utilización de figuras conocidas o de algoritmos. La idea de esta actividad, es acercar al alumno a la noción de número irracional a partir de actividades concretas, de modo que se visualice su existencia como un hecho que se puede deducir de forma natural y no como una invención.

Es importante también, tanto en esta como en las demás unidades del programa, recordar al docente la importancia que tiene el retomar los aspectos históricos del desarrollo de los temas tratados, tanto por ser una valiosa herramienta didáctica que permite contextualizar cronológicamente los temas estudiados, como por ser un impulsor de aspectos de investigación por parte del alumno.

Los tres ejercicios que a continuación se plantean podrían trabajarse en una misma clase, organizando al grupo en subgrupos de trabajo, y asignándole a cada uno un ejercicio distinto. Así, mientras unos grupos trabajan con la aproximación de π, otros trabajarán con $\sqrt{2}$, y otros con *e*, formulando conjeturas distintas, las cuales se pueden exponer y discutir en plenaria al finalizar el trabajo de los grupos.

Una vez concluidas estas actividades, el docente procederá a referirse, más formalmente, al conjunto de los números irracionales, como aquellos números que no pueden representarse como un cociente de números enteros, o que tienen una expansión decimal infinita pero no periódico, indicando que dicho conjunto se denota por convención con el símbolo I. A partir de esta definición, se deducirá que el conjunto de los números irracionales y el conjunto de los números racionales son conjuntos disjuntos ($Q \cap I = \emptyset$), y se formulará la existencia de un conjunto "más grande" que los contenga a ambos: el conjunto de los números reales ($Q \cup I = IR$).

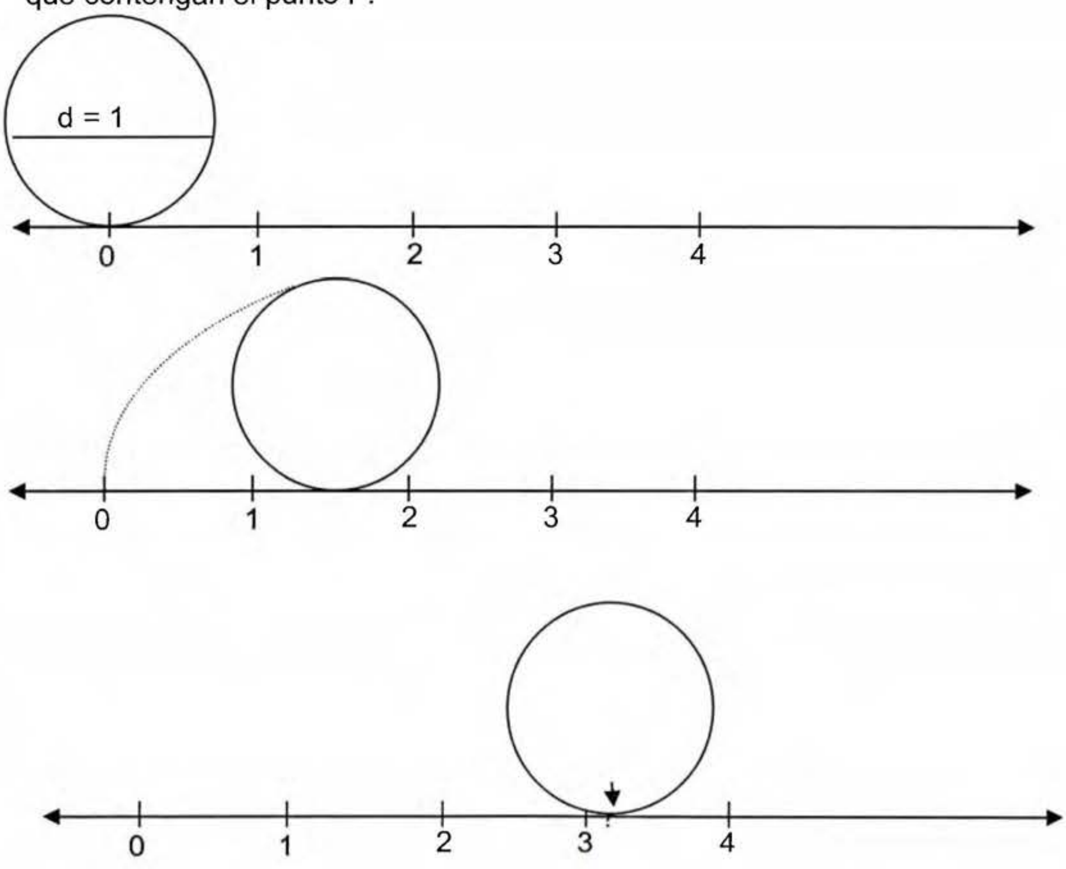
A. El círculo rodante: Con dicho ejercicio se busca que el estudiante visualice la existencia del número π, y que a la vez aproxime algunos decimales. Asimismo, se desarrolla con ello la precisión y la observación. Es importante notar que el experimento tiene limitaciones en la aproximación y que es labor del docente explicar al estudiante que, aunque no se pueden determinar con mucha precisión los decimales de π utilizando la recta numérica, si introduce la noción de su existencia.

Materiales:

- Una hoja en blanco
- Una moneda de 5 colones
- Una regla graduada

Instrucciones: La actividad puede trabajarse en grupos pequeños, de tres o cuatro personas, de modo que se facilite la discusión y el intercambio de ideas entre los miembros. Cada grupo acatará las siguientes indicaciones:

- Tome una moneda de 5 colones y hágale una marca.
- En una hoja en blanco, dibuje una recta numérica donde cada unidad sea igual a la longitud del diámetro de la moneda de 5 colones.
- Coloque la moneda de manera que coincida con el punto 0
- Haga rodar el círculo sobre la línea- sin que resbale- hasta que la marca se encuentre de nuevo en la recta. A este punto llámesele P.
- Suponga que subdividimos cada uno de los intervalos entre los puntos marcados con enteros en diez intervalos congruentes más pequeños.
- Dibuje el resultado solamente para el segmento entre los puntos marcados 3 y 4. A medida que prosiga, continuaremos concentrándonos sobre los intervalos que contengan el punto P.



B. Cuadrado de longitud unitaria, para aproximar $\sqrt{2}$: La idea de esta actividad es que usando una estrategia similar a la utilizada para aproximar π , el estudiante halle un valor aproximado para $\sqrt{2}$. En ella se involucran nociones como la de sistema de coordenadas de una recta y abscisa de un punto, además de métodos de construcción con regla y compás, y uso de simbología. Se propicia también una aproximación geométrica al concepto de límite, y a la idea de número irracional visto como el límite de una sucesión.

No debe ser el docente quien formule de entrada la conclusión que se busca obtener, sino que debe proporcionar al estudiante el tiempo para que experimente, cuestione, y formule conjeturas sobre los resultados obtenidos en cada paso de la actividad, de manera que sean los alumnos los que lleguen, con mayor o menor exactitud, al resultado deseado. El docente solamente servirá de guía para el desarrollo de la actividad, y para orientar la discusión del grupo.

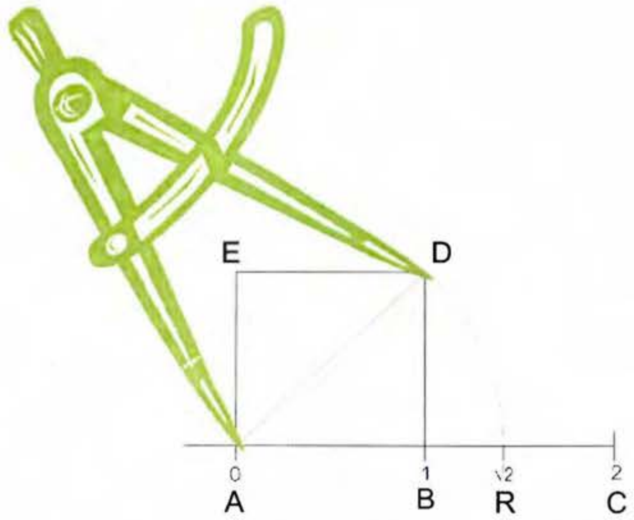
Materiales:

- Un pliego de papel periódico, cartulina o papel bond.
- Lápiz.
- Borrador.
- Marcadores de colores.
- Regla graduada y compás.

Instrucciones: La actividad puede trabajarse en grupos pequeños, de tres o cuatro personas, de modo que se facilite la discusión y el intercambio de ideas entre los miembros. Cada grupo debe acatar las siguientes indicaciones:

- Construir una recta, y colocar en ella un sistema de coordenadas convencional (ubicar el cero, a la izquierda los negativos, y a la derecha los positivos).
- Ubicar en el sistema escogido los puntos A, B y C, cuyas abscisas sean, cero, uno y dos, respectivamente. Es preferible que la unidad escogida sea lo suficientemente grande como para poder dividirla en diez, cien, o más sub-unidades. Por ejemplo, utilizando un decímetro como unidad.

- Construir sobre el segmento $\overline{AB}$, un cuadrado ABDE, cuyo lado tendrá por longitud una unidad (por ejemplo, un cuadrado de longitud un decímetro).
- Trazar, con regla, la diagonal $\overline{AD}$ de ese cuadrado.
- Utilizar el compás, y haciendo centro en A, extenderlo una longitud igual a la de $\overline{AD}$
- Manteniendo el compás con centro en A, ubicar sobre la recta un punto R, a la derecha de B tal que $\overline{AD} \cong \overline{AR}$, como se muestra en la figura siguiente.



- ¿Cómo encontrar la abscisa de ese punto? La idea es tratar de encontrar una aproximación decimal para la misma.
- Dividir el segmento $\overline{AB}$ en diez segmentos iguales, observando que R se ubica en el interior del segmento comprendido por los puntos de abscisa 1,4 y 1,5.
- Dividir ese segmento en diez partes iguales, observando que R se localiza entre los puntos de abscisa 1,41 y 1,42.
- Este proceso se puede seguir reiteradamente.
- Preguntar a los alumnos si se podría, eventualmente, y con una escala lo suficientemente grande, continuar indefinidamente con el proceso; y si se podría, en algún momento, encontrar una representación decimal exacta para la abscisa del punto R. Es deseable que los alumnos concluyan que, cuanto más grande sea el segmento unidad escogido, más se podrá repetir el proceso, y puesto que se puede seguir indefinidamente, no se podría encontrar una

representación decimal exacta para la abscisa de P. El docente explicará entonces que el valor de la abscisa del punto R es $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, el cual no puede ser representado de forma exacta en una notación decimal o fraccionaria. Este tipo de números, al igual que π, se denominan números irracionales.

C. Evaluar $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para valores "grandes" de "n", con el fin de aproximar *e*: El propósito de esta actividad es obtener, esta vez por un método algebraico, una aproximación para el número *e*. De nuevo, el docente debe procurar dar las pautas para el desarrollo de la actividad, y permitir un espacio de diálogo y discusión, para que los alumnos formulen conjeturas. La "formalización" del resultado obtenido debe ser el último paso en la actividad, y plantearse a partir de las conjeturas formuladas por el grupo.

Por otro lado, esta actividad permite familiarizar al alumno, a un nivel muy elemental, con el uso y significado de las expresiones algebraicas en contextos determinados, y con la idea de valor numérico de una expresión algebraica; con los conceptos de variable dependiente y variable independiente, y por consiguiente, con el concepto de función. También están implícitas las nociones de sucesión, y de límite. Todo esto, sin salirse del marco de la percepción intuitiva de la existencia de números irracionales.

Materiales:

- Un pliego de papel periódico, cartulina o papel bond.
- Lápiz.
- Borrador.
- Marcadores.
- Calculadora científica.

Instrucciones: La actividad puede trabajarse en grupos pequeños, de tres o cuatro personas, de modo que se facilite la discusión y el intercambio de ideas entre los miembros. Cada grupo debe acatar las siguientes indicaciones:

- El docente explica al grupo (oralmente, o por medio de indicaciones escritas, una guía de trabajo, etcétera) que la idea del ejercicio es analizar los valores que toma la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, al hacer variar los valores de n, haciéndolos cada vez más grandes.
- Elaborar, en la lámina entregada, una tabla con dos columnas. La de la izquierda tendrá como encabezado "n", y en ella se consignarán los valores de *n* que se tomarán para evaluar la expresión. La de la derecha se llamará $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ y en ella los alumnos consignarán los valores que, con ayuda de la calculadora, obtienen para la expresión al evaluarla con distintos valores de n. Debe tenerse cuidado de escoger valores adecuados de n, para que el límite sea notorio para el alumno, como se muestra en el siguiente ejemplo:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$
1	**2**
5	**2**,48832
10	**2**,59374246
50	**2**,691588029
100	**2,7**04813829
500	**2,71**5568521
1000	**2,71**6923932
5000	**2,718**01005
10000	**2,718**145927
50000	**2,7182**54646
100000	**2,7182**68237
500000	**2,71827**911
…	…
$n\to\infty$	e

- Preguntar a los alumnos si encuentran alguna regularidad o patrón para los valores que va tomando la expresión. Es deseable que los alumnos visualicen el hecho de que, conforme se toman valores más altos de n, la expresión va "dejando fija" una cantidad cada vez mayor de cifras. A partir de estas conjeturas, el docente formula la existencia de un número irracional, denominado convencionalmente con la letra *e*, y cuyo valor es $e \approx 2{,}71828$; para valores infinitamente grandes de n, la expresión tomará valores cada vez más cercanos a dicho número irracional. Preguntar entonces, si dicho número podría ser representado con una expresión decimal exacta, o por medio de notación fraccionaria.

Una vez conocidos los números irracionales, que se denotarán con el símbolo I, y haciendo la aclaración de que el conjunto de los números irracionales y el de los racionales conforman dos conjuntos disjuntos, esto es: Q ∩ I =Ø, se explica al alumno que el conjunto de los números reales es aquel conformado por la unión de ambos conjuntos, es decir: Q U I = IR

Ejercicio: Con ayuda de la calculadora aproxime los siguientes números reales. Determine si son racionales o irracionales.

Número real	Aproximación	Q	I
$\frac{\pi}{2}$			
$2 \cdot e$			
$\frac{\pi}{\pi}$			
$-e-\pi$			
$-\frac{\pi+e}{3(e+\pi)}$			

2. Elementos de IR: notaciones y representaciones

Una vez que el alumno se ha familiarizado con los diversos subconjuntos de IR, es necesario que desarrolle y formalice un poco más, la idea intuitiva que a este punto posee de IR como conjunto. En este aspecto, es fundamental que aprenda a reconocer elementos de IR en diversas notaciones y representaciones, sabiendo identificar, en qué casos se encuentra ante un número irracional, racional o entero.

Actividad 2.1: Bingo con números reales

Esta actividad tiene como propósito que el alumno identifique números reales y se familiarice con sus distintas formas de representación, dentro de las cuales se consideran las expansiones decimales (exactas o aproximadas), radicales, convenciones (π , *e*, entre otros) fracciones, notación mixta, enteros; y que sea capaz de clasificarlos como números enteros, naturales, racionales, o irracionales, según sea el caso.

Materiales:

- Tableros cuadriculados de cuatro unidades de longitud por cuatro unidades de altura. Cada tablero debe contener dieciséis expresiones correspondientes a diferentes números reales escritos en diversas notaciones, y debe ser diferente a todos los demás. Estos tableros serán los cartones donde los alumnos jugarán su bingo.
- Fichas, que pueden ser granos de maíz, frijoles, fichas plásticas, etcétera; para que los alumnos vayan llenando sus cartones.
- Cuadrados de papel, donde se incluyan expresiones equivalentes a todos los números escritos en cada uno de los distintos tableros. Estos cuadrados van a ser los “números” con los que el docente “cante el bingo”. (por ejemplo, el docente tendrá un cuadrito que contenga la expresión - π + π , pero en el cartón del alumno aparecerá, en su lugar, el cero)

Instrucciones:

- El docente entrega a cada alumno uno de los tableros del bingo. También pueden jugar en parejas (dos alumnos por cartón) según la cantidad de alumnos del grupo y la cantidad de cartones disponibles.
- El docente entrega a cada alumno o pareja una cantidad de fichas para que con ellas vayan llenando el cartón en el transcurso del juego.
- El docente coloca los cuadrados de papel en una caja cerrada, y por turnos, al azar, va sacando un cuadrito, y diciendo en voz alta la expresión que está escrita en él, va anotando los números que van saliendo, para verificar cuando haya algún ganador.
- Los alumnos deben buscar en sus cartones una expresión equivalente a la dicha por el profesor, y si la tienen, poner en ella una ficha.
- El primer alumno o pareja que termine de llenar su cartón, gana la partida.

Seguidamente se muestran algunos ejemplos que ilustran el tipo de expresiones que debe aparecer en los cartones de juego, así como de la lista de números que tendrá el docente para "cantar el bingo". Debe recordarse que a este nivel, la idea no es que el alumno realice operaciones con números reales, ese tema se trabajará más adelante. Lo que se espera es que el estudiante identifique números reales en sus diversas representaciones, por lo que si se incluyen expresiones que involucren operaciones, éstas deben ser sencillas, es decir, no combinar más de dos operaciones a la vez, y poderse resolver de manera rápida, inclusive mentalmente, por parte de los alumnos participantes.

Ejemplo de la lista de números "cantados" por el docente:

2	$8-\pi$	1	0	16
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	e^2	$\frac{e}{2}$	$\sqrt{5}$
-1	24	9	-10	3

Ejemplo de los cartones de juego:

$\frac{4}{2}$	$\sqrt{5}$	4^2
$e \cdot e$	$\frac{9}{3}$	$\frac{4}{8}$
$\frac{0}{1}$	$-\left(\frac{3}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$
-10	$8-\pi$	$\frac{12}{8}$

$\frac{e}{2}$	$8-\pi$	e^0
$\frac{6}{4}$	$\frac{0}{5}$	2^4
$-\left(\frac{7}{7}\right)$	1+1	$4 \cdot 6$
$\sqrt{9}$	$\frac{3}{6}$	$-\frac{30}{3}$

$-\left(\frac{20}{2}\right)$	$3 \cdot 3$	3-1
3^1	$e-e$	$-\left(\frac{5}{5}\right)$
7^{2-2}	4^2	$\frac{3}{4}$
$\sqrt{5}$	$8-\pi$	$e \cdot e$

Ejercicio: Pareo

Instrucciones: En la columna A aparecen diez números reales y en la columna B sus opuestos. Asocie cada número con su respectivo opuesto, escribiendo la letra minúscula de la columna B en el paréntesis correspondiente de la columna A.

A		**B**
$2{,}568$	( )	a. -10
0	( )	b. π
$-\frac{1}{3}$	( )	c. $-\frac{3}{5}$
$4{,}\overline{3}$	( )	d. $-2{,}568$
10	( )	e. $\sqrt{6}$
$\sqrt[3]{2}$	( )	f. 0
$-\sqrt{6}$	( )	g. $-4{,}\overline{3}$
$-\pi$	( )	h. 7
7	( )	i. $-\sqrt[3]{2}$

Ejercicio: Subconjuntos de IR. Complete los espacios o con los símbolos "$\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$" según corresponda:

π	_____	IR	$\varnothing$	_____	IR
e	_____	I	I	_____	Q
-9	_____	IN	-5, 3	_____	Z
5	_____	I	π - π	_____	Z
$-\sqrt{2}$	_____	Q	Z	_____	IN
$\frac{10}{5}$	_____	Z	IR	_____	Q

Ejercicio: Elementos de los subconjuntos de IR

A continuación se le presentan diez números reales ubicados en casillas. Pinte con rojo las casillas correspondientes a los números que son enteros; con azul las de los números que son racionales, pero no enteros; y con verde las de los números irracionales.

-7	$\frac{3}{4}$	56	π	$-\frac{7}{3}$
$\sqrt{2}$	$-2,\overline{8}$	0	$0,35$	e

Como sugerencia final al abordar los contenidos vistos hasta este punto, se recomienda al docente ir introduciendo, a lo largo de todas las discusiones de clase, las nociones y el lenguaje simbólico propio de la teoría de conjuntos, de modo que el alumno se familiarice con sus representaciones gráficas (diagramas de Venn, "recta numérica", etcétera), y simbólicas (notación de conjuntos por comprensión y por extensión), así como con las relaciones de pertenencia e inclusión, entre otros.

3. Orden en IR

En este punto, se espera que el alumno sea capaz de establecer relaciones de orden entre varios números reales, pudiendo reconocer cuál es el mayor o menor ante dos o más de ellos, o cuando dos expresiones representan el mismo número real.

Evidentemente, este tema se encuentra estrechamente ligado con el anterior, pues el alumno debe manejar diversas notaciones para un mismo número.

Actividad 3.1: Laberinto

Con esta actividad se pretende que el estudiante trabaje con la noción de orden en el conjunto de los números reales, estableciendo relaciones de orden (mayor que, menor que) entre distintos elementos de IR, expresados en diversas representaciones.

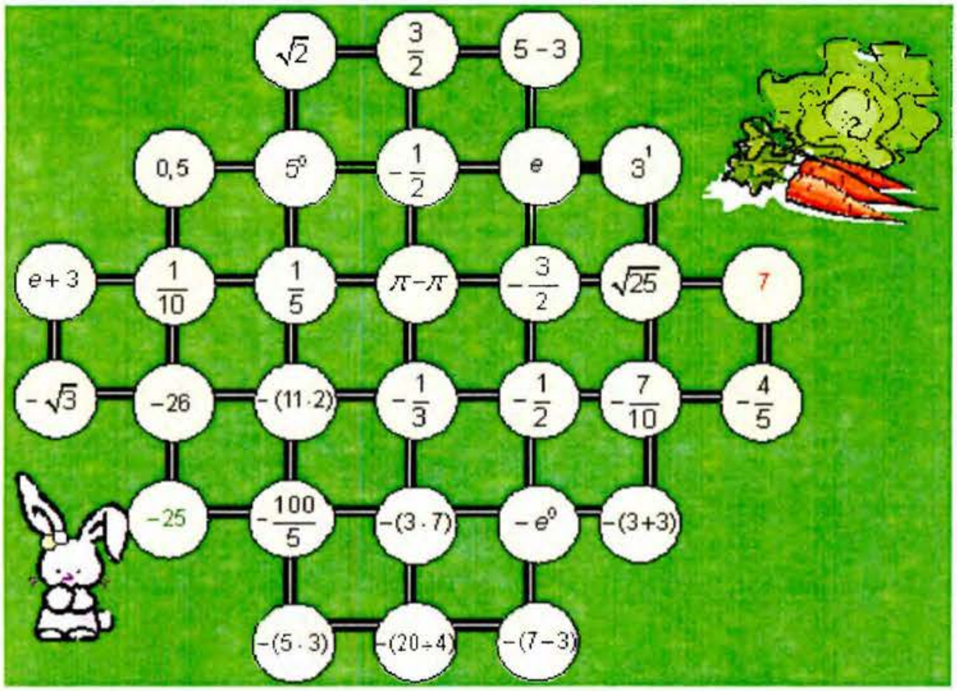
Esto se lleva a cabo por medio de un laberinto, de modo que los estudiantes van identificando números mayores que uno dado, con el fin de conducir a un conejo hasta su comida. El docente puede construir al menos tres diferentes tipos de laberintos y repartirlos entre todos sus estudiantes. Un ejemplo de uno de los laberintos se presenta más adelante.

Esta actividad es útil también para trabajar otros contenidos, sometiéndola a las adaptaciones o modificaciones que el docente considere pertinentes. Por ejemplo, se puede pedir que se encuentren diversas representaciones de un mismo número real, o que se ordenen los números de mayor a menor.

Instrucciones:

- El docente reparte los laberintos entre sus estudiantes, entregando uno a cada uno.
- Los alumnos se ubican en la casilla que está a la par del conejo, donde aparece un número en verde (en el caso del laberinto del ejemplo, se ubicarían en -25).
- A partir de ahí deben decidir cuál de los números que están arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda, es mayor que -25.
- Cuando se determine dicho número, se procede del mismo modo, seleccionando el número que es mayor.

- Así sucesivamente hasta que se llegue al número señalado con color rojo, el cual se ubica a la par de la comida del conejo (en el caso del laberinto del ejemplo, se debe llegar al 7).
- Cuando un estudiante concluya su laberinto, puede intercambiarlo con algún compañero que tenga uno diferente, hasta haber trabajado con los tres tipos de laberinto.



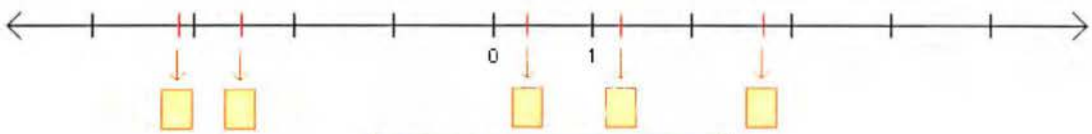
Una vez conocidos los números reales, se puede hablar entonces con toda propiedad de la "recta numérica", explicándole al alumno que se construye haciendo corresponder a cada punto de la recta, un número real, y viceversa.

Ejercicios: Los números reales y la recta

A. A continuación se presenta una lista de diez números reales. Determine los puntos correspondientes a ellos, en la recta.

Números reales: $0,\ \sqrt{2},\ -\frac{5}{2},\ \pi,\ -e,\ \frac{20}{5},\ 6^0,\ 3+2,\ -\frac{3}{3},\ \sqrt[3]{8}$

B. A continuación se presenta una recta en la cual se señalan algunos puntos. Anote en cada uno de los cuadros amarillos el número real que corresponde a la abscisa del punto señalado en cada caso. Utilice para ello los datos del recuadro inferior.



$\frac{1}{3}, \quad -\pi, \quad -\frac{5}{2}, \quad e, \quad \frac{4}{3}$

En el siguiente ejercicio **no** se permite el uso de la calculadora

C. A continuación se presenta una lista de números reales acompañados de una letra. Ordénelos de manera creciente y descubra la palabra que se forma con las letras correspondientes.

$-(3^0)$	$\frac{10}{3}$	10^3	$\sqrt{2}$	$\frac{20}{5}$	$-4,3$	$-\pi$	$-(2\cdot 3)$	e	$2,41$	$-(3^4)$
S	E	S	P	N	D	U	O	N	O	M

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

D. Complete los espacios con los símbolos <, > o =, según corresponda.

$-1,5$	____	-1	3^2	____	2^3	$3,14$	____	π
$-4,3$	____	$-4,25$	-2^2	____	4	$\sqrt{4}$	____	$\sqrt[3]{8}$
2^3	____	-8	e^0	____	$\frac{0}{3}$	2	____	$\sqrt{6}$
5^0	____	$\frac{\pi}{\pi}$	π	____	$-e$	$-\sqrt[3]{7}$	____	$\sqrt{2}$

E. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es falsa o verdadera.

$-2<0{,}2<\frac{1}{2}$ $4>1{,}6>\sqrt{4}$ $-6{,}3>-6{,}4>-5$	____ ____ ____	$-1<\sqrt{4}<3^2$ $3{,}14<e>3$ $7>-3{,}6<-2{,}9$	____ ____ ____	$-\pi<0{,}3>-0{,}2$ $2^4<3^3<3\cdot 7$ $\sqrt[3]{7}>-\sqrt{9}<-\frac{20}{2}$	____ ____ ____

4. Axiomas de campo

Con este contenido se pretende que el estudiante conozca las propiedades de la suma y la multiplicación en IR, para poder aplicarlas en la resolución de ejercicios. Sin embargo, el estudio de los axiomas de campo de la adición y producto en IR, por sí mismos, carecen de sentido y fundamento en el nivel en el que estamos ubicados, pues lo que se desea no es que el estudiante memorice que la adición es asociativa y conmutativa, o que el producto es distributivo respecto a la suma, sino que tenga una visión general de estas propiedades, y que pueda usarlas apropiadamente en la práctica.

Es por eso que, lejos de plantear ejercicios concretos en esta apartado, se brindan algunas sugerencias metodológicas en las secciones siguientes, para que el alumno con la guía del docente, vaya deduciendo, tales propiedades, sin necesidad de llamarlos propiamente axiomas de campo.

5. Operaciones con números reales

Actividad 5.1: Adición y sustracción de números reales

Con esta actividad se busca que el estudiante adquiera el conocimiento de suma y resta de números reales de una forma muy natural, y que no tenga problemas con las leyes de signos. Esto se logra por medio del estudio de desplazamientos sobre el eje X, con lo cual se introduce además la noción de vector en la recta.

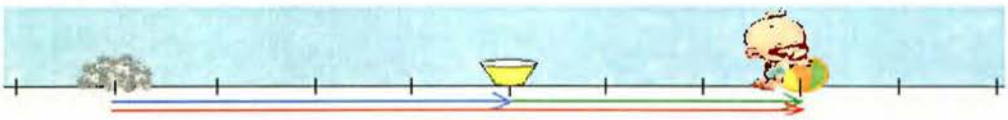
Instrucciones: Un bebé se encuentra en la playa y se desplaza hacia la derecha y la izquierda de una piedra, donde está inicialmente oculto. A continuación analizaremos algunos desplazamientos que hizo el bebé para llegar a ciertos objetos.

- Como se dijo antes, imaginemos que el bebé está oculto detrás una piedra.

- El bebé avanza hacia la derecha para llegar hasta un balde amarillo.

- Después de 4 metros recorridos, lo alcanza y se oculta detrás de él. Pero luego decide avanzar un poco más hacia la derecha para llegar a donde está una bola de playa.

- Al fin el bebé llega a la bola de playa. Recorrió 3 metros desde el balde amarillo.



- ¿Cómo podemos calcular el desplazamiento total del bebé, desde la piedra hasta la bola de playa? ¿Cuánto es este desplazamiento?

Respuesta: Podemos sumar los 4 metros que recorrió de la piedra al balde amarillo (representado con la flecha azul) y los 3 metros de éste a la bola de playa (representado con la flecha verde), es decir:

$$4 + 3 = 7$$

Entonces, tenemos que el bebé se desplazó 7 metros y observamos que lo hizo hacia la derecha. Esto se representa en la figura con la flecha roja.

- Ahora, imaginemos al bebé nuevamente oculto detrás de la piedra.
- El bebé se desplaza hacia la derecha nuevamente para llegar a un castillo de arena que fue construido por unos niños.

- Después de recorrer 2 metros consigue su objetivo.

- Pero ahora, el bebé decide devolverse a la piedra y continuar caminando hacia la izquierda para llegar a unos anteojos de sol que están sobre la arena.

- Después de llegar a la piedra, el bebé caminó 4 metros hacia la izquierda hasta alcanzar los anteojos de sol.

- ¿Cuál fue el desplazamiento total del bebé, desde la piedra a los anteojos de sol? ¿*De* qué lado de la piedra queda finalmente el bebé?

Respuesta: Observemos que el bebé se desplazó 2 metros hacia la derecha para llegar al castillo de arena (el desplazamiento se representa con la flecha azul). Pero cuando se devuelve, el bebé se desplaza 6 metros hacia la izquierda (representado con la flecha verde).

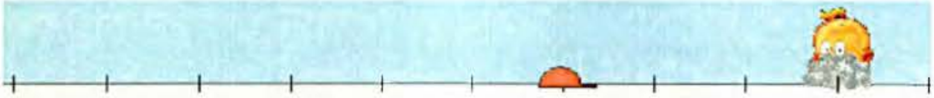
La flecha roja en la ilustración indica el desplazamiento total del bebé desde la piedra hasta los anteojos de sol. Observamos que es de 4 metros hacia la izquierda.

Si a los desplazamientos hacia la derecha les colocamos un signo positivo y a los de la izquierda un signo negativo, tenemos que el desplazamiento total *del* bebé desde la piedra a los anteojos de sol es de:

$$2 + (-6) = -4$$

Esta expresión suele representarse de esta forma: $2 - 6 = -4$

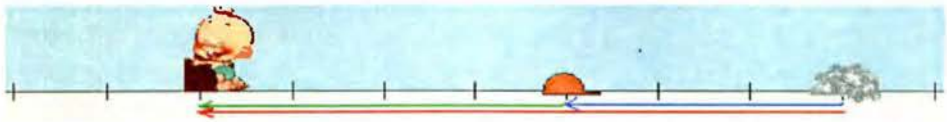
- De nuevo, imaginemos que el bebé se oculta detrás de la piedra. Pero ahora, quiere caminar hacia la izquierda de la misma, para alcanzar la gorra de un turista.



- Al fin el bebé logra ocultarse detrás de la gorra, luego de haber caminado 3 metros hacia la izquierda de la piedra. Esto se representa en la siguiente figura por medio de la flecha azul.

- Desde ahí, el bebé decide avanzar más hacia la izquierda, para llegar a un envase con bronceador.

- Después de 4 metros recorridos hacia la izquierda a partir de la gorra, consigue ocultarse detrás del envase con bronceador. Éste último recorrido se representa con la flecha verde.



- ¿Cuál fue el desplazamiento total del bebé, desde la piedra hasta el envase con bronceador? ¿De qué lado de la piedra queda finalmente el bebé?

Respuesta: El bebé realizó dos desplazamientos hacia la izquierda de la piedra, uno de 3 metros y el otro de 4 metros, por lo cual, su desplazamiento total fue de 7 metros hacia la izquierda, lo cual se representa en la figura anterior con la flecha roja.

Nuevamente, asignando un signo negativo a los desplazamientos hacia la izquierda de la piedra, tenemos que, el recorrido en rojo se puede expresar de la siguiente forma:

$$(-3) + (-4) = -7$$

La cual también se suele representar como: $-3 - 4 = -7$.

* Ahora lo que haremos es analizar instrucciones dadas al bebé para cumplir su objetivo. Así podremos averiguar cuáles recorridos debe llevar a cabo y cuál es su desplazamiento total en cada caso.

- El bebé está oculto detrás de la piedra y se le indica que debe avanzar (-3)+1, primero para llegar a unas toallas, y luego para alcanzar un refresco.

¿Cuál es el recorrido que se lleva a cabo?

- Primero, se mueve 3 metros hacia la izquierda (pues en la instrucción se indica -3) logrando así ocultarse detrás de las toallas. Dicho desplazamiento se representa en la siguiente figura con la flecha azul.

- Luego, avanza 1 metro hacia la derecha (continuando con la instrucción) para alcanzar así el refresco. Éste desplazamiento se representa en la siguiente figura con la flecha verde.

- ¿Cuál fue el desplazamiento total del bebé?

Respuesta: Fue de 2 metros hacia la izquierda de la piedra, lo cual se representa en la figura anterior con la flecha roja.

- Volvamos a imaginar al bebé detrás de la piedra. Ahora, se le da una instrucción para que llegue a un barquito de juguete, y que luego se vaya a ocultar detrás de un balde verde. La instrucción dada es la siguiente: - (- 3) -1

- La instrucción -3 significa que avance 3 metros hacia la izquierda de la piedra, pero si se agrega un signo "menos" adelante, significa que avance la misma longitud, pero en dirección opuesta, es decir, que camine 3 metros hacia la derecha.

- El desplazamiento que realizó el bebé desde la piedra hasta el barquito se representa con una flecha azul en la siguiente figura.

- Ahora, sólo falta que el bebé se mueva 1 metro hacia la izquierda (según aparece en la instrucción), llegando así hasta el balde verde. Este segundo desplazamiento se representa en la siguiente figura con la flecha verde.

- ¿Cuál fue el desplazamiento total del bebé desde la piedra hasta el balde verde?
Respuesta: Fue de 2 metros hacia la derecha, lo cual se representa en la figura anterior con la flecha roja.

Con esta actividad fácilmente se deducen algunas propiedades de la adición de números enteros, y en general de reales, como la conmutatividad, la cual puede ser interpretada e inclusive verificada por los estudiantes con un ejemplo como el siguiente:

- Volvemos a imaginar al bebé oculto detrás de la piedra. Primero, avanza 4 metros hacia la derecha hasta alcanzar un bolso, luego se mueve 5 metros hacia la izquierda hasta llegar a ocultarse detrás de un sombrero.

- Pero el bebé también puede moverse 5 metros hacia la izquierda para llegar a una botella, y luego 4 metros hacia la derecha.

- En ambos casos, notamos que el bebé logra ocultarse detrás del sombrero, con un desplazamiento total de un metro hacia la izquierda.

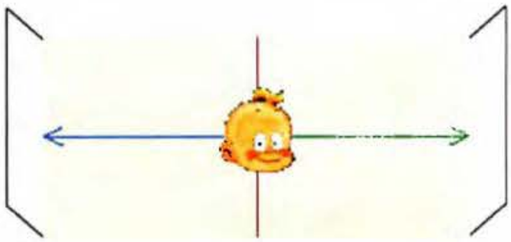
- Simbólicamente, podemos representar lo anterior de la siguiente manera:

$$4 - 5 = -5 + 4 = -1$$

Además, es importante recalcar que la conmutatividad también se cumple si el bebé sólo tiene desplazamientos hacia la derecha, o si sólo los tiene hacia la izquierda.

Con la actividad también puede deducirse la existencia y unicidad de inversos aditivos, que llamaremos opuestos, a partir de desplazamientos de una misma longitud, pero en direcciones opuestas con respecto al punto de referencia.

Por ejemplo, se puede imaginar al bebé justo en el centro de una cancha de fútbol playa.



- Si él recorre desde ahí 18 metros hacia la derecha, llega a uno de los marcos. ¿Cuánto debe recorrer para llegar al centro nuevamente y en qué dirección? ¿Cuál es entonces su desplazamiento total?

- Y si el bebé está en el centro de la cancha y camina 18 metros hacia la izquierda

¿Cuántos metros debe recorrer y en qué dirección para tener un desplazamiento total de cero metros?

Enunciamos, pues, algunas propiedades importantes.

Existencia de opuestos: Esta propiedad se ha venido utilizando implícitamente, desde la primera actividad, en la que se habla de opuestos, en términos de temperaturas de igual magnitud, pero de signo distinto; y dice que para cada elemento "a" de Z distinto de cero existe un único elemento opuesto, denotado por "–a" es decir:

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall a \in Z \text{ existe un único elemento, denotado por -a, que cumple} \\ a + (-a) = 0\end{array}}$$

Cabe recordar, también que cero es su propio opuesto, es decir:

$$\boxed{-0 = 0}$$

Por otro lado, dada la unicidad de los opuestos, se tiene que el opuesto del opuesto de un número dado es el mismo número, escrito simbólicamente:

$$\forall a \in Z \text{ se cumple que } \quad -(-a) = a$$

Por otro lado, esta propiedad nos permite definir la resta de números enteros, y de números reales en general, en términos de una adición, así, la sustracción de un número "a" y otro número "b", es equivalente a sumar a "a" el opuesto de "b":

$$\forall a, b \in Z, \text{ se cumple que } \quad a\text{-}b = a + (-b)$$

Conmutatividad de la suma: la suma en Z es conmutativa, es decir, el orden de los sumandos no altera el resultado:

$$\forall a, b \in Z, \text{ se cumple que } \quad a + b = b + a$$

De la propiedad anterior se deduce, además, lo siguiente:

$$\forall a, b \in Z, \text{ se cumple que } \quad a - b = -b + a \quad -a - b = -b - a$$

Asociatividad de la suma: la suma en Z es asociativa, es decir, si se tienen tres o más números enteros, el resultado no varía si se agrupan los números de manera distinta para sumarlos.

$$\forall a, b, c \in Z, \text{ se cumple que } \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejercicios:

A. Determine los desplazamientos totales del bebé (es decir, desde la piedra hasta su objetivo) si se le dan las siguientes instrucciones:

a. 2 + 7	e. – (– 8) + 6
b. 3 – 5	f. 4 - (- 3)
c. –7 + 4	g. – (5 + 6)
d. –3 – 8	h. – (–6 + 3)

B. Realice las siguientes operaciones mentalmente, sin ayuda de la ilustración del bebé.

a.	5 + 9	g.	– 36 – 25
b.	4 – 11	h.	23 – 46
c.	–9 + 3	i.	– 42 + 63
d.	– 8 – 6	j.	– 13 + (– 4 + 10)
e.	– 8 – (- 4) + 3	k.	– (23 + 15) – 40
f.	– (5 + 4)	l.	46 + (25 - 32) – 3

En el ejercicio anterior se recomienda al docente utilizar explícitamente, cuando sea posible, las propiedades de la suma vistas en las páginas anteriores. Del mismo modo se recuerda retomar estas propiedades, y utilizarlas cuando se trabaje con racionales o irracionales.

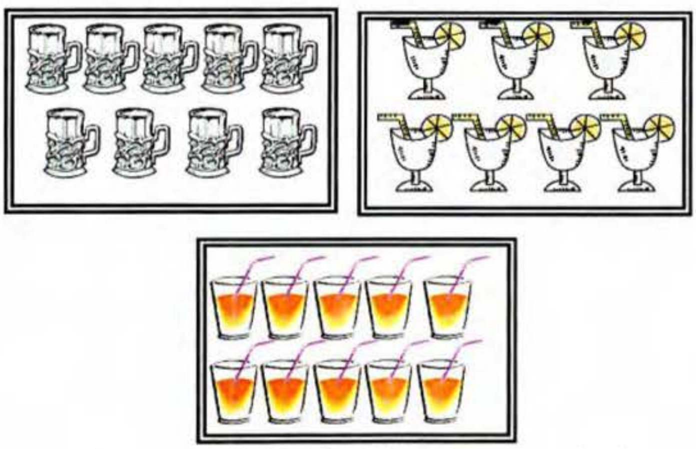
Seguidamente se menciona, como sugerencia didáctica, una actividad alternativa con la cual también se puede deducir fácilmente la noción de la asociatividad de la suma en IR, aunque en un contexto distinto.

Actividad 5.2: Vasos, jarros y copas

El propósito de esta actividad es que el alumno deduzca la propiedad de la asociatividad de la suma de números, por medio de ejemplos concretos, que en principio involucren solamente números naturales, para luego hacer la generalización a los reales.

Instrucciones: El docente plantea al alumno o grupo una situación donde deba sumar distintos objetos de una misma "familia", por ejemplo vasos, copas y jarros, de modo que deduzca que la cantidad final de objetos no varía si se agrupan en distinto orden los elementos. Por ejemplo, puede usarse la situación que se plantea a continuación:

Carolina se mudará de casa en las próximas semanas, por lo que está comenzando a hacer inventario de sus cosas para empacarlas. Cuando empacaba las cosas de la cocina, notó que tenía cierta cantidad de vasos, jarros y copas, las que guardó en diferentes cajas, de modo que había 9 jarras, 7 copas y 10 vasos, como se aprecia a continuación ¿Cuántos utensilios tiene Carolina, entre vasos, jarros y copas?



En este ejemplo en particular la idea es que el alumno deduzca que, indiferentemente de cómo se sumen los artículos, la cantidad será la misma. Por ejemplo:

Total de artículos = (9 jarras + 7 copas) + 10 vasos = 9 jarras+ (7 copas + 10 vasos)

El docente debe, entonces, indicar al alumno explícitamente que la propiedad anterior se llama asociatividad de la suma, y que quiere decir que, independientemente de la forma en que se agrupen tres o más números reales, su suma será siempre la misma. Es decir:

La suma en IR es asociativa:
$\forall a, b, c \in \mathrm{IR}$ se cumple que $a + (b + c) = (a + b) + c$

Ejercicio: Complete los espacios con el número real correspondiente.

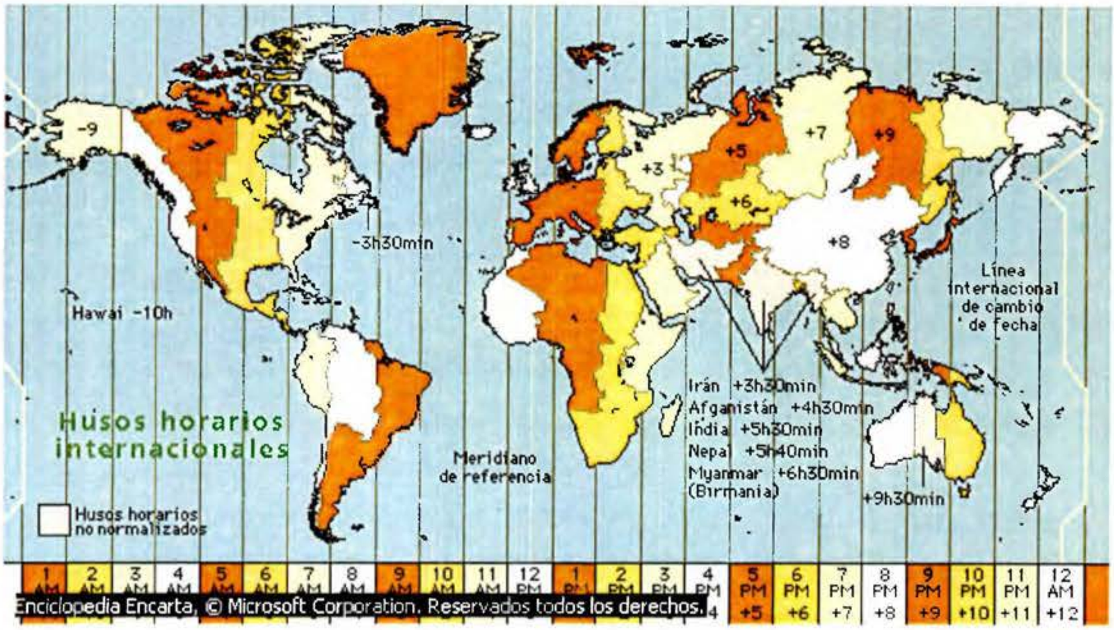
a. 2 + (__ + 4) = (3 + __) + 4 = 9
b. (– 5 + __) – 3 = 2 – 5
c. –__ + (3 – 2) = __ + 2 = – 4
d. 3 + (2 – __) = 5 – __ + 6 = 10
e. 7 – __ + 2 = (4 + __) = – 13

Actividad 5.3: La hora local

La finalidad de esta actividad es ofrecer otro contexto significativo para trabajar la adición de números enteros de una forma más dinámica, y en una situación de la vida real. Es de gran utilidad para que los alumnos deduzcan algunas de las reglas para sumar y restar en Z.

En algunos de los ejemplos planteados en este ejercicio, se obtiene un número entero negativo, es ahí donde se le debe dar el espacio al estudiante para que interprete el significado del signo en este contexto.

Instrucciones: El movimiento de la Tierra con respecto al Sol permite definir una hora de referencia que denotaremos HR. Cada país fija la hora local en su territorio sumando o restando un cierto número de horas a esta hora de referencia.



Observe, por ejemplo, la siguiente tabla.

Ciudad	País	Hora local
Los Ángeles	Estados Unidos	HR – 9
Chicago	Estados Unidos	HR – 6
Nueva York	Estados Unidos	HR – 5
Londres	Gran Bretaña	HR
Paris	Francia	HR + 1
Moscú	Rusia	HR + 2
Tokio	Japón	HR + 9

a. Cuando son las 7 horas en Londres. ¿Qué hora es en las demás ciudades de la tabla?

b. Mismo ejercicio anterior pero cuando son las 4 horas en Tokio.

Debe notar el docente, que en esta actividad no se concibe la suma y resta como desplazamientos hacia izquierda y derecha en una u otra dirección desde un punto de referencia específico, si no que se trabaja de una forma más explícita con la operación propiamente dicha, sumando o restando horas a partir de la hora en el lugar donde se indique, lo cual permite un acercamiento mayor al concepto de suma y resta.

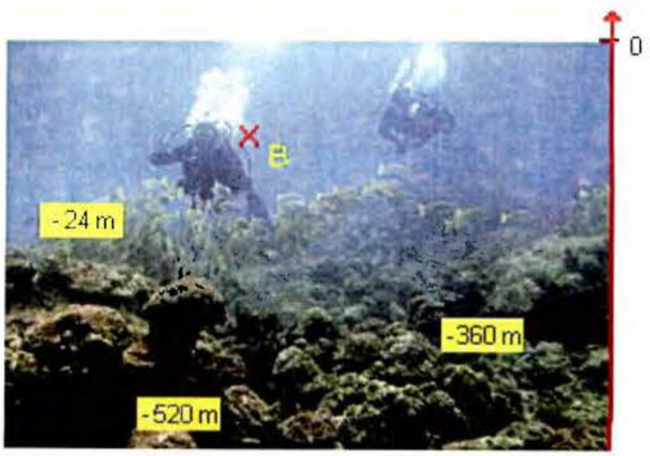
Debe tenerse cuidado a la hora de interpretar el resultado, en algunos casos en los que, la resta tiene resultado negativo.

Actividad 5.4: Bajo el nivel del mar

Esta actividad tiene como finalidad el familiarizar a los estudiantes con la ley de signos, que es un tema que tradicionalmente presenta dificultad para su comprensión, y que los estudiantes acostumbran memorizar y repetir mecánicamente. Se considera conveniente el utilizar este ejercicio para que ellos deduzcan las reglas de signos, así se produce un aprendizaje significativo utilizando el razonamiento y la memoria.

En la segunda parte de esta actividad se trabaja con adición de números enteros como una continuación del aprendizaje que se dio en la primera.

Instrucciones: Un banco de peces navega a 24m bajo el nivel del mar y la entrada de una cueva está a 360m bajo el nivel del mar.



Por otra parte, el fondo del mar está a 520m.

Llamaremos:

d_1: la diferencia de altura entre un buceador B y el banco de peces.

d_2: la diferencia de altura entre el buceador y la cueva.

d_3: la diferencia de altura entre el buceador y el fondo.

a. ¿Cuáles son los signos de d_1, d_2 y d_3 cuando el buceador está...
entre el banco de peces y la entrada de la cueva?
entre la entrada de la cueva y el fondo del mar?

b. Con esta información, complete la siguiente tabla:

Altura del buceador (en metros)	d_1	d_2	d_3
- 36			
- 245			
- 460			

Ejercicio: Realice las siguientes operaciones

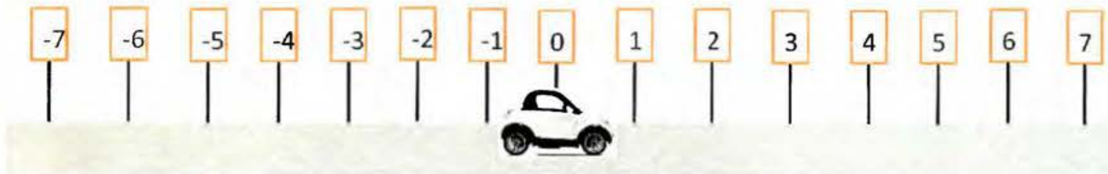
a. – 143 + 224
b. 248 – 346
c. 843 + 458 - 264
d. –547 + 468 –542
e. –(45+301–73)
f. 42 – (273 – 435)
g. 376 – (–546+845)
h. (–241+654) –451

Actividad 5.5: La multiplicación de los números enteros

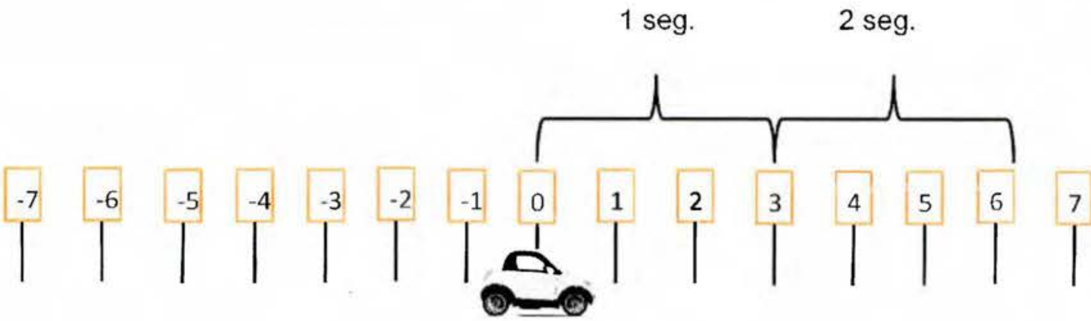
Esta actividad está planteada para los alumnos como una explicación de la ley de signos para el producto y división. Se busca que con una forma entretenida los alumnos comprendan el por qué de esa regla y no se queden con la simple memorización de la misma.

Si es muy importante hacerle hincapié al estudiante que la ley de signos para la adición, como la de la división y multiplicación son distintas, y se recomienda el uso de este tipo de actividades para la discriminación de las mismas.

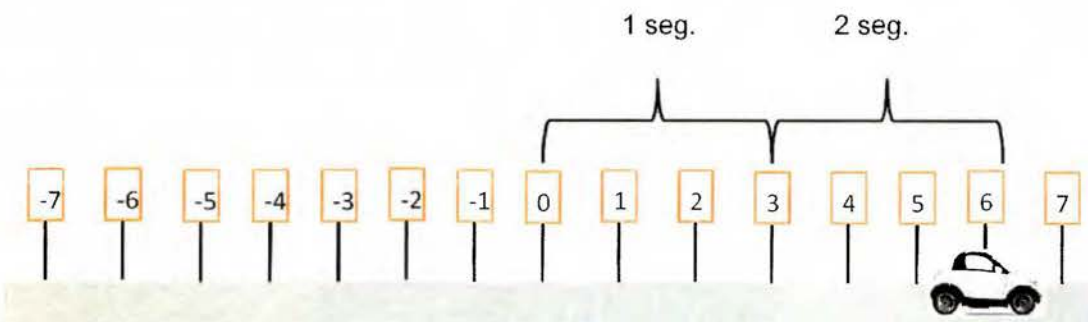
Instrucciones:



Supongamos que estamos en un carro, en el punto cero sobre la *carretera numérica,* y que nuestro carro avanza a 3 metros por segundo, entonces, ¿adónde estaremos dentro de dos segundos?



Si el carro avanza tres metros por segundo, después de dos segundos llegaremos seis metros más adelante.



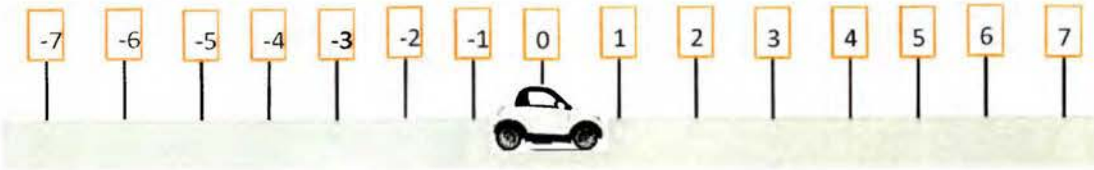
Matemáticamente esto se representa mediante la operación:

3 metros x 2 segundos = 6

es decir,

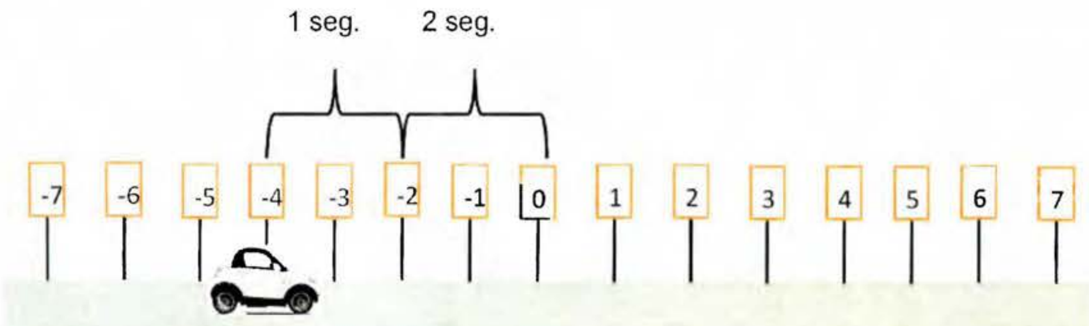
3 x 2 = 6

¿Qué pasa ahora si vamos en reversa?, en reversa el carro va hacia atrás, de manera que esto se puede tomar en la carretera como avanzar en *dirección negativa*.



Si el carro avanza -2 metros cada segundo, entonces, ¿adónde estará en dos segundos?

En este caso el carro va hacia atrás, y entonces se llega hasta -4, es decir, el resultado es un número negativo.



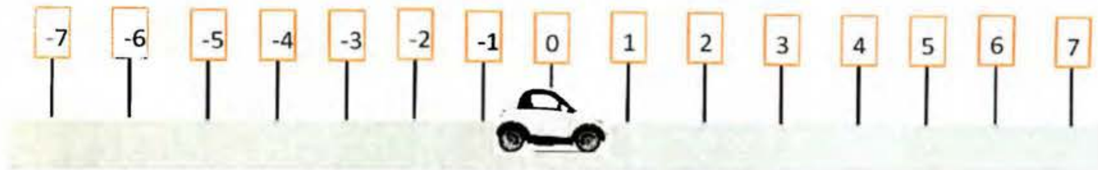
En términos matemáticos escribimos:

-2 metros x 2 segundos = -4

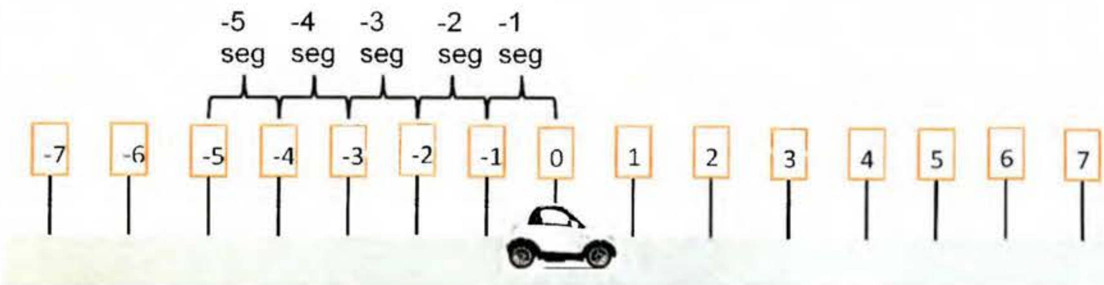
es decir,

-2 x 2 = -4

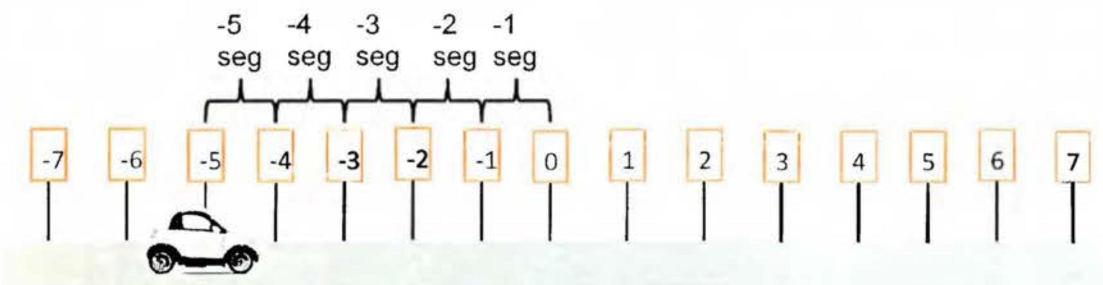
Ahora, que pasa si queremos saber adónde estábamos hace unos segundos, es decir, ir hacia atrás en el tiempo, supongamos que el carro avanza a 1 metro por segundo, y que queremos saber ¿adónde estábamos hace cinco segundos?, como el tiempo va hacia atrás, se puede considerar como tiempo negativo, veamos.



En este caso debemos ir retrocediendo en la carretera pues vamos hacia atrás en el tiempo, aún cuando el carro va hacia adelante.



Finalmente el carro queda en -5, es decir ahí estábamos hace 5 cinco segundos.



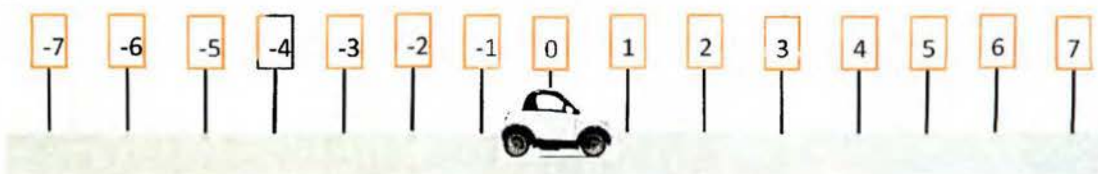
Esto se representa mediante la operación:

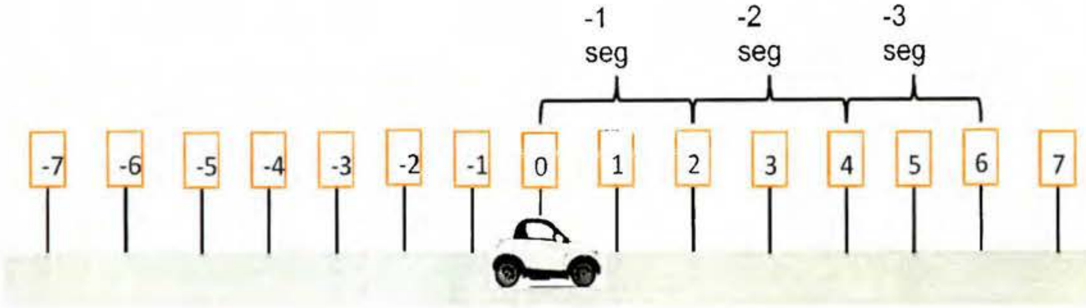
1 metro x -5 segundos = -5

es decir,

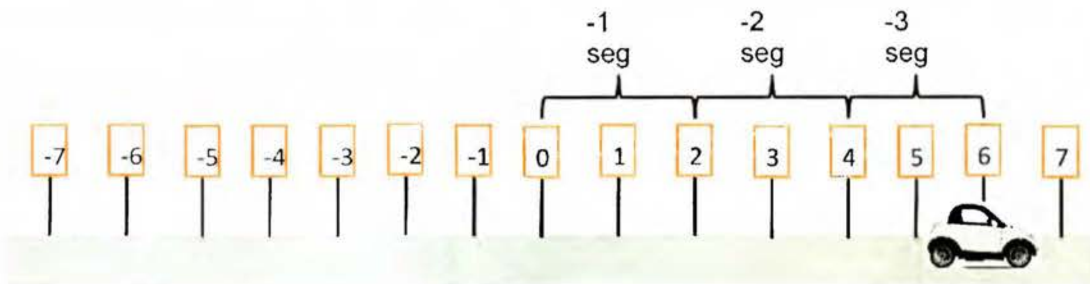
1 x -5 = -5

Finalmente, qué sucede si vamos en reversa y queremos saber adónde estábamos antes, por ejemplo, suponga que el carro avanza -2 metros por segundo, ¿adónde estábamos hace tres segundos?





En este caso, el tiempo y la distancia son negativos, de manera que el carro viene de adelante.



Se escribe mediante la operación:

-2 metros x -3 segundos = 6

es decir,

-2 x -3 = 6

De manera que cualquier multiplicación de números enteros se puede representar mediante un movimiento del carro sobre la carretera durante un tiempo determinado.

La actividad anterior permite deducir, de una manera contextualizada, la ley de signos para la multiplicación en Z, la cual será válida también en Q y posteriormente en IR:

Si a y b son dos números enteros entonces:
si a y b tienen el mismo signo, entonces el resultado de a · b será positivo
si a y b tienen distinto signo, entonces, el resultado de a · b será negativo

Note el docente que, gracias al mismo contexto en el que se inscribe el ejercicio, es sencillo deducir la conmutatividad de la multiplicación, pues, es equivalente decir, por ejemplo, que el carro se mueve una distancia de 5 metros durante 2 segundos, o decir que el carro se movió durante dos segundos, una distancia de cinco metros, es decir:

$$\boxed{5 \times 2 = 2 \times 5 = 10}$$

Lo mismo sucede con dos números enteros, cualesquiera; e inclusive, con dos números reales. El docente debe tener el cuidado de explicitar esta propiedad al estudiante, al igual que todos los demás axiomas de campo que se hayan deducido antes, o se vayan a deducir posteriormente. De este modo, se debe enunciar la siguiente propiedad:

La multiplicación de números reales es conmutativa, esto es:

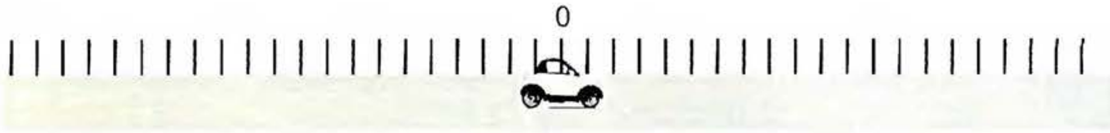
$$\forall a, b \in IR \text{ se tiene que } a \cdot b = b \cdot a$$

Debe también tenerse el cuidado de formular al alumno ejemplos y ejercicios donde deba utilizar esta propiedad, por ejemplo, ejercicios de cálculo mental.

Ejercicio:

A. Representar en cada caso el movimiento respectivo del carro sobre la carretera.

Velocidad: 4 metros por segundo. **Tiempo: 4 segundos.**



Velocidad: -3 metros por segundo. **Tiempo: -5 segundos.**

Velocidad: 4 metros por segundo. **Tiempo: -2 segundos.**

Velocidad: -1 metro por segundo. Tiempo: 8 segundos.

Velocidad: 2 metros por segundo. Tiempo: -3 segundos.

Velocidad: -2 metros por segundo. Tiempo: -3 segundos.

B. Efectúe las siguientes multiplicaciones de números enteros:

a. $2 \cdot 3$
b. $(-4) \cdot 5$
c. $6 \cdot (-12)$
d. $(-8) \cdot (-3)$
e. $2 \cdot 5 \cdot 3$
f. $7 \cdot (-2) \cdot 4$
g. $(-6) \cdot 3 \cdot (-5)$
h. $(-3) \cdot (-6) \cdot (-4)$

Actividad 5.6: Multiplicación y división en Z utilizando representación gráfica

Esta actividad tiene la finalidad de introducir, de un modo muy gráfico y visual, el algoritmo para multiplicar números racionales.

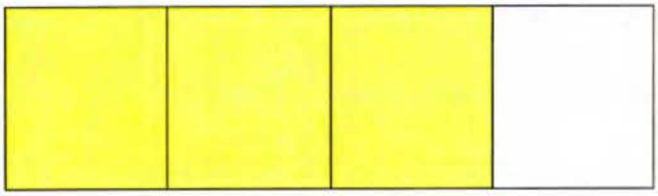
Por estar representados gráficamente, se trabajan los ejercicios con números racionales positivos, pero el docente debe, posteriormente, hacer la generalización al caso de los racionales negativos, valiéndose de la actividad para la ley de signos de la multiplicación, sugerida en el apartado anterior, o de otras actividades de mediación que considere apropiadas.

Una vez hecho esto, igual que en el caso de la suma, el resultado deseado debe formularse por escrito, para que los alumnos lo interioricen y asimilen adecuadamente.

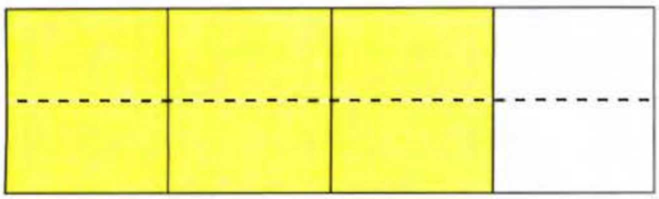
De esta actividad, es recomendable que el docente desarrolle ciertas estrategias en la clase, que le permitan deducir algunas propiedades de las multiplicación en IR, y en particular en Q, como la existencia y unicidad de inversos multiplicativos, que llamaremos recíprocos, para todo racional distinto de cero; la existencia de elemento neutro, la conmutatividad (trabajada en la actividad de multiplicación en Z, que deberá mencionarse nuevamente explicando su validez en Q) y asociatividad del producto.

Instrucciones: Rosalía compró $\frac{3}{4}$ de kilogramos de jamón para preparar emparedados. Gastó la mitad del jamón comprado. ¿Qué parte de los kilogramos gastó?

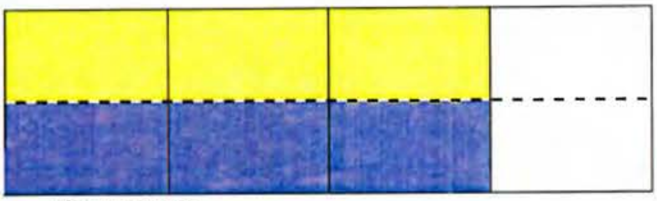
Representamos los $\frac{3}{4}$ por medio del dibujo



Lo dividimos en dos partes iguales



Al dividir $\frac{3}{4}$ en dos partes iguales, ¿En cuántas partes ha quedado dividida la unidad entera?



Respuesta

$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

Del ejemplo anterior se pueden deducir una serie de propiedades, las cuales, como se dijo, es importante mencionar por escrito, y generalizar como axiomas o teoremas. Se pueden mencionar, por ejemplo:

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones se multiplican el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador, es decir:

$$\text{Si } a, b, c, d \in Z, \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0, \text{ entonces } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Relación entre división y multiplicación (existencia y unicidad de recíprocos):

Note que, del ejemplo anterior, se deduce que dividir un número en dos partes iguales es equivalente a multiplicar dicho número por $\frac{1}{2}$. Esta propiedad se cumple para todo número racional distinto de cero. Tenemos, entonces, la siguiente propiedad:

$$\forall a, b \in Q \text{ tal que } a \neq 0, \text{ se tiene que } \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \cdot b$$

Por otro lado, si en la propiedad anterior, en lugar de dos números racionales "a" y "b" distintos se toma dos veces el número "a", se tiene que para cualquier número racional "a", distinto de cero, existe un único número real $\frac{1}{a}$, llamado recíproco de "a", que cumple además, que al multiplicarlo por "a" se obtiene como resultado uno, es decir, se tiene la siguiente propiedad:

$\forall a \in Q$, tal que $a \neq 0$ existe un único recíproco : $\frac{1}{a}$, que cumple

$$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{a} = 1$$

Así por ejemplo, el recíproco de 3 es $\frac{1}{3}$, el recíproco de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$, el recíproco de $-\frac{5}{7}$ es $-\frac{7}{5}$, y el recíproco de 1 es 1. Esta propiedad sigue siendo válida cuando se sale del conjunto de los números racionales, y se trabaja en el conjunto de los números reales.

Además, de la propiedad anterior obtenemos una regla para dividir fracciones, utilizando el hecho de que dividir un número es equivalente a multiplicar por su recíproco, así:

Si $a, b, c, d \in Z$, tal que b, c, d son distintos de cero, se cumple que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Elemento neutro:

La existencia y unicidad de un elemento neutro para la multiplicación se deduce inmediatamente de los conocimientos de multiplicación en Z que el alumno posee de su paso por la educación primaria, pues ahí se estudió que si se multiplica 1 por cualquier número entero, el resultado es el mismo número entero, sin embargo, debe aquí hacerse la generalización de la propiedad a Q y a IR:

$\forall a \in IR$, tal que $a \neq 0$, se tiene que

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Ejercicio:

A. Complete los espacios según corresponda

$$5 \cdot \frac{\square}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\square}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{2\square}$$

$$\frac{2}{\square} \div \frac{3}{\square} = \frac{8}{15}$$

B. Realice las siguientes operaciones con números racionales:

a. $-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$

b. $-\frac{6}{7} \cdot -\frac{2}{5}$

c. $\frac{3}{7} \cdot -\frac{2}{6} \cdot -\frac{5}{4}$

d. $\frac{6}{5} \div -\frac{3}{4}$

e. $-\frac{2}{5} \div -\frac{4}{7}$

f. $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{2}$

g. $-\frac{3}{5} \cdot -\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3}$

h. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5}$

i. $-\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{6} \div -\frac{1}{4}$

j. $\frac{6}{5} \cdot -\frac{3}{2} \div \frac{7}{3}$

Una vez más, se invita al docente a utilizar de manera explícita, siempre que el ejercicio lo permita, las propiedades de la multiplicación y de la división de racionales, mencionadas en los recuadros de las páginas anteriores, de modo que el alumno vea su aplicabilidad inmediata y se familiarice con su uso de una forma práctica.

A la vez, se le recuerda la importancia de generalizar estos resultados para el conjunto de los números reales.

Actividad 5.7: Adición y sustracción de Racionales

Como el docente habrá podido notar en este punto, según la secuencia de actividades del programa se introduce primero las nociones de fracciones equivalentes, amplificación y simplificación de fracciones, y multiplicación y división de fracciones, antes de la de suma y resta, contrario a lo que tradicionalmente se hace.

Esta organización de contenidos se debe a que, para explicar el método de suma y resta de fracciones heterogéneas, se utilizará la amplificación y simplificación de fracciones, así como la multiplicación, para obtener fracciones homogéneas equivalentes a las dadas en los ejercicios.

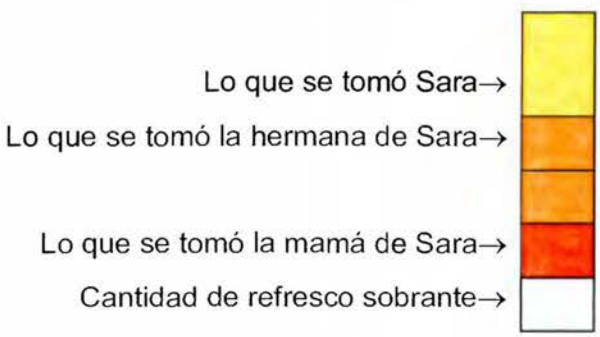
Instrucciones: En la presente actividad, se partirá de situaciones concretas para deducir el algoritmo para sumar o restar fracciones, homogéneas en primer lugar, y después heterogéneas.

Problema 1: Sara compró, junto con su mamá y su hermana, un refresco de dos litros. Si la mamá de Sara se tomó la quinta parte de la botella, su hermana dos quintas partes, y su mamá otra quinta parte:

a. ¿Qué cantidad del total del refresco se tomaron, entre las tres?
b. Si el refresco era de dos litros ¿qué cantidad, en litros, consumieron?

Solución:

a. Si el recipiente se considera como una unidad, entonces la dividimos en cinco partes iguales, de las cuales, Sara se tomó una, su hermana dos, y su mamá una, ilustrando la situación:



Es decir, la cantidad total de refresco que consumieron se representa por la operación

$$\begin{aligned} &\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5} \\ &=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Por lo que, entre las tres, consumieron cuatro quintos del total del refresco.

a. Como el refresco es de dos litros, en total se consumió $\frac{4}{5}\cdot 2$ litros, es decir:

$$\begin{aligned} &\frac{4}{5}\cdot 2 \\ &=\frac{8}{5} \\ &=1{,}6 \end{aligned}$$

Entonces, se tomaron, entre las tres, 1,6 litros de refresco.

Note que en este ejercicio, además de trabajar el tema de sumas con fracciones, se menciona la expansión decimal para expresar el resultado.

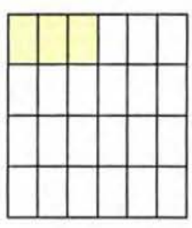
Problema 2: En la fiesta de cumpleaños de Francisco, el queque se dividió en 24 partes, de modo que correspondiera una rebanada para cada uno de los invitados, y una para el cumpleañero. Como dos invitados no llegaron a la fiesta, Francisco pudo comerse tres rebanadas del pastel.

a. ¿Qué cantidad del total del pastel se comió Francisco?
b. ¿Qué cantidad del total del pastel se comieron los demás invitados?

Solución:

a. Si representamos la situación del problema por medio de una ilustración tendríamos lo siguiente:

El pastel se dividió en 24 partes, es decir, cada rebanada representa $\frac{1}{24}$ de la unidad.



Como Francisco se comió tres rebanadas del pastel, entonces se comió, en total, tres fracciones, cada una de las cuales es un veinticuatroavo del total del pastel, es decir:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24} \\ &=3\cdot\frac{1}{24} \\ &=\frac{3}{24} \\ &=\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Dicho de otra forma, Francisco se comió un octavo del total del pastel.

a. Como el pastel se dividió en 24 partes, tenemos que, en total, tenemos $\frac{24}{24}$ de pastel, es decir, veinticuatro porciones, cada una de las cuales representa $\frac{1}{24}$ del pastel original. Como Francisco se comió tres de esas porciones, es decir, $\frac{3}{24}$, los demás invitados se comieron las porciones restantes, lo cual se escribe como:

$$\begin{aligned} &\frac{24}{24}-\frac{3}{24} \\ &=\frac{21}{24} \\ &=\frac{7}{8} \end{aligned}$$

Entonces, los restantes invitados se comieron $\frac{7}{8}$ del pastel.

De los dos ejercicios anteriores, se deduce un procedimiento para *sumar* fracciones con igual denominador:

> Para sumar o restar fracciones homogéneas, se suman o restan numeradores y se conservan denominadores:
>
> Si a, b y c $\in$ Z, con c $\neq$ 0, entonces $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$

Problema 3: Doña María preparó una cierta cantidad sándwiches una tarde de café con tres amigas más: doña Mercedes, doña Julia y doña Ana. Del total de sándwiches, doña María se comió la doceava parte, doña Mercedes la sexta parte, doña Julia la novena parte y doña Ana la cuarta parte. En total, ¿qué fracción del total de sándwiches se comieron las cuatro amigas?

Solución:

Si en este caso, la unidad es la cantidad total de sándwiches, tenemos los siguientes datos:

- Doña María se comió $\frac{1}{12}$ del total.
- Doña Mercedes se comió $\frac{1}{6}$ del total.
- Doña Julia se comió $\frac{1}{9}$ del total.
- Doña Ana se comió $\frac{1}{4}$ del total.
- En total, se comieron $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}$ de los sándwiches.

En este caso, no se puede simplemente sumar los numeradores, pues las cantidades que se comió cada una de las amigas no corresponden a una misma división de la unidad. En este caso, es necesario escribir fracciones equivalentes a las dadas, pero con un mismo denominador, para lo cual recurrimos a la amplificación de fracciones.

Primero, se busca el número más pequeño que pueda dividirse por 12, 6, 9 y 4 a la vez, es decir, el **mínimo múltiplo común** de esos números, el cual es, en este caso, 36 (se parte de que este concepto se debe haber adquirido en la educación primaria)

Luego, se amplifican las fracciones, multiplicando cada una por el factor que sea necesario para obtener un 36 como denominador, es decir:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=$$

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{6}+\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{9}=$$

$$\frac{3}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{9}{36}$$

Finalmente, teniendo las fracciones homogeneizadas, se repite el procedimiento utilizado antes:

$$\frac{3}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{9}{36}=$$

$$\frac{22}{36}=$$

$$\frac{11}{18}$$

Por lo tanto, las cuatro amigas se comieron $\frac{11}{18}$ del total de sándwiches.

Entonces, el procedimiento, en general, para sumar o restar fracciones heterogéneas, es el siguiente:

> Para sumar o restar fracciones heterogéneas, primero se calcula el mínimo múltiplo común de los denominadores, luego se homogeneízan las fracciones, amplificándolas por el factor que sea necesario para obtener como denominador el mínimo múltiplo común, y una vez homogenizadas, se suman o restan sus numeradores.

Ejercicio:

A. Realice las siguientes operaciones de suma y resta de números racionales

a. $\frac{3}{4}+\frac{7}{3}$

b. $-\frac{2}{5}+\frac{5}{6}$

c. $-\frac{4}{7}-\frac{3}{5}$

d. $-\frac{3}{2}+\frac{6}{4}-\frac{1}{8}$

e. $\frac{1}{2}-\frac{4}{7}-\frac{5}{3}$

f. $-\frac{4}{7}-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$

B. Efectúe las siguientes operaciones:

a. $3\left(2+\frac{3}{5}\right)\div\frac{1}{7}$

b. $-\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\left(4\cdot\frac{3}{7}\right)$

c. $\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\div\frac{6}{9}\right)$

d. $\frac{3}{7}-\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\cdot 3\right)$

e. $-\frac{1}{3}\left(4+\frac{3}{7}\right)\div\frac{8}{5}$

f. $\frac{5}{4}\div\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{9}{2}$

Actividad 5.8: Áreas de cuadriláteros para deducir distributividad de la multiplicación respecto de la suma

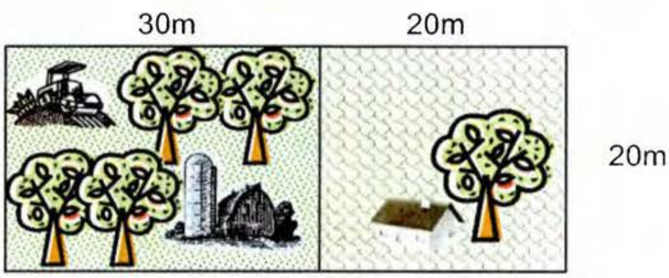
La idea de esta actividad es que sirva como introducción a la noción de la distributividad de la multiplicación respecto de la suma o la resta. Se pretende partir de casos concretos, utilizando áreas de rectángulos para que el alumno deduzca la propiedad. Se espera que el docente sea quien inicie la discusión al respecto, oriente el debate, y promueva un ambiente de formulación de ideas para que sea el alumno quien llegue a deducir la propiedad, para luego ser generalizada por el docente, por medio del lenguaje simbólico.

Materiales:

- Se pueden utilizar cartones o fichas para que los alumnos trabajen en grupos deduciendo y discutiendo los resultados. De modo que a cada grupo le corresponda una situación distinta. El profesor dará algún tiempo para que los *alumnos* discutan la situación y planteen diversas estrategias de resolución.
- También pueden utilizarse las figuras colocadas en carteles, para que de una forma más magistral, el docente plantee al grupo las diversas situaciones, y vaya fomentando la discusión y el debate de ideas, de manera general en todo el grupo.

Instrucciones: El docente plantea al grupo de alumnos una situación donde tengan que calcular el área total de un terreno rectangular, o en general, una figura rectangular que esté dividida en dos o más partes, también rectangulares, como por ejemplo, las situaciones que se muestran a continuación:

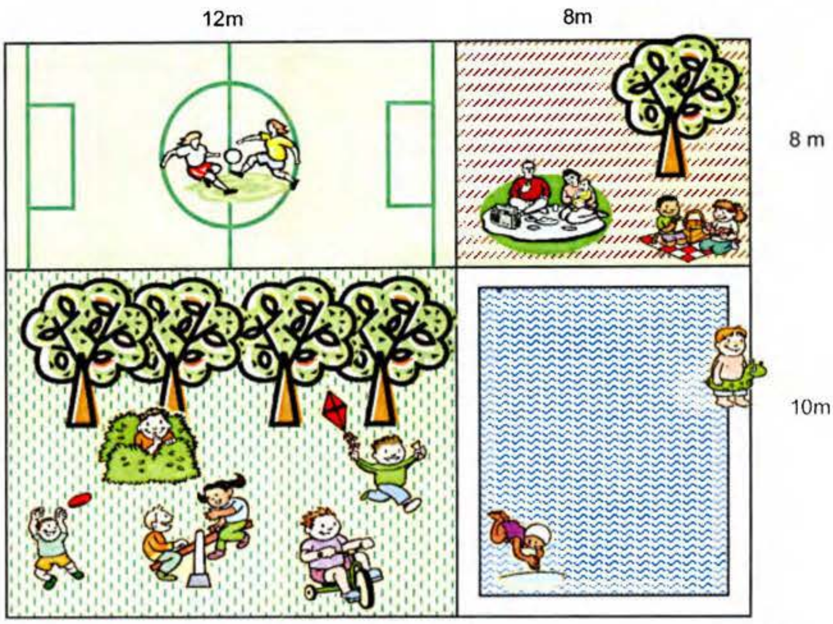
- El terreno de don Antonio es rectangular, y está dividido en dos partes, también rectangulares, una de las cuales corresponde a su casa, y la otra la dedica a la siembra de frutas, verduras y hortalizas, el terreno que ocupa la casa posee 20m de frente por 20m de fondo, mientras que el terreno dedicado a la siembra posee 30m de frente por 20m de fondo, ¿cuál es el área total del terreno?



Note que, en este caso, es equivalente calcular el área de todo el terreno, que es $20 \cdot 50$, que calcular el área de cada una de las partes, y luego sumarlas. Del resultado obtenido en el ejercicio anterior se puede, entonces, deducir que

$$\boxed{20 \cdot 50 = 20 \cdot (20 + 30) = 20 \cdot 20 + 20 \cdot 30 = 400 + 600 = 1000}$$

- La municipalidad de cierto cantón facilitó a la asociación de desarrollo de la comunidad un terreno con el fin de construir un área recreativa, el área se dividirá en cuatro partes: una cancha de fútbol, una piscina, un área de juegos para niños y una zona para comidas. Si las dimensiones de cada parte son las que se muestran en el dibujo, ¿cuál es el área total del terreno?



Al igual que en el caso anterior, el área total del terrero se obtiene multiplicando su largo (12+8), por su ancho (10+8), lo cual es, sin embargo, equivalente a calcular el área de cada una de las secciones en que se divide el terreno, y sumar el total obtenido, es decir:

$$\boxed{(12+8)\cdot(10+8)=12\cdot 10+12\cdot 8+8\cdot 10+8\cdot 8}$$

Lo que se pretende es que el docente guíe al alumno para que proponga diversas estrategias para calcular dicha área, como por ejemplo, calculando el área total del terreno, o sumando las áreas de ambas partes. A partir de ahí, el docente orientará la discusión hacia el hecho de que, en realidad, ambos métodos son equivalentes, procurando que el alumno llegue a la conclusión de que $20\cdot(20+30)=20\cdot 20+20\cdot 30$, y más generalmente $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, instándolo a justificar, empíricamente, la validez de ese resultado en forma general. Lo mismo puede decirse de los demás casos, donde se deba utilizar distributividad más de una vez, por ejemplo en $(a+b)(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$

Actividad 5.9: Potenciación en IR

Como se ha dicho anteriormente, es fundamental que el docente sea capaz de utilizar diversos métodos de prueba y/o demostración más o menos formales, según el nivel cognoscitivo en el que se encuentra el estudiante, y que éste, a su vez, sea capaz de ver dichas pruebas o demostraciones como una herramienta valiosa en la comprensión de las propiedades estudiadas, así como una justificación de la validez de tales propiedades, o teoremas.

Por este motivo, es clave que, cuando la teoría lo permita, el docente utilice, si bien no demostraciones rigurosas y formales, al menos sí, pruebas que sirvan para justificar al alumno el por qué de tal o cual algoritmo o teorema.

Introduciendo la noción de potenciación en IR a partir de la noción intuitiva de potenciación en Z, que posee el alumno (pues se trabajó con ella en la primaria), se elaboran, fácilmente, algunas pruebas de las propiedades de la potenciación en IR, que se estudiarán en esta unidad, y serán de gran utilidad para muchos de los temas que serán tratados posteriormente.

Al finalizar este apartado, se espera que el alumno sea capaz de utilizar las propiedades de las potencias en la resolución de ejercicios, de modo que sepa identificar las situaciones en las que es posible aplicar cierta propiedad, u otra.

Se recomienda que el docente inicie la clase con la noción intuitiva de potencia, que el alumno posee, pues se trabajó con ella en el último año de la educación primaria:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{\text{m veces}}$$

A partir de esta concepción, se sugiere que el docente "deduzca" las propiedades de la potenciación de una forma intuitiva, de modo que, para el alumno, éstas queden justificadas y tengan una razón de ser; y no solamente sean memorizadas de forma mecánica.

Una forma de deducirlas es como se explica a continuación:

En primer lugar, note que el hecho de que $0^n = 0$ $\forall n \neq 0$, y que $1^n = 1$ $\forall n \in IR$ se deducen de la definición de potencia dada líneas atrás, por lo que no se considerarán como propiedades propiamente hablando.

Instrucciones: La actividad puede desarrollarse por medio de una clase magistral, donde el docente explique y demuestre las propiedades a continuación citadas. Se recomienda, en tal caso, considerar el nivel de abstracción de los estudiantes, y la familiarización que éstos tengan con el trabajo en abstracto.

De este modo, las pruebas generales enunciadas en los párrafos siguientes pueden, si se considera necesario, sustituirse por ejemplos aritméticos concretos, que sean más manipulables por el alumno, pero lo ideal sería que, en algún momento, el alumno llegue a comprender el caso general de manera natural.

Se recomienda, también, que el docente propicie un ambiente de discusión y planteamiento de conjeturas, de modo que no sea él quien acapare el espacio verbal del grupo, si no que, por el contrario, la actividad se preste para el debate y la participación de los estudiantes.

Primera propiedad de la potenciación: Para multiplicar potencias de igual base se conserva la base y se suman los exponentes, es decir:

1. $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Prueba :

	$a^m \cdot a^n$	Definición
$=$	$\underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m \cdot a^m}_{n\text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n\text{ veces}}$	Asociatividad
	a^{m+n}	Ley de cancelación y definición

Segunda propiedad de la potenciación: Para dividir potencias de igual base, se conserva la base y se restan los exponentes, es decir:

2. $$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Prueba:

$$a^m \div a^n$$

$$\frac{\underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m \cdot a^m}_{\text{n veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{\text{n veces}}} \qquad \text{Definición}$$

$$= \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots a \cdot a)}^{\text{n veces}} \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots a \cdot a)}^{\text{m−n veces}}}{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots a \cdot a)}_{\text{n veces}}} \qquad \begin{array}{l}\text{Asociatividad} \\ \text{Ley de cancelación y definición}\end{array}$$

$$a^{m-n}$$

Tercera propiedad de la potenciación: Para elevar a potencia una potencia se conserva la base y se multiplican los exponentes, es decir:

3. $$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Prueba

$$\left(a^m\right)^n$$

$$= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m \cdot a^m}_{\text{nveces}} \qquad \text{Definición de potencia con exponente n}$$

$$= \underbrace{\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}^{\text{mveces}}\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}^{\text{mveces}} \cdot \ldots \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}^{\text{mveces}}\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}^{\text{mveces}}}_{\text{nveces}} \qquad \text{Definición de potencia con exponente m}$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{\text{m+nveces}} \qquad \text{Asociatividad}$$

$$= a^{m+n} \qquad \text{Definición de potencia con exponente m + n}$$

Cuarta propiedad de la potenciación: La potencia de un producto, es igual al producto de las potencias y viceversa, es decir:

4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Prueba :

$$
\begin{array}{lll}
 & (a \cdot b)^m & \\
= & \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (ab) \cdot (ab)}_{m \text{ veces}} & \text{Definición de potencia con exponente m} \\
= & \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b \cdot b)}_{m \text{ veces}} & \text{Asociatividad y conmutatividad} \\
= & a^m \cdot b^m & \text{Definición}
\end{array}
$$

Quinta propiedad de la potenciación: La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias y viceversa, es decir:

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Pr ueba *:*

$$
\begin{array}{lll}
 & \left(\frac{a}{b}\right)^n & \\
= & \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} & \text{Definición de potencia con base } \frac{a}{b} \text{ y exponente n} \\
= & \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b \cdot b}_{n \text{ veces}}} & \text{Producto de fracciones} \\
= & \frac{a^n}{b^n} & \text{Definición de potencias con base a y b, y exponente n, respectiva mente}
\end{array}
$$

Sexta propiedad de la potenciación: Una potencia con un exponente negativo es igual al recíproco de la base con exponente positivo, es decir:

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Prueba:

$$
\begin{array}{lll}
 & \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} & \\
= & \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right]^n & \text{Propiedad3} \\
= & \left(\frac{b}{a}\right)^n & \text{Definición de recíproco}
\end{array}
$$

Sétima propiedad de la potenciación: Toda potencia con exponente cero y base distinta de cero, es igual a uno, es decir:

7. $a^0 = 1 \qquad \forall a \neq 0$

Prueba :

$$
\begin{aligned}
& a^0 & \\
= \; & a^{n-n} & \text{Pues } 0 = n - n \; \forall n \in \Re \\
= \; & \frac{a^n}{a^n} & \text{Propiedad 2} \\
= \; & 1 & \text{Ley de cancelación}
\end{aligned}
$$

Note el docente que, a partir de la prueba dada, se deduce el porqué la base debe ser distinta de cero, pues, en caso contrario, se caería en la situación de estar dividiendo por cero.

Ejercicio: Potencias

A. Complete las siguientes afirmaciones, escribiendo el número real correcto en el espacio.

$3^{\square} = 1$	$\dfrac{\square^{8}}{3^{\square}} = 3^6$
$7^{\square} = 5+2$	$(2^3)^{\square} = (\square)^{12}$
$(-2)^{\square} = 4$	$a^m \div a^{\square} = \square^{m-n}$
$\square^3 = -8$	$(\square^m)^n = b^{\square \cdot n}$
$5^{\square} \cdot \square^3 = 5^7$	
$3^{\square} \cdot \square^4 = \boxed{9}$	

B. Efectúe las siguientes operaciones con potencias y simplifique:

a. $(-4)^0 + 5^2$	f. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$
b. $2 \cdot 2^3 + 3$	g. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2} \div \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-4}$
c. $(-3)^2 + (-3)^3$	
d. $4^{-3} \cdot (2^2)^5$	
e. $\left(6^2\right)^0$	

Actividad 5.10: Algunas propiedades de los radicales

El propósito de este ejercicio es que el alumno deduzca, a partir de casos particulares, algunas propiedades de la suma, resta, multiplicación y división con radicales, trabajando específicamente con radicales de índice dos, para su posterior generalización, y utilización en años posteriores, al retomar el tema desde una perspectiva algebraica, utilizándolo en el estudio de funciones.

Para ello se parte de la concepción intuitiva de una expresión radical como número posiblemente irracional, que el alumno debería manejar dado un primer acercamiento a estas expresiones, en apartados anteriores de esta unidad.

No se hace aquí, de manera explícita, una relación entre la potenciación y la radicación, objetivo que se desarrollará más adelante, si no que se pretende familiarizar más al alumno con la notación de expresiones radicales, y con algunas operaciones básicas que las involucren.

Instrucciones: El docente organizará al grupo en subgrupos de cuatro o cinco personas, y a cada grupo dará una serie de fichas con tablas que deberán completar con la ayuda de la calculadora, y discutir los resultados, tratando de obtener, o descartar alguna generalización, para cada una de las operaciones. A continuación se muestra un ejemplo de las tablas con las cuales se trabaja en la actividad.

a	b
3	3
3	4
5	4
9	16

$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$

$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Nótese que, al iniciar la actividad, se espera que el alumno posea, simplemente, una idea intuitiva de la existencia de las expresiones radicales como parte del conjunto de los números reales.

Al finalizar la clase, el docente permitirá un espacio para que los grupos expongan sus resultados, posterior al cual, hará las generalizaciones de los algoritmos para suma, resta, multiplicación y división de radicales. Es fundamental que, luego de este ejercicio, el alumno tenga claro que la raíz de una suma no es igual a la suma de las raíces, como sí sucede con la multiplicación y la división.

Algunos resultados importantes en esta actividad, que el docente debería explicitar al alumno son los siguientes:

a. Por medio de conjeturas, a partir de los resultados arrojados por la calculadora, deducir el significado y la validez de la expresión:

$$\boxed{\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2}$$

b. La raíz de un producto es igual al producto de las raíces, es decir:

$$\boxed{\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$$

Siempre y cuando ambos radicales estén definidos.

c. La raíz de una división es igual a la división de las raíces, es decir:

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Siempre y cuando ambos radicales estén definidos.

d. A la vez, debe hacerse énfasis en algunos errores que se cometen comúnmente, por ejemplo:

$$\boxed{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Una vez más, se insta al docente a mantener un nivel adecuado en las explicaciones y los ejemplos propuestos, así como en el vocabulario utilizado;

procurando, eso sí, irlo formalizando y enriqueciendo poco a poco, con el fin de formalizar otros resultados, lo que se hará con la próxima actividad.

e. También se recomienda, orientar o adaptar esta actividad, para que el alumno logre deducir e interpretar, con ayuda del docente, el caso general, es decir, para $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n}$$

De este modo, el alumno irá desarrollando, de una manera intuitiva, la idea de que la radicación es la operación inversa de la potenciación, lo cual le ayudará a comprender el porqué algunas expresiones radicales no pueden ser representadas como números enteros o racionales. Partiendo de este hecho, y considerando entonces la raíz de índice n, como la operación inversa de la potenciación de exponente n, el alumno podrá deducir algunas otras propiedades, como las siguientes:

f. Los radicales de índice par, y subradical positivo, son positivos, mientras que los radicales de índice par y subradical negativo no están definidos en IR.

$$\boxed{\underset{(\text{si } n \text{ par})}{\sqrt[n]{a}} = \begin{cases} \text{positivo, si a es positivo} \\ \text{no está definido, si a es negativo} \end{cases}}$$

g. Los radicales de índice impar, y subradical positivo, son positivos, mientras que los radicales de índice impar y subradical negativo son negativos.

$$\boxed{\underset{(\text{si } n \text{ impar})}{\sqrt[n]{a}} = \begin{cases} \text{positivo, si a es positivo} \\ \text{negativo, si a es negativo} \end{cases}}$$

Debe recordarse mantener un nivel de complejidad y abstracción apropiado para los estudiantes de sétimo año, pues la idea no es hacer hincapié en la teoría, si no procurar que ellos alcancen una comprensión apropiada de la misma, para aplicarla adecuadamente a la hora de trabajar ejercicios que serán mayormente de tipo aritméticos.

Actividad 5.11: Más propiedades de los radicales

Esta actividad busca, en primer lugar, formalizar el concepto de expresión radical, para establecer una relación más sólida entre éstas y las potencias, de modo que los radicales puedan verse como un caso particular de las potencias, y sus propiedades puedan deducirse a partir de las propiedades de la potenciación, estudiadas en apartados anteriores.

Instrucciones: La idea de la actividad, es desarrollarla de una forma semejante a la utilizada para introducir las propiedades de las potencias y, de hecho, utilizar aquellas para construir los resultados deseados en este caso.

Cabe recordar la idea de sustituir el trabajo algebraico, llevado a cabo de manera general, por situaciones aritméticas que sirvan para deducir los mismos resultados, sin perder de vista que, una competencia deseable en el alumno, es el razonamiento abstracto, que le permita comprender el enunciado de modo general, hacia lo cual debe llevarse poco a poco. Seguidamente se detallará un proceso por el cual construir los resultados que se pretende obtener:

En primer lugar, deduciremos la expresión $\sqrt[n]{a} = (a)^{1/n}$ partiendo del hecho de que queremos que, de algún modo, la radicación sea la operación inversa de la potenciación. Para que esto suceda, debe tenerse que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Ahora bien, si deseamos que el razonamiento utilizado con la suma y la multiplicación funcione igual en este caso, deberíamos poder obtener una expresión equivalente a $\sqrt[n]{a}$, pero escrita en forma de potencia, de la misma manera que podemos escribir una resta como la suma de un opuesto, o la división como la multiplicación por un recíproco.

En primer lugar, como queremos que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = a^1$, esto nos sugiere que la base de la potencia buscada debería ser "*a*", de donde se sigue que $\sqrt[n]{a} = a^p$ para algún valor de p. El problema se reduce, entonces, a encontrar un valor de p tal que $\left(a^p\right)^n = a$. Pero, como queremos que sigan siendo válidas las propiedades enunciadas para la potenciación, la expresión anterior debe ser equivalente a tener $a^{p \cdot n} = a = a^1$. De esta última expresión, se sigue que, necesariamente $p \cdot n = 1$, lo cual indica que p no puede ser otro número que el recíproco de n, es decir, $p = \frac{1}{n}$.

Dicho de otro modo, la expresión buscada es $(a)^{1/n}$, por lo tanto:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = (a)^{1/n}}$$

Utilizando esta notación, pueden, fácilmente, deducirse las propiedades de la radicación, las cuales de confirmaron la actividad anterior, de forma intuitiva, para el caso particular de la raíz cuadrada.

Seguidamente se plantea una manera de deducir dichas propiedades, a partir de la definición dada, y de las propiedades de la potenciación, que son válidas siempre que ambas expresiones, la de la izquierda y la de la derecha de la igualdad expuesta, estén definidas a la vez, según las restricciones que impone el índice de la raíz y el signo del subradical, vistos anteriormente.

Primera propiedad de la radicación: La potencia de una raíz es igual a la raíz de la potencia:

$$\begin{array}{lll} & \left(\sqrt[n]{a}\right)^m & \\ = & \left[(a)^{1/n}\right]^m & \text{Definición de raíz n - ésima} \\ = & (a)^{m/n} & \text{Propiedad 3 de la potenciación} \\ = & \left(a^m\right)^{1/n} & \text{Conmutatividad del producto} \\ = & \sqrt[n]{a^m} & \text{Definición de raíz n - ésima} \\ & \therefore \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} & \end{array}$$

Esta propiedad nos da un método para simplificar fracciones, o extraer factores del subradical, dividiendo el exponente del subradical por el índice de la raíz.

Segunda propiedad de la radicación: La raíz de una multiplicación es igual a la multiplicación de las raíces de los factores:

$$\begin{array}{lll} & \sqrt[n]{a \cdot b} & \\ = & (a \cdot b)^{1/n} & \text{Definición de raíz n - ésima} \\ = & a^{1/n} \cdot b^{1/n} & \text{Propiedad 4 de potenciación} \\ = & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & \text{Definición de raíz n - ésima} \\ & \therefore \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & \end{array}$$

Tercera propiedad de la radicación: La raíz de una división es igual a la raíz del dividendo entre la raíz del divisor:

$$\begin{array}{lll} & \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} & \\ = & \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n} & \text{Definición de raíz n - ésima} \\ = & \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}} & \text{Propiedad 5 de potenciación} \\ = & \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & \text{Definición de raíz n - ésima} \\ & \therefore \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & \end{array}$$

Cuarta propiedad de la radicación: El radical de un radical, es igual a una raíz cuyo índice es el producto de los índices de los dos radicales originales:

$$\begin{array}{lll} & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} & \\ = & \left[(a)^{1/m}\right]^{1/n} & \text{Definición de raíz n - ésima y raíz m - ésima} \\ = & (a)^{1/n \cdot m} & \text{Propiedad 3 de potenciación} \\ & \sqrt[n \cdot m]{a} & \text{Definición de aíz n} \cdot \text{m - ésima} \\ & \therefore \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & \end{array}$$

Ejercicios: Operaciones con números reales

Resuelva las siguientes operaciones con números reales:

a. $2^0-(4-3+7\cdot 3)$ b. $\dfrac{3(4-5)}{6-7\cdot 2}$ c. $\sqrt{2}\,(-5)^3-(4\sqrt{2}+3)$ d. $\dfrac{(5\div 3+4)^3}{-(-5+3\cdot 2)}$	e. $\dfrac{\sqrt[3]{8}+3}{3^2-(-5)}$ f. $\sqrt{2}+3\sqrt{2}-7$ g. $\dfrac{(-3)^2+2(8-6+7)}{4^2+\sqrt{16}}$ h. $\dfrac{5+(3-(4\cdot 5\div 2))}{3(2+9\div 3)}$

Actividad 5.12: Cuadrados mágico y estrellas

Los cuadros mágicos y estrellas mágicas son una herramienta muy útil para trabajar con números reales. No solamente se puede practicar operaciones, también puede utilizarse para establecer relaciones de orden entre ellos, y a la vez, utilizar diferentes notaciones tal como la decimal, la mixta y la fraccionaria.

Los motivos para utilizarlos son muchos. Se practica de una forma diferente y más dinámica, llegando a niveles de análisis en algunos casos, se trabajan varios temas a la vez y son excelentes como ejercicios de clase.

Aquí se presenta un ejemplo de cuadro mágico con multiplicación, con orden y una estrella mágica con suma. Queda a creatividad de cada profesor el modificarlos y trabajar con todas las operaciones que desee.

Instrucciones:

a. Complete el siguiente cuadro mágico de manera que la multiplicación de cada fila, columna y diagonales de -8.

	$\frac{1}{3}$	
	1	-1

b. Complete el siguiente cuadro mágico con los números reales 0, $\frac{-1}{2}$, 1, $-1\frac{1}{2}$, 2, -2.5, $\frac{-7}{2}$ de tal manera que los números de las filas, las columnas y las diagonales estén acomodados de menor a mayor.

		$\frac{1}{2}$
-2		

Actividad 5.13: Problemas con números reales

El aplicar los conocimientos en problemas de diversos contextos es uno de los fines más importantes de la educación, por tanto, es indispensable este tipo de actividades. Más allá de simplemente sumar o restar enteros o racionales, se quiere que el estudiante interprete diversas situaciones y pueda resolverlas utilizando los conocimientos que adquirió previamente; en este caso, las operaciones con números reales, entre otros.

La resolución de problemas usando números reales no se debe enseñar como un tema adicional, sino que se recomienda trabajarse simultáneamente con el tema de operaciones y, de este modo, enfocar al estudiante a que el fin principal es el de llevar a la práctica los conocimientos que va adquiriendo.

Con la presente actividad se busca que el docente aprecie la riqueza de situaciones que se genera al trabajar con problemas de diversa índole.

Específicamente, el problema 1 se puede utilizar como ejemplo dentro del aula donde lo realice el profesor o como introducción para el estudiante. El problema 2 y 4 si se puede utilizar como práctica para los alumnos.

En el problema 3 se recomienda ayuda del o la docente para su realización o bien que se exponga como ejemplo en el aula, debido a que, implícitamente, trabaja con la noción de ecuación, pero sin hacer uso propiamente de este concepto, por ello se explica detalladamente una posible solución.

Así mismo, en el problema 1 se pueden crear un gráfico que represente la situación y plantear preguntas al respecto, esto con el fin de introducir el análisis de gráficos de una forma intuitiva.

Problema 1: Se debe revisar la contabilidad de una empresa que compra y vende carros usados, y lleva tres meses funcionando. Es decir, debemos determinar cuánto dinero entró por las ventas, cuanto salió por las compras, y cuál fue el saldo en ese periodo. Los datos que tenemos son los siguientes:

Mes	Compras	Ventas
Enero	1 carro de 4 000 000 colones. 3 carros de 2 700 000 colones cada uno.	1 carro de 4 500 000 colones
Febrero	2 carros de 3 500 000 colones cada uno.	3 carros de 3 000 000 colones cada uno.
Marzo	1 carro de 3 000 000 colones 1 carro de 5 000 000 colones	1 carro de 6 000 000 colones. 2 carros de 4 200 000 colones cada uno

1. ¿A qué números les asignaría el signo negativo?
2. ¿A qué números les asignaría el signo positivo?

3. ¿Cuál fue el saldo del mes de enero? ¿Hubo pérdidas o ganancias?
4. Tomando en cuenta solo las transacciones de compra y venta de Febrero, ¿cuál sería el saldo correspondiente a ese mes? ¿Hubo pérdida o ganancias?
5. Tomando en cuenta las transacciones de Enero y Febrero, ¿cuál fue el saldo al finalizar Febrero? ¿Positivo o negativo?
6. ¿Cuál fue el saldo de las operaciones realizadas en Marzo exclusivamente?
7. ¿Cuál fue el saldo total de las transacciones realizadas en los tres meses? ¿Puedes encontrar distintas maneras de encontrar ese saldo?

Problema 2: Mario es asistente de un buffet de abogados. A él le corresponde ir al banco a realizar diligencias. Si en 4 días que Mario fue al banco tardó 37, 53, 25 y 72 minutos realizando filas, ¿Cuánto tiempo gastó, a la semana, haciendo filas en el banco?

Problema 3: Dos vacas fueron vendidas en 600 000 colones cada una. Si en la primera se ganó el 25% y en la segunda se perdió el 25%. Determinar si hubo ganancia o pérdida y de cuánto fue.

Solución:

a. En primer lugar, calculemos el valor de la ganancia obtenida con la primera vaca, para ello se anotan los datos que se tienen:

- Precio de venta de cada vaca: 600 000 colones.
- Llamemos al precio de costo de la primera vaca x.
- Como se tuvo una ganancia de 25%, podemos escribir esto como $\frac{25}{100} \cdot x$, y, simplificando la fracción se obtiene $\frac{1}{4}x$, que es igual a decir que se ganó una cuarta parte del precio de costo.

Luego, el precio de venta total, es igual al precio de costo, más la ganancia, lo cual podemos escribir como $600\ 000 = x + \frac{1}{4} \cdot x$. Como el precio de costo de la vaca es cuatro veces la ganancia obtenida, podemos escribir la expresión anterior como $600\ 000 = \frac{4}{4} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot x$.

Ahora, como la multiplicación es distributiva respecto a la suma, la expresión anterior es equivalente a $600\,000 = x \cdot \left(\frac{4}{4} + \frac{1}{4}\right)$, de donde, resolviendo la suma indicada en el paréntesis $600\ 000 = x \cdot \frac{5}{4}$

Lo anterior quiere decir que el precio de venta es de cinco cuartas partes del precio de costo, o dicho de otra forma, el precio de costo es $\frac{4}{5}$ del precio de venta, o sea: $\frac{4}{5} \cdot 600\ 000 = x \Rightarrow 4 \cdot 120\ 000 = x \Rightarrow 480\ 000 = x$. Entonces el precio de costo de la vaca es de 48 000.

Finalmente la ganancia se calcula restando al precio de venta el precio de costo, es decir: $600\ 000 - 480\ 000 = 120\ 000$

b. Calculemos el valor de la perdida en la venta de la segunda vaca. Igual que en el caso anterior, la pérdida es de 25%, si llamamos y al precio de costo de la vaca, lo anterior se escribe como $\frac{25}{100} \cdot y = \frac{1}{4} \cdot y$. En este caso, el precio de venta es igual al precio de costo menos la pérdida, es decir $600\ 000 = y - \frac{1}{4} \cdot y$

Procediendo como en el caso anterior para averiguar el valor de y:

$$600\ 000 = y - \frac{1}{4} \cdot y \Rightarrow$$
$$600\ 000 = \frac{4}{4} \cdot y - \frac{1}{4} \cdot y \Rightarrow$$
$$600\ 000 = y \cdot \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow$$
$$600\ 000 = y \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow$$
$$\frac{4}{3} \cdot 600\ 000 = y \Rightarrow$$
$$800\ 000 = y$$

Finalmente, la pérdida total se calcula restando al precio de costo el precio de venta: $800\ 000 - 600\ 000 = 200\ 000$.

Ahora, por la primera vaca hubo una ganancia de 120 000 y por la segunda, una pérdida de 200000, por lo que se puede decir que al final hubo una pérdida, que fue de $200\ 000 - 120\ 000 = 80\ 000$.

En este ejercicio, si bien se hace uso de las ecuaciones lineales para resolverlo, la idea no es introducir el tema explícitamente. El propósito del ejercicio es que el docente explote con sus alumnos el proceso de razonamiento seguido para encontrar la solución, con la idea de ir desarrollando, gradualmente, las habilidades matemáticas involucradas en tales procesos. Se invita al docente, por tanto, a enfatizar en la explicación del ejercicio al grupo, así como a buscar otros métodos de resolución del mismo, y a propiciar espacios de discusión y planteamiento de estrategias de solución por parte de los estudiantes.

Problema 4: Un recipiente se llena con 6 litros de café. Se consume $\frac{1}{3}$ del contenido y se vuelve a llenar con agua. Luego se consume $\frac{2}{5}$ del *contenido* y se vuelve a llenar con agua, y por último se consume los $\frac{3}{8}$ del contenido y se vuelve a llenar con agua. ¿Qué cantidad de café contiene un litro de esa mezcla?

Solución:

Retira	Queda
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$

Respuesta: En un litro de mezcla final hay $\frac{1}{4}$ litro de café puro.

6. Valor absoluto de un número real

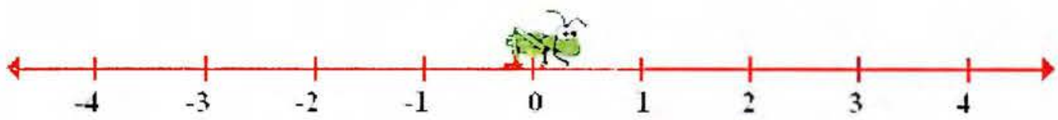
Es fundamental que el alumno conozca la noción intuitiva de valor absoluto de un número real, así como algunas de las propiedades del valor absoluto, pues este concepto se utilizará más adelante en diversas ocasiones. Por ejemplo, al trabajar con la distancia entre dos puntos del plano, la norma de un vector; y posteriormente, al trabajar con ecuaciones de la forma $x^2 = a \Leftrightarrow |x| = \sqrt{a}$, o al estudiar funciones reales de variable real, en las que se trabaja con la función valor absoluto.

Actividad 6.1: El saltamontes

Para iniciar el estudio del valor absoluto de un número real, se trabaja con la recta numérica y un saltamontes que se desplaza sobre ella, de manera que las distancias recorridas desde cero son el valor absoluto de algún número real.

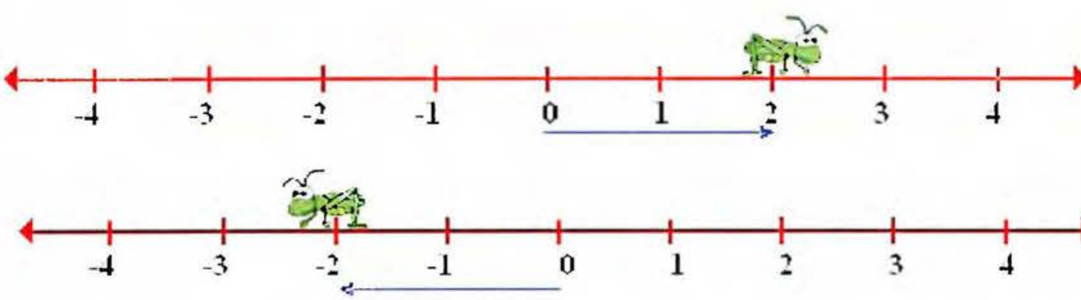
En primera instancia, se trabaja con el valor absoluto de números reales dados, posteriormente se trabaja con expresiones más elaboradas, que involucren operaciones con números reales, y posteriormente con variables, para generalizar algunas de las propiedades del valor absoluto, y familiarizar al alumno, gradualmente, con la manipulación de expresiones algebraicas, que será la primera unidad temática cuando el estudiante llegue a octavo año.

Instrucciones: Imagine un saltamontes ubicado en la recta numérica, sobre el punto de abscisa cero.

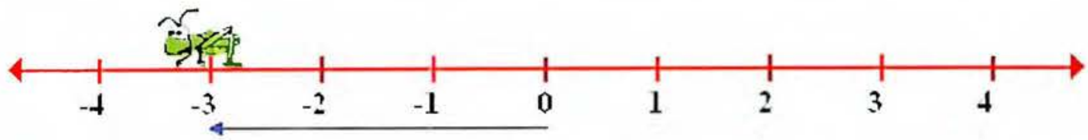


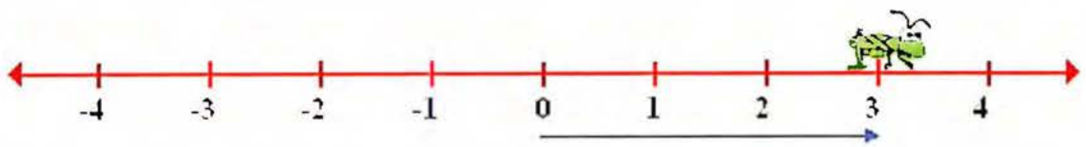
A partir de este punto, el saltamontes se desplaza arbitrariamente hacia izquierda o derecha, realizando, uno o varios movimientos; en ocasiones en una misma dirección, y en otras en distintas direcciones. Vamos a estudiar, en cada caso, la distancia que existe entre la posición inicial del saltamontes, y su posición final. A esta distancia la llamaremos **valor absoluto**, y lo representaremos por el símbolo $|\ |$. A continuación tenemos algunos ejemplos.

Si el saltamontes se desplaza dos unidades a la derecha, la distancia recorrida desde cero, hasta el final del recorrido, es de dos unidades. Decimos que el valor absoluto de dos es dos, y lo escribimos así: $|2| = 2$. Lo mismo sucede si se desplaza dos unidades a la izquierda. $|-2| = 2$.

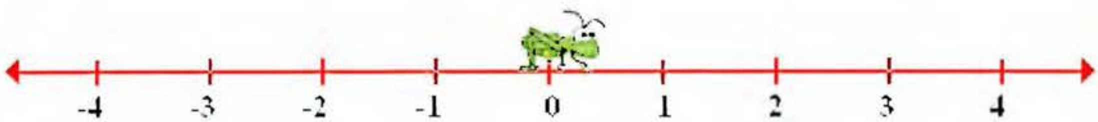


Si el saltamontes se desplaza ahora tres unidades, pero hacia la izquierda, la distancia recorrida desde cero es de tres unidades, decimos que el valor absoluto de menos tres es tres, y escribimos $|-3| = 3$. Similarmente, si se desplaza tres unidades a la derecha $|3| = 3$.





Si el saltamontes no se desplazó, la distancia recorrida es de cero unidades, decimos entonces que el valor absoluto de cero es cero, y escribimos $|0| = 0$



De la anterior discusión, tenemos las siguientes propiedades:

a. El valor absoluto de cualquier número real es positivo, o cero. En particular, es cero solamente si el número es cero, es decir:

$$\boxed{|a| \geq 0, \forall a \in \mathrm{IR}}$$

b. El valor absoluto de dos números reales opuestos es el mismo, simbólicamente:

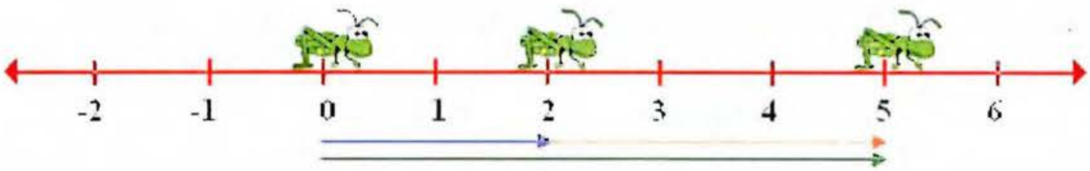
$$\boxed{|a| = |-a|, \forall a \in \mathrm{IR}}$$

A partir de los ejemplos anteriores, determine el valor absoluto de los siguientes números reales:

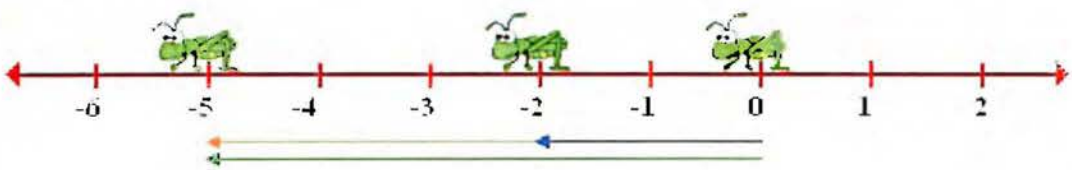
$\lvert 5 \rvert$	=	______	$\lvert -7 \rvert$	=	______	$\lvert 0 \rvert$	=	______
$\lvert \sqrt{2} \rvert$	=	______	$\lvert \pi \rvert$	=	______	$\lvert -e \rvert$	=	______
$\left\lvert \frac{1}{2} \right\rvert$	=	______	$\left\lvert -\frac{7}{5} \right\rvert$	=	______	$\lvert -\sqrt[5]{4} \rvert$	=	______

Consideremos nuevamente al saltamontes ubicado en el punto de abscisa cero. Pero ahora, se va a desplazar haciendo varios movimientos a la vez.

Si se desplaza dos unidades a la derecha, y luego tres unidades, en la misma dirección, el desplazamiento total es de $2+3=5$, decimos que $|2+3|=|5|=5$.



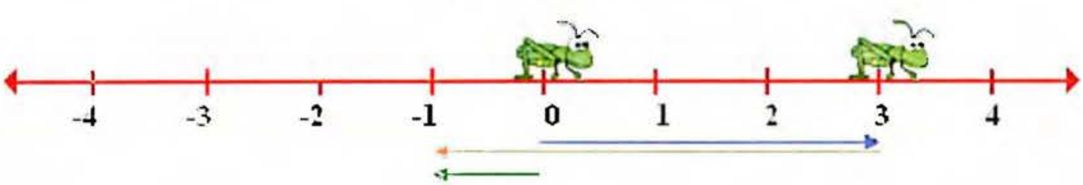
Por otro lado, si se desplaza dos unidades a la izquierda, y luego tres unidades en la misma dirección, el desplazamiento es de $-2-3=-5$, de donde $|-2-3|=|-2+-3|=|-5|=5$.



De los ejemplos anteriores, podemos concluir lo siguiente:

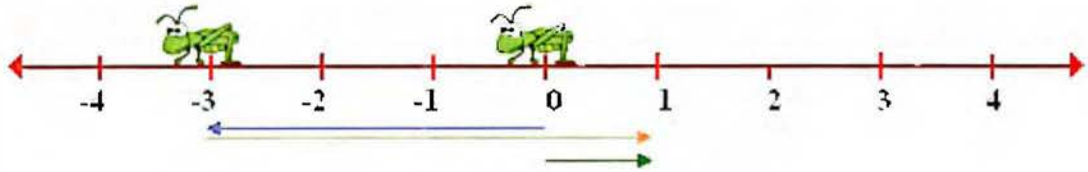
$$\boxed{\text{Si a y b tienen el mismo signo, entonces } |a+b|=|a|+|b|}$$

Consideremos ahora, que el saltamontes sale desde el punto de abscisa cero, y se desplaza, primero tres unidades a la derecha, y luego cuatro hacia la izquierda. Su desplazamiento es de -1, pero la distancia, desde el punto inicial hasta el final, es de 1 unidad, es decir $|3-4|=|3+-4|=|-1|=1$



En este caso, podemos notar que no se cumple la propiedad señalada en el recuadro anterior, puesto que $|3+-4|=|-1|=1$ y $|3|+|-4|=3+4=5$.

Ahora bien, si el saltamontes hubiese recorrido 3 unidades hacia la izquierda y 4 unidades hacia la derecha (es decir, las mismas cantidades que en el ejemplo anterior, pero en sentido contrario), tenemos que el desplazamiento sería de 1 unidad, pero al igual que en el caso anterior, obtenemos que la distancia es 1, o sea $|-3+4| = |1| = 1$.



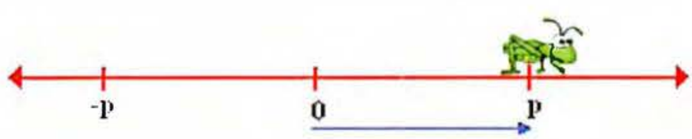
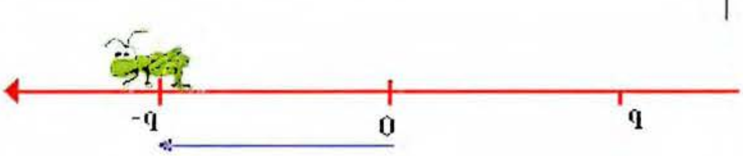
De los dos ejemplos anteriores podemos concluir lo siguiente:

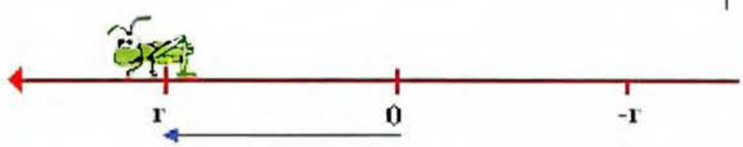
$$\boxed{|a + -b| = |-a + b|}$$

Y por la propiedad de conmutatividad de los números reales tenemos además que:

$$\boxed{|a + -b| = |-b + a| = |-a + b| = |b + -a|}$$

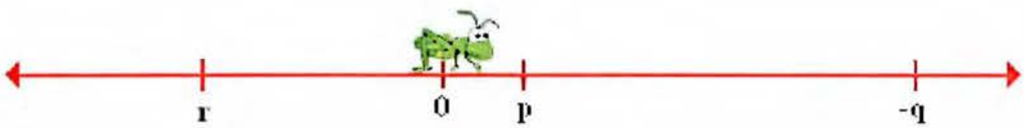
Consideremos nuevamente al saltamontes ubicado en el punto de abscisa cero. Pero ahora, se va a desplazar sobre una recta donde las abscisas de sus puntos se representan con letras. Observe los siguientes ejemplos:

Saltamontes en la recta	Desplazamiento	Distancia
	p unidades	$\|p\| = p$
	-q unidades	$\|-q\| = q$

	r unidades	$\lvert r\rvert = -r$

Es importante notar, en el último ejemplo, que la letra "r" está representando un número negativo, de modo que –r, que es su opuesto, es positivo.

Ejercicio: Complete los espacios en blanco con los símbolos "<", ">" o "=" según corresponda.



$\lvert -q\rvert$	________	$\lvert r\rvert$	$\lvert p + -q\rvert$	________	$\lvert r\rvert$
$\lvert -p\rvert$	________	$\lvert -r\rvert$	$\lvert r + -p\rvert$	________	$\lvert -p + r\rvert$
$\lvert q\rvert$	________	$\lvert p\rvert$	$\lvert r + q\rvert$	________	$\lvert -q + -p\rvert$

7. Intervalos reales

Con este contenido se espera introducir al alumno la noción de intervalos reales, y estudiar los distintos tipos de intervalos existentes: acotados y no acotados, abiertos, cerrados, y semiabiertos o semicerrados.

Instrucciones: Se sugiere al docente hacer énfasis en la interpretación del concepto de intervalo como un conjunto de números reales, de modo que el alumno pueda manejar con soltura las diversas representaciones de dichos conjuntos como son los intervalos, la representación gráfica y la representación por comprensión.

La comprensión de la noción de intervalo se vuelve fundamental, cuando debe aplicarse en niveles posteriores, al resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita, y más adelante, cuando se trabaje con funciones reales de variable real, al trabajar con dominio de funciones.

Actividad 7.1 Intervalos reales

Con esta actividad se pretende introducir la noción de intervalo real, haciendo énfasis, como se explicó en párrafos anteriores, en la idea de un intervalo como un conjunto de números reales, y no quedándose simplemente en las diversas representaciones del mismo. El docente deberá, entonces, explicar claramente la idea de un conjunto delimitado por dos números reales fijos, a y b, con $a < b$, en el caso de los intervalos acotados, o por un número real fijo, en el caso de los no acotados.

También es importante que el docente haga visualizar al alumno que, aunque un intervalo esté delimitado por dos números enteros consecutivos, siempre posee un número infinito de elementos, debido a que, en cualquier segmento de la recta se podrá encontrar una cantidad infinita de números reales.

Intervalos acotados: Considere dos números reales a y b, de modo que a < b, como se aprecia en la siguiente figura:

Ahora, se sabe que a cada punto de la recta se le puede hacer corresponder un número real, y como entre dos puntos distintos de una recta hay infinitos puntos, se tiene que, entre los números a y b, hay infinita cantidad de números reales. Considere el lector, entonces, el conjunto de números reales que están comprendidos entre a y b, inclusive. Ese conjunto se llama intervalo cerrado de extremos a y b, y se representa como sigue:

Los puntos a y b se llaman *extremo inferior* y *extremo superior* del intervalo, respectivamente. Los círculos negros sobre los puntos a y b indican que ambos elementos son parte del conjunto en cuestión.

El intervalo anterior puede denotarse también usando la notación clásica de conjuntos, por comprensión, de la siguiente manera:

$$\boxed{\{x / x \in IR \ \ a \leq x \leq b\}}$$

Existe otra forma de denotar los intervalos: usando corchetes, y escribiendo, en orden, los extremos del intervalo, separados por una coma, dentro de los corchetes, en el ejemplo anterior, el intervalo se denotaría de la siguiente manera:

$$\boxed{[a, b]}$$

En este caso, los corchetes señalando hacia los extremos del intervalo, indican que éstos son parte del conjunto considerado.
Considere ahora el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b, pero sin incluir a "a" y a "b". Este conjunto se llama intervalo abierto de extremos a y b, y se representa así:

Los círculos blancos sirven para indicar que los extremos no se consideran dentro del conjunto. Escrito por comprensión, este intervalo se denota:

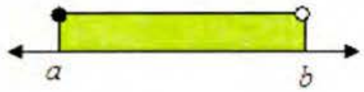
$$\boxed{\{x \in IR/a \ < x < b\}}$$

Y en notación de corchetes, se escribe:

$$\boxed{]a, b[}$$

Los corchetes señalando hacia fuera de los extremos del intervalo indican que los extremos no son parte del conjunto considerado.

Considere ahora el lector el caso en el que, además de los elementos que están entre a y b, se toma en cuenta uno de los extremos, bien sea a o b, pero no el otro. En estos casos estamos ante un intervalo semiabierto en uno de sus extremos, entonces, las representaciones respectivas son las siguientes:



$\{x \in IR / a \leq x < b\}$ $[a,b[$

$\{x \in IR / a < x \leq b\}$ $]a,b]$

Note la relación que se da, en las distintas representaciones, entre los círculos blancos o rellenos, las desigualdades, y los corchetes abiertos o cerrados.

Intervalos no acotados

Los intervalos definidos en el apartado anterior se caracterizan por tener dos extremos, uno inferior y uno superior, es decir, consideran los números reales que se encuentran entre dos números reales dados, inclusive dichos extremos, o sin considerarlos.

Ahora se estudiarán los intervalos no acotados, que son aquellos que designan un conjunto de números reales que son mayores (o mayores o iguales), que un número real fijo.

En primer lugar, considere el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que un número real b dado. Conjunto que se representa gráficamente como sigue:

En notación por comprensión, dicho intervalo se denota como $\{x \in IR / b \leq x\}$, o bien $\{x \in IR / x \geq b\}$ y con notación de corchetes como $[b,+\infty[$. El docente debe aclarar que el símbolo del infinito, al lado derecho, no representa un número en particular, si no precisamente, la idea de que el intervalo no tiene un límite o extremo superior, por esta razón, en tal caso, el corchete correspondiente se escribe abierto.

Similarmente se representa el conjunto de todos los números reales estrictamente mayores que b, es decir, sin considerar a b, de manera gráfica:

Las representaciones por comprensión y con corchetes de dicho intervalo son $\{x \in IR / b < x\}$, o bien $\{x \in IR / x > b\}$, y $]b,+\infty[$, respectivamente.

Del mismo modo podemos caracterizar los intervalos conformados por todos los elementos menores o iguales, o estrictamente menores, que dado número real a, de la siguiente forma:

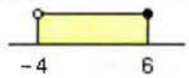
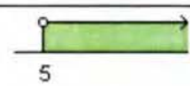
$\{x \in IR / x < a\}$ $]-\infty,a[$

$\{x \in IR / x \leq a\}$ $]-\infty,a]$

De este modo, quedan introducidos los diversos tipos de intervalos con los que se propone trabajar. Se recomienda al docente plantear muchos ejemplos concretos de cada caso, así como contraejemplos de conjuntos que, usando las tres notaciones mencionadas, no sean intervalos, o sean conjuntos vacíos, haciendo énfasis siempre en la interpretación de las representaciones, y no solo en la manipulación mecánica del lenguaje simbólico.

Ejercicio: Intervalos

A. Complete la siguiente tabla con las representaciones de intervalos, según corresponda

Notación de intervalo	Notación por comprensión	Representación gráfica
$[2,5]$		
		
	$\{x / x \in IR, -4 \leq x \leq 7\}$	
$]-\infty,-3]$		
		
	$\{x / x \in IR, x \geq 3\}$	

B. Considere los siguientes conjuntos: $A=]-6,4]$, $B=[-3,4]$, $C=[-2,6[$, $D=[5,+\infty[$

C. Represente gráficamente cada uno de esos conjuntos, pero utilizando una única recta para todos.

D. Determine lo que se le solicita:

$B \cap C$	$B \cup D$	$A \cap C$
$C \cup D$	$C \cap D$	$B \cup C$

3.1.2 Unidad 2: Vectores en el plano

Introducción

Los aprendizajes adquiridos en la primera unidad dan por sentadas, además de las bases cognitivas para interpretar y utilizar las diversas representaciones e interpretaciones de los números reales, y las reglas para operar con ellos, una serie de herramientas que se convertirán en los fundamentos teóricos para que el estudiante pueda adentrarse en la formalización y extensión de algunas nociones que adquirirán mayor relevancia en unidades posteriores. Por ejemplo, el establecimiento de sistemas de coordenadas en la recta, y la idea subyacente de una biyección entre la recta y el conjunto de los números reales, idea que, además de permitir una representación gráfica de IR, abre camino a una eventual integración entre los conceptos geométricos y algebraicos que se estudiarán más adelante.

En esta unidad el alumno ampliará la noción de sistema de coordenadas en una recta estudiada en la primera unidad, para continuar con la noción de sistema de coordenadas cartesianas en un plano, y de una manera muy general, en el espacio. La unidad busca ir más allá de la simple ubicación de puntos en el plano o el espacio, y pretende utilizar el sistema de coordenadas como una herramienta para introducir la noción de vector. De este modo se espera que el alumno logre jugar a conveniencia con la interpretación de un par ordenado, o una tripleta ordenada, sea como un punto o como un vector; y aplicar esa interpretación en distintos contextos, particularmente geométricos.

A este nivel, la generalización del sistema de coordenadas al espacio busca que el alumno desarrolle una noción intuitiva de éste; sin embargo, el énfasis en los ejercicios debe hacerse hacia el plano, pues no se trabajará en el tercer ciclo con conceptos geométricos en el espacio, si no solamente con geometría plana.

Del mismo modo que al trabajar con los números reales, el docente debe procurar en esta unidad que la estructura algebraica con la que se trabaja no se convierta en una camisa de fuerza para el alumno, por el contrario, debe ser una herramienta que el alumno comprenda, para que pueda manejarse con soltura a la hora de resolver problemas; por lo cual, el aspecto formal de la teoría, si bien no puede dejarse de lado, y es fundamental para la contextualización y comprensión de los conceptos, debe adaptarse a las necesidades del alumno, recordando que, en última instancia, lo que se busca es que sea una herramienta, un medio y no un fin en sí mismo.

Puesto que, a mediano plazo, se pretende utilizar la estructura vectorial como herramienta para la resolución de problemas en contextos geométricos, se sugiere que los ejercicios trabajados en el aula, así como los asignados a los alumnos, estén relacionados con situaciones geométricas, de modo que la relación entre el álgebra vectorial y los conocimientos geométricos previos del alumno vaya haciéndose, de manera gradual y natural, cada vez más evidente para el estudiante.

Los ejercicios, además, deben adaptarse al nivel cognitivo del alumno, y en la medida de lo posible, plantearse a partir de situaciones concretas y cotidianas, favoreciendo el desarrollo de ideas y la comprensión de conceptos, por encima de la utilización del lenguaje simbólico o del formalismo matemático.

Aprendizajes esperados

Se espera que, al finalizar esta unidad, los estudiantes se encuentren en capacidad de:

1. Identificar las coordenadas de un punto dado en un plano dotado de un sistema de coordenadas cartesianas.
2. Determinar la distancia entre dos puntos
3. Interpretar el concepto de desplazamiento como un objeto dotado de magnitud y dirección.
4. Interpretar el concepto de bipunto.

5. Identificar bipuntos equivalentes.
6. Deducir el concepto de vector utilizando los conceptos de desplazamiento y bipunto.
7. Determinar magnitud de un vector.
8. Determinar las coordenadas de un vector utilizando el concepto de bipunto.
9. Efectuar operaciones con vectores: suma y resta de vectores y multiplicación de un vector por un número real.
10. Identificar vectores paralelos.
11. Determinar si dos vectores son paralelos
12. Determinar el producto punto de dos vectores
13. Determinar si dos vectores son perpendiculares.

Secuencia de contenidos y actividades sugeridas

1. Sistema de coordenadas cartesianas en el plano: plano cartesiano y coordenadas de un punto

En este primer apartado se pretende que los estudiantes comiencen a involucrarse con el plano cartesiano de una forma natural, utilizando para ello aspectos de la vida cotidiana, contextualizados en situaciones familiares para el alumno. Como por ejemplo el uso de los puntos cardinales para dar direcciones, la ubicación de lugares en un mapa, entre otros.

Para introducir este tema, es de gran importancia la utilización de mapas, en donde a partir de problemas propuestos a los alumnos se pueda incorporar el concepto de plano cartesiano y todos lo nociones que este tema conlleva.

De esta forma, en un mapa se puede crear un sistema de coordenadas para que el estudiante localice lugares. Luego, cada lugar del mapa se puede asociar con un punto, y a la dirección de dicho lugar las coordenadas del punto. Así mismo, se debe ir introduciendo gradualmente el lenguaje simbólico, principalmente el algebraico, de una manera justificada para simplificar el trabajo y no de una forma impuesta.

Cuando se trabaja con las coordenadas de un punto, existen algunas propiedades que el estudiante puede deducir con la guía del docente, por ejemplo:

- para un punto en el plano existe un único par ordenado y viceversa.
- $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c, b=d$

Por otro lado, el docente debe cerciorarse de que el estudiante visualice aspectos tales como que las coordenadas del origen de un sistema de referencia cartesiano son O(0,0); y que cualquier punto sobre alguno de los ejes tiene coordenada cero en el otro eje. Es decir, si un punto está sobre el eje X, sus coordenadas son (x,0), para algún x en IR; y si está sobre el eje Y sus coordenadas son (0,y), para algún y en IR.

Actividad 1.1. Sistema de coordenadas.

La siguiente actividad pretende introducir el tema de plano cartesiano con la utilización de un mapa de la parte central de San José. Por medio de situaciones concretas, y de la formulación de preguntas al estudiante se irán desarrollando los conceptos deseados.

Instrucciones: Lea el siguiente problema y responda lo que se le solicita:

Margarita necesita ir al Banco Nacional a depositar dinero en su cuenta de ahorros. Ella se bajó del bus en la parada ubicada en el punto señalado con la carita feliz (Ver figura). Y de ahí camina hacia el Banco Nacional, al llegar, ella está dos calles al este, y dos avenidas al norte del punto inicial (recorrido marcado en rojo). Ahí se encuentra con Mariana, una amiga suya, quien le pide que la acompañe al correo y decide ir.

¿A cuántas calles y avenidas, y en qué dirección, está el correo de la carita feliz? (Ver el recorrido marcado en azul.)

Luego, ellas van al MEP a solicitar información sobre los exámenes de bachillerato, ¿a cuántas calles y avenidas están de la carita feliz y en qué dirección? (Ver recorrido en verde.)

De esta forma el docente puede convenir con los estudiantes que se debe tomar un punto de origen, que es, en este caso, el lugar donde Margarita empieza su recorrido por San José. Luego se debe convenir que si se camina hacia el este el número tendrá signo positivo y si se camina hacia el oeste tendrá *signo negativo.* Análogamente, si se camina hacia el norte tendrá signo positivo y hacia el sur signo negativo.

De aquí se le deben plantear al estudiante nuevas preguntas para que utilicen los signos en lugar de los puntos cardinales, para luego hacerles ver que para dar la dirección de un lugar se necesitan dos números, uno que corresponde al número de calles y otro el número de avenidas. De aquí se induce al alumno al uso de los pares ordenados.

Es importante que el docente haga la aclaración de que el signo que se le establece a las cantidades determina la dirección pero que la distancia siempre es una cantidad positiva.

Luego, utilizando el mapa anterior, se puede dar nombre a los ejes de referencia, que serían la avenida central y la calle 8, que ahora llamaremos, respectivamente, eje X y eje Y. Posteriormente se introduce el uso de puntos en el plano con una letra mayúscula en lugar de escribir siempre las coordenadas del punto.

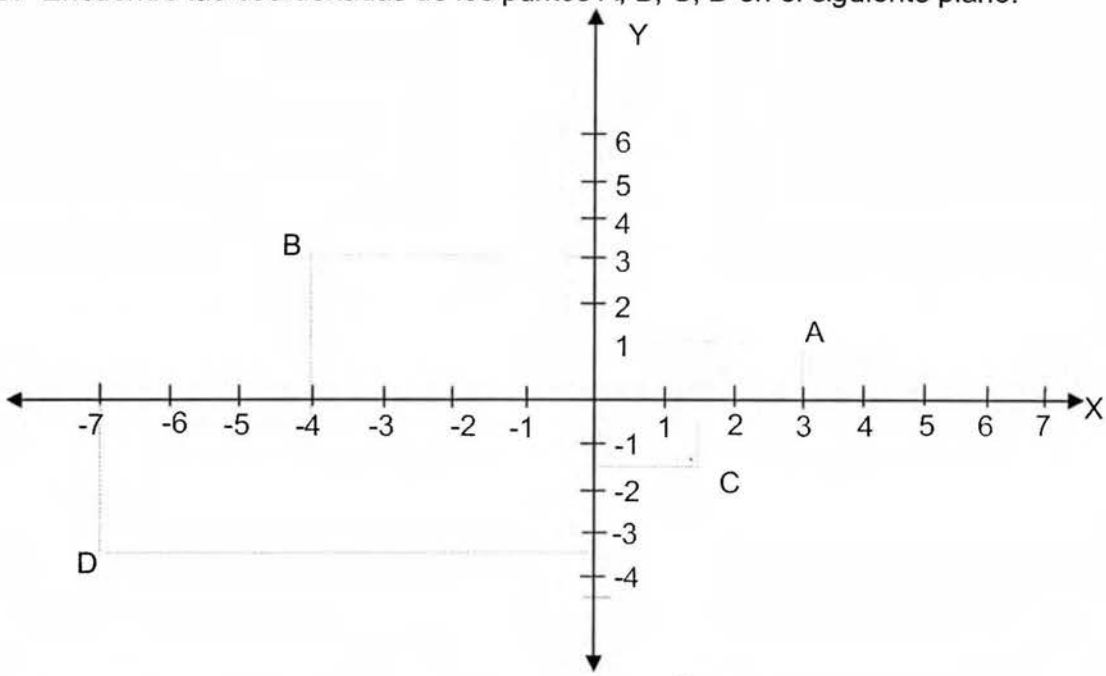
De esta forma se puede hacer ver al estudiante que es posible generalizar lo realizado anteriormente para cualquier plano, en donde es necesario tener un punto de origen, dos rectas que se interseque en dicho origen y una unidad de medida.

Ejercicios:

A. Localice las coordenadas de los cantones de la provincia de Guanacaste.

Liberia	____________	Nicoya	____________
Bagaces	____________	Nandayure	____________
Cañas	____________	Carrillo	____________
Tilarán	____________	Abangares	____________
Santa Cruz	____________	La Cruz	____________

B. Encuentre las coordenadas de los puntos A, B, C, D en el siguiente plano:



A ____________________ C ____________________

B ____________________ D ____________________

2. Distancia entre dos puntos.

En la unidad de los números reales, los estudiantes aprendieron que el valor absoluto de un número real es la distancia que hay entre el cero y dicho número, y que la distancia siempre es una cantidad positiva. También aprendieron a calcular la distancia que hay entre dos puntos de la recta numérica utilizando el valor absoluto.

Ahora, para desarrollar el tema de distancia entre dos puntos en el plano se debe iniciar tomando en cuenta los conocimientos adquiridos por los estudiantes y comenzar calculando distancias entre puntos que determinen un segmento paralelo a los ejes de referencia.

Más generalmente, para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano se utilizarán ejemplos concretos en donde el estudiante deberá identificar el camino más corto para poder establecer la distancia entre dichos puntos. Luego se introducirá el Teorema de Pitágoras, de una manera intuitiva, para llegar a la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos:

$$\boxed{d(P,Q)=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}}$$

Donde $P(a,b)$ y $Q(c,d)$ son dos puntos en el plano.

El docente deberá aclara el por qué en el caso general de dos puntos cualesquiera sobre el plano, se utiliza esta fórmula, mientras que no es posible utilizar la noción de valor absoluto. También se tiene que establecer los contextos necesarios para que el estudiante deduzca que $d(P,Q)=d(Q,P)$

Actividad 2.1 Longitud de segmentos paralelos a los ejes de referencia

Utilizando el mapa del centro de San José se puede iniciar a trabajar con distancias que determinan segmentos paralelos a los ejes de referencia, ya que es algo de menor dificultad y es apropiado para establecer la fórmula de la distancia entre dos puntos.

En esta actividad se va a utilizar el concepto de valor absoluto que se desarrolló en la unidad 1.

Instrucciones: Utilice de nuevo el mapa del centro de San José, de la *actividad 1.1*, y conteste lo que se le solicita.

1. ¿Cuál es la distancia que hay entre el punto C y el punto G, es decir entre el MEP y el Banco de Costa Rica? (ver flecha verde)

De esta forma la distancia va a estar dada por el valor absoluto de la resta de las coordenadas en X de cada uno de los puntos, es decir

$|2-1|=1.$

2. ¿Cuál es la distancia que hay entre el punto A y el punto G, es decir entre el Banco Nacional y el Banco de Costa Rica? (ver flecha azul)

La distancia va a estar determinada por el valor absoluto de la resta de las coordenadas en Y de cada uno de los puntos, es decir

$|2- -1|=3.$

Actividad 2.2 Distancia entre dos puntos del plano

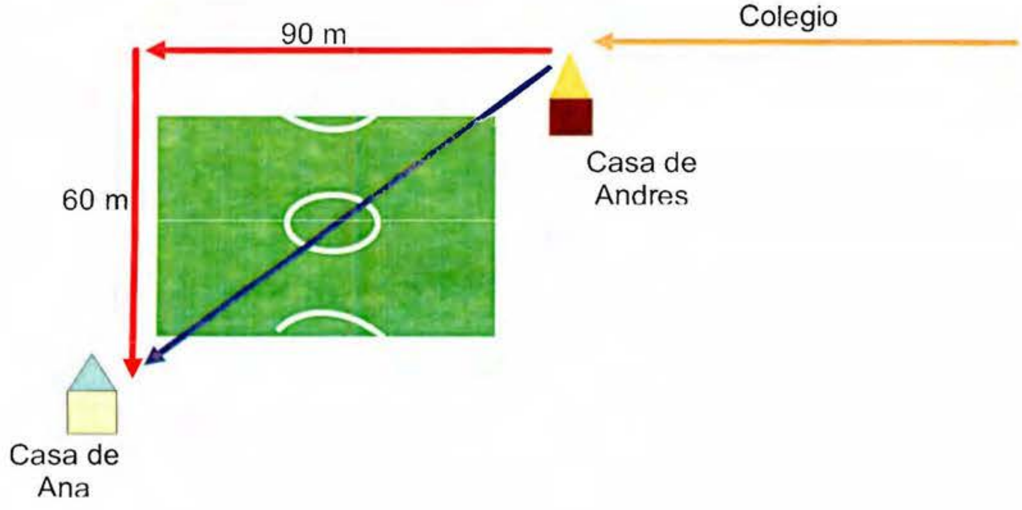
Luego de que el estudiante ya sepa determinar la distancia entre dos puntos que determinen segmentos paralelos a los ejes de referencia, de debe establecer la interrogante que como encontrarían las distancia entre dos puntos que no determine un segmento paralelos a los ejes de referencia.

Para ello se debe introducir el teorema de Pitágoras, de una forma muy sencilla y práctica. Es importante aclarar que en este apartado no se debe realizar un estudio profundo de dicho teorema, solo es una herramienta para llegar a la fórmula del distancia entre dos puntos.

Instrucciones: Lea el siguiente problema y conteste lo que se le solicita

Andrés y Ana son compañeros del colegio. Cursan el sétimo año y viven en el mismo barrio. Andrés se comprometió con la mamá de Ana de ir a dejarla luego de salır del colegio. En los primeros días, ellos decidieron irse por el camino marcado con rojo, es decir, salen del punto A (Casa de Andrés), pasan por el punto B y llegan al punto C (casa de Ana). Tomemos como unidad de medida el metro.

Andrés y Ana se cansan de ir siempre por el mismo camino, por lo que deciden atravesar la cancha por el camino marcado con azul en la siguiente figura.



¿Cuál es el camino más corto para ir a la casa de Ana desde la casa de Andrés, el camino marcado con rojo o el camino marcado con azul?

___

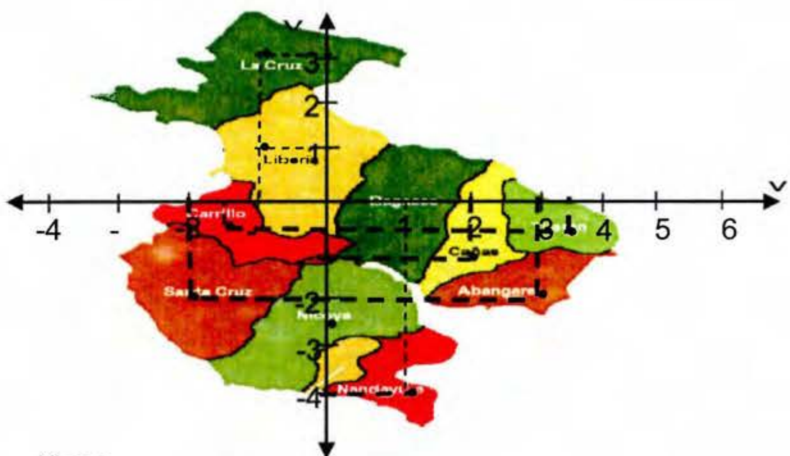
De aquí se puede hacer ver al estudiante que podemos elegir muchos caminos, pero que el camino más corto es el recorriendo en línea recta que contiene los dos puntos.

Utilizando el mismo dibujo, el docente debe resaltar el triángulo rectángulo que se forma, y de esta manera introducir el resultado del Teorema de Pitágoras para poder determinar la fórmula de la distancia entre los puntos.

Un aspecto importante que el docente debe aclarar a los estudiantes es el por qué en la fórmula de la distancia entre dos puntos no se utiliza el valor absoluto.

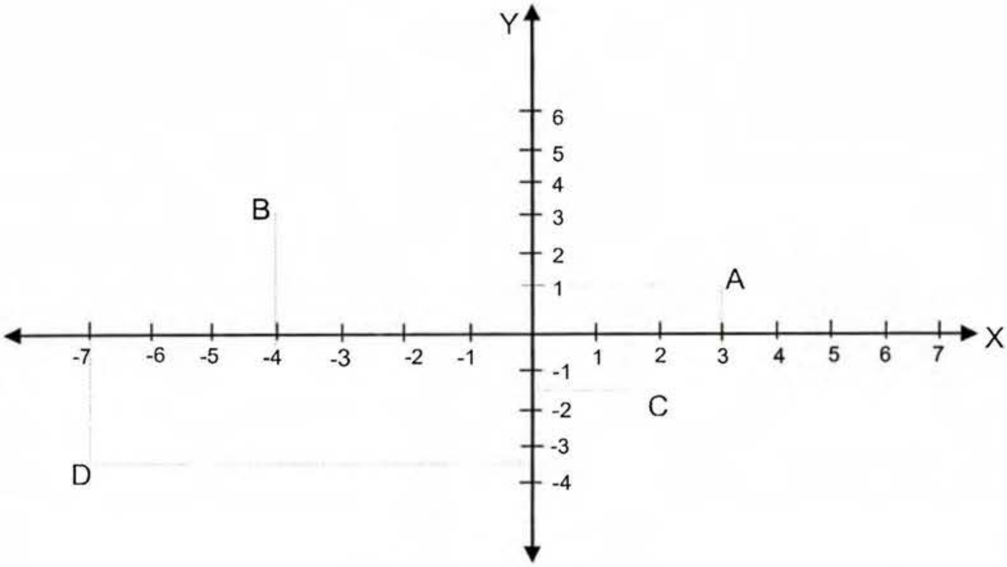
Ejercicios:

A. Determine la distancia entre los cantones establecido en la siguiente tabla las coordenadas de los cantones de la provincia de Guanacaste



Liberia	y	Nicoya	________
Bagaces	y	Nandayure	________
Cañas	y	Carrillo	________
Tilarán	y	Abangares	________
Santa Cruz	y	Bagaces	________

B. Encuentre las distancias entre A y B, y entre C y D en el siguiente plano



d(A,B) ____________________ d(C,D) ____________________

3. Vectores.

El concepto de vector se va a introducir como un desplazamiento de un punto inicial a un punto final. Desde esta perspectiva, el docente debe integrar conceptos básicos pertenecientes a la materia de Física en su clase de Matemática, para evitar que la noción de desplazamiento se entienda desde dos visiones distintas: una para la clase de física y otra para la clase de Matemática.

Por lo tanto, se describirá que cada desplazamiento tiene una magnitud y una dirección. En cuanto a la magnitud, el profesor deberá relacionarlo con la fórmula de la distancia entre dos puntos que se estudió anteriormente; y en cuanto a la dirección es importante que el docente haga ver al estudiante que el desplazamiento de un punto A hasta un punto B no es el mismo que desde el punto B hasta el punto A, ya que tienen la misma magnitud pero tienen dirección contraria.

Luego, se reintroducirá la representación de un desplazamiento con una flecha para llegar al plano cartesiano, en donde a cada desplazamiento se le asocia un par ordenado (a,b) que significa que se recorren a unidades en el eje X y b unidades en el eje Y desde el punto inicial hasta el punto final. Es muy importante dejar bien claro el hecho de que si se recorre sobre el eje X hacia la derecha tiene signo positivo y hacia la izquierda tiene signo negativo; y en el caso de eje Y hacia arriba tiene signo positivo y hacia abajo signo negativo.

Cuando se trabaja en el plano se deben dar ejemplos de desplazamiento que tiene su punto inicial en el origen y desplazamiento que no tiene su punto inicial en el origen. Además, se harán ejemplos de un mismo desplazamiento ubicado en diferentes partes del plano, para que el estudiante pueda verificar que ambos tienen el mismo par ordenado asociado, por lo que cada una de las flechas representa el mismo desplazamiento pero tiene los puntos iniciales y finales diferentes.

Luego de haber estudiado los desplazamientos en el plano se les asigna el nombre de vectores y se introduce las diferentes representaciones simbólicas $(\overrightarrow{AB}, \vec{v})$.

Es importante aclarar que no se va a establecer la diferencia entre vector ligado y vector libre para dejar el concepto de vector lo más natural posible. Un vector deberá ser para el estudiante un desplazamiento que tiene magnitud y dirección, que cada vector puede tener diferentes puntos iniciales y puntos finales y ser el mismo vector y que hay unos vectores particulares que tienen su punto inicial en el origen.

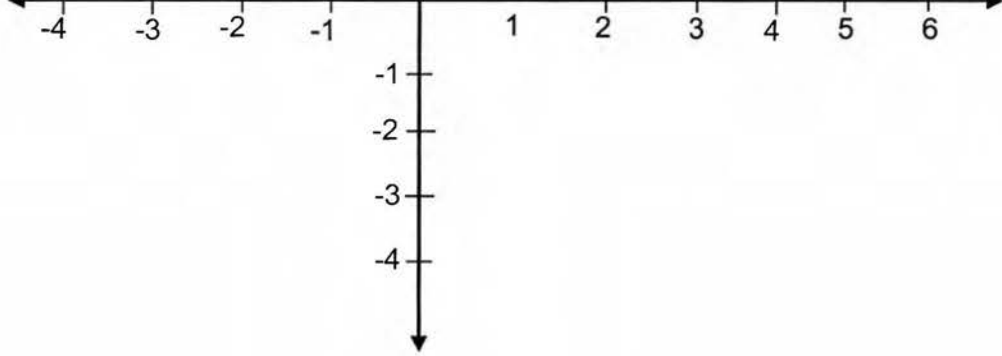
Actividad 3.1 Desplazamientos

Esta actividad pretende que el estudiante se vaya familiarizando con la utilización de flechas para representar desplazamientos en un plano. También introduce de forma natural la magnitud y la dirección del desplazamiento, al considerar desplazamiento desde un punto A hasta un punto B, o viceversa.

Instrucciones: Pinte con una flecha los siguientes desplazamientos en el mapa de abajo

1. Del puesto de El pollo hasta el museo.
2. Del cinemas al food court
3. Del food court al cinemas.
4. Del lago al jumping ball

Ejercicio: Dibuje el vector determinado por R (-1,1) y S (2,3). Determine las coordenadas de dicho vector y su magnitud.



4. Determinación de bipuntos equivalente

El concepto de bipunto se utilizará como una herramienta para la introducción del tema de vectores. Cada bipunto en el plano va determinar un vector y dicho bipunto a la vez va a generar las coordenadas del vector. De esta forma el estudiante podrá visualizar que muchos bipuntos generan las mismas coordenadas (haciendo la resta de su extremo menos el punto origen), lo que facilita la introducción de bipuntos equivalentes y a su vez el estudio de vectores en el plano cartesiano.

Ejercicios:

A. Consideremos los siguientes puntos:

A(1,4), B(-2,5), C(-1,-2), D(-4,-1), E(-5,6)

Determine cuál de los siguientes bipuntos son equivalente al bipunto (A,B)

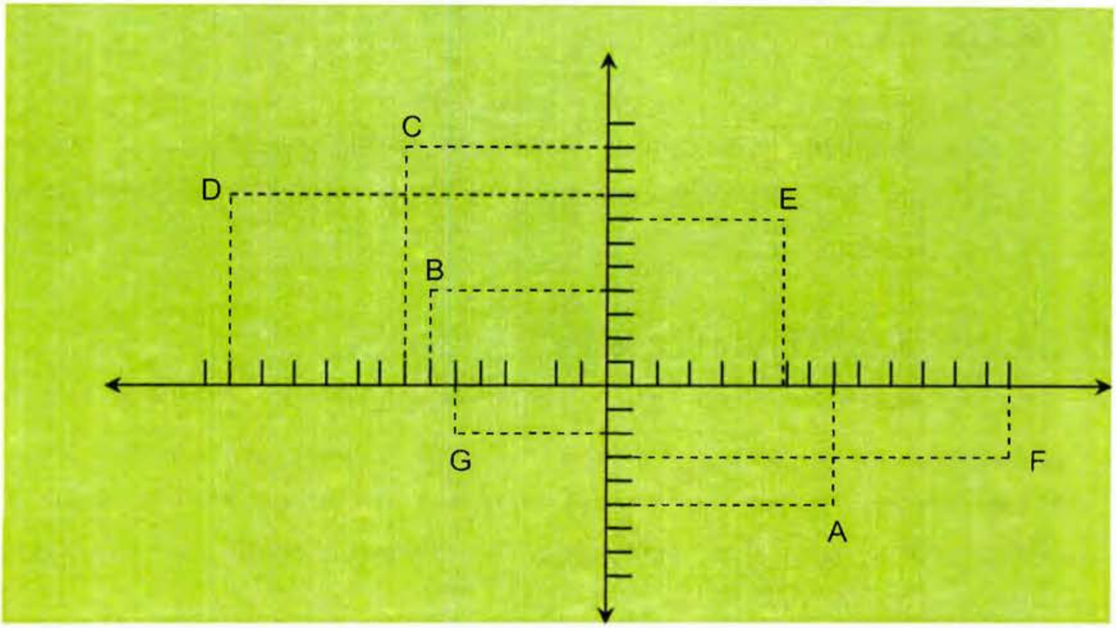
(A,C) ______________________________

(B,D) ______________________________

(C,D) ______________________________

(B,C) ______________________________

B. En la siguiente figura aparecen varios puntos, determinar cuáles de estos determinan bipuntos equivalentes.



5. Interpretación de un par ordenado como punto o como vector.

En importante aclararle al estudiante que si tenemos un par ordenado (a,b) este puede estar haciendo referencia a un punto en el plano cuyas coordenadas son a y b respectivamente en los eje X y Y; o a un vector que está recorriendo a unidades en el eje X y b unidades en el eje Y. De esta forma, el estudiante deberá aplicar los conceptos según el contexto en el que se esté trabajando.

6. Coordenadas de un vector.

Luego de haber trabajado con desplazamiento y con el bipunto que se le asocia, se debe pasar a manejar el concepto de coordenadas de un vector.

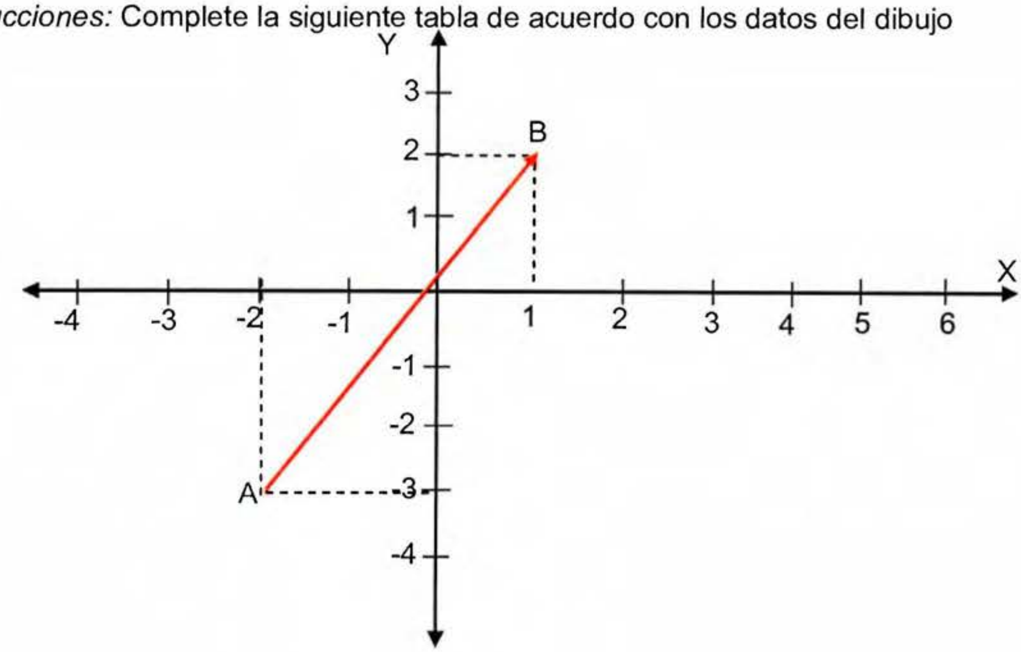
El estudiante debe ser capaz de determinar el bipunto que se le asocia al vector para luego poder visualizar que las coordenadas del vector están dadas por la resta de las coordenadas del punto extremo menos el punto origen, es decir si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ entonces las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son $B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

En este momento no se ha visto la resta de puntos, sin embargo, el docente puede introducirlo mediante varios ejemplos en donde le permita al estudiante poder interiorizar el concepto.

Actividad 6.1 Coordenadas de un vector

La siguiente actividad consiste en completar una tabla en donde le se solicita las coordenadas de dos puntos A, B y las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ para luego establecer la resta de las coordenadas de A y B en el eje X y en el eje Y respectivamente y de esta manera el estudiante observe los resultados encontrados.

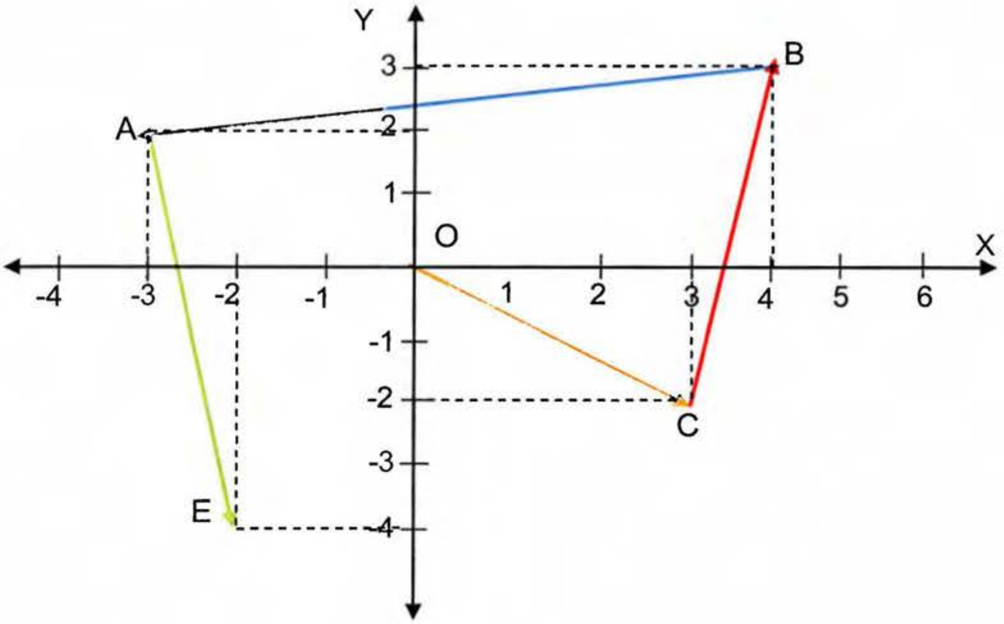
Instrucciones: Complete la siguiente tabla de acuerdo con los datos del dibujo



	A	B	Resta de las coordenadas de B menos A	$\overrightarrow{AB}$
Coordenada en eje X	-2	1	1-(-2)=3	3
Coordenada en eje Y	-3	2	2-(-3)=5	5
Par ordenado	(-2,-3)	(1,2)	(3,5)	(3,5)

Con la guía del docente, y realizando más ejercicios de ese tipo, el estudiante podrá visualizar que $\overrightarrow{AB} = B - A$

Ejercicios: Determine las coordenadas de cada uno de los vectores en la siguiente figura

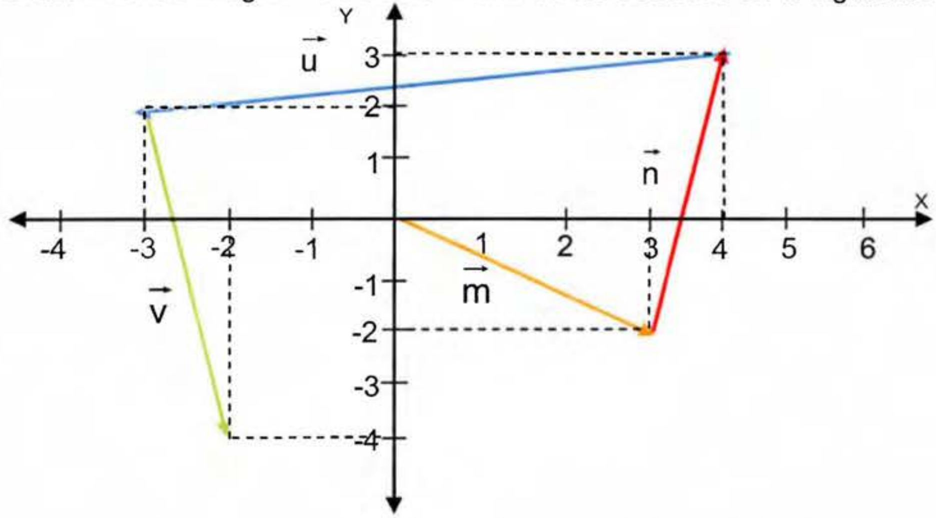


7. Magnitud y dirección de un vector

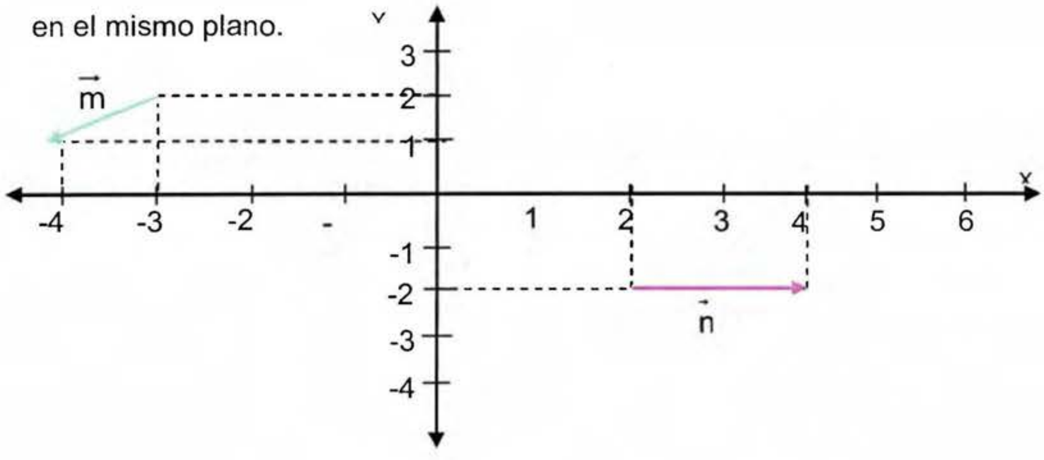
Cuando se introduce el tema de vectores se trabaja primero con desplazamientos, en donde se explica que un desplazamiento tiene una magnitud y una dirección. Cuando se hace el cambio de desplazamiento a vectores debe hacerse en una forma muy natural en donde la magnitud y la dirección del vector estén dadas por la magnitud y dirección del desplazamiento.

Ejercicios:

A. Determine las magnitudes de cada uno de los vectores en la siguiente figura



B. Determine las coordenadas de cada uno de los siguientes vectores, luego determine las coordenadas de cada uno de los vectores opuestos y grafíquelo en el mismo plano.



8. Operaciones con vectores

a. *Suma y resta*

b. *Multiplicación de un numero real por un vector*

a. *Suma y resta.*

La suma de vectores se va a introducir mediante ejemplos que permitan visualizar al alumno que la suma de dos o más vectores se realiza sumando las coordenadas de cada uno de los vectores.

El profesor debe tomar en cuenta que hasta el momento el estudiante no sabe que $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, por lo cual debe plantear problemas en donde el estudiante visualice dicha propiedad de forma significativa.

Es importante que se aborde primero sumando vectores en donde el punto final de uno coincidan con el punto inicial del otro, ya que esto tiene sentido para el muchacho porque se están sumando dos desplazamiento para obtener el desplazamiento total.

Luego de realizar varios ejemplos, se puede deducir la Fórmula de Chasles y aplicarla para sumar más de dos vectores en donde coincidan el punto final de uno con el punto inicial de otro.

El docente puede demostrar la fórmula de Chasles de una manera sencilla como se presenta a continuación

Fórmula de Chasles

Sean A, B y C tres puntos cualesquiera en el plano. Se tiene entonces que

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Demostración:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(B-A)+(C-B)=C-A=\overrightarrow{AC}$

Después de que el estudiante haya comprendido y aplicado la Fórmula de Chasles se debe preguntar al estudiante que pasaría si queremos sumar vectores en donde el punto final de uno coincida con el punto inicial de otro. El docente debe guiar al estudiante para que recuerde que el vector se puede mover por el plano y seguir siendo el mismo vector, por lo que se puede trasladar y hacer que coincidan para aplicar la Fórmula de Chasles.

También se deben plantear ejemplos en donde se quiere sumar dos vectores cuyos puntos finales coincidan, y de esta forma el docente pueda introducir también la fórmula del paralelogramo.

El estudiante debe conocer y manejar tanto la fórmula de Chasles como la fórmula del paralelogramo para que las pueda aplicar según le convenga en la resolución de ejercicios y problemas.

En cuanto la resta de vectores, se debe definir como la suma del vector opuesto, es decir $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+-\vec{v}$. Para ello, el docente puede utilizar los mismos ejemplos que utilizó para introducir la suma de vectores y modificarlos para que se tenga que utilizar los vectores opuestos.

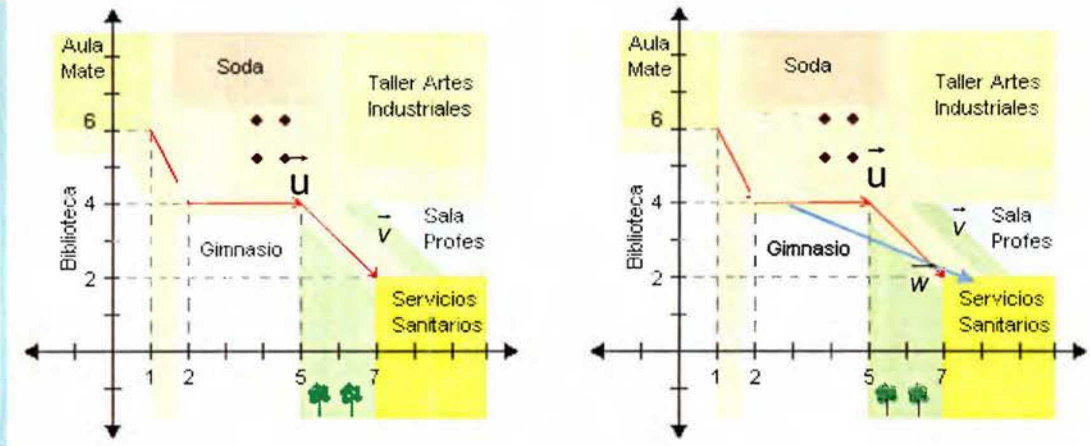
Es de gran importancia la utilización de los gráficos en todo momento, y no utilizar solamente la suma y resta de vectores en forma algebraica.

Actividad 8a.1. Suma de vectores

Esta actividad muestra una forma de introducir la suma de vectores mediante un problema que permite ir desarrollando el tema de una forma natural.

Instrucciones: Lea el siguiente problema

Jeremías, un alumno de la 7-7, se encontraba en el Gimnasio viendo un partido de Fútbol Sala, pero los baños estaban ocupados. Él decide ir a los baños cerca de la Sala de Profesores. (Ver figuras)



Él recorre el camino marcado con rojo. Entonces, se desplaza 3 unidades en el eje X con el vector $\vec{u}$ y 2 unidades con el vector $\vec{v}$. En el eje Y, Jeremías no realiza desplazamiento con $\vec{u}$, y con $\vec{v}$ se desplazó -2 unidades. En resumen

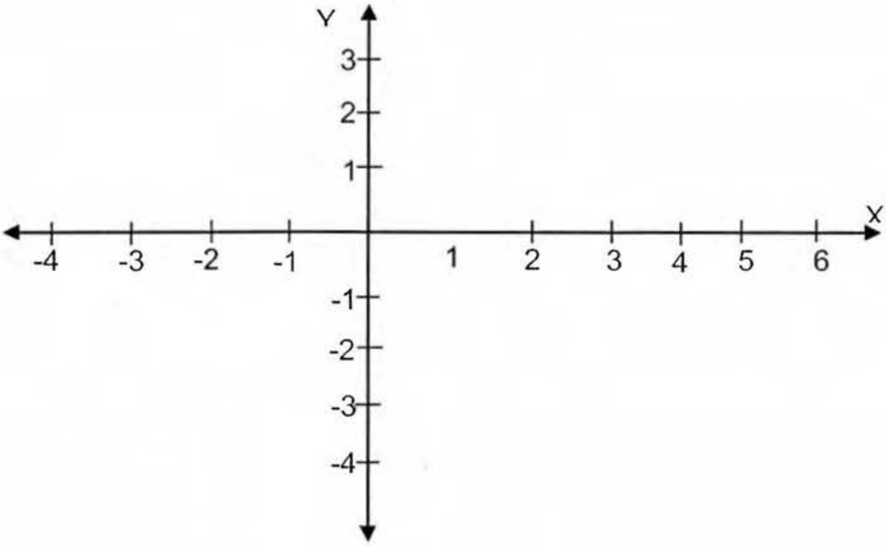
Vector	Coordenadas	Eje X	Eje y
$\vec{u}$	(3,0)	3	0
$\vec{v}$	(2,-2)	2	-2
$\vec{w}$	(5,-2)	5	-2

Del ejemplo anterior, podemos observar que $\vec{w}$ es el resultado de la suma de los desplazamientos realizados por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que el vector $\vec{w}$ tiene como coordenadas la suma de las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

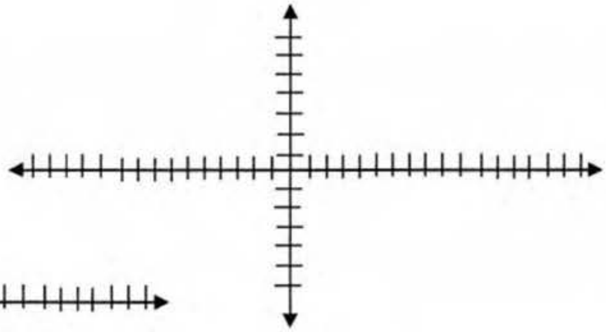
Ejercicios:

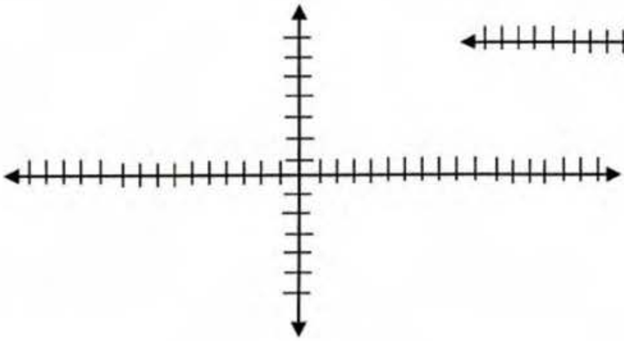
A. Dibuje el vector $\vec{u}+\vec{v}$ si $\vec{u}=(-2,1)$, $\vec{v}=(3,3)$

B. Determine las coordenadas del vector $\vec{u}+\vec{v}$

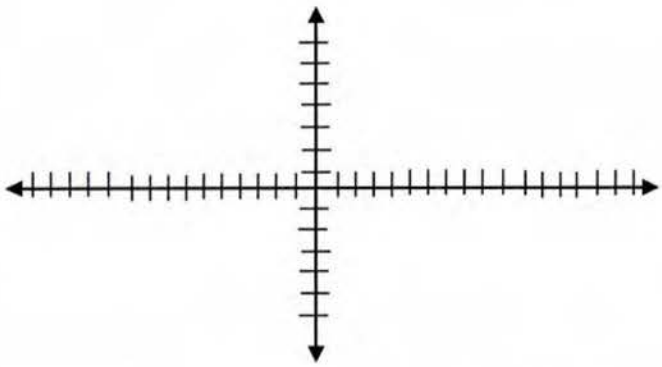


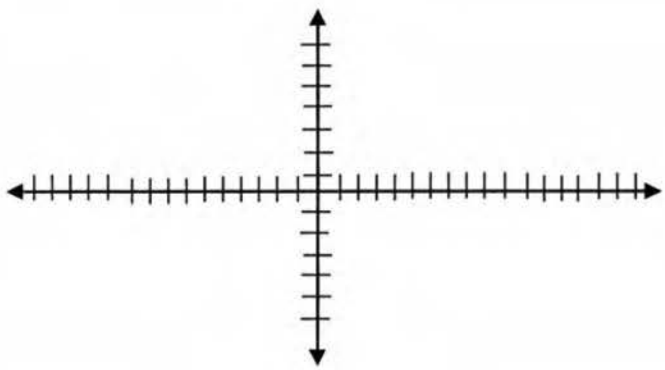
C. Considere $\vec{m}=(-2,-3)$, $\vec{n}=(1,-5)$, y $\vec{p}=(3,4)$. Determine y grafique las siguientes suma de vectores: $\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$.





D. Considere $\vec{m}=(-2,-3), \vec{n}=(1,-5)$, y $\vec{p}=(3,4)$. Determine y grafique las siguientes restas de vectores: $\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{m}-\vec{n}-\vec{p}$





b. Multiplicación de un número real por un vector.

Para introducir el tema de multiplicación de un número real por un vector se deberá recurrir a la suma de un vector por el mismo varias veces. De esta manera el estudiante visualizará que dado $\vec{u}=(a,b)$, entonces $\vec{u}+\vec{u}=2\vec{u}=(a+a,b+b)=(2a,2b)=2(a,b)$. Y así se pueden realizar varios ejemplos para que el estudiante puede interiorizar el resultado $k\vec{u}=k(a,b)=(ka,kb)$, en donde k es un número real.

Los ejemplos en donde se multiplican número enteros negativos, racionales positivos y negativos no deben faltar. También la multiplicación de cero por un vector. Siempre es de gran importancia la utilización de ejemplos concretos en donde el estudiante tenga que realizar dichas multiplicaciones.

Otro aspecto que se debe incluir en este apartado es el de vectores múltiplos, ya que es necesario para los temas de vectores paralelos. El estudiante debe reconocer que si un vector $\vec{v}$ es el resultado de multiplicar $\vec{u}$ por un número real, entonces se dice que $\vec{v}$ es múltiplo de $\vec{u}$ o que $\vec{u}$ es múltiplo de $\vec{v}$. El profesor debe utilizar los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema de múltiplos para permitir al estudiante ir relacionando los diversos temas en matemáticas.

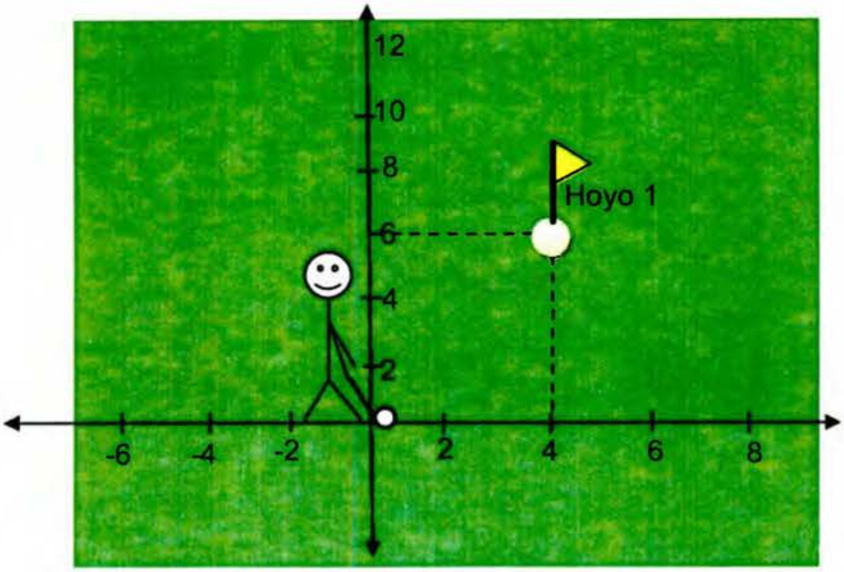
Al finalizar este tema el estudiante debe ser capaz de conocer y aplicar los siguientes resultados:

- si k>1 el vector $k\vec{v}$ mantiene la dirección y "se *estira"*.
- si 0<k<1 el vector $k\vec{v}$ mantiene la dirección y "se *encoje".}*
- si -1<k<0 el vector $k\vec{v}$ tiene dirección opuesta a $\vec{v}$ y "se *encoje"*.
- si k<-1 el vector $k\vec{v}$ tiene dirección opuesta a $\vec{v}$ y "se *estira"*.

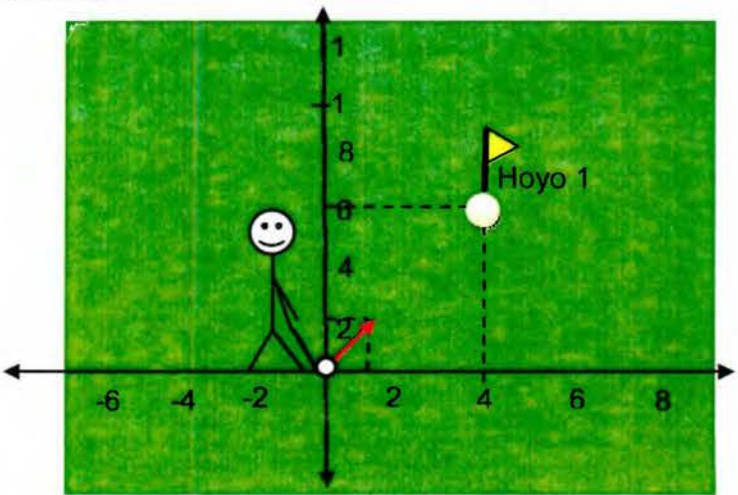
Actividad 8b.1

Instrucciones: Analice el siguiente problema y realice los ejercicios propuestos.

Arturo está aprendiendo a jugar golf. En su primera práctica el profesor le asigna la tarea de ingresar la bola en el primer hoyo (ver figura). El realizó varios intentos hasta que logró su objetivo. Veamos el trabajo realizado por él.

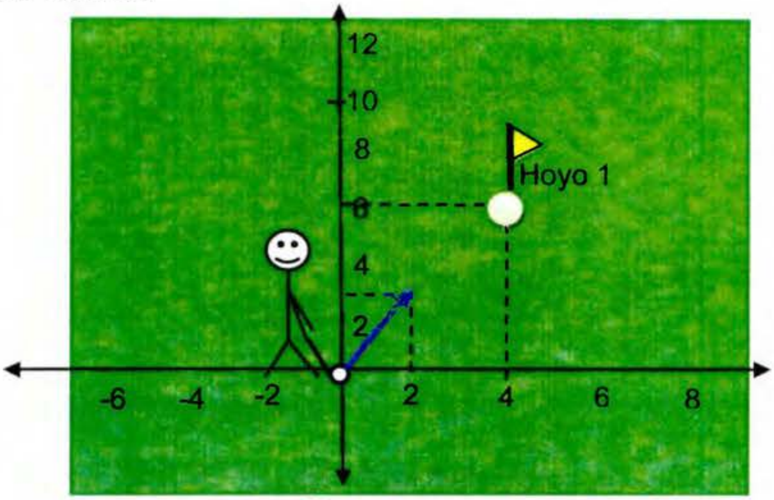


- En el primer intento, Arturo no logró llegar la bola al hoyo. Le dio con poca fuerza y la bola apenas llegó al punto $\left(\frac{4}{3},\frac{6}{3}\right)$, es decir a $\frac{1}{3}$ del desplazamiento que tenía que realizar.



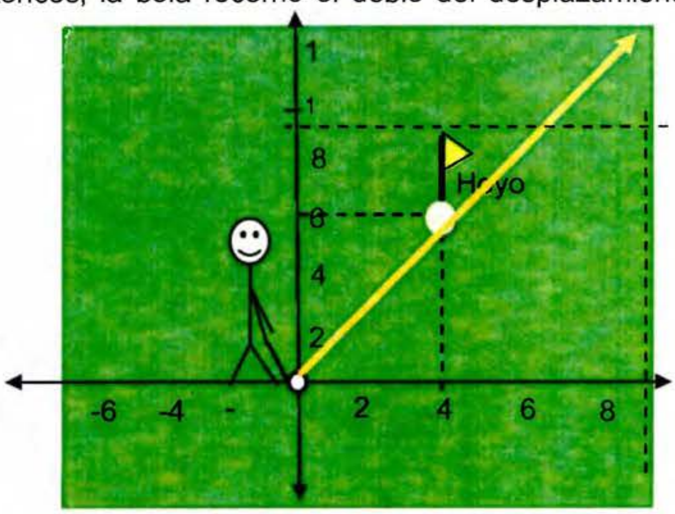
$$\frac{1}{3}\vec{u}=\frac{1}{3}(4{,}6)=\left(\frac{4}{3},\frac{6}{3}\right)$$

- En el segundo intento, Arturo le dio con más fuerza pero aún así no logró llegar la bola al hoyo, y quedó en el punto $(2{,}3)$, es decir, a la mitad del desplazamiento que tenía que realizar.



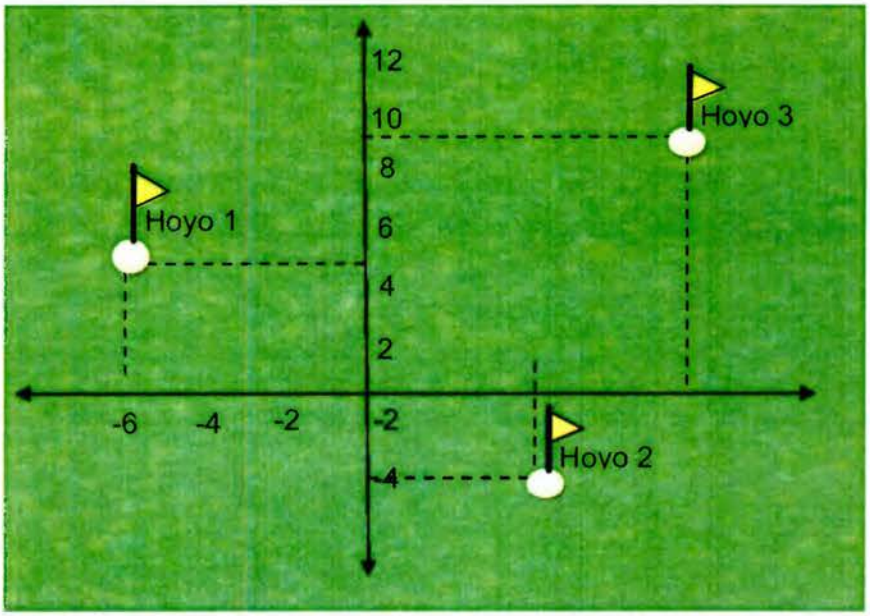
$$\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{1}{2}(4{,}6)=\left(\frac{4}{2},\frac{6}{2}\right)=(2{,}3)$$

- Al tercer intento, le dio con tanta fuerza que se paso del hoyo y fue a dar al punto (8,12). Entonces, la bola recorrió el doble del desplazamiento que tenía que realizar



$$2\vec{u}=2(4{,}6)=(8{,}12)$$

Ejercicio: Escoja uno de los vectores anteriores y determine el número real por el cual hay que multiplicar dicho vector para que la pelota ingrese en alguno de los hoyos. Complete la tabla adjunta con la información obtenida. Sobra un vector.



Hoyos	Vector a usar	Número por el que hay que multiplicar	Resultado
1			
2			
3			

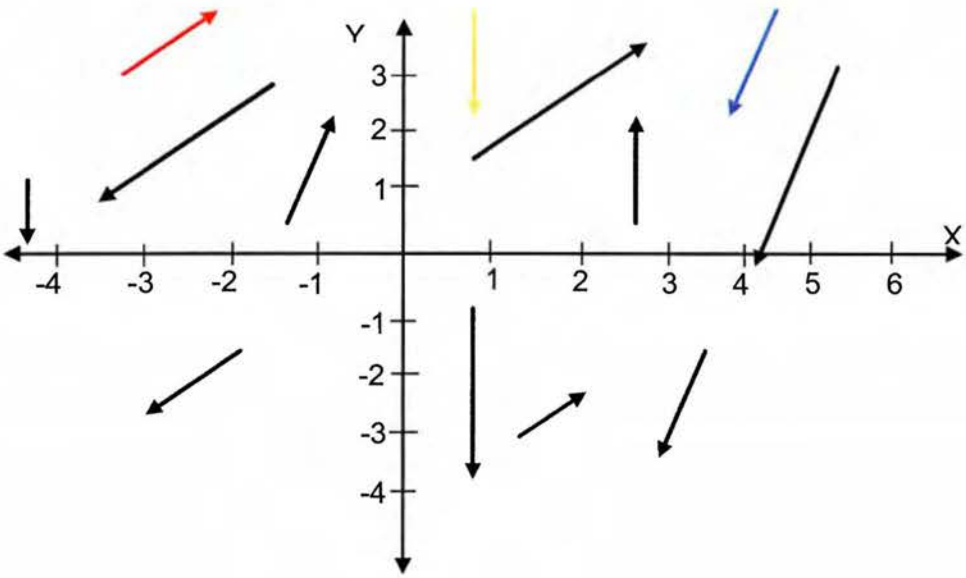
9. Vectores paralelos

El concepto de vectores paralelos se va a desarrollar tomando en cuenta que los estudiantes tienen una idea de lo que son recta paralelas y el concepto aprendido anteriormente de vectores múltiplos.

Se deberá mostrar gráficamente que si tenemos vectores que son múltiplos de un vector $\vec{u}$ situados en diferentes lugares del plano, las rectas que contienen a dichos vectores son rectas paralelas y que por ellos los vectores también son paralelos. De aquí se debe deducir que dos o más vectores son paralelos si uno es múltiplo del otro, es decir, si $\vec{v} = n\vec{u}$, $n \in \mathrm{IR}$, entonces podemos decir que $\vec{v} // \vec{u}$.

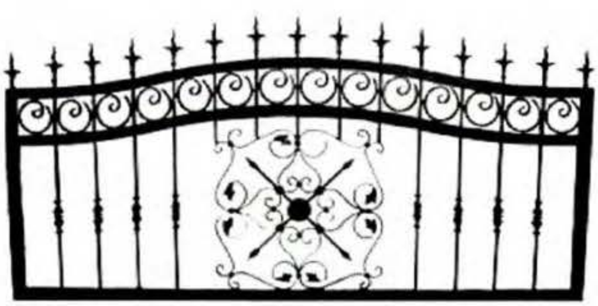
Actividad 9.1. Identificación de vectores paralelos.

Instrucciones: A continuación se le presentan tres vectores pintados de rojo, azul y amarillo. Pinte del color correspondiente los vectores paralelos a los vectores rojo, azul y amarillo.

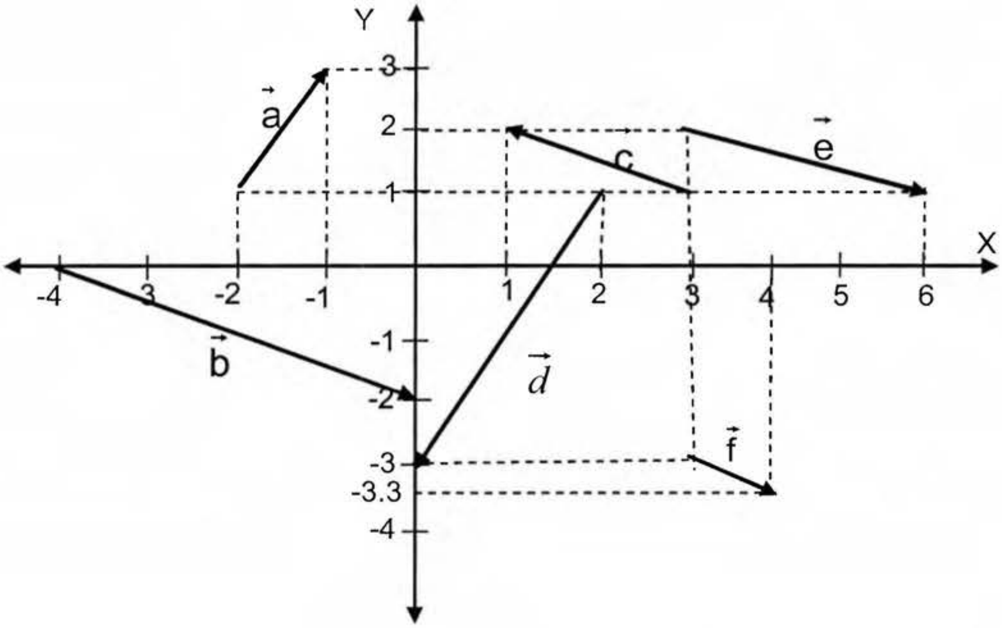


Ejercicios:

A. En la siguiente imagen se muestra un portón. Construya un plano cartesiano sobre dicha figura y pinte los vectores que considera que son paralelos y verifíquelo.



B. En el siguiente dibujo se muestran diferentes vectores. Si $\vec{u} = (1,2), \vec{v} = (3,-1)$, y $\vec{w} = (4,-2)$. Pinte de verde los vectores paralelos a $\vec{u}$, de anaranjado los vectores paralelos a $\vec{v}$ y de celeste los vectores paralelos a $\vec{w}$. Complete la tabla de abajo escribiendo la coordenada de cada vector, el vector al que es paralelo y el número real por el cual se multiplica para que sea múltiplo



$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{e}$	$\vec{f}$
(1,2)				
1(1,2)				
$\vec{a} // \vec{u}$				

Actividad 9.2. Laberintos matemáticos.

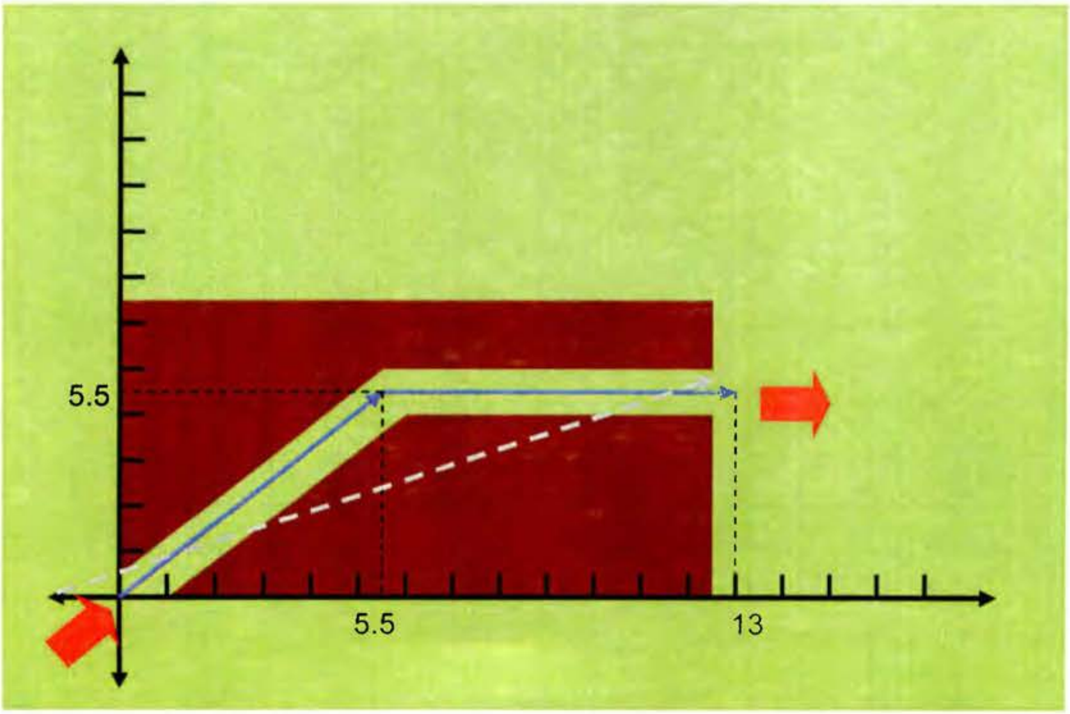
La siguiente actividad pretende utilizar los conceptos de suma de vectores y multiplicación de un número real por un vector en la resolución de problemas. La integración de los diversos conceptos es de gran importancia para que el estudiante pueda ir teniendo a su mano una serie de herramientas que le permitirán resolver problemas.

Instrucciones: Se presenta a continuación cuatro laberintos en planos coordenados, señale cuales vectores se necesita para recorrer todo el laberinto desde el inicio hasta la salida, además determine cuál fue el desplazamiento total. Solo se puede recorrer por el camino.

Veamos primero un ejemplo, Carlitos quiere recorrer el laberinto, entonces, él camina desde el origen con la dirección del vector (5,5, 5,5), y luego camina con la dirección del vector (7,5, 0), y con esto logra salir, el desplazamiento total es

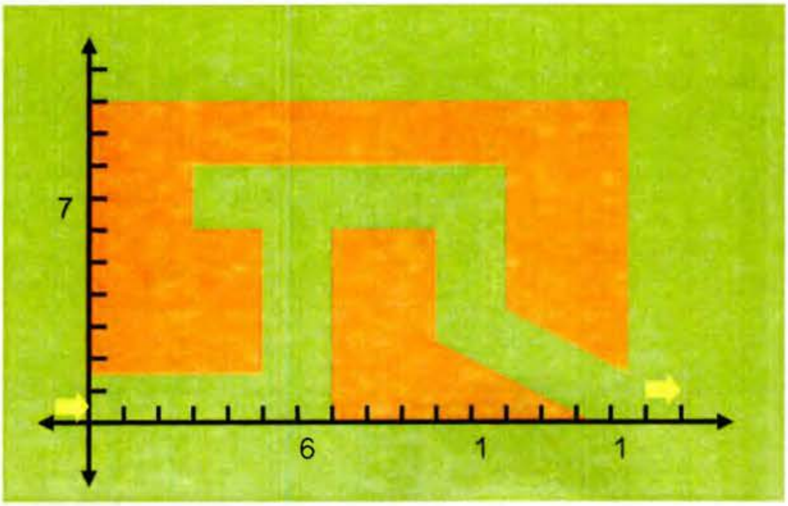
(5,5, 5,5)+ (7,5, 0) = (13, 5,5)

Entonces, la distancia total es $\sqrt{13^2+(5{,}5)^2}=\frac{\sqrt{797}}{2}$



De acuerdo con el ejemplo anterior, complete el camino a través del siguiente laberinto, calcule el desplazamiento total, y la longitud del mismo, recuerde que los vectores deben ser colocados de manera que coincidan puntos finales con iniciales, además recuerde que solo puede seguirse el camino señalado.

Ejercicio:



10. Producto punto y vectores perpendiculares.

Para desarrollar el tema de vectores perpendiculares se debe introducir primero el concepto de producto punto de dos vectores. Este concepto se deberá desarrollar como una nueva operación entre vectores y se deberá dar la fórmula a los estudiantes : Si $\vec{u}$(a, b) y $\vec{v}$ (c, d), entonces el producto punto entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\vec{u}\cdot\vec{v} = a\cdot c + b\cdot d$

Luego, utilizando ejemplos gráficos el estudiante podrá deducir los siguientes aspectos con la guía del docente:

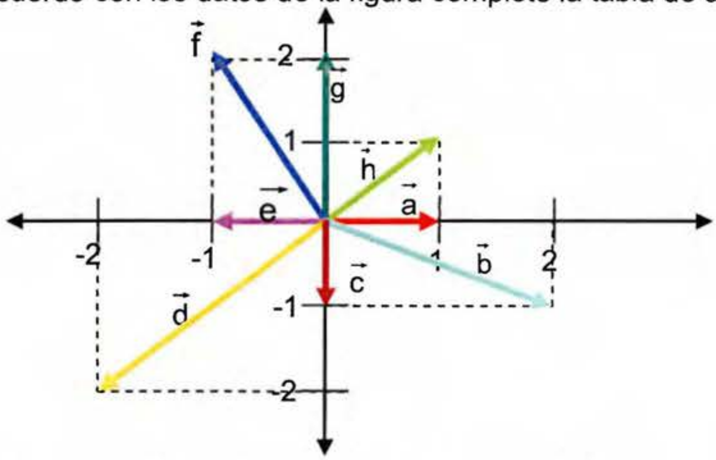
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no paralelos tenemos

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$	Los vectores son perpendiculares
$\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$	Los vectores forman un ángulo agudo
$\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$	Los vectores forman un ángulo obtuso

Es importante que el docente explique que si el producto punto de dos vectores es cero, entonces los vectores son perpendiculares, pero si el producto punto no es cero, entonces se debe verificar que los vectores no sean paralelos para poder decir que forman un ángulo agudo o un ángulo obtuso.

Actividad 10.1

Instrucciones: De acuerdo con los datos de la figura complete la tabla de abajo



$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$	$\vec{f}$	$\vec{g}$	$\vec{h}$
(1,0)	(2,-1)	(0,-1)	(-2,-2)	(-1,0)	(-1,2)	(0,2)	(1,1)

Algunos productos punto entre los vectores son

$\vec{a}\cdot\vec{g}=1\cdot 0+0\cdot 2=0+0=0$	$\vec{h}\cdot\vec{f}=1\cdot -1+1\cdot 2=-1+2=1$	$\vec{a}\cdot\vec{f}=1\cdot -1+0\cdot 2=-1+0=-1$
$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot 0+0\cdot -1=0+0=0$	$\vec{a}\cdot\vec{h}=1\cdot 1+0\cdot 1=1+0=1$	$\vec{e}\cdot\vec{h}=-1\cdot 1+0\cdot 1=-1+0=-1$
$\vec{e}\cdot\vec{g}=-1\cdot 0+0\cdot 2=0+0=0$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 2+0-1=2+0=2$	$\vec{d}\cdot\vec{b}=-2\cdot 2+-2\cdot -1=-4+2=-2$

Ejercicio: Compruebe cuales de las siguientes parejas de vectores son perpendiculares

- (1,3) y (-1,2)
- (4,5) y (-5,4)
- (-1,4) y (8,2)
- $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right)$ y $\left(\frac{3}{5},\frac{-1}{2}\right)$

3.2 Octavo año

3.2.1 Unidad 1: Álgebra

Introducción

A través de toda la educación general básica y la educación diversificada, es innegable la aplicabilidad del álgebra como herramienta para la generalización de resultados, la escritura y la operacionalización, fundamentalmente porque puede usarse en los más diversos contextos.

Así, por ejemplo, el poder efectuar operaciones, estimar el valor numérico de expresiones algebraicas dadas para ciertos valores, e interpretar el comportamiento de algunas expresiones polinomiales, radicales o racionales, posteriormente permitirá al alumno deducir ciertas propiedades importantes de las gráficas de algunas funciones.

Desde este punto de vista, es fundamental que el alumno sea capaz de efectuar operaciones algebraicas, principalmente suma, resta, multiplicación y división con polinomios. También es importante que pueda interpretar el comportamiento de algunas expresiones algebraicas especialmente en una variable, para distintos valores de la misma, a partir de diferentes estrategias, como tablas de valores.

Por otro lado, es conveniente que el estudiante pueda generalizar, por medio del álgebra, algunas propiedades aritméticas, para utilizarlas en otras situaciones, por ejemplo, la ley de cancelación de la multiplicación, para simplificar cocientes de polinomios; o la distributividad de la multiplicación respecto a la suma, para factorizar polinomios por factor común.

Es así, que esta unidad pretende desarrollar en el alumno una serie de competencias que le permitan interpretar y operar ágilmente con expresiones algebraicas de diversos tipos, deduciendo y utilizando ciertas propiedades.

Es en esta línea que debe orientarse el desarrollo de esta primera unidad, pues su propósito es servir como un puente entre los temas de álgebra lineal estudiados en sétimo año de la Educación General Básica, y los contenidos geométricos que se estudiarán en la segunda unidad de octavo año, para los cuales se hará uso implícito de varios conceptos algebraicos.

De esta forma, deben propiciarse ejercicios en los que el estudiante pueda aplicar tales conocimientos de una forma generalizada, sin incurrir en el error de plantear ejercicios donde se consideren expresiones algebraicas innecesariamente largas o complejas, que dificulten al alumno su interpretación y comprensión.

El conocimiento de los aspectos teóricos de la presente unidad, al igual que en las anteriores, no debe ser el eje central en el desarrollo de las actividades planteadas al alumno. Si bien el estudiante debe manejar apropiadamente la terminología para aplicarla en los ejercicios cuando sea necesario, el docente debe evitar plantear preguntas o situaciones donde predomine el manejo vacío de las definiciones. Así, debe evitarse, por ejemplo, al trabajar con polinomios, plantear ejercicios que tiendan a enfatizar exageradamente en la identificación de factores numéricos y literales de monomios, o en la clasificación de polinomios según su grado o número de términos.

Aprendizajes esperados

Se espera que, al finalizar esta unidad, los estudiantes se encuentren en capacidad de:

1. Determinar el valor numérico de expresiones algebraicas que modelar situaciones extraídas de diversos contextos.

2. Identificar polinomios en una variable y sus partes: términos, factores numéricos y factores literales.
3. Determinar el grado de un polinomio en una variable.
4. Determinar monomios semejantes.
5. Efectuar operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación de polinomios, división de polinomios (incluyendo división de monomios, división de polinomios por monomios, división de polinomios –algebraica y sintética-), teorema del factor y teorema del residuo.
6. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita cuyo conjunto solución sea un número real, IR, o el conjunto vacío; incluyendo las ecuaciones fraccionarias.
7. Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita cuyo conjunto solución sea un número real, IR, o el conjunto vacío; incluyendo inecuaciones fraccionarias sencillas.

Secuencia de contenidos y actividades sugeridas

1. Expresiones algebraicas

Con este tema se pretende introducir al alumno la noción de expresión algebraica en general, como una relación que, dados ciertos números reales arbitrarios, denotados por letras que se llamarán variables, les hace corresponder otro número real, por medio de una serie de operaciones.

De este modo, se introduce implícitamente la noción de función, de modo que cuando el alumno trabaje con ella en décimo año, se facilitará su comprensión.

Esta forma de introducir la noción de expresión algebraica, permite al alumno comprender que ésta debe tener un sentido matemático en sí misma, al remitir a una operación o una serie de operaciones. De modo que no toda expresión compuesta por variables, constantes y signos de operación o agrupación es una expresión algebraica.

Es fundamental que el docente haga explícitos ciertas nociones claves dentro del estudio de este tema, como lo son: interpretaciones de una expresión algebraica, valor numérico de una expresión algebraica, variables y constantes.

Actividad 1.1: Las fórmulas como expresiones algebraicas

Esta actividad pretende mostrar el concepto de expresión algebraica a partir del concepto de fórmula, conocido y trabajado por el estudiante desde la enseñanza primaria.

Introducir la noción de expresión algebraica desde las fórmulas (geométricas, o tomadas de otras disciplinas) conocidas por el alumno permite adoptar el concepto de una forma natural, de manera que el estudiante percibe que una expresión algebraica no es un montón de números, letras y signos puestos al azar y carentes de significado, si no una expresión matemática que tiene un sentido en sí misma, y remite de alguna forma, a una operación o conjunto de operaciones entre los números involucrados, algunos de los cuales se mantienen fijos (constantes), mientras que otros pueden asumir diferentes valores (variables); y que permite, en algunos casos, generalizar situaciones o propiedades importantes.

Este abordaje permite a su vez, introducir el concepto de valor numérico de una expresión algebraica de manera significativa y sencilla para el alumno.

Se recomienda al profesor, no limitarse a utilizar fórmulas geométricas (áreas y perímetros de cuadriláteros, triángulos o demás figuras), sino aprovechar para relacionar este tema con otras disciplinas, por ejemplo, usando fórmulas de física (velocidad, aceleración), economía (interés simple y compuesto, porcentajes), biología (crecimiento de bacterias o de poblaciones), entre otras.

Ejercicios: Resuelva lo que se le solicita en cada uno de los siguientes enunciados. Puede proporcionar aproximaciones de los resultados utilizando la calculadora.

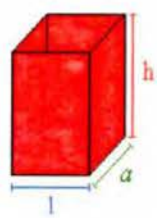
A. El número de automóviles por hora (denotado por $A(v)$) de una carretera congestionada está dado por la fórmula $A(v)=\dfrac{v}{22+0{,}02v^2}$ donde v es la velocidad del tráfico en kilómetros por hora.

   Determine el flujo de automóviles si la velocidad del tráfico es 60 millas por hora, y si es 80 kilómetros por hora.

B. Un cultivo de bacterias crece según la siguiente fórmula: $B(t)=\dfrac{1{,}25}{1+0{,}25e^{-0{,}4t}}$ donde $B(t)$ es el peso del cultivo en gramos, t es el tiempo en horas, y e es una constante real ($e \approx 2{,}7172$). Determine el peso del cultivo tras 80 minutos y tras una hora.

C. El volumen de una caja en forma de prisma está dado por la siguiente fórmula: $V(l,a,h)=l\cdot a\cdot h$ donde l es el largo, a es el ancho y h es la altura de la caja, en centímetros.

   Determine el volumen de una caja que tenga 15 cm de largo, 25 cm de ancho y 30 cm de altura; también, el de una caja con 0,6 m de largo; 0,35 m de ancho y 0,52 m de altura.



Actividad 1.2: Simplificación de expresiones algebraicas

Es fundamental que el alumno sepa efectuar simplificaciones de expresiones algebraicas, al menos en un nivel elemental y básico, haciendo uso de las propiedades de los números reales, puesto que esta destreza será necesaria posteriormente, por ejemplo, al trabajar con factorización de polinomios, o en el estudio de las funciones reales de variable real.

Dado que una expresión algebraica representa una operación con números reales arbitrarios, es importante que el docente recuerde al alumno las propiedades de las operaciones en IR (axiomas de campo), y la prioridad en el orden de las operaciones, haciéndole ver que también se aplican cuando se opera con expresiones algebraicas. Razón por la cual, se incluyen en este apartado, algunas operaciones con expresiones algebraicas en general, las cuales se sugiere sean abordadas desde las operaciones con números reales, conocidas ya por el estudiante.

Para comenzar se recuerdan, de modo general, las propiedades de potencias y radicales estudiadas en sétimo año:

Potencias	Radicales
$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
$\left(x^m\right)^n = x^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$
$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	$\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$	$\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$	$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$
$x^{-n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$
$x^0 = 1 \quad \forall x \neq 0$	

En los siguientes ejemplos se muestra cómo se aplican las propiedades anteriores para simplificar expresiones algebraicas:

A. $\dfrac{-9x^8y^3z}{15x^5y^7}$

$=\dfrac{-9}{15}\cdot\dfrac{x^8}{x^5}\cdot\dfrac{y^3}{y^7}\cdot z$ Expresamos la fracción original como multiplicación de tres fracciones, de modo que en cada una de ellas, se tenga una misma variable.

$=\dfrac{-3}{5}\cdot x^3\cdot y^{-4}\cdot z$ Observe que la primera fracción es equivalente al número real $\dfrac{-3}{5}$, y en las demás aplicamos reglas de potencia.

$=\dfrac{-3}{5}\cdot x^3\cdot\dfrac{1}{y^4}\cdot z$ Como la expresión y^{-4} tiene exponente negativo, aplicamos la propiedad que permite verla como una fracción de numerador 1.

$=\dfrac{-3x^3z}{5y^4}$ Finalmente, expresamos lo anterior con una sola fracción.

El ejercicio anterior se puede realizar de una forma directa, puesto que en el numerador tenemos solamente multiplicación de términos, y en el denominador también. Primero simplificamos el -9 con el 15, luego aplicamos leyes de potencia para los términos que tienen variables.

Observe que $x^8 \div x^5$ es equivalente a x^3, que tiene exponente positivo, entonces esta expresión queda al final en el numerador, pero $y^3 \div y^7$ es equivalente a y^{-4}, que tiene exponente negativo, entonces escribimos y^4 en el denominador; por otra parte, z sigue quedando en el numerador.

B. $\dfrac{\frac{5}{4}x^2y^3z}{\frac{15}{8}xyz}$ La simplificación de esta expresión se realiza del mismo modo que en el ejemplo anterior, tomando en cuenta que para dividir fracciones, se multiplican extremos por extremos y medios por medios, y se simplifica el resultado.

$\dfrac{2xy^2}{3}$ La simplificación de $\dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{15}{8}}$ es $\dfrac{5\cdot 8}{4\cdot 15}=\dfrac{2}{3}$, y para las demás expresiones, aplicamos propiedades de las potencias.

C. $\left(\dfrac{3x^4y^5}{4x^{10}y}\right)^{-2}$

$= \left(\dfrac{3y^4}{4x^6}\right)^{-2}$

Una forma de simplificar esta expresión es, primero, simplificar la base de la potencia (de manera parecida al ejemplo anterior), y luego, elevar el resultado a -2.

$= \left(\dfrac{4x^6}{3y^4}\right)^{2}$

Por propiedad, podemos intercambiar numerador y denominador, y elevar la fracción a 2.

$= \dfrac{16x^{12}}{9y^8}$

Finalmente elevamos cada término de la fracción al cuadrado, también por propiedades de potencias.

- -

$\left(\dfrac{3x^4y^5}{4x^{10}y}\right)^{-2}$

También podemos simplificarlo de la siguiente forma:

$= \left(\dfrac{4x^{10}y}{3x^4y^5}\right)^{2}$

Intercambiamos primero el numerador y denominador, y se le asigna el exponente 2 a la fracción.

$= \dfrac{16x^{20}y^2}{9x^8y^{10}}$

Elevamos numerador y denominador al cuadrado.

$= \dfrac{16x^{12}}{9y^8}$

Finalmente, simplificamos la fracción resultante.

D. $\sqrt[3]{\dfrac{8x^5y}{27x^2}}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{8x^3y}{27}}$

Primero, simplificamos el subradical.

$= \dfrac{\sqrt[3]{8x^3y}}{\sqrt[3]{27}}$

Luego, se calcula la raíz cúbica del numerador y del denominador.

$= \dfrac{\sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{27}}$

Note que en el numerador tenemos la raíz cúbica de términos que se multiplican, por propiedad eso es la multiplicación de la raíz cúbica de esos términos.

$= \dfrac{2x\sqrt[3]{y}}{3}$

Finalmente obtenemos la simplificación. Recuerde que $\sqrt[3]{x^3} = x$.

Pregunta: ¿Cuál es otro modo de simplificar la expresión del ejemplo C?

Ejercicio: Simplifique al máximo las siguientes expresiones algebraicas:

a. $\dfrac{72x^2y^3}{48x^2y^7}$

d. $\left(\dfrac{-2a^{-2}b^{-1}}{8a^{-4}b^2}\right)^{-1}$

b. $\dfrac{-\sqrt{4}x^0y^3}{\sqrt{25}x^5w}$

e. $\dfrac{\left(\sqrt[7]{x}\right)^7 - \sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^3} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^3}$

c. $\dfrac{\sqrt{20}\,x^3yz^2}{\sqrt[3]{48}\,x^5y^2}$

f. $\sqrt{\dfrac{9a^5x^{-5}}{25a^{-2}x^4}}$

2. Polinomios en una variable

En este apartado se pretende introducir la noción de polinomio en una variable a partir de una idea intuitiva del concepto de función, del mismo modo que se hizo con la noción de expresión algebraica. Por esta razón se recomienda al docente introducir la notación del tipo $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$; con $a_i \in$ IR para todo $i = 1,..., n$, y $n \in$ IN para denotar los polinomios de grado n, haciendo énfasis en que dicha notación quiere decir que el valor numérico de toda la expresión, que estamos llamando *P*, depende del valor asignado a la variable, en este caso *x*, de este modo, se maneja implícitamente, el concepto de variable dependiente e independiente.

Se sugiere al profesor procurar que el alumno tenga una noción clara de la idea de polinomio, así como de conceptos tales como grado de un polinomio, número de términos de un polinomio, y clasificación de polinomios según su número de términos no semejantes.

Sin embargo, debe recordarse, que el manejo de tales conceptos no es el eje primordial de esta unidad, si no solamente el punto de partida. Es necesario que el alumno se familiarice con el uso de la terminología propia del tema, pero sin caer en el error de pensar que este es el fin de la unidad.

Así pues, en este apartado se plantean algunos ejercicios sobre el uso de conceptos, tales como determinar el grado de un polinomio, o clasificar polinomios en monomios, binomios, trinomios, o polinomios de cuatro o más términos, con el objetivo de reforzar la adquisición y uso apropiado de tales conceptos; no con la idea de formular ese tipo de ejercicios en una eventual prueba escrita, pues, en última instancia lo que se quiere es que el estudiante sepa operar con polinomios en una variable.

Se sugiere al docente, trabajar también algunos ejemplos con polinomios en dos o tres variables, con el propósito de que el alumno no se haga una idea errónea de que todos los polinomios deben ser en una variable. Sin embargo, el énfasis debe darse hacia los polinomios con una variable, pues serán los utilizados, en años posteriores, al trabajar con funciones reales de variable real.

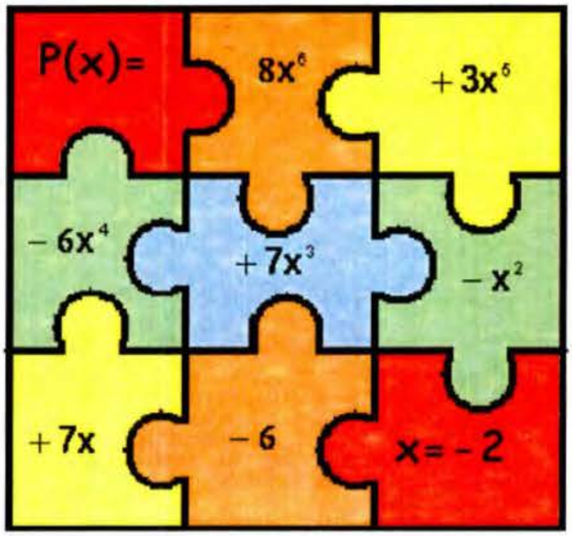
Actividad 2.1 Construyendo polinomios

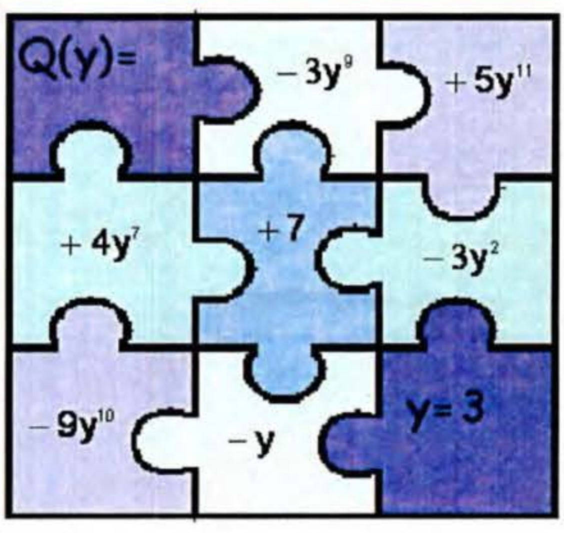
La idea de esta actividad es que los alumnos "construyan" el concepto de polinomio en una variable, a partir de un rompecabezas donde cada uno de *las* piezas, salvo la primera y la última, sean expresiones algebraicas correspondientes a monomios no semejantes entre sí, y en una misma variable.

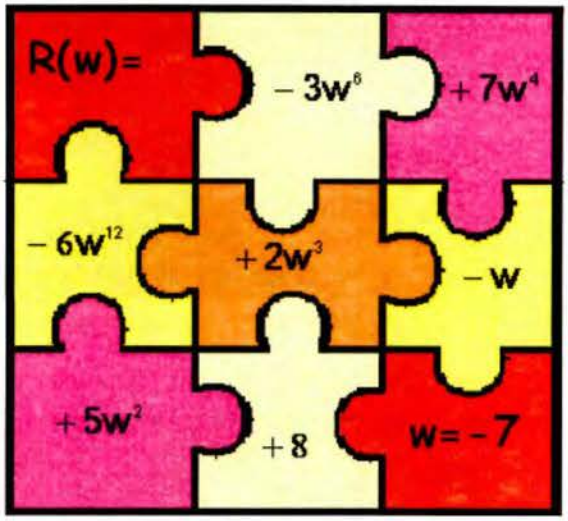
La primera pieza, será el nombre del polinomio, por ejemplo P(x), y la última, indicará un valor particular para la variable, de modo que al terminar el rompecabezas, el alumno deberá calcular el valor numérico del polinomio, para dicho valor de la variable.

Instrucciones:

- Arme el siguiente rompecabezas.
- Luego, anote en su cuaderno la expresión algebraica obtenida.
- Evalúe dicha expresión para el valor de la variable escrito en la última pieza del rompecabezas.







El docente debe explicar al alumno que la expresión escrita se llama polinomio. Además debe explicar los conceptos de grado del polinomio, y número de términos del polinomio, a partir de los ejemplos obtenidos de los rompecabezas, explicando los conceptos de monomio, binomio, trinomio, y polinomio de cuatro o más términos. De esta manera, podemos resumir algunos conceptos importantes:

- Se llama término de un polinomio a cada una de las expresiones que lo forman.
- Dos términos se llaman semejantes, si poseen las mismas variables, con los exponentes correspondientes iguales.

- Un polinomio se clasifica según su número de términos no semejantes, como:
  - Monomio: si tiene un término.
  - Binomio: si tiene dos términos.
  - Trinomio: si tiene tres términos.
- Los polinomios de cuatro o más términos no reciben *ningún* nombre en particular.

Un polinomio de grado n en una variable, digamos x, es una expresión algebraica de la forma
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde los valores de
$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales fijos, y a_n es distinto de cero.
El número real a_n se llama coeficiente principal del polinomio

Por otro lado, debe recordarse al estudiante que el valor de la expresión depende del valor asignado a la variable, y que una misma variable que se encuentra varias veces presente en una expresión representa siempre un mismo valor.

Esta actividad puede efectuarse individualmente o en subgrupos, según sea la cantidad de alumnos del grupo con que se trabaja.

Ejercicio: Complete la siguiente tabla con los datos que se le solicitan.

Polinomio	Grado del polinomio	Número de términos del polinomio	Clasificación según su número de términos
$P(x) = 7x^2$			
$Q(x) = x^6 + 5x$			
$R(x) = 3x^4 - 4x + 9x^2$			
$U(x) = 5x^3 + 3x^2 - 4x + 8$			
$V(x) = 6x^2 + 4x^4 - 3x + 4 + 7x^3$			

3. Operaciones con polinomios en una variable

Actividad 3.1: Términos semejantes

Con esta actividad se pretende que los estudiantes reconozcan términos semejantes comparando dos o más polinomios, puesto que esto es fundamental para el tema siguiente. Sin embargo, no se recomienda hacer demasiados ejercicios de esta índole, puesto que el énfasis debe hacerse en el tema de suma y resta de polinomios.

Instrucciones: A continuación se le presentan grupos de polinomios. Pinte de un mismo color los términos semejantes presentes en cada grupo.

Ejemplo:

$$P(x) = 3x^6 - 4x^5 + x^4 + 4x^3 - 12x$$

$$Q(x) = -2x^6 - x^5 + 9x^3 - 3x^2 + 7$$

$P(x) = -5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ $Q(x) = -19x^6 + 16x^5 - 3x^4$	$P(x) = 7x^9 + 6x^7 - 8x^5 + 9x^4 + 3x$ $Q(x) = -3x^9 + 4x^6 + 6x^5 - 2x + 9$ $R(x) = 14x^{10} + 9x^5 - 3x^4 - x^2 + x$

Actividad 3.2: Suma y resta de polinomios

Esta actividad pretende ilustrar cómo puede abordarse en clase el tema de suma y resta de polinomios.

La idea es que el docente explique el método con la ayuda de un ejemplo particular, en el cual se vaya indicando los pasos que se llevan a cabo. Pero primero, es importante que el profesor defina qué se entiende por términos semejantes y que los estudiantes sepan reconocerlos, puesto que tienen mucha relevancia en este tema.

Posteriormente, el docente puede facilitar ejercicios para que los alumnos los resuelvan de manera individual, o en parejas.

- Ejemplo: Realizar la suma de los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 3$ y $Q(x) = -5x^4 + 6x^2 + 5x + 7$

Pasos a seguir	Ejemplo resuelto
Analizamos los términos presentes en cada uno de los polinomios, prestando atención a los términos semejantes.	$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 3$ $Q(x) = -5x^4 + 6x^2 + 5x + 7$

En este caso, $P(x)$ y $Q(x)$ tienen respectivamente los siguientes términos semejantes: $3x^4$y $-5x^4$, $-x^2$y $6x^2$, -3 y 7. $P(x)$ tiene el término $-2x^3$, que no es semejante a ninguno de los de $Q(x)$, también $Q(x)$ tiene el término $5x$ que no es semejante a ninguno de los de $P(x)$. Todo lo descrito puede observarse con un ordenamiento vertical de los términos, tal y como aparece a la derecha.	$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 \quad - 3$ $Q(x) = -5x^4 \quad + 6x^2 + 5x + 7$
Tomamos los términos semejantes de cada uno de los polinomios, por ejemplo en este caso, podemos comenzar con la pareja $3x^4$y $-5x^4$. Sumamos sus coeficientes y mantenemos la expresión x^n, de modo que nos queda $(3+-5)x^4 = -2x^4$. Repetimos esto para el caso de todos los grupos de términos semejantes, y los demás los dejamos igual.	$P(x) + Q(x) = (3 - 5)x^4 + -2x^3$ $+ (-1 + 6)x^2 + 5x + (-3 + 7)$ $P(x) + Q(x) =$ $- 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 5x + 4$

- Ejemplo: Realizar la resta de los polinomios: $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 3$ y $Q(x) = -5x^4 + 6x^2 + 5x + 7$

Pasos a seguir	Ejemplo resuelto
Observe que la resta $P(x) - Q(x)$ es en realidad la suma de los polinomios $P(x)$ y $-Q(x)$ (que es el opuesto del polinomio	En nuestro ejemplo, si $Q(x) = -5x^4 + 6x^2 + 5x + 7$, su opuesto es

$Q(x)$).	$-Q(x)=5x^4-6x^2-5x-7$
Ahora que ya sabemos cuáles son los polinomios $P(x)$ y $-Q(x)$, procedemos a sumarlos, del mismo modo que en el ejemplo anterior.	$P(x)= 3x^4-2x^3-x^2 \quad -3$ $-Q(x)=5x^4 \quad -6x^2-5x-7$ $P(x)+-Q(x)= (3+5)x^4+-2x^3$ $+(-1-6)x^2-5x+(-3-7)$
De este modo obtenemos $P(x)-Q(x)$.	$P(x)-Q(x)=$ $8x^4-2x^3-7x^2-5x-10$

Ejercicio: A continuación se presentan tres polinomios, realice las operaciones que se indican posteriormente.

$P(x)=3x^9+4x^7-3x^5+8$

$Q(x)=-3x^5+2x^3-4x$

$R(x)=x^7+11x^5-7x^3-9x+1$

$P(x)+Q(x)=$ __________	$P(x)-R(x)=$ __________
$Q(x)+R(x)=$ __________	$R(x)-Q(x)=$ __________
$P(x)+Q(x)+R(x)=$ __________	$P(x)-Q(x)+R(x)=$ __________

Actividad 3.3: Multiplicación de polinomios

Esta actividad pretende mostrar cómo puede estudiarse en clase el tema de multiplicación de polinomios.

La idea es que el docente explique el método con la ayuda de ejemplos particulares, en los cuales se vaya indicando los pasos que se llevan a cabo. Se recomienda iniciar con uno o varios ejemplos de multiplicación de monomios, y luego pasar a multiplicación de polinomios en general, haciendo notar que la multiplicación de un monomio por un polinomio, no es más que un caso particular de la multiplicación en general.

Al final, el docente puede facilitar ejercicios para que los alumnos los resuelvan de manera individual, o en parejas.

- Ejemplo: Realizar la multiplicación de los siguientes monomios: $P(x)=5x^3$ y $Q(x)=-2x^4$.

Pasos a seguir	Ejemplo resuelto
Se multiplican los coeficientes de los monomios, es decir, los números reales que multiplican a las expresiones de la forma x^n.	$P(x)\cdot Q(x)=5x^3\cdot -2x^4$ $\boxed{5\cdot -2=-10}$
Se multiplican las expresiones de la forma x^n utilizando la ley de multiplicación de potencias de igual base, estudiada en sétimo año.	$P(x)\cdot Q(x)=5x^3\cdot -2x^4$ $\boxed{x^3\cdot x^4=x^{3+4}=x^7}$
El resultado buscado es la multiplicación de las expresiones obtenidas en los dos pasos anteriores.	$P(x)\cdot Q(x)=-10x^7$

- Ejemplo: Realizar la multiplicación de $P(x)=3$ y $Q(x)=8x^3$.

  Observe que en este caso, el polinomio $P(x)=3$ puede escribirse como $P(x)=3x^0$, puesto que $x^0=1$, entonces aplicamos el procedimiento anterior obteniendo que $P(x)\cdot Q(x)=3x^0\cdot 8x^3=24x^3$.

- Ejemplo: Realizar la multiplicación de los siguientes polinomios: $P(x)=5x^2+2x+4$ y $Q(x)=-3x^2+6$.

Pasos a seguir	Ejemplo resuelto
Lo primero que hacemos es tomar uno de los términos del polinomio $P(x)$ y lo multiplicamos por todos los términos del polinomio $Q(x)$, relacionando los resultados con símbolos de suma.	$P(x)\cdot Q(x)=(5x^2+2x+4)(-3x^2+6)$ En nuestro caso, elegimos el término $5x^2$ del polinomio $P(x)$, y al realizar lo antes señalado obtenemos la siguiente expresión: $\boxed{\begin{aligned}&(5x^2\cdot -3x^2)+(5x^2\cdot 6)\\&=-15x^4+30x^2\end{aligned}}$
Realizamos el mismo procedimiento hasta haber tomado en cuenta todos los términos del polinomio $P(x)$.	$P(x)\cdot Q(x)=(5x^2+2x+4)(-3x^2+6)$ $\boxed{\begin{aligned}&(2x\cdot -3x^2)+(2x\cdot 6)\\&=-6x^3+12x\end{aligned}}$ $P(x)\cdot Q(x)=(5x^2+2x+4)(-3x^2+6)$ $\boxed{\begin{aligned}&(4\cdot -3x^2)+(4\cdot 6)\\&=-12x^2+24\end{aligned}}$
Luego, realizamos la suma de los polinomios que obtuvimos. En este caso sería, sumar lo que está en los recuadros amarillos. El polinomio resultante es $P(x)\cdot Q(x)$.	$P(x)\cdot Q(x)=(-15x^4+30x^2)+(-6x^3+12x)$ $+(-12x^2+24)$ $P(x)\cdot Q(x)=-15x^4-6x^3+18x^2+12x+24$

- Ejercicio: Efectúe la multiplicación $Q(x)\cdot P(x)$ con los datos proporcionados en el ejemplo anterior.

  - ¿Qué resultado se obtiene con respecto al de la multiplicación $P(x)\cdot Q(x)$?
  - ¿Qué podemos concluir?

- Ejemplo: Realizar la multiplicación de los siguientes polinomios: $P(x)=2x^4$ y $Q(x)=-5x^3+3x^2-4$.

Pasos a seguir	Ejemplo resuelto
Realizamos el mismo procedimiento que en el primer ejemplo. Observe que en este caso es más rápido, debido a que el polinomio $P(x)$ tiene sólo un término.	$P(x)\cdot Q(x)=2x^4(-5x^3+3x^2-4)$
Finalmente obtenemos el resultado	$P(x)\cdot Q(x)$ $=(2x^4\cdot -5x^3)+(2x^4\cdot 3x^2)+(2x^4\cdot -4)$ $=-10x^7+6x^6-8x^4$

Ejercicio: Realice la multiplicación de los siguientes polinomios:

a. $P(x)=5x^3$, $Q(x)=6x^4$

b. $R(x)=-2x^7$, $S(x)=-4x^3+9x^2-x+7$

c. $T(y)=7y^6+7y^5-11y^4-8y^3$, $U(x)=3y^5-5y^4+2y^3+y$

d. $W(z)=10z^7-9z^5-4z^2+6$, $U(z)=3z^8-5z^7+2z^5+4z-3$

Actividad 3.4: Productos notables

Con esta actividad se pretende que los estudiantes conozcan las fórmulas del cuadrado de una suma o resta, la diferencia de cuadrados, además de la suma y resta de cubos, para que después puedan utilizarlas en determinados ejercicios.

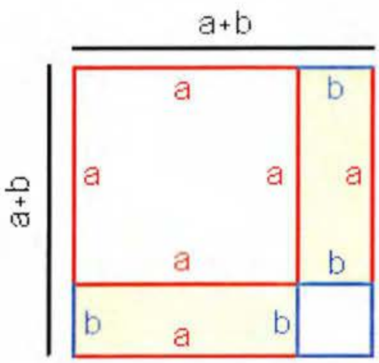
Se comienza entonces con una interpretación geométrica de las llamadas "fórmulas notables" para que éstas resulten naturales para el estudiante. Luego se presenta el triángulo de Pascal, a manera de dato curioso, puesto que no se trabajará con toda la información que éste proporciona.

Finalmente se expone a los estudiantes ejemplos en los cuales se presentan productos, y se les pide que proporcionen su desarrollo; esto con la intención de que reconozcan si son o no productos notables, y en caso de serlo, que puedan dar la respuesta gracias a la aplicación de las fórmulas estudiadas sin tener que recurrir a la propiedad distributiva.

El conocimiento y la aplicación de dichas fórmulas toma especial importancia cuando se estudia factorización, lo cual a su vez es relevante para el cálculo de límites de funciones, tema presente en muchos de los programas de estudio a nivel superior.

- Interpretación geométrica de las "fórmulas notables" y el triángulo de Pascal

- Primera fórmula notable: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



En esta figura tenemos un cuadrado de lado a+b, de modo que su área es $(a+b)^2$.

Dicho cuadrado puede dividirse en cuatro figuras: Un cuadrado verde de lado a, un cuadrado rosado de lado b y dos rectángulos amarillos de lados a y b.

Sus respectivas áreas son:

Rectángulo verde: a^2

Rectángulo rosado: b^2

Rectángulos amarillos juntos: $2ab$

De modo que el área del cuadrado de lado a+b también puede expresarse como $a^2 + 2ab + b^2$. Finalmente, obtenemos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- Segunda fórmula notable: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

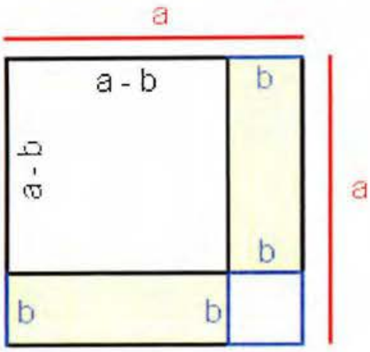


Figura A

En la figura adjunta, tenemos un cuadrado de lado a dividido en cuatro figuras: Un cuadrado verde de lado a-b, un cuadrado rosado de lado b, y dos rectángulos amarillos de lados a-b y b.

Sus respectivas áreas son:

Rectángulo verde: $(a-b)^2$

Rectángulo rosado: b^2

Un rectángulo amarillo junto al rosado: ab

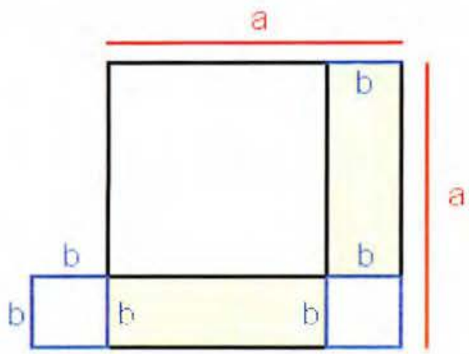


Figura B

Ésta es la misma figura A, pero hemos agregado un cuadrado rosado de lado b.

Observe que el área total de esta figura es el área de la figura A (que es a^2) más el área del cuadrado rosado que se agregó (que es b^2).

Es decir, $a^2 + b^2$.

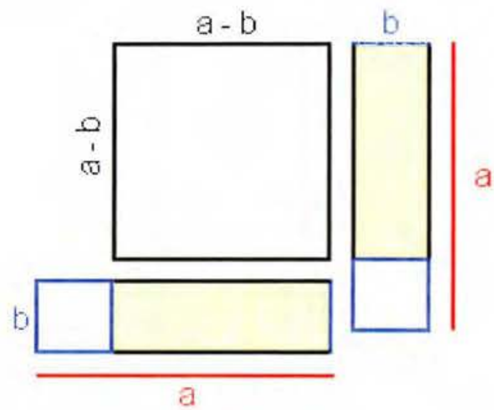


Figura C

En ésta ilustración, se separó la figura B de modo que podemos apreciar que el área total es, el área del cuadrado verde más la suma de las áreas de los rectángulos de lados a y b.

En otras palabras,

$(a-b)^2 + 2ab$

Como las figuras B y C son en realidad la misma, tenemos que sus áreas son iguales, por lo tanto: $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$.

De lo anterior obtenemos que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

- Tercera fórmula notable: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

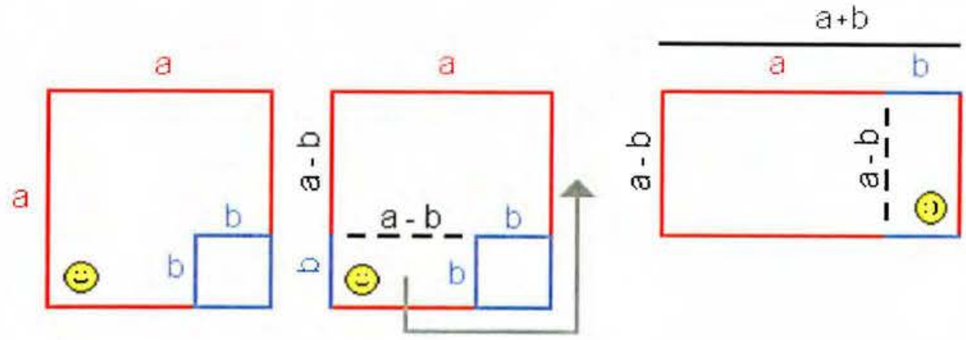


Figura A	Figura B	Figura C
En la Figura A podemos apreciar un cuadrado de lado a, y en su interior aparece señalado un cuadrado de lado b. El área representada con color verde es entonces a^2-b^2.	En la Figura B tenemos el mismo cuadrado anterior, pero se ha señalado un rectángulo de lados a-b y b.	Observe que dicho rectángulo es reubicado en la figura C, de modo que el área verde es equivalente a la de un rectángulo de lados $a+b$ y $a-b$. En otras palabras, el área verde también puede ser calculada de la forma: $(a+b)(a-b)$.

Finalmente, obtenemos la igualdad: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

En resumen:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\\(a+b)(a-b)=a^2-b^2\end{array}}$$

- El Triángulo de Pascal

A continuación se presenta el llamado "Triángulo de Pascal", el cual consiste en un arreglo de números enteros. Observe que en dos de sus lados se presentan números "1", los demás son el resultado de sumar los dos números que se encuentran diagonal a él en la fila superior. Este mecanismo sirve para obtener fácilmente los coeficientes del polinomio correspondiente a la forma desarrollada de $(a+b)^n$, basta con observar la fila n+1, tal y como se muestra en la siguiente figura:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1
\end{array}
$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Figura 6

Observe que en la tercera fila aparecen los coeficientes del polinomio correspondiente a la expresión $(a+b)^2$, que coincide con la fórmula estudiada anteriormente desde un punto de vista geométrico.

También tenemos dos fórmulas más que son la suma y diferencia de cubos:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\end{array}}$$

- **Aplicación de las fórmulas estudiadas**

Ejemplos: Desarrolle las expresiones que se le presentan, de modo que no se inicie efectuando multiplicación de polinomios, sino haciendo uso de las fórmulas estudiadas anteriormente.

A. $(5x+3)^2$

Observe que tenemos una suma de dos términos con exponente dos, es decir, podemos asociarlo a la "primera fórmula notable" de manera que tendríamos que a = 5x y b = 3. Es decir:

$$(\underbrace{5x}_{a}+\underbrace{3}_{b})^2=\underbrace{(5x)^2}_{a^2}+\underbrace{2(5x)(3)}_{2ab}+\underbrace{(3)^2}_{b^2}=25x^2+30x+9$$

B. $(4x^3-2y)^2$

En este caso, podemos relacionar la expresión dada con la "segunda fórmula notable", de modo que se obtiene lo siguiente:

$$(\underbrace{4x^3}_{a}-\underbrace{2y}_{b})^2=\underbrace{(4x^3)^2}_{a^2}-\underbrace{2(4x^3)(2y)}_{2ab}+\underbrace{(2y)^2}_{b^2}=16x^6-16x^3y+4y^2$$

C. $(-3x-2y^4)^2$

Aquí, podríamos ver la expresión como el cuadrado de la resta de los términos $-3x$ y $2y^4$, es decir:

$$(\underbrace{-3x}_{a}-\underbrace{2y^4}_{b})^2=\underbrace{(-3x)^2}_{a^2}-\underbrace{2(-3x)(2y^4)}_{2ab}+\underbrace{(2y^4)^2}_{b^2}=9x^2+12xy^4+4y^8$$

D. $(5x+3y)(5x-3y)$

En este caso es importante notar que tenemos el producto de dos expresiones, cuya única diferencia es que en uno de los factores tenemos lo términos separados con una suma, y en el otro factor, con una resta, por lo cual podemos aplicar la "tercera fórmula notable" como sigue:

$$(\underbrace{5x}_{a}+\underbrace{3y}_{b})(\underbrace{5x}_{a}-\underbrace{3y}_{b})=\underbrace{(5x)^2}_{a^2}-\underbrace{(3y)^2}_{b^2}=25x^2-9y^2$$

E. $(2x+3)(4x^2-6x+9)$

Observe que en este caso, el término que está en el centro en el segundo factor es el opuesto del producto de los términos 2x y 3, presentes en el primer factor, lo cual nos da una pista de que podría tratarse de una suma de cubos, sólo tendríamos que verificar que los demás términos coinciden con lo establecido en la fórmula. El primer término del segundo factor es el cuadrado del primer término del primer factor, y el último término del segundo factor es el cuadrado del segundo término del primer factor, además, los signos aparecen de acuerdo a la fórmula de suma de cubos. En notación matemática sería así:

$$(2x+3)(4x^2-\underbrace{6x}_{ab}+9)=(\underbrace{2x}_{a}+\underbrace{3}_{b})[(2x)^2-(2x)(3)+3^2]=\underbrace{(2x)^3}_{a^3}+\underbrace{(3)^3}_{b^3}=8x^3+27$$

Veamos que en el siguiente ejemplo ocurre lo mismo, pero se obtiene una diferencia de cubos.

F. $(-4x-3y)(16x^2-12xy+9y^2)$

$$=(\underbrace{-4x}_{a}-\underbrace{3y}_{b})[\underbrace{(-4x)^2}_{a^2}+\underbrace{(-4x)(3y)}_{ab}+\underbrace{(3y)^2}_{b^2}]=\underbrace{(-4x)^3}_{a^3}-\underbrace{(3y)^3}_{b^3}=64x^3-27y^3$$

Es importante notar que no todo producto de expresiones algebraicas parecidas a estos tipos, son realmente sumas o diferencias de cubos; habría que hacer las comprobaciones, tal y como se mostró anteriormente. Observe el siguiente ejemplo:

G. $(5x-2)(25x^2+10x+3)$

$$(\underbrace{5x}_{a}-\underbrace{2}_{b})(\underbrace{25x^2}_{a^2}+\underbrace{10x}_{ab}+\underset{\substack{\downarrow \\ \text{no es} \\ b^2}}{3})$$

En este caso, no es posible identificar el producto dado con alguna de las fórmulas estudiadas, puesto que 3 no es 2 al cuadrado. En casos así se debe utilizar la multiplicación de polinomios para determinar el desarrollo de la expresión.

Ejercicio: Realice las siguientes multiplicaciones utilizando las fórmulas estudiadas.

a. $(2x^4+7)^2$

b. $(-3x-y)^2$

c. $(2x^5+3y)(2x^5-3y)$

d. $(3x+2)(9x^2-6x+4)$

e. $(4x-3)(16x^2-12x+9)$

f. $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

Actividad 3.5: División de polinomios por monomios

En este apartado se presentará, por medio de ejemplos concretos, sugerencias sobre la manera de abordar la división de polinomios, estudiando dos casos: división de monomios y división de un polinomio por un monomio.

Se recomienda al docente, antes de iniciar con el tema, recordar algunos conocimientos previos necesarios para desarrollar adecuadamente los procesos de división de polinomios, como lo son la simplificación y división de fracciones, la propiedad de división de potencias de igual base, la distributividad de la división respecto a la suma o resta, y la propiedad de exponentes negativos.

Por ejemplo, la división de monomios $-9x^8y^3z \div 15x^5y^7$ puede también representarse como $\frac{-9x^8y^3z}{15x^5y^7}$, que fue simplificada anteriormente, obteniendo como resultado $\frac{-3x^3z}{5y^4}$.

El procedimiento para dividir un polinomio por un monomio es básicamente una repetición del visto en los ejemplos anteriores, pero aplicado varias veces. Recuérdese que la división es distributiva respecto de la suma y la resta, de donde se deriva el siguiente algoritmo.

Ejemplo 1: División de un polinomio por un monomio

Dividir $(4a^2b^3+10ab^5)\div 2ab$

Solución:

$(4a^2b^3+10ab^5)\div 2ab$	=	Polinomios dados.
$\dfrac{4a^2b^3+10ab^5}{2ab}$	=	Escribimos la división como fracción.
$\dfrac{4a^2b^3}{2ab}+\dfrac{10ab^5}{2ab}$	=	El divisor se distribuye entre cada uno de los términos del dividendo, y se efectúan las divisiones de monomios en cada caso, del mismo modo que en los ejemplos anteriores. Aquí omitimos el paso de agrupar los coeficientes.
$2ab^2+5b^4$		Resultado.

Ejemplo 2: División de un polinomio por un monomio

Dividir $(16a^2b^5+32a^4c^7-40b^4c^5)\div 4abc$

Solución:

$$\frac{16a^2b^5}{c}+\frac{32a^4c^7}{b}-\frac{40b^4c^5}{a}$$

$(16a^2b^5+32a^4c^7-40b^4c^5)\div 4abc$	=	Polinomios dados.
$\dfrac{16a^2b^5+32a^4c^7-40b^4c^5}{4abc}$	=	Escribimos la división como fracción.
$\dfrac{16a^2b^5}{4abc}+\dfrac{32a^4c^7}{4abc}-\dfrac{40b^4c^5}{4abc}$	=	El divisor se distribuye entre cada uno de los términos del dividendo, y se efectúan las divisiones de monomios en cada caso, del mismo modo que en los ejemplos anteriores. Aquí omitimos el paso de agrupar los coeficientes.

$\frac{16a^2b^5}{c}+\frac{32a^4c^7}{b}-\frac{40b^4c^5}{a}$ Resultado.

Ejemplo 3: División de un polinomio por un monomio.

$\frac{5n}{p}-\frac{2m^2}{n}+\frac{7n^4p^3}{m}$

Dividir $\left(-35mn^2+14m^3p-21n^5p^4\right)\div(-7mnp)$

Solución:

$\left(-35mn^2+14m^3p-21n^5p^4\right)\div(-7mnp)$	=	División dada.
$\frac{-35mn^2+14m^3p-21n^5p^4}{-7mnp}$	=	Se escribe la división como fracción.
$\frac{-35mn^2}{-7mnp}+\frac{14m^3p}{-7mnp}-\frac{21n^5p^4}{-7mnp}$	=	Se divide cada término del dividendo por el divisor y se efectúan las divisiones. Note que, en este caso, el divisor es negativo, por lo que se cambian los signos de todos los términos.
$\frac{5n}{p}-\frac{2m^2}{n}+\frac{7n^4p^3}{m}$		

Note que la expresión algebraica resultante de dividir dos monomios, o un polinomio por un monomio no siempre es un monomio o un polinomio.

Ejemplo 4: División de un polinomio por un monomio, con coeficientes fraccionarios.

Dividir $\left(\frac{3}{4}x^3y-\frac{2}{3}x^2y^2-\frac{1}{2}y^4\right)\div\left(\frac{5}{6}y\right)$

$\left(\frac{3}{4}x^3y-\frac{2}{3}x^2y^2-\frac{1}{2}y^4\right)\div\left(\frac{5}{6}y\right)$	=	División dada.
$\frac{\frac{3}{4}x^3y}{\frac{5}{6}y}-\frac{\frac{2}{3}x^2y^2}{\frac{5}{6}y}-\frac{\frac{1}{2}y^4}{\frac{5}{6}y}$	=	Se divide cada término del dividendo por el divisor, y se simplifican las fracciones obtenidas.
$\frac{9x^2}{10}-\frac{2x^2y}{5}-\frac{3y^3}{5}$		Resultado.

Estos ejemplos resumen los principales aspectos de la división de polinomios por monomios. Es importante que el docente mencione de forma explícita al alumno, durante su explicación, en qué momento se utilizan algunos conceptos previos fundamentales, como lo son la ley de signos para la división, la distributividad de la división respeto de la suma, y la división y simplificación de fracciones, entre otros.

Actividad 3.6: División algebraica de polinomios

El procedimiento para dividir polinomios se considera en un apartado distinto, por la razón de que es un algoritmo diferente al estudiado en los casos anteriores, siendo más bien semejante al algoritmo usado para dividir números enteros. Por esta razón, se recomienda retomar primero el algoritmo de la división para números enteros estudiado en la escuela primaria.

Nos limitaremos a dividir polinomios en una variable, y polinomios en dos variables, que sean homogéneos (es decir, donde la suma de los exponentes de las variables en cada término del polinomio sea la misma) El procedimiento se explica a continuación.

Ejemplo 1: División de dos polinomios en una variable con coeficientes enteros

Dividir $\left(x^4 - 9x^2 + 3 + x\right) \div (x + 3)$

Solución:

Para poder efectuar la división, primero debe tenerse ambos polinomios ordenados de forma descendente respecto a la misma variable. Una vez ordenados, el dividendo y el divisor deben completarse, es decir, si falta algún término, éste debe agregarse, colocándole por coeficiente un cero, como se ve a continuación.

$$\left(x^4 + 0x^3 - 9x^2 + x + 3\right) \div (x + 3)$$

Una vez ordenados y completos, ambos polinomios se colocan para efectuar la división, del mismo modo que se colocan dos números enteros para dividirlos, como se aprecia en el siguiente diagrama. El procedimiento seguido se explica a la derecha.

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
x^4 & +0x^3 & -9x^2 & +x & +3 & x & +3 & \\ \cline{6-8}
-x^4 & -3x^3 & & & & x^3 & -3x^2 & +1 \\ \cline{1-2}
0 & -3x^3 & -9x^2 & & & & \uparrow & \\
 & +3x^3 & +9x^2 & & & & \text{cociente} & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 & +x & +3 & & & \\
 & & & -x & -3 & & & \\ \cline{4-5}
 & \text{residuo} & \rightarrow & & 0 & & &
\end{array}
$$

- Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, y se coloca el resultado en el espacio del cociente.
- Se multiplica ese primer término por cada término del divisor y se coloca el resultado, cambiándole los signos, debajo del dividendo para efectuar la resta.
- Se "baja" el siguiente término del dividiendo, y se repiten los pasos anteriores cuantas veces sea posible, hasta obtener un residuo cuyo grado sea menor que el grado del divisor.

$\therefore (x^4 + 0x^3 - 9x^2 + x + 3) \div (x + 3) = x^3 - 3x^2 + 1$, lo cual es equivalente a afirmar que $(x^4 + 0x^3 - 9x^2 + x + 3) = (x^3 - 3x^2 + 1)(x + 3)$

Note que, en caso de que la división sea exacta, se puede verificar el resultado multiplicando el cociente y el divisor, debiendo dar como producto el dividendo. En caso de que la división no sea exacta, se multiplican el cociente y el divisor, y se suma el residuo, debiendo obtenerse el dividendo.

Ejemplo 2: División de polinomios homogéneos en dos variables, con coeficientes enteros.

Dividir $(x^3 - y^3) \div (x + y)$

Solución:

Ordenando y completando el dividendo, de manera que los exponentes de las variables en todos los términos sumen tres, se tiene:

$(x^3 + 0x^2y + 0xy^2 - y^3) \div (x + y)$

Colocando como en el caso anterior, y dividiendo de la misma manera, se tiene:

$$
\begin{array}{lllll|lll}
 & x^3 & +0x^2y & +0xy^2 & -y^3 & x & +y & \\
\cline{6-8}
 & -x^3 & -x^2y & & & x^2 & -xy & +y^2 \\
 & 0 & -x^2y & +0xy^2 & & & \uparrow & \\
 & & +x^2y & +xy^2 & & & \text{cociente} & \\
 & & 0 & +xy^2 & -y^3 & & & \\
 & & & -xy^2 & -y^3 & & & \\
\cline{4-5}
\text{residuo} & \rightarrow & & 0 & -2y^3 & & &
\end{array}
$$

- Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, y el cociente se coloca en el espacio correspondiente.
- Se multiplica el cociente por los dos términos del divisor, y se coloca el resultado, con los signos opuestos, debajo de los términos correspondientes del dividendo.
- Se efectúa la resta, y se "baja" el siguiente término del dividendo. Se continúa con el procedimiento hasta obtener un residuo de grado menor que el divisor.

Por lo tanto $\left(x^3 - y^3\right) = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) - 2y^2$ o también $\left(x^3 - y^3\right) \div (x + y) = \left(x^2 - xy + y^2\right) - \dfrac{2y^2}{(x + y)}$

Esta última forma de escribir el cociente es llamado cociente mixto, pues está formado de una parte "entera" (el cociente exacto de la división) y un número fraccionario (el residuo de la división dividido entre el divisor), y es de gran utilidad en el cálculo diferencial para el estudio del comportamiento de expresiones algebraicas formadas por cocientes de polinomios; las cuales pueden ser graficadas en un plano cartesiano[1].

Ejemplo 3: División de polinomios con coeficientes fraccionarios

Dividir $\left(\dfrac{1}{6}a^2 + \dfrac{5}{36}a - \dfrac{1}{6}\right) \div \left(\dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{2}\right)$

---

[1] En cálculo, estas expresiones, que son en realidad relaciones entre números reales modeladas por medio de expresiones algebraica (muchas veces polinomios o cocientes de polinomios) se llaman funciones, y en ocasiones se usa la notación de cociente mixto para estudiar el comportamiento de las funciones para valores arbitrariamente grandes de la variable. A esto se le llama el límite en infinito de la función.

Solución:

En este caso, el dividendo y el divisor están, ambos, completos y ordenados, procedemos a colocarlos para dividir

$$
\begin{array}{cccc|cc}
 & \frac{1}{6}a^2 & +\frac{5}{36}a & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}a & +\frac{1}{2} \\
\cline{5-6}
 & -\frac{1}{6}a^2 & -\frac{1}{4}a & & \frac{1}{2}a & -\frac{1}{3} \\
 & 0 & -\frac{1}{9}a & -\frac{1}{6} & & \uparrow \\
 & & +\frac{1}{9}a & +\frac{1}{6} & & \text{cociente} \\
\text{residuo} & & \rightarrow & 0 & &
\end{array}
$$

- Una vez más, se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, el resultado se coloca en el espacio del cociente.
- Se multiplica ese resultado por los dos términos del divisor, y se coloca debajo de los términos correspondientes en el dividendo, cambiando los signos para efectuar la resta. Y se continúa con el procedimiento hasta donde sea posible.
- Debe recordarse que al multiplicar fracciones se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí, y se simplifica la fracción resultante.
- Para efectuar las sumas y las restas, en caso de que los coeficientes sean fraccionarios, debe homogenizarse dichos coeficientes.

Por lo tanto

$$\left(\frac{1}{6}a^2+\frac{5}{36}a-\frac{1}{6}\right)\div\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}$$

o bien

$$\left(\frac{1}{6}a^2+\frac{5}{36}a-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}\right)$$

Actividad 3.7. División de polinomios por el método de coeficientes separados

Cuando el dividendo y el divisor son en una variable, u homogéneos en dos variables, se puede aplicar también el método de división por coeficientes separados que, como su nombre lo indica, consiste en trabajar únicamente con los coeficientes del polinomio, en este caso, también debe tenerse el dividendo y el divisor completos y ordenados de forma descendente.

Se recomienda utilizar este método cuando el dividendo y el divisor son expresiones considerablemente extensas, y usar la división algebraica se vuelve tedioso. Aunque en general puede usarse en los mismos casos vistos anteriormente.

Ejemplo 4: División de polinomios por el método de coeficientes separados

Dividir $(8x^6 - 16x^5 + 6x^4 + 24x^2 + 18x - 36) \div (4x^3 + 3x - 6)$

Solución:

Primero, completamos con ceros el dividendo y el divisor, obteniendo $(8x^6 - 16x^5 + 6x^4 + 24x^2 + 0x^3 + 18x - 36) \div (4x^3 + 3x - 6)$

A continuación se colocan los coeficientes del dividendo y del divisor, para efectuar la división:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrrr}
8 & -16 & 6 & 0 & 24 & 18 & -36 & 4 & 0 & 3 & -6 \\
\cline{8-11}
-8 & -0 & -6 & +12 & & & & 2 & -4 & +6 & \\
\cline{1-4}
0 & -16 & +0 & +12 & +24 & & & & & \uparrow & \text{cociente} \\
 & +16 & +0 & +12 & -24 & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & 0 & +0 & +24 & +0 & +18 & -36 & & & & \\
 & & & -24 & -0 & -18 & +36 & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0 & \leftarrow & \text{residuo} & &
\end{array}
$$

En este caso, los coeficientes obtenidos bajo el divisor son los coeficientes del cociente, cuyo grado depende del grado del dividendo y del divisor. En el ejemplo, como estamos dividiendo un polinomio de grado seis por uno de grado tres, el cociente será de grado tres. Así, el cociente en nuestro caso será $2x^3 - 4x^2 + 6$ (note que el término lineal se cancela al hacer las restas). Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$\therefore (8x^6 - 16x^5 + 6x^4 + 24x^2 + 18x - 36) \div (4x^3 + 3x - 6) = 2x^3 - 4x^2 + 6)$$

El procedimiento es en esencia el mismo usado en los casos anteriores: se divide el primer coeficiente del dividendo por el del divisor, luego se multiplica el resultado por los coeficientes del cociente, se coloca debajo de los coeficientes correspondientes del dividendo y se hacen las restas, y se continúa el proceso hasta donde sea posible

Actividad 3.8: División sintética. Teorema del factor y teorema del residuo

Existe otro método de división de polinomios, el cual se denomina división sintética. Este método, sin embargo, se puede aplicar en casos muy particulares. Este método es una aplicación directa de dos teoremas básicos del álgebra, llamados teorema del residuo y teorema del factor. Enunciamos a continuación estos teoremas.

Teorema del residuo:
El residuo de dividir un polinomio P(x), de grado mayor o igual que uno, por un polinomio de la forma D(x)=(x-a), se obtiene evaluando P(x) en x=a, es decir P(a).

Esto quiere decir que, para averiguar el residuo obtenido de dividir P(x) por x-a, es suficiente evaluar P(a).

El teorema del factor es un corolario del teorema anterior, y dice lo siguiente:

Teorema del factor
Si un polinomio P(x), de grado mayor o igual que uno, se anula para algún número real x=a, entonces P(x) es enteramente divisible por el polinomio D(x)=a. dicho de otra forma, si P(a)=0 para algún número real a, entonces D(x)=x-a es un factor de P(x).

Esto por cuanto, si P(x) se anula en x=a, significa que el residuo de P(x)÷(x-a) es cero, lo que implica que x-a divide a P(x), es decir x-a es un divisor, o factor, de P(x).

Para poder dividir dos polinomios por el método de división sintética, el divisor debe ser un polinomio de grado uno, y de coeficiente principal uno, es decir, debe ser de la forma $x \pm a$ donde a es un número real dado.

Ejercicio:

A. Complete la siguiente tabla con los datos que se le solicitan

	Ejercicio A	Ejercicio B	Ejercicio C	Ejercicio D
$P(x)$	$12x^5 - 9x^2 - 1$	$3x^2 - 9x + 6$	$-13x + 3x^3 + 10 + 4x^2$	$x + 2x^3 + 3$
$Q(x)$	$3x^2$	$x - 1$	$3 + x$	$-4x + 1 + x^2$
$P + Q$				
$P - Q$				
$Q - P$				
$P \cdot Q$				
$P \div Q$ usando división algebraica				
$P \div Q$ usando división sintética (de ser posible)				

B. *Pareo*

Instrucciones: En la columna A aparecen diez polinomios y en la columna B uno de sus factores. Asocie cada polinomio con su respectivo factor, escribiendo la letra minúscula de la columna B en el paréntesis correspondiente de la columna A. Puede hacer uso de la calculadora.

A			B
$-5x + x^2$	( )	a.	$x-4$
$-5x - 12 + 2x^2$	( )	b.	$4+x$
$3x^2 - 19x - 72$	( )	c.	$x-10$
$-182 + 85x + 7x^2$	( )	d.	$13+x$
$12x^3 + 2x^4 + 6 + x$	( )	e.	$18+x$
$-54x + 2x^3 + 33x^2$	( )	f.	$x+14$
$7x^3 - 24x - 60 + 5x^2 + 2x^4$	( )	g.	$x+6$
$312 - 45x^2 + 3x^4 - 54x + 36x^3$	( )	h.	$-5+x$
$-50x + 5x^2 - 10x^3 + x^4 + 60x^5 - 6x^6$ ..	( )	i.	$x-9$
$-41x^3 + 12x^4 + 4x^5 - 99x^2 + 10x + 24$	( )	j.	$x-2$

C. *Realice los siguientes problemas:*

a. Determine cuál es el residuo de la división $(x^4+5x^3+3x^2+2)\div(x-2)$ sin efectuarla.

b. Considere el polinomio $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$. Verifique usando el teorema del residuo que x = 1 es un cero de P, pero x = -3 no lo es.

c. Determine el valor de k de manera que el residuo de la división $(-x^3+(k+1)x^2-kx+3)\div(x-2)$ sea igual a 5.

4. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Actividad 4.1: Las ecuaciones como una balanza

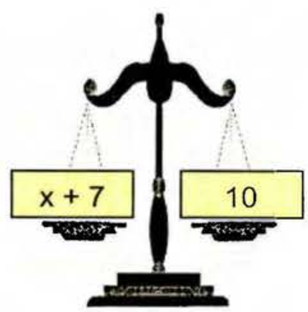
El objetivo de esta actividad es que el estudiante pueda interpretar lo que es una ecuación, y que sienta muy natural su método de resolución.

Para introducir el tema se hace uso de una balanza, de modo que en cada uno de sus platos se ubica un miembro de una ecuación, el cual representa cierta cantidad en gramos. El estudiante debe manipular dichas cantidades para descubrir cuál es el valor de la variable presente en la ecuación.

En este tipo de ejemplos se busca trabajar con ecuaciones donde la variable represente un valor positivo, puesto que se relaciona con una cantidad en gramos, pero al abandonar la metáfora de la balanza, se debe indicar a los alumnos que la solución de una ecuación no necesariamente es un número positivo, y se debe realizar también ejemplos en los cuales no se haga uso de la balanza, sino que el alumno manipule ambos lados de la ecuación para despejar la variable.

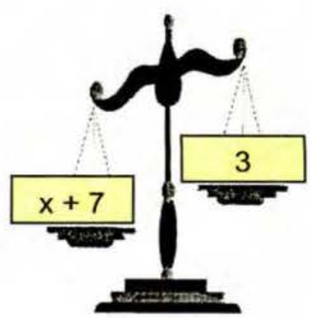
Instrucciones: Supongamos que tenemos una balanza en equilibrio con cierta cantidad de gramos en cada uno de sus platos. Una o ambas cantidades pueden estar representadas por expresiones algebraicas de variable x. El objetivo es manipular las cantidades de manera que podamos determinar claramente cuál es el valor de esa variable.

1. Imaginemos que en uno de los platos tenemos una cantidad desconocida de gramos (denotada por x) y 7 gramos, mientras que en el otro plato tenemos 10 gramos. Además, la balanza se encuentra en equilibrio.

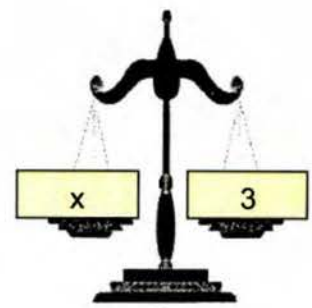


   Obtenemos entonces que la variable x está representando al número 3, puesto que de ésta manera se tiene 10 gramos en ambos platos.

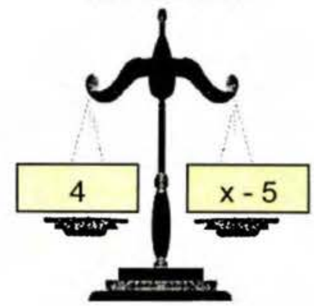
   Si agregamos o quitamos alguna cantidad de gramos en uno de los platos y en el otro no, la balanza pierde el equilibrio. Por ejemplo, si le quitamos 7 gramos al segundo plato, quedan 3 gramos en el mismo.



Pero si también quitamos 7 gramos en el primer plato, la balanza vuelve a estar en equilibrio. En este caso notamos que en el primer plato tenemos x gramos y en el segundo 3 gramos, es decir, x = 3, tal y como se mencionó en el punto 1.



Entonces, si tenemos una ecuación como x + 7 = 10, podemos saber qué valor tiene x restando a ambos lados de la igualdad 7 unidades, obteniendo x = 3.

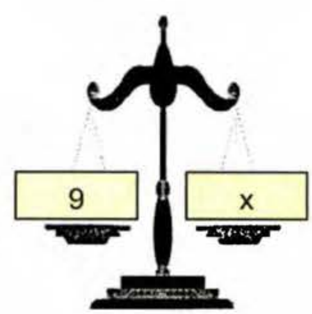


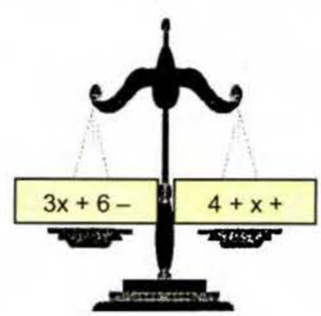
2. Ahora imaginemos la balanza nuevamente en equilibrio, pero en el primer plato tenemos 4 gramos, mientras que en el segundo hay cierta cantidad que representamos mediante la expresión "x – 5".

   ¿Qué debemos hacer para que en uno de los platos nos quede solamente x gramos y la balanza conserve su equilibrio?

   Respuesta: Agregar 5 gramos a cada plato, de modo que el valor de x es 9.

   Es decir, si tenemos una ecuación como 4 = x - 5, podemos saber qué valor tiene x sumando a ambos lados de la igualdad 5 unidades, obteniendo x = 9.



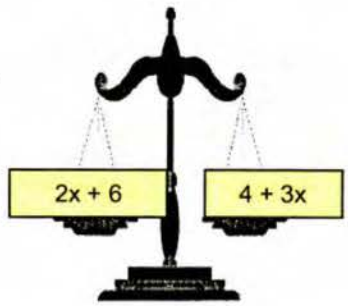


3. En el siguiente caso, imaginaremos que las cantidades dadas originalmente en los dos platos,

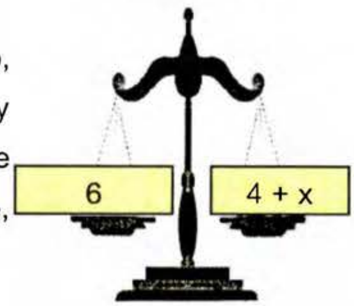
están representadas por medio de expresiones de variable x, tal y como se muestra en la figura adjunta.

¿Qué podemos hacer para determinar el valor de x?

Respuesta: Podríamos primero simplificar la expresión dada en cada plato, obteniendo "2 x + 6" en el primero y "4 + 3x" en el segundo.



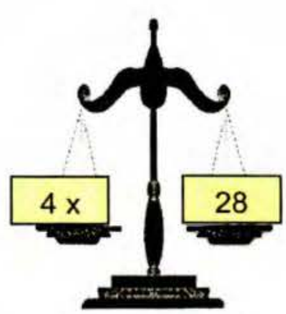
Luego, podemos quitar 2x gramos en cada plato, de modo que nos queda 6 gramos en el primero y 4 + x gramos en el segundo, lo cual se resuelve de manera similar a como se trabajó anteriormente, obteniendo así que x = 2.



Lo anterior podemos escribirlo matemáticamente de la siguiente forma:

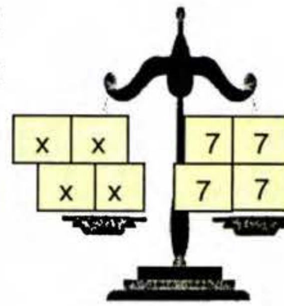
$3x + 6 - x = 4 + x + 2x$	
$2x + 6 = 4 + 3x$	simplificando
$2x + 6 - 2x = 4 + 3x - 2x$	restando 2x a ambos
$6 = 4 + x$	lados de la ecuación
$6 - 4 = 4 + x - 4$	restando 4 a ambos
$2 = x$	lados de la ecuación

4. Ahora, imaginemos que en el primer plato tenemos una cantidad representada con la expresión 4x y en el segundo plato tenemos 7 gramos.



Si separemos en cuatro partes las cantidades de cada plato, la balanza continúa en equilibrio, como se muestra en la figura adjunta.

Podemos notar que si en el primer plato de la balanza dejamos solamente x gramos y en el segundo 7 gramos, la balanza conserva el equilibrio, es decir x = 7.

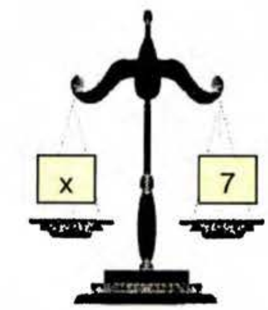


Matemáticamente podemos escribir el procedimiento anterior de la siguiente forma:

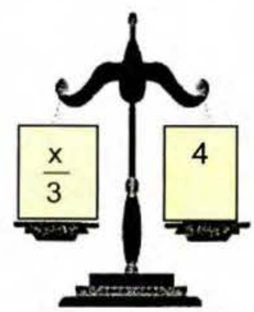
$4x = 28$

$\frac{4x}{4} = \frac{28}{4}$ dividiendo ambos lados por 4

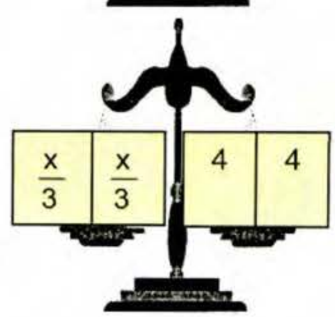
$x = 7$



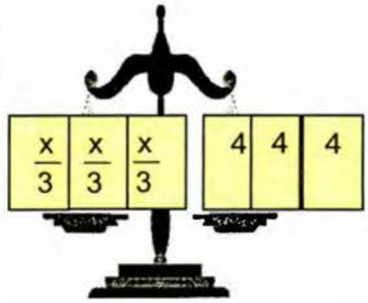
5. Observemos un último caso con la balanza. Esta vez, tenemos en el primer plato una cantidad de gramos representada por la expresión $\frac{x}{3}$, mientras que en el segundo plato tenemos 4 gramos. La balanza se encuentra en equilibrio.



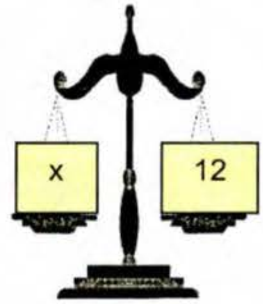
Como ambas cantidades son equivalentes, podemos añadir $\frac{x}{3}$ gramos en el primer plato y 4 gramos en el segundo, de modo que la balanza continuará en equilibrio.



Repitiendo nuevamente la acción anterior, obtenemos en el primer plato 3 cantidades representadas con $\frac{x}{3}$, es decir, quedan x gramos, y en el segundo plato quedan 12 gramos. Finalmente obtenemos que x = 12.



Matemáticamente, el procedimiento anterior se escribe de la siguiente forma:



$\frac{x}{3} = 4$

$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$ Multiplicando ambos lados por 3.

x = 12

Observe que la situación inicial que se presenta en la balanza puede escribirse como una igualdad de dos expresiones algebraicas, como en el caso anterior, que tenemos: $\frac{x}{3} = 4$. Esto recibe el nombre de ecuación, y el procedimiento para averiguar el valor de la variable, que hace que se cumpla o se satisfaga la igualdad, se llama resolver la ecuación.

En la práctica, puesto que al aplicar la misma operación a ambos lados de la igualdad se busca eliminar las constantes que acompañan a la variable, muchas veces se omite este proceso, y se dice que se "pasan" los números al lado opuesto de la igualdad, con la operación inversa. Veamos un ejemplo:

Resolver la ecuación $5x = 8x - 15$

Solución: Si queremos, como antes, que la variable quede sola en alguno de los miembros de la ecuación, debemos restar 5x a ambos lados, y sumar 15 a ambos lados, llegando a lo siguiente:

$15 = 8x - 5x \Rightarrow$	Este proceso se llama transposición de términos, y consiste en agrupar en distintos miembros de la ecuación términos independientes y términos con variable, pasándolos de un lado a otro, con los signos invertidos.
$15 = 3x \Rightarrow$	Luego se reducen términos semejantes, de modo que quede un sólo término en cada miembro de la igualdad.
$\frac{15}{3} = x \Rightarrow$	Finalmente, se dividen ambos términos por 3, obteniendo la expresión del lado izquierdo. Este proceso se conoce como "despejar" la incógnita.
$5 = x$	Una vez despejado, se simplifica la expresión resultante, obteniendo el valor de la incógnita.

Note que este proceso, si bien se aprecia más corto en cuanto al procedimiento efectuado, es equivalente al proceso descrito anteriormente. Retomemos otro ejemplo, resuelto ya con anterioridad:

Resolver la ecuación $3x + 6 - x = 4 + x + 2x$

Solución: Siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior, tenemos

$6 - 4 = x + 2x - 3x + x \Rightarrow$	Transponemos términos.
$2 = x$	Reducimos términos semejantes. En este caso, el resultado es un número entero, no tenemos que simplificar.

Veamos ahora, un caso donde las expresiones involucradas sean más complejas:

Resolver la ecuación $x + 3(3x + 1) = 6 - 4(2x + 3)$

Solución: En este ejemplo, tenemos signos de agrupación indicando prioridad en las operaciones, procedemos a eliminar los paréntesis, como sigue:

$x + 3(3x + 1) = 6 - 4(2x + 3)$	En este caso, primero efectuamos las operaciones indicadas con paréntesis.
$x + 9x + 3 = 6 - 8x - 12 \Rightarrow$	Una vez efectuadas las operaciones, trasponemos términos, quedando la expresión como sigue.
$x + 9x + 8x = 6 - 12 - 3 \Rightarrow$	Reducimos términos semejante, llegando a la expresión que sigue.
$12x = -9 \Rightarrow$	Despejando para x, se tiene que
$x = \dfrac{-9}{12} \Rightarrow$	Y simplificando la expresión obtenida
$x = \dfrac{-3}{4}$	

En algunos casos, las ecuaciones involucradas presentan coeficientes fraccionarios, podemos reducirlas a ecuaciones con coeficientes enteros, multiplicando toda la expresión por el mínimo común múltiplo de los divisores. Observemos un ejemplo de ello.

Resolver la ecuación $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{5}$

Solución: El mínimo común múltiplo de 3, 4 y 5 es 60, multiplicando cada fracción en ambos miembros, por 60, se tiene:

$$\frac{60(x-2)}{3} - \frac{60(x-3)}{4} = \frac{60(x-4)}{5} \Rightarrow$$

Efectuando las divisiones indicadas, se tiene que:

$$20(x-2) - 15(x-3) = 12(x-4) \Rightarrow$$

Multiplicando cada paréntesis, tenemos:

$$20x - 40 - 15x + 45 = 12x - 48 \Rightarrow$$

$$20x - 15x - 12x = -48 + 40 - 45 \Rightarrow$$

$$-7x = -53 \Rightarrow$$

$$x = \frac{53}{7}$$

De aquí en adelante, el proceso, es el mismo:
Se transponen términos
Se reducen términos semejantes
Se despeja
Se simplifica

Finalmente, tendremos ecuaciones fraccionarias, donde la incógnita esté presente en el denominador de la expresión. Podemos reducir el caso a los casos anteriores, de la manera que se explica en el siguiente ejemplo:

Resolver la ecuación $\dfrac{2}{4x-1}=\dfrac{3}{4x+1}$

Solución: Multiplicando ambas expresiones por $(4x-1)(4x+1)$ y cancelando factores iguales en ambas fracciones, se obtiene:

$$\frac{2(4x-1)(4x+1)}{4x-1}=\frac{3(4x-1)(4x+1)}{4x+1}\Rightarrow$$ Cancelando factores

$$2(4x+1)=3(4x-1)\Rightarrow$$ Transponiendo

$$8x+2=12x-3\Rightarrow$$ Multiplicando

$$8x-12x=-3-2\Rightarrow$$ Reduciendo

$$-4x=-5\Rightarrow$$ Despejando y simplificando

$$x=\frac{5}{4}$$

> En todos los ejemplos anteriores hemos obtenido un único valor para la variable x. En años posteriores se estudiarán ecuaciones en las cuales sólo podamos encontrar dos valores reales para la variable, ó sólo tres, etcétera.
>
> Todos los valores que puede adoptar la variable para que se satisfaga la ecuación se llaman soluciones o raíces de la ecuación, y se pueden representar en un conjunto, llamado el conjunto solución.

En el caso anterior, podemos decir que $x=\frac{5}{4}$ es la raíz de la ecuación $\dfrac{2}{4x-1}=\dfrac{3}{4x+1}$, y el conjunto solución lo escribimos de la siguiente forma: $S=\left\{\frac{5}{4}\right\}$.

También puede suceder que en una ecuación, la variable pueda tomar cualquier valor real para que se cumpla la igualdad, o bien, que no exista ningún valor real que satisface la ecuación.

Ejemplos:

1. Resolver la ecuación: $-1+3x+4=2x+3+x$

Observe que en este caso, cualquier valor real que tomemos en lugar de x, hace que se cumpla la ecuación:

Valores cualesquiera de x	Valores sustituidos en la ecuación dada
x = 3	$-1+3\cdot3+4=2\cdot3+3+3$ 12 = 12
x = -1	$-1+3(-1)+4=2(-1)+3+-1$ 0 = 0
x = 0	$-1+3\cdot0+4=2\cdot0+3+0$ 3 = 3

Esto sucede porque las dos expresiones de la ecuación son siempre equivalentes, note que $-1+3x+4=3x+3$ y también $2x+3+x=3x+3$.

Observemos lo que sucede si se aplica el procedimiento explicado anteriormente para la resolución de ecuaciones:

$$\begin{gathered}-1+3x+4=2x+3+x\\3x-2x-x=3+1-4\\0=0\end{gathered}$$

En resumen, si al efectuar los procedimientos para resolver una ecuación nos queda la igualdad verdadera de dos números reales, quiere decir que cualquier número real que tomemos en lugar de la variable satisface la ecuación. En el caso anterior, decimos que la solución de la ecuación es IR, y lo escribimos de la siguiente forma: S = IR.

2. Resolver la ecuación $5x+3=2x+2+3x$

Si aplicamos el método de resolución de ecuaciones, se obtiene lo siguiente

$$5x+3=2x+2+3x$$
$$5x-2x-3x=2-3$$
$$0=-1$$

En este caso, obtenemos al final una igualdad de números reales falsa, esto es un indicador de que la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales, es decir, no hay ningún valor real que haga verdadera la igualdad dada. En este caso decimos que la solución de la ecuación es el conjunto vacío y lo escribimos así $S=\emptyset$, o así $S=\{\ \}$.

Otro concepto que es importante conocer es el siguiente:

> Los ceros de un polinomio representado por P(x) son aquellos valores que son soluciones de la ecuación P(x) = 0

Ejemplo: Determine los ceros del polinomio $P(x)=x+\frac{3}{4}$

En este caso, debemos resolver la ecuación $P(x)=0$, es decir, $x+\frac{3}{4}=0$ de modo que obtenemos $x=-\frac{3}{4}$. Entonces decimos que $-\frac{3}{4}$ es el cero del polinomio.

Ejercicios:

A. Crucigrama

Instrucciones: Complete el siguiente crucigrama de acuerdo con las 14 pistas que se le proporcionan, en las cuales aparecen ecuaciones de primer grado con una incógnita. Debe resolver cada una de ellas y, de ser posible, simplificar al máximo los resultados. Junto al crucigrama resuelto deben presentarse todos los procedimientos necesarios para obtener las respuestas.

	b	j		f	
h	c		l		n
a	i		e	m	
	d	k		g	

Pistas:

Horizontal:

a. Solución de la ecuación $\frac{x+3}{4} = 10$.

b. Valor absoluto de la solución de la ecuación $\frac{x+10}{4} = \frac{x-12}{2} - \frac{2x+27}{4}$.

c. La mayor de las soluciones de la ecuación $(-341 + x)(x - 19) = 0$.

d. Numerador de la solución de la siguiente ecuación: $-\frac{1}{3} = 1 - \frac{x}{4}$.

e. Valor absoluto de la solución de la ecuación $-x+\frac{5+3x}{2}=\frac{x-5}{3}$.

f. Conjunto solución de la ecuación $\frac{4}{x-3}=\frac{-5}{-x+3}$.

g. Solución de la ecuación $\frac{x-8}{5}+\frac{x}{3}=\frac{48}{5}$.

Vertical:

h. Denominador de la solución de la siguiente ecuación: $\frac{27x-3}{8}=\frac{x+1}{2}$.

i. Valor absoluto de la solución de la ecuación $4x+3=287$.

j. Numerador y denominador (respectivamente) de la solución de la siguiente ecuación: $\frac{-3}{2x+1}=\frac{2}{-4x}$.

k. La mayor solución de la ecuación $-3x(2x+1)(-x+6)=0$.

l. Solución de la ecuación $3(2x-4)=99-3(x+1)$.

m. Numerador y denominador (respectivamente) de la solución de la siguiente ecuación: $2-\left(\frac{1}{2}+x\right)=-1$.

n. Conjunto solución de la ecuación $-\frac{1}{3}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}-x-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}x$.

B. *Problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita*

Instrucciones: Resuelva los siguientes problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita:

1. El doble de un número aumentado en 15 es igual a su triple disminuido en 6. ¿Cuál es el número?
2. Tres números impares consecutivos suman 27. ¿Cuáles son los números?
3. Si el lado de un cuadrado es aumentado en 8 unidades, su perímetro se triplica. ¿Cuánto mide el lado?
4. Al cine van 210 personas entre hombres y mujeres. Cada hombre paga ¢1500 por su entrada, mientras que cada mujer paga ¢1000. Si la ganancia del cine es de ¢255 000. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay en el cine?

5. Se compran 30 lápices, 15 cuadernos y 5 borradores y se cancela por ello ¢16 710. Si cada cuaderno cuesta el triple de cada borrador, más ¢2 y cada lápiz cuesta el doble de cada borrador, más ¢6. ¿Cuánto cuesta cada material?
6. Un padre tiene 20 años más que su hijo. Dentro de 12 años, el padre tendrá el doble de la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno actualmente?

5. Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Antes de iniciar al alumno en el estudio de las inecuaciones lineales, es fundamental hacer una serie de observaciones respecto al concepto de desigualdad, y algunas de las propiedades de las desigualdades. Se enuncian a continuación algunos aspectos teóricos que se consideran importantes.

> Una desigualdad es una relación de comparación entre dos expresiones algebraicas, utilizando los signos $>$, $<$, $\leq$ y $\geq$

> Una inecuación es una desigualdad donde se involucran incógnitas. La veracidad o falsedad de la expresión depende del valor o valores que tome la incógnita.

A cada valor de la incógnita que verifique la desigualdad se le llama solución de la inecuación, el conjunto de todas las soluciones de una inecuación, usualmente es un intervalo, o un conjunto de intervalos reales.

Algunas de las propiedades de las desigualdades, y por tanto de las inecuaciones, se enumeran a continuación.

- Una desigualdad se mantiene si se le suma o resta un mismo número real a ambos miembros:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c, \forall a, b, c \in IR$$

- Una desigualdad se preserva si se le multiplica o divide por un número real **positivo**:

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c, \forall a, b \in IR, c \in IR^{+}$$

$$a < b \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}, \forall a, b \in IR, c \in IR^{+}$$

- Una desigualdad se invierte si se le multiplica o divide por un número real **negativo**:

$$a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c, \forall a, b \in IR, c \in IR^{-}$$

$$a < b \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \forall a, b \in IR, c \in IR^{-}$$

El procedimiento para resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita es muy similar al proceso para resolver ecuaciones de primer grado. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que, por la tercera propiedad, al dividir o multiplicar la inecuación por un número negativo, debe invertirse el orden de la desigualdad.

Tomemos como ejemplo el siguiente caso:

Resolver la inecuación $3 - (m - 3) \geq 2(2m + 5)$

Solución: efectuando las operaciones para eliminar los signos de agrupación, se tiene

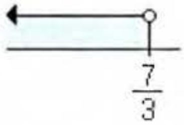
$3 - m + 3 \geq 4m + 10 \Rightarrow$	Transponiendo términos.
$-m - 4m \geq 10 - 3 - 3 \Rightarrow$	Reduciendo términos semejantes.
$-5m \geq 4 \Rightarrow$	Despejando.
$m \leq \frac{-4}{5}$	Observe el cambio de sentido de la desigualdad

Luego, el conjunto solución de la inecuación son los números reales menores o iguales que $\frac{-4}{5}$, es decir, el intervalo $\left]-\infty, \frac{-4}{5}\right]$

Ejercicios:

A. Inecuaciones de primer grado

Instrucciones: A continuación se le presentan 10 inecuaciones. Complete la tabla con su resolución y además, con la representación gráfica y notación de intervalo de la solución obtenida en cada caso. Observe el ejemplo que se plantea al inicio de la tabla.

	Inecuación	Resolución	Representación gráfica	Notación de intervalo
a.	$7x+2<4x+9$	$7x+2<4x+9$ $3x<7$ $x<\frac{7}{3}$		$\left]-\infty,\frac{7}{3}\right[$
b.	$2x-3\leq 5x+7$			
c.	$\frac{2x-4}{3}>2x+8$			
d.	$2-(5x+1)\leq -(2x+3)+x$			
e.	$\frac{-4}{-2x+1}<0$			
f.	$\frac{7x-3}{-6}>0$			
g.	$-3\leq x+4<5$			

h.	$-1 < \frac{3x+2}{5} \leq 9$			
i.	$-3 > 2x + 4 > 7$			
j.	$x - \frac{6-2x}{4} \leq 2x + 2 - \frac{3-x}{2}$			
k.	$\frac{3x-3}{5} - \frac{4x+8}{2} < \frac{x}{4} - 3x$			

B. Problemas con inecuaciones de primer grado con una incógnita

Instrucciones: Resuelva los siguientes problemas que involucran inecuaciones de primer grado con una incógnita:

1. Considere rectángulos cuya base es el triple de su altura. ¿Qué valores puede tomar la base para que el perímetro del rectángulo sea mayor que 24 m?
2. Un padre y su hijo se llevan 31 años. Determinar en qué período de sus vidas, la edad del padre excede en más de 5 años al triple de la edad del hijo.
3. Se quiere construir un triángulo de altura 20 cm, de modo que su área esté comprendida entre 200 y 400 cm² (podría ser incluso alguno de estos dos valores) ¿Qué medida puede tener la base del triángulo?
4. Un automóvil se desplaza por una carretera a una cierta velocidad constante que está comprendida entre los 80 y 100 km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del automóvil al punto de partida al cabo de 5 horas?. Nota: Recuerde que $v = \frac{d}{t}$.

3.2.2 Unidad 2: Conceptos y nociones elementales de geometría plana

Introducción

Las dos unidades temáticas de sétimo año, y la primera unidad de octavo año introducen al estudiante, respectivamente, en el conocimiento del conjunto de los números reales, sus propiedades y su operacionalización; la noción de vector, y las operaciones en espacios vectoriales, particularmente en la interpretación del plano como espacio vectorial; y en el desarrollo de las nociones algebraicas básicas.

Estos tres elementos, en conjunto, constituyen la plataforma para que ahora el alumno pueda abordar los contenidos elementales de la geometría elucídela clásica, desde una perspectiva mucho más integradora, significativa y, por tanto, más enriquecedora.

No se pretende en esta propuesta, como se ha venido recalcando desde un principio, desechar de la educación general básica el enfoque clásico de la geometría en pos de plantear el estudio de "otras geometrías", sino dotar al docente y al estudiante con un instrumento que le permita abordar los mismos contenidos clásicos de geometría, pero haciendo uso de una herramienta mucho más poderosa, que le permita alcanzar (¿y por qué no, demostrar?) con una mayor naturalidad los resultados que hoy día se estudian, y trascenderlos, permitiendo abordar los contenidos desde otras aristas, planteando situaciones nuevas que, desde el abordaje tradicional es imposible abordar en la actualidad.

Es así, que a lo largo de la presente unidad, el docente se encontrará frecuentemente con conceptos y resultados bastante conocidos, los cuales en muchos casos, inclusive, se enuncian sin ninguna modificación de su formulación clásica. Podrá apreciar, sin embargo, cómo la manera de abordar estos resultados, de deducirlos, demostrarlos, y utilizarlos en la resolución de ejercicios difiere del enfoque tradicional; y en muchas situaciones, cómo estos resultados se conjugan con la herramienta algebraica y vectorial, para deducir nuevos resultados, para comprobar situaciones que eran de tediosa o imposible comprobación por métodos clásicos; y cómo este enfoque permite abordar nuevos tipos de ejercicios.

Unos cuantos ejemplos sencillos, aunque no por ello carentes de relevancia, de este tipo de situaciones se puede encontrar en el hecho de comprobar cuándo un punto dado pertenece a una recta dada o cuándo dos segmentos dados son paralelos o perpendiculares entre sí. La herramienta algebraica y vectorial posibilita afrontar este tipo de situaciones usando un lenguaje conciso y de fácil manipulación para el estudiante una vez que éste ha adquirido el conocimiento de los vectores y la comprensión del lenguaje algebraico al menos a un nivel elemental.

Sí es necesario, sin embargo, incorporar unos cuántos conceptos nuevos, que facilitarán la comprensión de algunas de las nociones y contenidos clásicos. Tal es el caso de las transformaciones isométricas, las cuales son un mecanismo útil y sumamente valioso para la demostración y la comprensión de algunas de las propiedades de simetrías y congruencias en ciertas figuras geométricas. A la vez, el uso de transformaciones isométricas, permite dar un paso más hacia la formulación de la idea intuitiva de función, que será explotada en el cuarto ciclo. Por esa razón se ha dedicado un apartado entero de esta unidad al desarrollo de la teoría de las reflexiones, rotaciones y traslaciones en el plano.

Además, se plantean otros ejercicios, como complemento de los ejercicios tradicionales de geometría trabajados en octavo

Aprendizajes esperados

Se espera que, al finalizar esta unidad, los estudiantes se encuentren en capacidad de:

1. Reconocer y representar simbólica y gráficamente los conceptos de punto, recta, plano, rayo, ángulo, segmento, punto medio, puntos colineales y no colineales, paralelismo, concurrencia y perpendicularidad
2. Establecer relaciones entre puntos y rectas en un plano.
3. Visualizar y aplicar las transformaciones isométricas a un nivel intuitivo a partir de material concreto.
4. Deducir las propiedades que se mantienen invariantes bajo las transformaciones isométricas.
5. Clasificar de los ángulos de acuerdo con su medida y de acuerdo con su posición.
6. Establecer relaciones entre las medidas de los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal haciendo uso de las propiedades de las transformaciones isométricas.
7. Deducir las propiedades fundamentales referentes a lados y ángulos de un triángulo utilizando, cuando sea posible, las propiedades de las transformaciones isométricas.
8. Deducir las propiedades fundamentales referentes a lados y ángulos de un cuadrilátero utilizando, cuando sea posible, las propiedades de las transformaciones isométricas.
9. Aplicar las propiedades fundamentales referentes a lados y ángulos de un triángulo o cuadrilátero en situaciones extraídas de diferentes contextos.
10. Aplicar los conceptos de áreas y perímetros de triángulos y cuadriláteros en situaciones extraídas de diferentes contextos.

Secuencia de contenidos y actividades sugeridas

1. Nociones básicas de geometría.

El primer concepto que se desarrollará es el de recta, ya que los conceptos de punto y plano se desarrollaron en la primera unidad de sétimo año con el tema de plano cartesiano. Luego se estudiarán los conceptos de segmento, punto medio de un segmento, mediatriz de un segmento, rayo, rectas paralelas y rectas perpendiculares.

Todos estos conceptos se desarrollarán utilizando los vectores como una herramienta que permita definir dichos conceptos con un nuevo enfoque. El docente debe tener presente que los estudiantes poseen conocimientos de estos conceptos, por lo que es importante que partan de ellos para utilizar de una forma natural la nueva herramienta, que son los vectores.

El concepto de recta es estudiado por los alumnos desde sus primeros años de vida escolar, en donde se trabaja de forma muy natural, utilizando ejemplos reales y concretos. Para incluir los vectores en los conceptos de geometría debemos iniciar con la noción de recta; partiendo de que dadas dos puntos A y B existe una única recta que los contiene, se le hace ver a los estudiantes que también esos dos puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB}$, y que dicho vector se puede estirar en dos direcciones si lo multiplicamos por un número real positivo o negativo. De esta forma se muestra a los estudiantes que toda recta está determinada por un vector, para luego llevar al estudio de la ecuación vectorial de la recta y el vector director que la caracteriza.

Luego de haber estudiado de forma minuciosa la ecuación vectorial de la recta, el estudiante va a contar con una herramienta muy útil para resolver problemas con los que las herramientas clásicas no permiten trabajar, como demostrar que tres o más puntos son colineales, o establecer si un punto pertenece o no a una recta dada.

A partir de esta noción, todos los demás conceptos se van desarrollando de una forma más fluida, ya que, por ejemplo, los conceptos de segmento y rayo van a ser casos particulares de la recta; y los conceptos de rectas paralelas y perpendiculares van a utilizar las definiciones de vectores paralelos y perpendiculares de una forma natural. Sin embargo, es importante recordar que al inicio de cada concepto es necesario el docente inspeccione los conocimientos previos que tiene el estudiante, para que de esta forma el alumno pueda ir ligando lo que ya conocía con lo que aprenderá en esta unidad; y no que lo vea como objetos completamente aparte, sin ningún tipo de conexión.

Toda la teoría de vectores estudiada en la primera unidad de sétimo año va a ser un instrumento de gran utilidad en la resolución de problemas que antes se estudiaban de forma intuitiva, y que ahora van a poder verificarse de una forma más confiable y segura.

De esta forma, en esta unidad se formalizarán conceptos elementales de geometría, muchos de los cuales el alumno ha adquirido con anterioridad desde la escuela primaria, desde el enfoque geométrico clásico. Lo que se pretende es, entonces, usar la herramienta vectorial y algebraica en dicha formalización, para que, además, permita al estudiante abordar nuevas situaciones más enriquecedoras.

Actividad 1.1. Noción de Recta

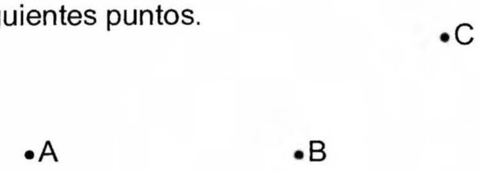
Como se estableció anteriormente, es importante que el docente conozco la noción de recta que el estudiante posee antes de iniciar a introducir los vectores en el estudio de las rectas. Para ello se sugiere hacer en forma oral preguntas sobre qué es para ellos una recta, o en dónde se observan figuras que remitan a la idea de recta.

Luego de haber descartado algún error importante sobre dicho concepto se puede empezar a trabajar en el plano, por medio de preguntas, y llegar de esta forma a resultados importantes de la geometría. En la presente actividad los estudiantes deducen con la ayuda del docente, que por un punto A pasan infinitas rectas, por dos puntos A y B pasa una única recta, y que por tres puntos A, B y C pasa una recta solo si los puntos son colineales.

Luego de que los estudiantes hayan analizado y contestado las preguntas es muy enriquecedor que el docente sintetice y amplíe los resultados obtenidos.

Instrucciones

1) Considere los siguientes puntos.



¿Cuántas rectas pueden trazarse por el punto A?

¿Cuántas rectas pueden trazarse, que contengan al mismo tiempo los puntos A y B?

¿Puede trazarse una recta que contenga al mismo tiempo a los puntos A, B y C?

Observe el docente que a partir de las conjeturas planteadas por los estudiantes, se pueden deducir los siguientes axiomas de incidencia:

- Por un punto dado del plano pueden trazarse infinitas rectas.
- Por dos puntos distintos del plano puede trazarse una única recta.

También puede introducirse la noción intuitiva de puntos *colineales* y *no colineales*.

Actividad 1.2: Construcciones con regla y compás

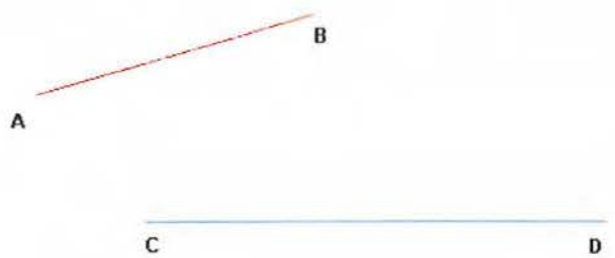
No debe dejarse de lado, la manipulación concreta con regla y compás de los conceptos geométricos; si bien es cierto, vamos a introducir una herramienta mucho más poderosa que son lo vectores, pero para el desarrollo cognitivo del estudiante, el poder trabajar con material concreto, con medidas de segmentos, entre otras cosas, permite una mayor significación de la teoría estudiada.

En esta actividad se pretende que el estudiante manipule las figuras geométricas y establezca relaciones con la medida algebraica de las mismas. Al mismo tiempo permite que el alumno utilice la fórmula de Chasles de una forma concreta y práctica.

Materiales

- Regla
- Compás

Instrucciones: Trace una recta y coloque el punto R, luego coloque el punto S tal que RS= AB + CD. Puede realizarse con compás o regla graduada.

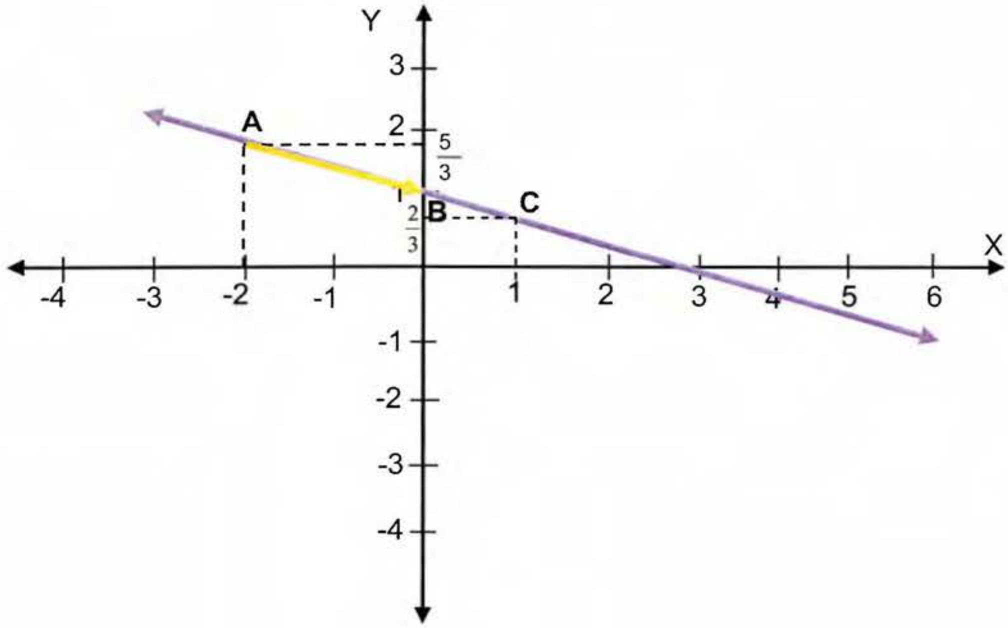


Actividad 1.3. Conceptos básicos con vectores

A continuación se presentarán ejercicios en donde se muestre la utilización de los vectores en la resolución de problemas. Estos son solo unos pocos ejemplos, el docente podrá enriquecer dicho material e incursionar en nuevos y más complejos problemas para los estudiantes.

Ejercicios de rectas

A. Considere la siguiente recta $\overleftrightarrow{AB}$ y comprobemos que el punto C(1, $\frac{2}{3}$) pertenece a dicha recta.



B. Compruebe si la recta *m* que contiene los puntos (1,0) y (0,1) puede tener un vector director $\vec{v}$ de coordenadas $(-5,-5)$

Ejercicios con segmentos y rayos

A. Si los puntos extremos del segmento $\overline{AB}$ son A(-1,-2) y B(2,3). Determine la ecuación de dicho segmento y luego.

B. Determine si los puntos $P\left(-4,\frac{-2}{3}\right)$, $Q\left(-5,\frac{-7}{3}\right)$ y $R(-8,\ -14)$ pertenecen al rayo de ecuación $\overrightarrow{AX} = k(-3,-5)$, con $0 \leq k$ y A(-3,1).

Actividad 1.4 Rectas perpendiculares y paralelas.

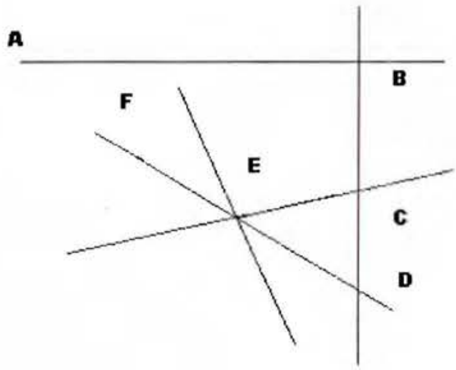
Es de gran importancia que los estudiantes identifiquen rectas paralelas y perpendiculares en diferentes contextos. En muchas ocasiones los docentes nos limitamos a dibujar este tipo de rectas de forma aislada, sin que se obligue a los estudiantes a interiorizar dichos conceptos. Los ejemplos propuestos se pueden modificar ya sea para el caso de rectas paralelas o perpendiculares

Materiales:

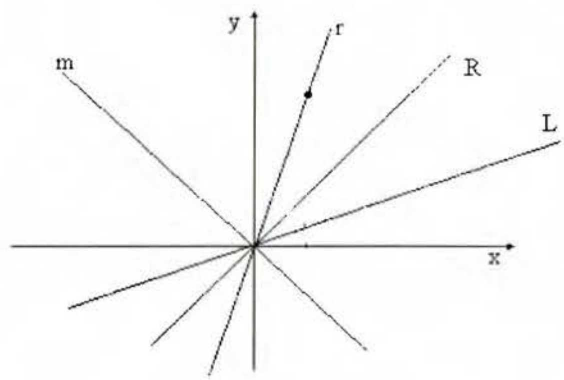
- Escuadra o transportador.

Instrucciones: En cada caso mencione que pares de rectas son perpendiculares y verifique con escuadra o transportador.

a)



b)



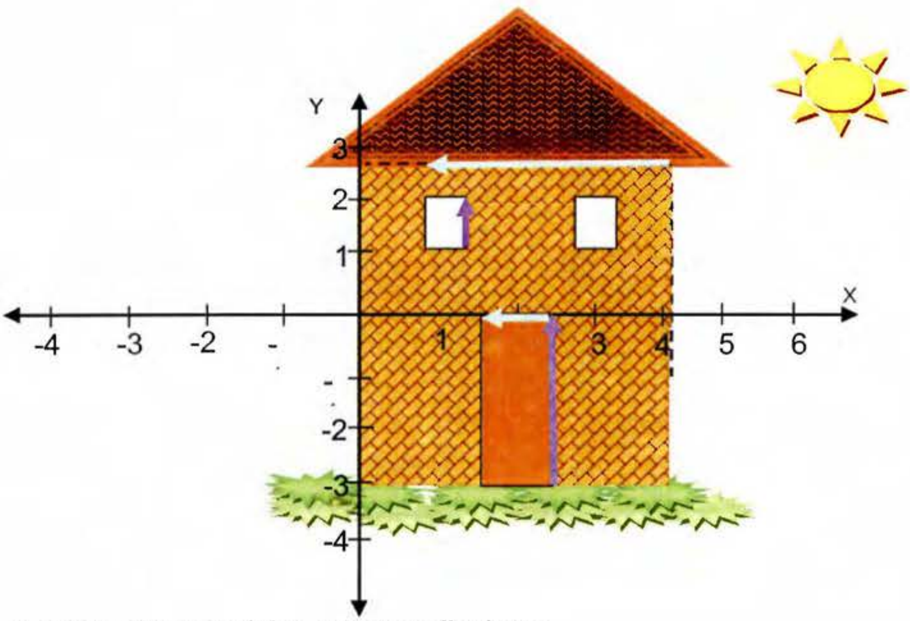
c)

d)

Actividad 1.5 Rectas perpendiculares y paralelas con vectores.

Trabajar con ejercicios que llamen la atención al estudiante puede ser de gran ayuda para luego introducir ejercicios más prácticos. Un ejemplo de esto puede ser el siguiente.

Instrucciones: Compruebe que la casetilla del guarda parques está bien construida, es decir, que los vectores verticales señalados con lila son paralelos entre sí, y los vectores horizontales señalados con turquesa son paralelos entre sí. Además, compruebe que los vectores horizontales son perpendiculares a los verticales.



Ejercicios con rectas paralelas y perpendiculares.

A. Si la recta *m* tiene como vector director el $\overrightarrow{AB}$ de coordenadas (6,-8) y la recta *p* tiene como vector director a $\overrightarrow{CD}$ de coordenadas $(3,-4)$. Determine si las rectas m y p son paralelas.

B. Si la recta *m* tiene como vector director el $\overrightarrow{AB}$ de coordenadas $\left(1,\frac{-4}{3}\right)$ y la recta *p* tiene como vector director a $\overrightarrow{CD}$ de coordenadas $\left(3,\frac{9}{4}\right)$. Determine si las rectas m y p son perpendiculares.

C. Si la recta q contiene a los puntos A (5,1) y B (11,-3) y la recta p contiene los puntos C(-8,6) y D(18,8). Determine si $q \perp p$.

2. Axiomas de incidencia

Es fundamental, inclusive antes de comenzar a trabajar con conceptos geométricos desde un enfoque algebrizado, que el alumno tenga claros algunos postulados básicos, tal es el caso de los axiomas de incidencia clásicos de la geometría euclídea. A continuación se presentan algunas sugerencias sobre la manera de formular tales axiomas de una forma intuitiva, y haciendo uso de material concreto.

Actividad 2.1. Propiedades de tres o más rectas.

Es de gran importancia que el docente permita a los estudiantes deducir algunos de los teoremas y axiomas referentes a rectas. De esta forma el docente deberá proporcionarles las herramientas necesarias para lograrlo. En la presente actividad el docente dictará indicaciones para que el estudiante las dibuje en su cuaderno y luego pueda deducir algunos resultados importantes. De esta forma se pueden deducir muchas otras relaciones entre rectas y puntos en un plano a la vez que se está mostrando de manera gráfica algunos de los resultados. También se motiva a la construcción y elaboración de material.

Materiales:

- Regla

Instrucciones: Se le darán al alumno las siguientes indicaciones al estudiante para que trabaje en su cuaderno:

- Trace una recta en rojo
- Trace con verde dos rectas paralelas a la recta en rojo
- ¿Qué se puede decir de las dos rectas verdes?

- Trace una recta en rojo
- Trace con verde dos rectas perpendiculares a la recta en rojo
- ¿Qué se puede decir de las dos rectas verdes?

- Trace una recta en rojo
- Trace con verde una recta perpendicular y una recta paralela a la recta en rojo
- ¿Qué se puede decir de las dos rectas verdes?

- Trace una recta l y un punto fuera de ella al que llamaremos M
- Trace una recta perpendicular a l que contenga el punto M.
- ¿Existe otra recta perpendicular a l que contenga el punto M?
- Trace una recta paralela a l que contenga al punto M
- ¿Existe otra recta paralela a l contenga a M?

Note el docente que, con el desarrollo de la actividad anterior, se espera que el estudiante plantee, a manera de conjetura, los siguientes axiomas:

- Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
- Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
- Una recta paralela y una perpendicular a una recta dada son perpendiculares entre sí.
- Por un punto dado, fuera de una recta dada, sólo puede trazarse una única paralela y una única perpendicular a la recta original.

3. Transformaciones isométricas

a. Rotaciones
b. Traslaciones o desplazamientos
c. Reflexiones o simetrías

Las transformaciones isométricas es un tema que actualmente no está presente en los programas de estudio de nuestro país. Este tema tiene una gran utilidad en el estudio de algunas propiedades de las figuras geométricas y su aprendizaje favorece el desarrollo de habilidades espaciales e intelectuales.

Otra ventaja de introducir el tema, es que este se aplica de forma muy directa en el arte y en situaciones de la vida cotidiana, por lo que permite al docente tener una amplia gama de contextos en donde aplicar los conocimientos obtenidos por los estudiantes.

El tema, se desarrollará en forma muy intuitiva y concreta. Se introducirá implícitamente el concepto de función de una forma muy natural, sin profundizar en detalles, ya que lo que se pretende es que el estudiante empiece a involucrarse con dichos conceptos a más temprana edad y de una forma muy familiar.

Actividad 3.1. Redes modulares

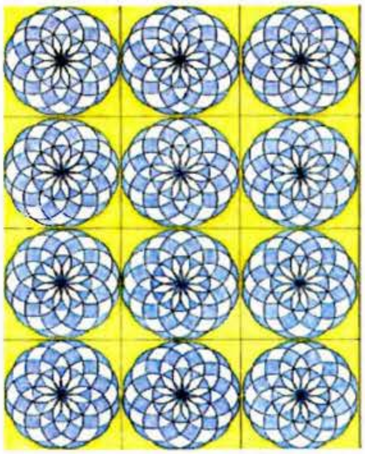
Con la siguiente actividad se busca que el estudiante construya algunas redes modulares que le permitan deducir con qué tipo de figuras geométricas se puede cubrir totalmente una superficie sin dejar espacios vacíos. Es importante que los estudiantes analicen porqué con los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos regulares son las únicas figuras con las que se puede lograr el objetivo.

También es importante que el estudiante describa el tipo de movimiento que realiza para crear las redes modulares.

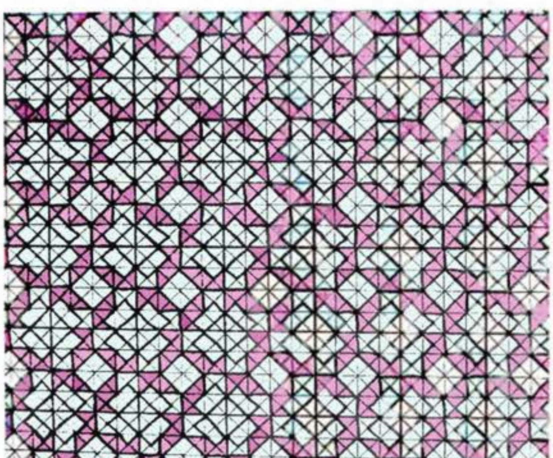
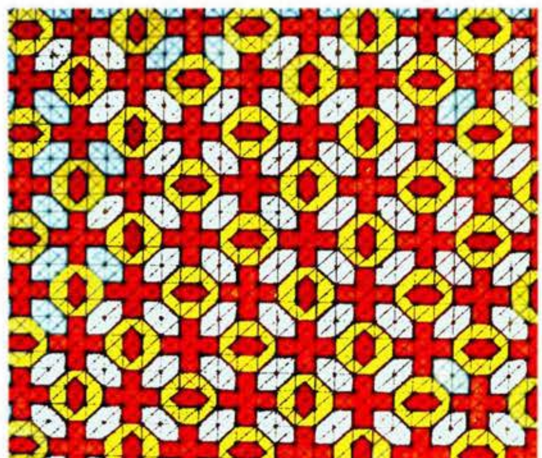
Materiales:

- Regla
- Lápices de color
- Hojas blancas o papel construcción

Instrucciones: Se les mostrará a los estudiantes algunos diseños de redes modulares y se analizará en forma oral los diferentes usos. Algunos ejemplos son:





Luego cada estudiante con su papel deberá diseñar una red modular, utilizando para ello figuras geométricas elementales (cuadrados, rombos, triángulos, rectángulos, hexágonos, etcétera).

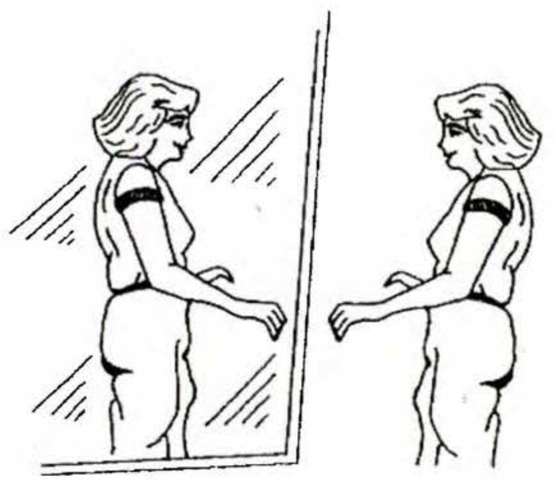
Actividad 3.2 Noción de simetría

Para introducir la noción de simetría se puede trabajar con un espejo, en donde se analizará la imagen reflejada en cuanto a orientación, puntos homólogos, eje de simetría, para luego profundizar más en propiedades invariantes como el paralelismo, la medida de ángulos y medida de segmentos

Materiales:

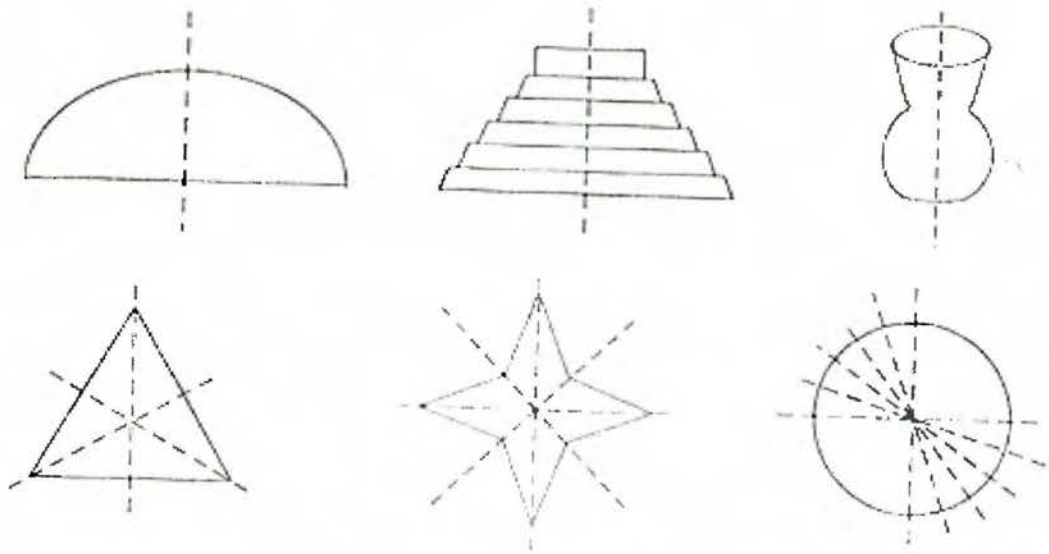
- Espejo
- Regla
- Papel cuadriculado

Ejemplo:



Puede observarse que en la imagen no se conserva la orientación (la derecha se convierte en izquierda y la izquierda en derecha). También se les puede dar diferentes figuras para que el estudiante encuentre los ejes de simetría, pueden utilizar en doblado del papel o los instrumentos geométricos.

Ejemplo:



Actividad 3.3 Construcción de figuras simétricas

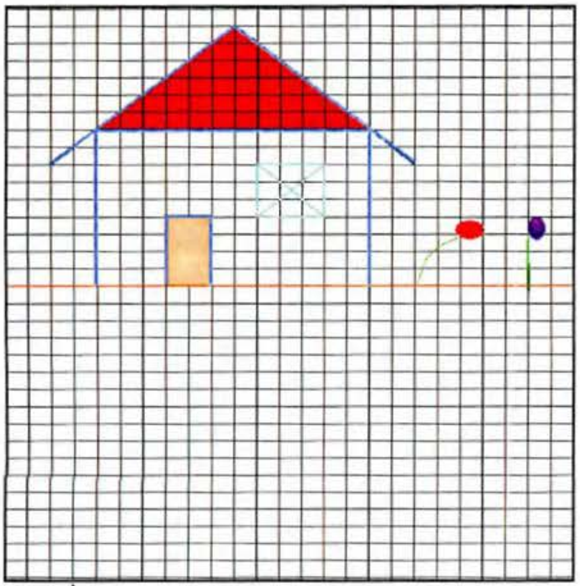
Enfatizar la construcción de figuras utilizando instrumentos geométricas es de gran importancia para el proceso de enseñanza aprendizaje de los alumnos. Construir figuras permite el desarrollo de la motora fina y una mejor visualización de los conceptos a estudiar. El docente debe crear una situación de aprendizaje que facilite la adquisición del conocimiento, y la construcción de figuras simétricas es un ejemplo de ellos. Es bueno dar un espacio para que el estudiante analice cómo puede construir lo pedido y en caso necesario dar las pautas para lograr el objetivo

Materiales:

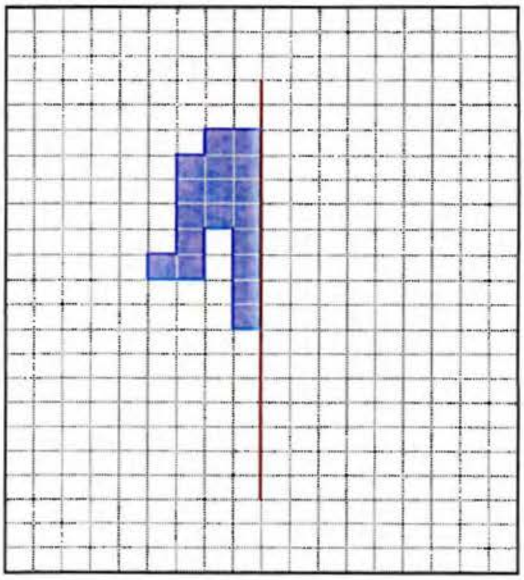
- Fotocopia de papel cuadriculado con figura.
- Regla.

Instrucciones: Dibuje la figura simétrica de cada una de las figuras dadas con respecto al eje l.

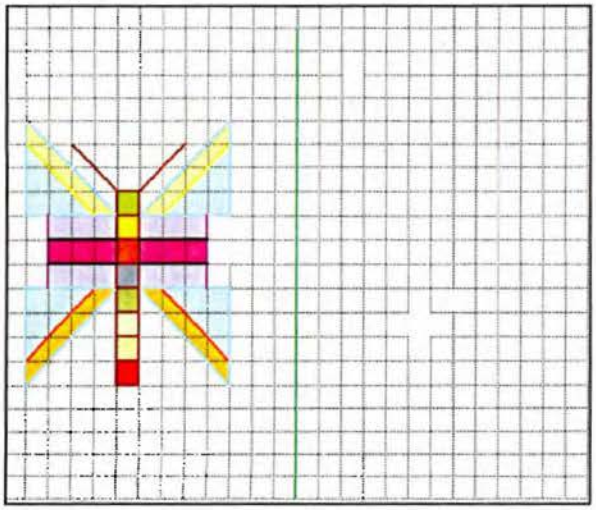
a)



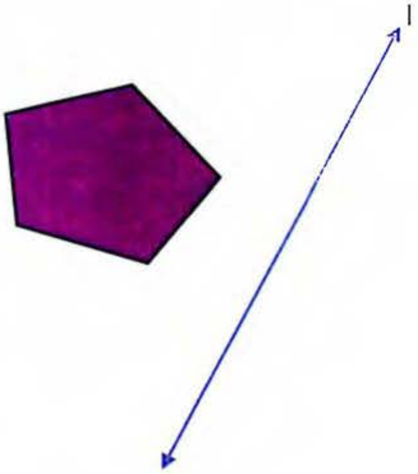
b)



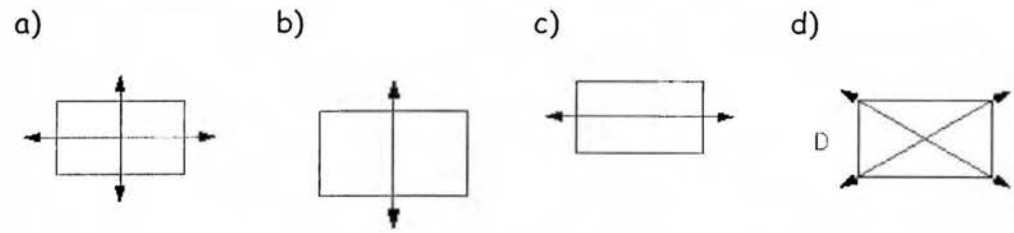
c)



d)



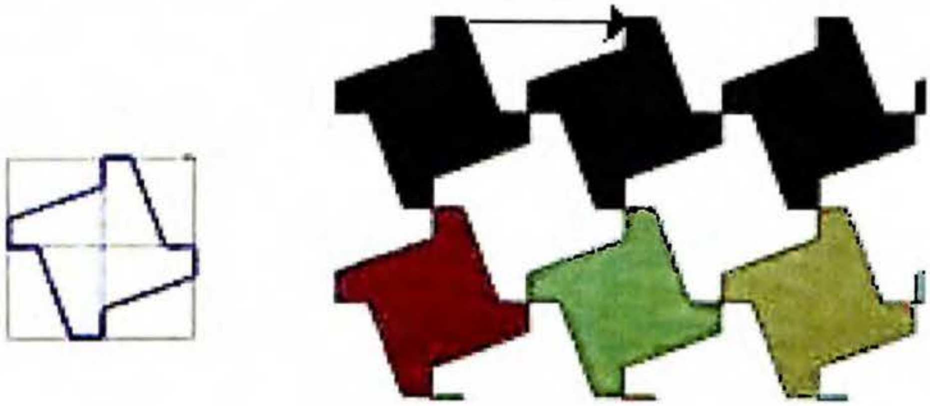
e) Identifica en cuál de los casos se presenta simetría axial.



Actividad 3.4 Noción de traslación

Al trabajar con traslaciones de figuras, el docente deberá aclarar que basta con trasladar los vértices de la figura de acuerdo con el vector dado, y luego solamente se completa la figura con regla, trazando líneas que contengan los puntos trasladados para formar la figura trasladada.

Instrucciones: Se le pide al estudiante que cree una figura y que la traslade según la magnitud y dirección que indique la flecha dada



4. Ángulos

El tema de ángulos ha sido por mucho tiempo un contenido en donde se han desarrollado polémicas, principalmente en el concepto de ángulo y en la clasificación de los mismos. En el presente documento se dan las guías necesarias para que el docente pueda desarrollarlo de una manera sencilla y natural.

Como es habitual, es necesario partir del concepto de ángulo que los estudiantes conocen y aprendieron en la escuela, para luego ir introduciendo poco a poco la nueva visión.

En este nivel, el alumno posee la herramienta de las rotaciones, las cuales utilizaron como conocimiento previo el concepto euclídeo de ángulo. En dicho tema se aclaró y justificó que el ángulo de la rotación debe pertenecer al intervalo $]-180°,180°[$. A partir de esto, se estudiarán los ángulos en una circunferencia de radio una unidad, en el plano cartesiano y centrada en el origen, en donde se propondrá el estudio del concepto de arco de una forma básica. Es importante aclarar que el estudio propiamente de arcos se dejará para años superiores, y lo que se pretende a este nivel es ir creando las bases necesarias para que el estudiante pueda integrar de una forma significativa ambos conocimientos.

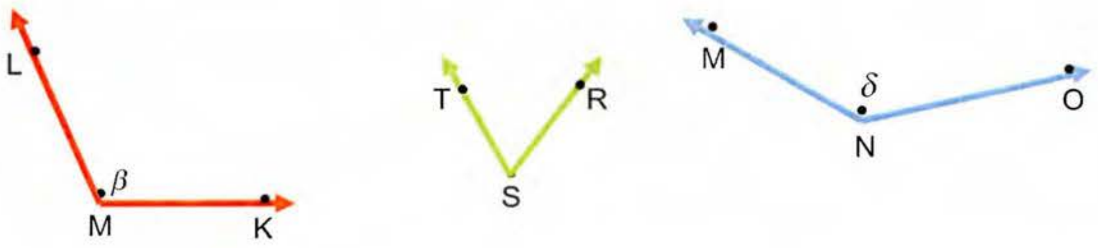
De esta forma se verá que todo ángulo en la circunferencia determina dos arcos, el arco mayor y el arco menor, y que la medida del arco menor coincide con la medida del ángulo, y que todo arco mayor tiene un arco menor que determina el ángulo de la rotación. Asimismo se estudiarán ángulos cuyas medidas pertenecen al intervalo de$]-180°,180°[$ y arcos cuyas medidas pertenecen al intervalo $[-360,360[$.

De todo lo anterior, se puede decir que no hay ángulos cuya medida sea 0°, sino que se le llama arco nulo; no hay ángulo cuya medida sea 180°, sino que hay un arco que forma la semicircunferencia. Por lo tanto, dentro de la clasificación se estudiarán los ángulos agudos, rectos y obtusos; y algunos otros conceptos como ángulos congruentes, ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos adyacentes, ángulos opuestos por el vértice y par lineal.

Actividad 4.1. Notación de ángulos

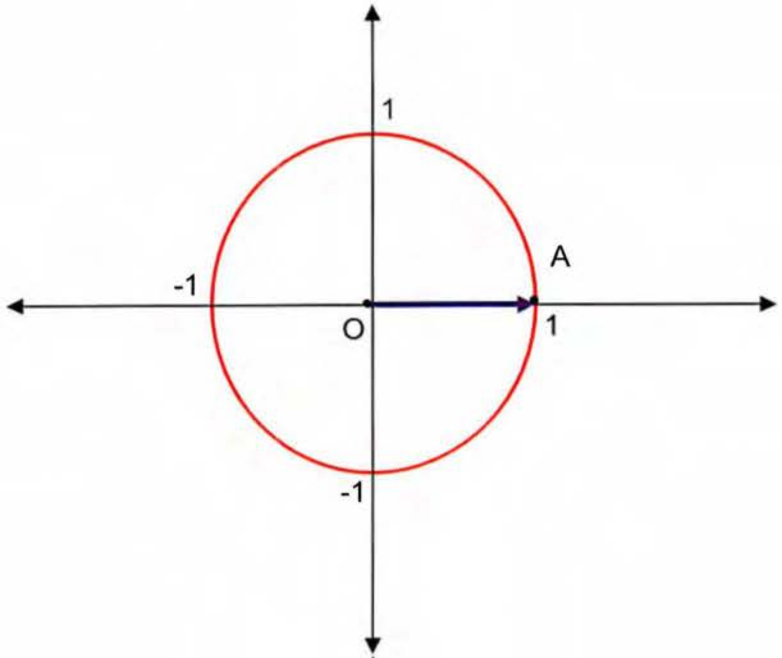
El estudiante debe estar en la capacidad de utilizar diferentes formas de nombrar un ángulo, para que esto no se convierta en un obstáculo.

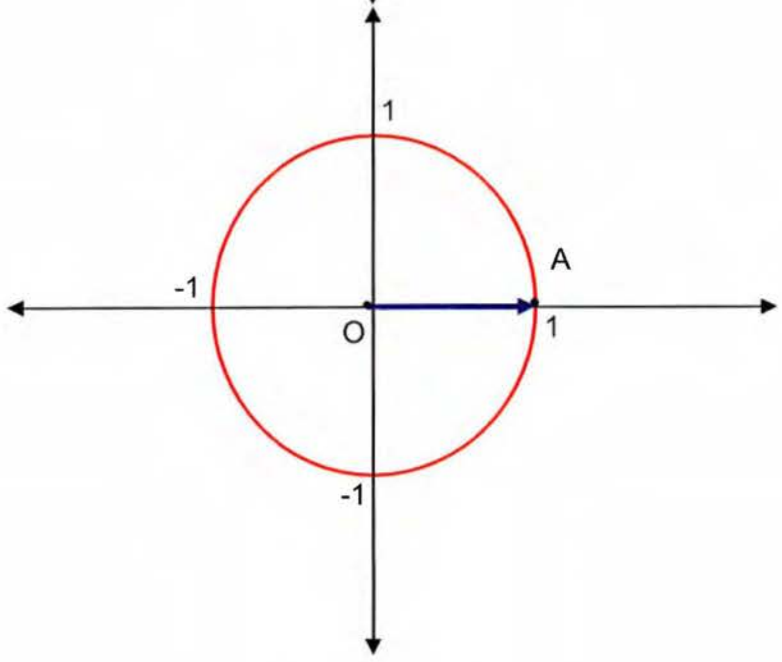
Instrucciones: A continuación se le presentan una serie de ángulos, escriba al menos dos formas de denotar el ángulo.



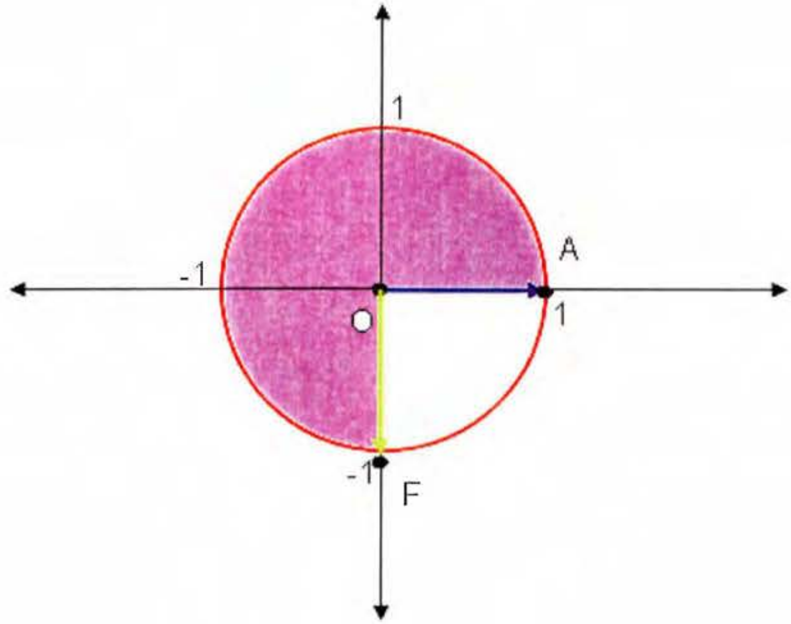
Actividad 4.2. Arcos

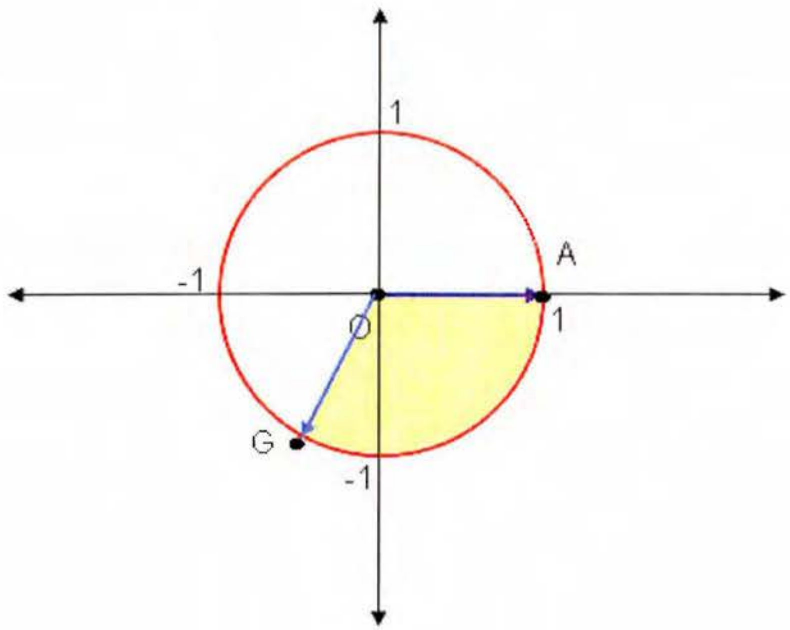
Instrucciones: Dibuje en cada uno de los siguientes planos, un arco de 240° y un arco de 380°, y determina el ángulo de la rotación que le dio origen a cada uno.


1
A
-1
O
1
-1


1
A
-1
O
1
-1

Determine la medida en grados de cada uno de los siguientes arcos

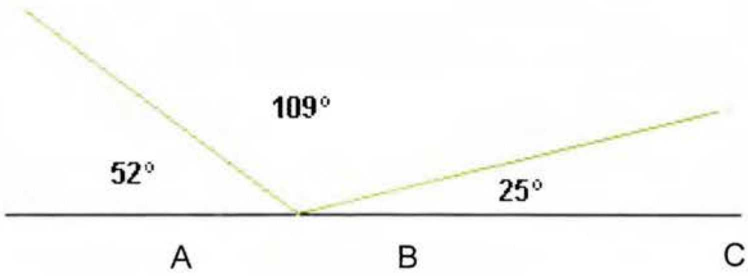




Actividad 4.3

Este ejercicio exige que el estudiante utilice y relacione diferentes conceptos como son puntos colineales, ángulos y medida de ángulos. Se invita al docente a, en la medida de lo posible, utilizar las herramientas vectoriales en la resolución, por ejemplo, el uso del producto punto para determinar perpendicularidad.

Instrucciones: De acuerdo con los datos de la figura, ¿Los puntos A, B, C pertenecen a una misma línea?



Ejercicios de ángulos

A. Clasifique los siguientes ángulos según su medida.

$m\angle\alpha = 145°$ ________________

$m\angle\beta = 15°$ ________________

$m\angle\theta = 90°$ ________________

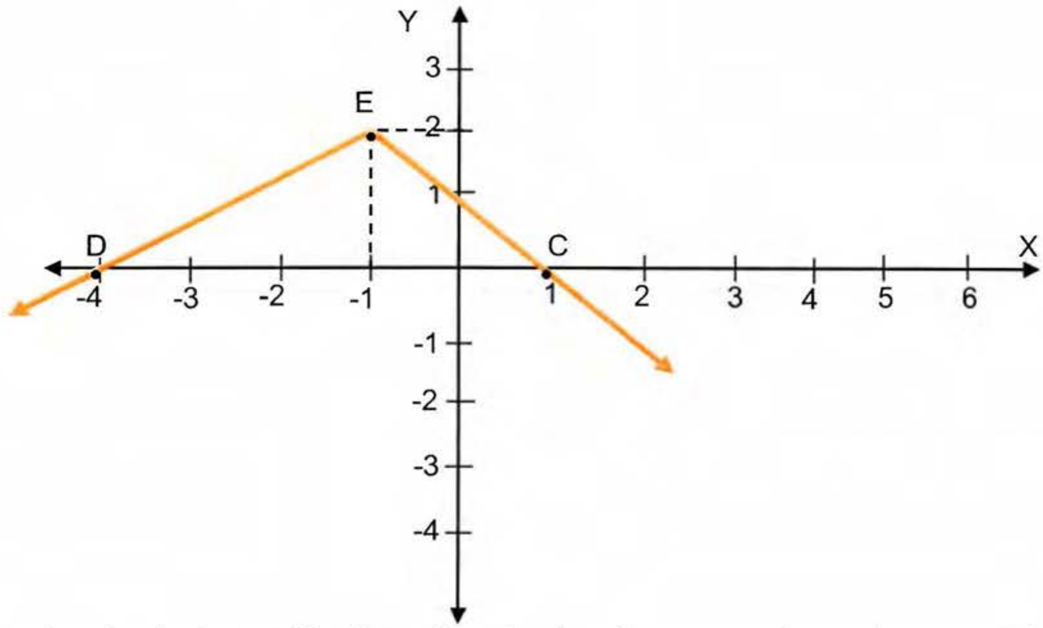
$m\angle\rho = 179°$ ________________

B. Clasifique el ángulo $\angle ABC$ en agudo, recto u obtuso si:

a) A(2,3), B(5,4) y C(6,-1)
b) A(-18,0), B (-1,7) y C(-2,0)
c) A(-3,1), B(-5,4) y C(-2,6)

Indicación: trabajar en el plano cartesiano

C. Tomando en cuenta el siguiente gráfico, determine si el ángulo $\angle DEC$ es agudo, recto u obtuso.



D. Complete la siguiente tabla determinando el suplemento y el complemento del ángulo $\angle A$.

$m\angle A$	Suplemento del $\angle A$	Complemento del $\angle A$
27 º		
	135º	
	92º	
		36º

5. Ángulos comprendidos entre dos rectas paralelas y una transversal.

El tema de ángulos entre dos rectas paralelas y una transversal se ha estudiado tradicionalmente en sétimo año, y no se ha explotado su importancia y utilidad.

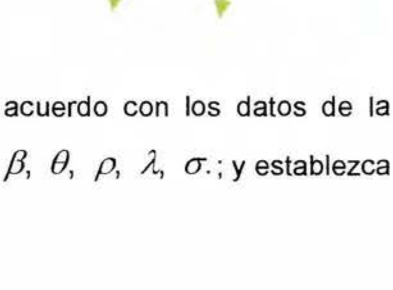
Lo primero que hay que tener presente es que el tema se va a introducir dando los diferentes nombres a los ángulos que se determinan entre dos rectas (no necesariamente paralelas) y una transversal. Luego se va a estudiar el caso en donde las dos rectas sean paralelas, y por medio de las transformaciones donde las dos rectas sean paralelas, y por medio de las transformaciones isométricas se llegará a las diferentes relaciones entre los ángulos. Por ejemplo los estudiantes podrán visualizar que si las dos rectas son paralelas entonces los ángulos alternos internos son congruentes, y viceversa. De esta forma el estudiante tendrá otra herramienta para determinar si dos rectas dadas son paralelas o no.

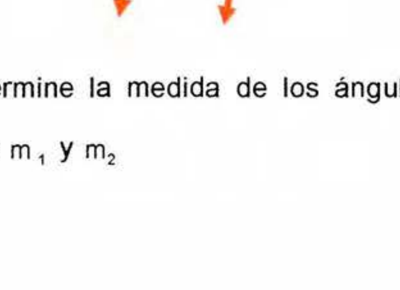
Este tema también se tornará de gran utilidad cuando se estudien triángulos y cuadriláteros, ya que permite visualizar y demostrar muchas características de dichas figuras.

Es importante que el docente no se olvide de ir trabajando de forma paralela con los temas nuevos y los temas anteriores (en la medida de lo posible), de forma que el estudiante tenga a la mano una mayor cantidad de herramientas para la resolución de problemas.

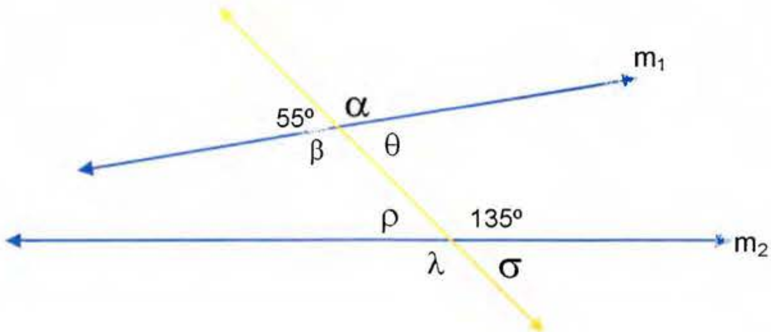
Ejercicios:

A. Determine la medida del ángulo $\angle\alpha$, en cada caso, las rectas $d_1 // d_2$

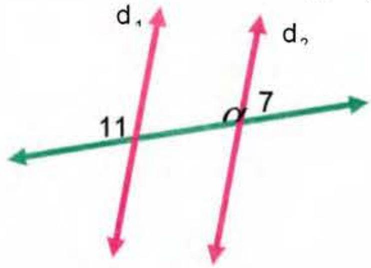




B. De acuerdo con los datos de la figura, determine la medida de los ángulos α, β, θ, ρ, λ, σ.; y establezca si las rectas m_1 y m_2



C. De acuerdo con los datos de las siguientes figuras, determine en cada caso la medida del ángulo α y establezca si las rectas d_1 y d_2 son paralelas o no.



6. Triángulos

a. Desigualdad triangular
b. Clasificación según la medida de sus lados
c. Propiedades relativas a los ángulos:
d. Suma de ángulos internos
e. Teorema del ángulo externo
f. Suma de ángulos externos
g. Clasificación según la medida de sus ángulos

Los estudiantes trabajan con el tema de triángulos desde los primeros años de estudio. Ahora que ya conocen el plano cartesiano, pueden dibujar diferentes tipos de triángulos en el plano y estudiar muchas de sus características utilizando los diferentes conceptos que se trabajaron en sétimo año. Por ejemplo, con un triángulo en el plano cartesiano se puede determinar la medida de los lados y posteriormente su perímetro, así como su área con la fórmula de Herón. También, se podrá clasificar el triángulo de acuerdo con la medida de sus lados y de sus ángulos.

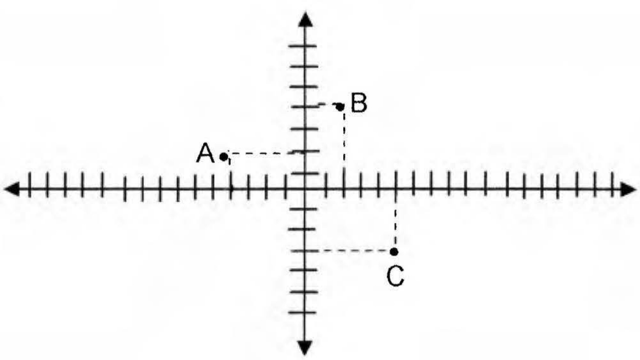
Los temas que se van a estudiar serán los mismos que se han desarrollado tradicionalmente en el programa de estudio, lo que se pretende cambiar es el enfoque con el cual se desarrollen dichos temas.

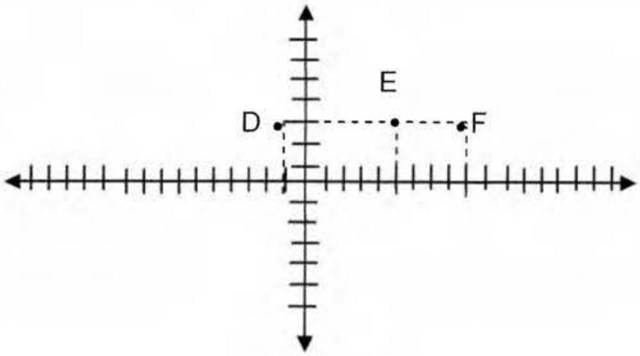
La herramienta vectorial que se estudió en sétimo año va a proporcionar una serie de ventajas a la hora de demostrar y resolver problemas que anteriormente no se podían resolver ni demostrar debido al nivel de complejidad.

Actividad 6.1 Triángulos en el plano cartesiano

Al trabajar los triángulos en el plano, el estudiante puede determinar con cuales tres puntos se puede construir un triángulo y con cuales no, para llegar a la conclusión de que los puntos no pueden ser colineales.

Instrucciones: Dibuja un triángulo en cada uno de los siguientes planos utilizando los puntos dados.





¿Qué pasó en el segundo plano?

____

¿Qué propiedad tiene los puntos D, E y F que no permite construir un triángulo?

____

Note el docente que, en ambos casos se está utilizando implícitamente la desigualdad triangular, tema que será desarrollado más adelante. En este caso se trata particularmente la situación en donde a+b=c.

Ejercicio:

Encuentre la longitud de cada uno de los lados de un triángulo de vértices A(1,3), B(-2,1) y C(0,-4), y luego determine el perímetro.

Actividad 6.2 Suma de las medidas de los ángulos internos y externos de un triángulo

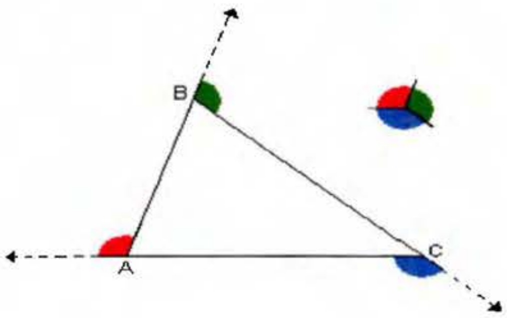
Es de gran importancia ir introduciendo al estudiante en la labor de demostrar en los distintos niveles. Por ejemplo el teorema de la suma de las *medidas de* los ángulos internos y externos de un triángulo se puede trabajar de manera gráfica y luego de forma más formal.

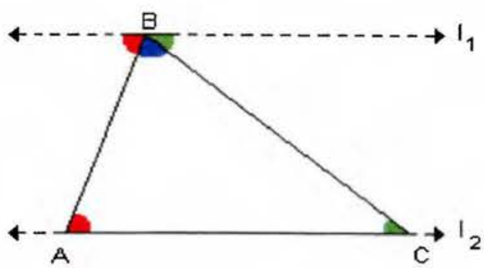
Materiales:

- Papel construcción o hojas de papel
- Tijeras
- Goma
- Lápices de colores

Instrucciones: Se realizan loa siguientes pasos:

- Dibujar un triángulo en el papel y pintar los ángulos internos (o externos).
- Recortar los ángulos internos (o externos).
- Colocar los ángulos como muestra la figura.
- Deducir el teorema





Ángulos externos

Ángulos internos

Actividad 6.3 Desigualdad triangular

La siguiente actividad pretende que los estudiantes verifiquen con cuales medidas de los lados se pueden construir triángulos y con cuales no. Posteriormente el docente deberá escuchar las hipótesis de los estudiantes y sintetizar los resultados

Materiales:

- Papel construcción.

- Pines.

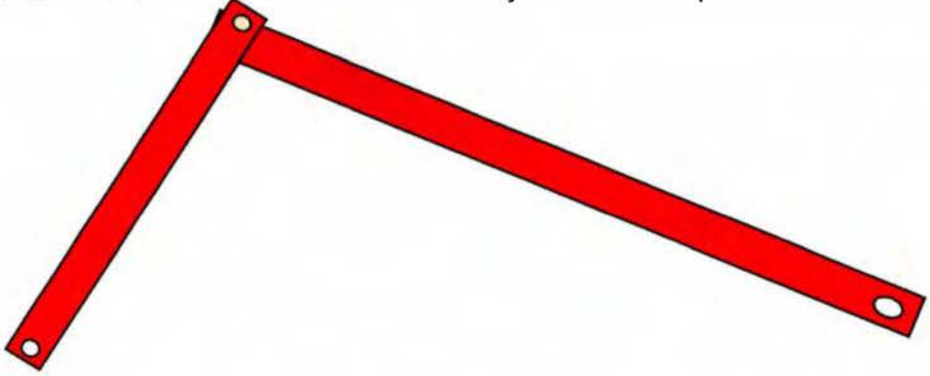
Instrucciones:

1. Construye tiras de 2 cm de ancho cada una, en papel construcción y con las siguientes indicaciones:

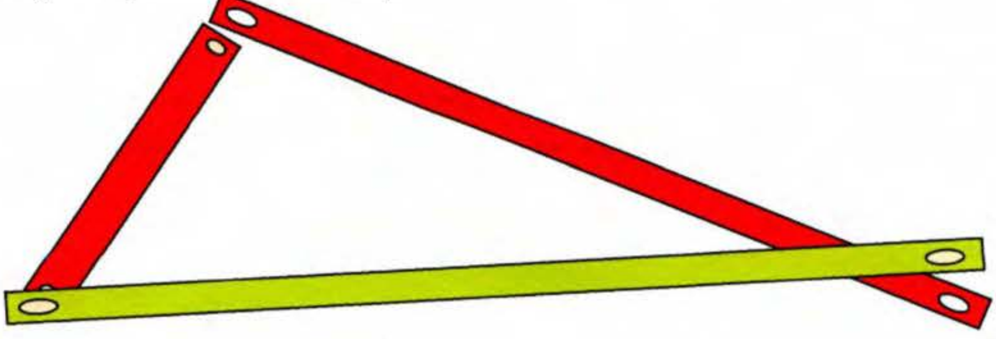
  - Dos tiras de color rojo con 4 cm y 8 cm de largo.
  - Cuatro tiras de color verde 5 cm, 8 cm, 12 cm y 13 cm.

2. Haga orificios en los extremos de cada tira como se muestra en la figura

3. Une de un extremo las dos tiras de color rojo utilizando el pin.



4. Construye diferentes triángulos utilizando las dos tiras de rojo y una tira verde. Luego completa la tabla de abajo



Medidas	Sí o No/ se puede construir un triángulo
4, 8 y 5	
4, 8 y 8	
4,8 y 12	
4, 8 y 13	

¿Puede formar triángulos con tres medidas cualesquiera?

____

¿En qué casos se puede formar triángulos? y ¿cuándo no se puede?

____

____

¿Qué condición deben cumplir las medidas de los segmentos para poder formar un triángulo?

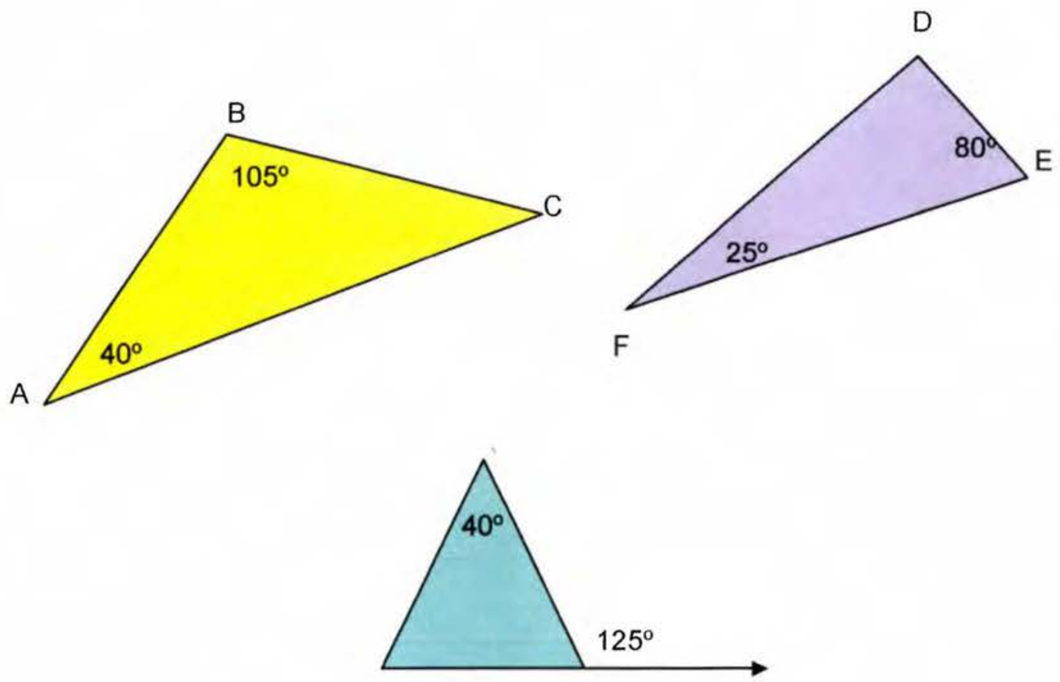
____

Ejercicios:

A. Identifique con cuales de las siguientes tres medidas dadas en cm se puede construir un triángulo.

   a) 1, 2 y 5
   b) 2, 3 y 5
   c) 3, 4 y 5
   d) 11, 12 y 13
   e) $4\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ y $4\sqrt{3}$

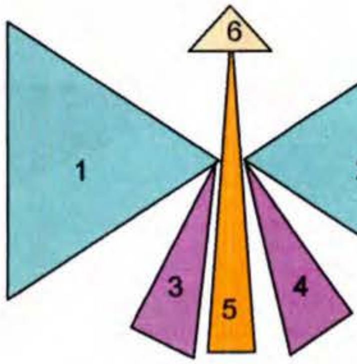
B. Determine la medida de los ángulos que faltan en cada triángulo.



Actividad 6.4. Clasificación de los triángulos

La clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de los lados y de los ángulos se trabajará inicialmente utilizando regla graduada. Posteriormente se trabajará en el plano cartesiano, de modo que los estudiantes deberán determinar las medidas de los lados de un triángulo (utilizando la fórmula de distancia) para luego establecer que tipo de triángulo es. Del mismo modo, los estudiantes podrán determinar si los ángulos son agudos, rectos u obtusos (utilizando el producto punto) para luego determinar el tipo de triángulo.

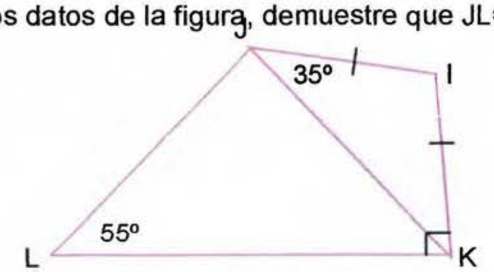
Instrucciones Utilizando regla y compás, clasifica de acuerdo con la medida de los ángulos y de los lados de cada uno de los triángulos del dibujo.



Triángulo	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo	Isósceles	Equilátero	Escaleno
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Ejercicios:

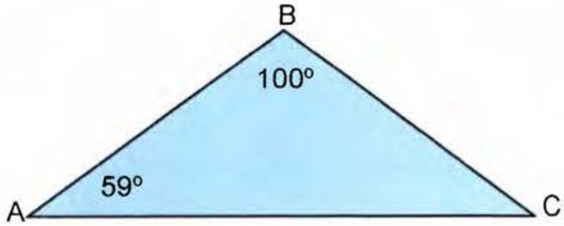
A. De acuerdo con los datos de la figura, demuestre que JL=JK

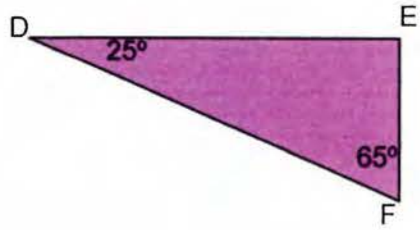


B. Demostrar que los puntos A(2,14), B(2,-12) y C(10,-12) son los vértices de un triángulo rectángulo.

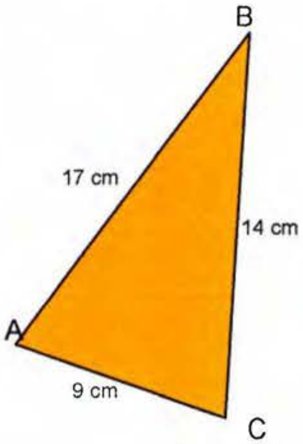
C. Verifique que el triángulo de vértices A(0,0), B(4,0) y C($2, 2\sqrt{2}$) es equilátero.

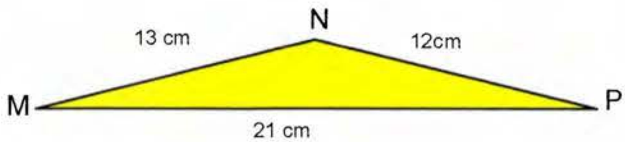
D. En cada uno de los siguientes triángulos determine cuál es un lado mayor y un lado menor



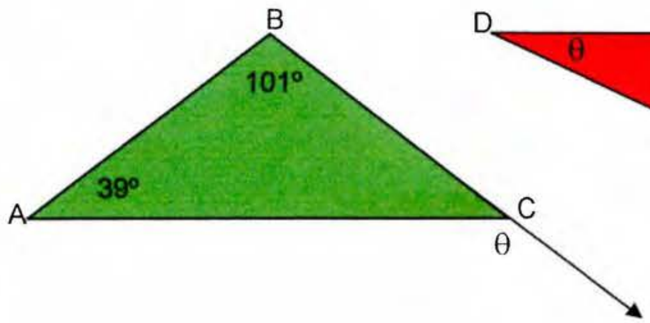


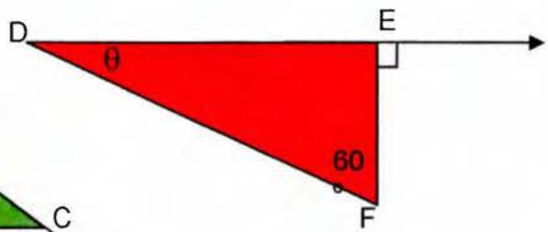
E. En cada uno de los siguientes triángulos determine cuál es el ángulo mayor





F. Determine la medida del ángulo θ





Actividad 6.5 Simetrías en los triángulos

Es importante que el estudiante pueda conectar los diferentes conocimientos, de esta forma se enriquece el aprendizaje y se da una mayor comprensión. En esta actividad se muestra algunas de las utilidades que tienen los contenidos en específico.

Esta actividad permite que el estudiante deduzca y observe las características de los triángulos y de los cuadriláteros. Algunas características importantes a observar en triángulos son las siguientes:

Si ABC es un triángulo isósceles de base BC entonces el eje de simetría del triángulo es la mediatriz del segmente BC y es la bisectriz de $\angle BAC$

Si ABC es un triángulo equilátero entonces los eje de simetría del triángulo la mediatriz del segmente BC y es la bisectriz de $\angle BAC$

Materiales:

- Regla.
- Compás.
- Transportador.

Instrucciones: En su cuaderno dibuje los que se le solicita:

- Un triángulo isósceles ABC de base BC
- ¿Cuántos ejes de simetría se pueden trazar?
- Nombre con D a la intersección del eje de simetría con el lado del triángulo
- ¿Cuánto mide $\angle BAD$y $\angle DAC$?

- Un triángulo equilátero

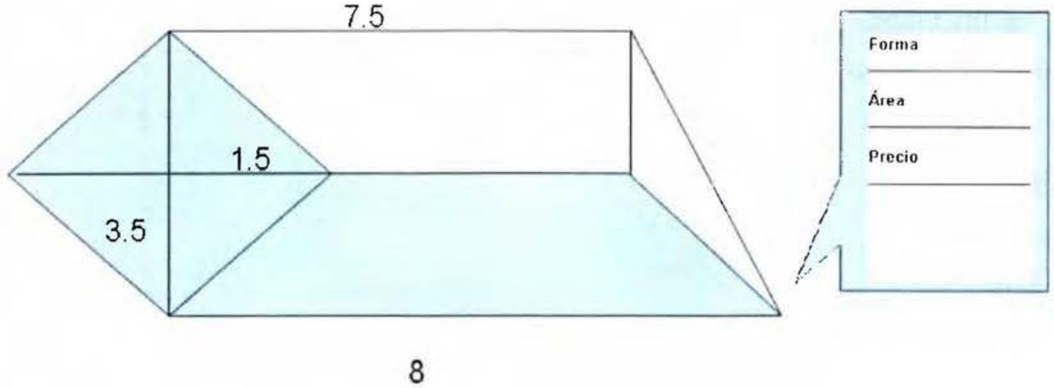
- ¿Cuántos ejes de simetría se pueden trazar?
- ¿Qué se puede decir de los ángulos formados por el eje de simetría y los lados del triángulo?

De forma similar se puede trabajar con todos los cuadriláteros y se puede deducir cada una de las características. Una modificación a la actividad es trabajar cada figura con papel de colores, y que por medio de doblado de papel encuentren los ejes de simetría y las características de cada figura.

Actividad 10. Áreas y perímetros

Instrucciones: Calcular el área de las siguientes figuras:

Un promotor inmobiliario desea vender una propiedad de 660 m^2 a 30 000 colones el m^2. Para ello dividió el terrero en lotes de diferente tamaño y forma y creó un afiche para cada parte para promocionarlo. Completa el afiche de cada sección.



7. Cuadriláteros

a. Clasificación en paralelogramos y no paralelogramos.
b. Propiedades de los cuadriláteros:
    - Relativas a sus lados
    - Relativas a su ángulos

Actividad 7.1 Propiedades en la construcción del cuadrado, rectángulo, rombo

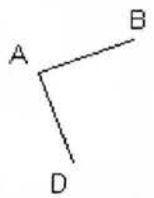
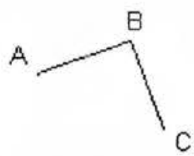
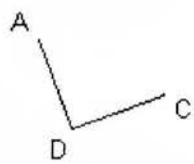
Con esta actividad el docente debe incentivar al alumno a utilizar, implícita y explícitamente las propiedades de los cuadriláteros paralelogramos, algunas de las cuales el estudiante conoce desde la primaria, al menos de forma intuitiva. Del mismo modo se espera que, al finalizar el ejercicio, la discusión fomentada sirva para formalizar tales propiedades.

Instrucciones:

Se deducen las siguientes propiedades del cuadrado:

1. Los cuatro lados tienen la misma longitud
2. Los lados consecutivos son perpendiculares
3. Los lados opuestos son paralelos dos a dos
4. Las diagonales tienen la misma longitud
5. Las diagonales son perpendiculares
6. Las diagonales se intersecan en el punto medio

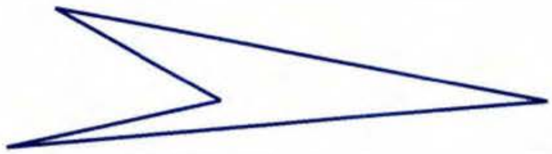
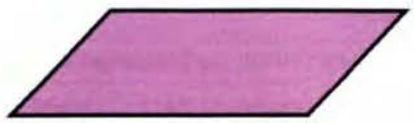
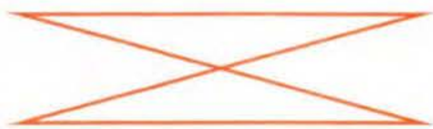
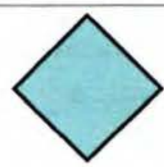
En cada uno de los siguientes casos, terminar de trazar el cuadrado ABCD utilizando los instrumentos indicados y la(s) propiedad(es) del cuadrado señalada(s).

			
Escuadra Propiedad 2.	Compás y regla no graduada Propiedad 1.	Regla graduada Propiedad 6.	Escuadra y regla graduada Propiedades 4, 5 y 6.

Actividad 7.2 Cuadriláteros cóncavos y convexos

Instrucciones: De las siguientes figuras, ¿cuáles son cuadriláteros?, además diga si es convexo o cóncavo.

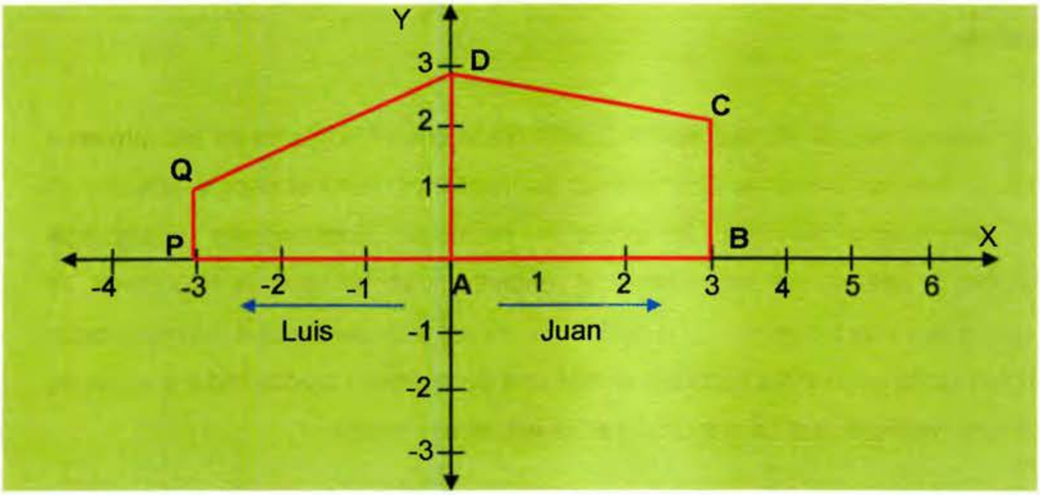
	

Ejercicios:

A. Calcular el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(0,0), B(2,2), C(0,2), D(-1,1)$.

B. Juan y Luis van a caminar en la mañana, en su barrio las cuadras son un poco irregulares, no son exactamente cuadrados, sino solo cuadriláteros irregulares, Juan da 5 vueltas siguiendo los puntos A, B, C, D mientras que Luis da cuatro vueltas siguiendo los puntos A, P, Q, D, como se muestra en la siguiente figura. Entonces, ¿quién camina más?



C. Comprobar que los puntos A, B, C, D, son los vértices de un paralelogramo si se cumple que $A - B + C - D = \vec{0}$, y viceversa; pruebe que $A - B + C - D = \vec{0}$ si los puntos A, B, C, D, son los vértices de un paralelogramo.

D. Comprobar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

E. Si $A(0,0), B(3,4), C(-1,3)$, hallar un punto D para que ABCD sea un paralelogramo

3.3 Noveno año

3.3.1 Unidad 1: Geometría del triángulo

Introducción

En sétimo año el alumno se ha familiarizado con el conjunto de los números reales, y también ha tenido la oportunidad de interiorizar los conceptos básicos de vectores. En octavo año ha aprendido a manipular expresiones algebraicas elementales, a operar con polinomios, a resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita, y ha tenido un primer acercamiento a los postulados elementales de la geometría euclídea desde una perspectiva algebrizada, a partir de las nociones intuitivas que ha adquirido en la escuela primaria.

Todos estos conocimientos constituyen ahora la plataforma a partir de la cual se abordará la presente unidad. En ella se profundizará el estudio de algunas propiedades de los triángulos.

Se trabajará, entonces, con los conceptos de mediana, mediatriz, bisectriz y altura; y sus respectivos puntos de intersección: baricentro, circuncentro, incentro y ortocentro. Se estudiará también el teorema de Tales y su recíproco, el teorema fundamental de semejanza o segundo teorema de Tales, el "teorema de la paralela media" y su recíproco, la semejanza y congruencia de triángulos, el teorema de Pitágoras, su recíproco y sus derivados.

El docente podrá notar que, salvo la organización de los contenidos, que anteriormente se encontraban repartidos en distintos niveles del tercer ciclo, no se ha hecho una modificación en cuanto a la temática tratada en esta unidad.

No obstante se ha cambiado de manera significativa, además del mencionado orden de los temas, la forma de introducirlos y las herramientas con que se aborda tanto la teoría como los ejercicios; así como, en la mayoría de los casos, el tipo de ejercicios propuestos. Esto por cuanto se posee ahora una estructura más sólida, organizada y coherente, que permite trascender el alcance del enfoque con que tradicionalmente se ha tratado estos contenidos.

Así pues, una primera diferencia relevante la encontrará el docente en la utilización del lenguaje propio de los vectores así como sus propiedades, y de las nociones básicas de álgebra para bosquejar demostraciones de muchos de los teoremas enunciados.

Podrá observarse cómo, en la mayoría de los casos, el lenguaje algebraico y vectorial simplifica enormemente las demostraciones respecto de las pruebas clásicas, que suelen ser largas, elaboradas, y cargadas de detalles que impiden al alumno seguir el razonamiento usado, razón por la cual usualmente no se realizan demostraciones en la clase de geometría.

Como en el caso de todas las unidades anteriores, en ésta se presenta una sugerencia de la secuencia teórica que ha de desarrollarse para cubrir los contenidos, con muestras de actividades y recomendaciones sobre los puntos importantes o resultados claves que deben tenerse presentes. También se incluyen problemas resueltos que el profesor puede utilizar en su clase, o tomar como guía para desarrollar más ejemplos.

No obstante, se introduce, como herramienta importante para la deducción y el manejo simplificado de algunos resultados, nociones nuevas, asociadas a transformaciones. En este caso, además de las transformaciones isométricas, se trabaja con homotecias, para aplicarlas en el teorema de Tales, y en ejercicios relativos a semejanza.

Analizando dichos problemas, y los ejercicios propuestos para cada tema de la unidad, el profesor podrá apreciar cómo, si bien no se deja de lado los ejercicios clásicos, pues se consideran relevantes, también se plantea otro tipo de ejercicios, cuyo alcance y nivel de complejidad va más allá de los primeros, permitiendo integrar significativamente los contenidos de años anteriores y, a la vez, resolver problemas que, utilizando sólo el enfoque tradicional, es imposible abordar. Inclusive, se plantean como ejercicios una serie de resultados interesantes, que actualmente no se estudian en esta unidad.

De esta forma, esta unidad no pretende servir como una crítica a la forma en que tradicionalmente se ha abordado los resultados relevantes de la geometría del triángulo desde el enfoque euclídeo, sino más bien ser un complemento a ésta, y una herramienta para abrir nuevas líneas de trabajo en el aula.

Aprendizajes esperados

Se espera que, al finalizar esta unidad, los estudiantes se encuentren en capacidad de:

1. Definir y caracterizar la mediana, la mediatriz, la bisectriz y la altura de un triángulo y sus respectivos puntos de intersección, para utilizarlos en la resolución de ejercicios y problemas en contextos geométricos.
2. Aplicar la noción y las propiedades de las homotecias para resolver ejercicios y problemas en contextos geométricos.
3. Deducir el teorema de Tales, su recíproco y sus derivados (teorema fundamental de semejanza, "teorema de la paralela media" y su recíproco), para utilizarlos en problemas y ejercicios ubicados en contextos geométricos.
4. Deducir y utilizar los criterios de semejanza, y las propiedades de los triángulos semejantes, para resolver ejercicios en contextos geométricos.
5. Deducir y utilizar los criterios de congruencia, y las propiedades de los triángulos congruentes, para resolver ejercicios en contextos geométricos.
6. Utilizar el teorema de Pitágoras, su recíproco, y los derivados del teorema de Pitágoras, para resolver ejercicios en contextos geométricos.

Secuencia de contenidos y actividades sugeridas

1. Mediana, mediatriz, bisectriz y altura

Con este contenido se pretende que el alumno conozca tanto la definición como las propiedades de la mediana, la mediatriz, la bisectriz y la altura, para que pueda, más adelante, usar estas nociones para resolver algunos ejercicios que tienen que ver con semejanza y congruencia de triángulos.

Para ello, el profesor expondrá las definiciones y realizará una actividad con los estudiantes para que, por medio de su construcción, se percaten de la existencia de los puntos de intersección: baricentro, circuncentro, incentro y ortocentro.

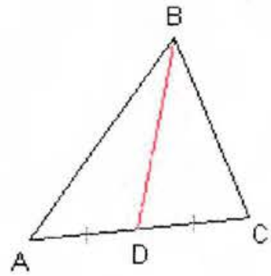
Es importante resaltar que en este documento no se utiliza el acostumbrado término "rectas notables", puesto que la bisectriz se considera un rayo, y la mediana y la altura segmentos.

Actividad 1.1: Mediana, mediatriz, bisectriz y altura

Con esta actividad se pretende que el docente explique a sus estudiantes la definición de la mediana, la mediatriz, la bisectriz y la altura, de modo que ellos tengan una activa participación en la clase. Es por ello que en esta actividad se incluyen algunas preguntas que el profesor puede formular mientras se va desarrollando el tema.

Instrucciones: Dado un triángulo cualquiera, se definen los conceptos de mediana, mediatriz, bisectriz y altura.

La mediana

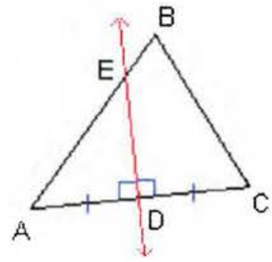


Es el segmento cuyos extremos son el punto medio de un lado de un triángulo y el vértice opuesto a dicho lado.

En la figura, D es el punto medio del segmento $\overline{AC}$.

El segmento $\overline{BD}$ es una mediana del Δ ABC.

La mediatriz



Es la recta perpendicular a un lado de un triángulo y que contiene el punto medio de dicho lado.

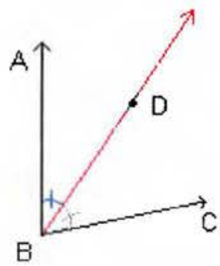
En la figura, D es el punto medio del segmento $\overline{AC}$.

La recta $\overleftrightarrow{DE}$ es una mediatriz del Δ ABC.

Pregunta para el estudiante:

Observe, en la figura anterior, que la mediatriz $\overleftrightarrow{DE}$ es eje de simetría del segmento $\overline{AC}$. ¿Cómo debe ser el triángulo Δ ABC, de acuerdo a la clasificación según sus lados, para que $\overleftrightarrow{DE}$ sea eje de simetría del triángulo en cuestión?

La bisectriz



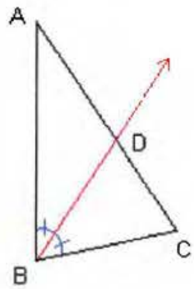
Antes de dar una definición para la bisectriz, recordemos qué es un rayo bisector.

Definición de rayo bisector:

Dado un ángulo $\angle ABC$, el rayo $\overrightarrow{BD}$ es bisector del *dicho ángulo* si D está en su interior, y además $\angle ABD \cong \angle DBC$.

Ahora bien, la bisectriz es el rayo bisector de uno de los ángulos internos de un triángulo.

En la figura, el rayo $\overrightarrow{BD}$ es una bisectriz del Δ ABC.



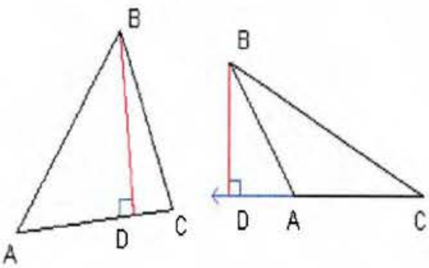
Pregunta para el estudiante:

Observe, en la figura anterior, que la bisectriz $\overrightarrow{BD}$ es eje de simetría del ángulo $\angle ABC$. ¿Cómo debe ser el triángulo Δ ABC, de acuerdo a la clasificación según sus lados, para que $\overrightarrow{BD}$ sea eje de simetría del triángulo en cuestión?

La altura

Es el segmento que cumple, a la vez, las siguientes condiciones:

- Es perpendicular a la recta que contiene uno de los lados del triángulo.
- Contiene al vértice opuesto a dicho lado.



En las figuras, el segmento $\overline{BD}$ es una altura del Δ ABC.

Nota: A la longitud de dicho segmento se le suele llamar también "altura", por ejemplo, en el caso de la fórmula del área de un triángulo.

Actividad 1.2: Puntos de intersección de las medianas, de las mediatrices, de las bisectrices y de las alturas.

Con esta actividad se busca que, por medio de la construcción de las medianas, las mediatrices, las bisectrices y las alturas en diversos tipos de triángulos, los estudiantes puedan percatarse de los puntos de intersección de las mismas, que conozcan el nombre que reciben y las propiedades que tienen que ver con ellas.

Es importante que el docente mencione a sus alumnos la posibilidad de los errores de precisión en sus construcciones, esto en el caso de que ellos no obtengan un único punto de intersección en cualquiera de los casos.

Materiales:

A. Borrador
B. Compás
C. Escuadra
D. Lápiz
E. Papel bond
F. Regla marcada
G. Tijeras
H. Transportador

Instrucciones: La actividad se realizará en grupos de seis personas. A cada integrante del grupo se le solicita que construya cuatro triángulos en hojas bond aparte, de acuerdo a la siguiente tabla:

<table>
<tr><th># de estudiante</th><th colspan="2">Construir</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="6">4 triángulos</td><td>acutángulos isósceles</td></tr>
<tr><td>2</td><td>rectángulos isósceles</td></tr>
<tr><td>3</td><td>obtusángulos isósceles</td></tr>
<tr><td>4</td><td>acutángulos escalenos</td></tr>
<tr><td>5</td><td>rectángulos escalenos</td></tr>
<tr><td>6</td><td>obtusángulos escalenos</td></tr>
</table>

En el caso de que en uno de los grupos no se completen los seis integrantes, el profesor decidirá cuáles tipos de triángulos asignarles.

Posteriormente se procederá a realizar las construcciones con las indicaciones del docente, las cuales se detallan más adelante. El que la actividad se realice en grupos no sólo permite que los estudiantes se ayuden entre sí, sino que se percaten, al observar a sus compañeros de grupo, de que las construcciones y propiedades son válidas para cualquier tipo de triángulo. El caso particular de triángulos equiláteros se deja para el final.

Las indicaciones que cada uno de los estudiantes debe seguir son las siguientes:

Tomar uno de los cuatro triángulos que se elaboraron para construir una de sus medianas. Primero, se escoge un lado del triángulo y por medio de doblado de papel se determina su punto medio, luego se traza el segmento cuyos extremos son ése punto y el vértice opuesto al lado que se eligió. Así mismo construir las otras dos medianas.

Los estudiantes se percatarán de que los segmentos se intersecan en un punto ubicado siempre en el interior del triángulo, y el docente mencionará que éste recibe el nombre de baricentro.

Luego, se elige una de las medianas construidas y se mide la distancia del baricentro al vértice correspondiente, y la distancia del baricentro al punto de intersección de la mediana con el lado del triángulo, para después comparar entre sí ambas medidas y concluir que la primera es el doble de la segunda. Esto puede realizarse con regla marcada, o con compás (La propiedad que se observa será demostrada en clase posteriormente).

Luego, se recorta ese mismo triángulo y con cuidado se apoya el baricentro sobre la punta del compás, de manera que los estudiantes puedan observar como la figura se mantiene en equilibrio.

Tomar el segundo de los cuatro triángulos elaborados para construir una de sus mediatrices. Nuevamente se escoge uno de sus lados y por medio de doblado de papel se determina su punto medio, luego, con ayuda de la escuadra, se traza la recta perpendicular al lado elegido y que contiene dicho punto. Así mismo construir las otras dos mediatrices.

Los alumnos se percatarán de que las rectas se intersecan en un punto y el docente mencionará que éste se llama circuncentro. Entre los miembros del grupo discutirán el hecho de que en algunos casos, el circuncentro I queda en el interior del triángulo; en otros en el exterior, y otros sobre uno de los lados del mismo, dependiendo del tipo de triángulo que les correspondió.

Ubicar la punta del compás en el circuncentro y su lápiz en uno de los vértices del triángulo, luego construir la circunferencia para observar que ésta es la circunscrita al triángulo y que a esto se debe el nombre del punto de intersección de las mediatrices.

Tomar el tercero de los triángulos que se elaboraron para construir una de sus bisectrices. Primero se elige uno de los ángulos del triángulo, por medio de doblado de papel, o con el transportador, se determina dónde debe ubicarse el rayo bisector, el cual es trazado con la regla. Así mismo construir las otras dos bisectrices.

Los estudiantes se darán cuenta de que los rayos se intersecan en un punto ubicado siempre en el interior del triángulo y el profesor mencionará que éste se llama incentro.

Con la escuadra, trazar el segmento perpendicular a uno de los lados del triángulo que contiene al incentro, luego, ubicar el lápiz del compás en éste punto y la punta en el incentro. Al trazar la circunferencia los estudiantes se percatarán de que se trata de la inscrita en el triángulo, y que a esto se debe el nombre del punto de intersección de las bisectrices.

Tomar el triángulo restante para construir una de sus alturas. Se elige uno de los vértices del triangulo y con la escuadra se traza el segmento perpendicular, ya sea al lado opuesto o a la prolongación de éste, según sea el caso. Así mismo construir las otras dos alturas.

Los estudiantes que trabajan con triángulos rectángulos observarán que los segmentos se intersecan en el vértice que pertenece al ángulo recto. Los alumnos que construyeron triángulos obtusángulos dirán que los segmentos no se intersecan, entonces el docente les solicitará que prolonguen las alturas para encontrar el punto de intersección de esas rectas. Luego el profesor mencionará que dicho punto recibe el nombre de ortocentro.

El docente solicita que por grupo se construya un triángulo equilátero y pregunta: ¿Qué sucede con la mediana, la mediatriz, la bisectriz, la altura y puntos de intersección? También puede realizar en la pizarra un cuadro resumen como el siguiente:

	Punto de intersección
Medianas	Baricentro
Mediatrices	Circuncentro
Bisectrices	Incentro
Alturas	Ortocentro

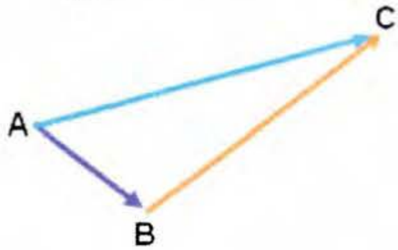
Al finalizar la actividad, es recomendable que el docente formalice los resultados obtenidos, en forma de teoremas, tratando, en la medida de lo posible, de utilizar un lenguaje menos coloquial, y usando, en tanto se pueda, simbología matemática, para familiarizar al alumno con ella, pero procurando siempre que lo primordial sea la comprensión del concepto o conceptos involucrados.

Actividad 1.3: Repaso de contenidos importantes

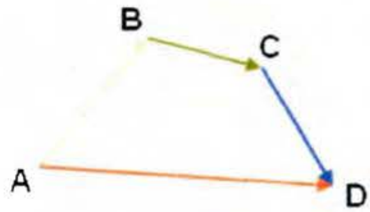
Instrucciones: A partir de este momento, los alumnos demostraran los teoremas basándose en los conocimientos adquiridos en sétimo y octavo año, para ello, es importante recordar aquellos resultados que serán utilizados en el desarrollo de la Geometría en noveno año.

¡Recordemos!

La fórmula de Chasles



Si sumamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, el resultado es el vector $\overrightarrow{AC}$.



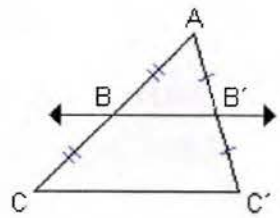
La fórmula de Chasles se puede ampliar para sumar tres o más vectores, por ejemplo, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

¡Recordemos!

El "teorema de la paralela media" y su demostración

"Teorema de la paralela media":

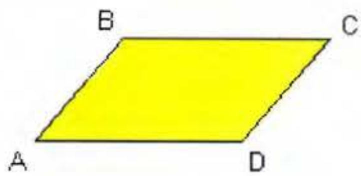
Si tenemos un triángulo ΔABC como el de la figura adjunta, donde B y B´ son los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AC'}$ respectivamente, entonces $\overline{BB'}$ mide la mitad de $\overline{CC'}$; además $\overleftrightarrow{BB'} // \overleftrightarrow{CC'}$.



¡Recordemos!

Paralelogramos

Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero donde $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ y los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen la misma longitud, entonces $\square ABCD$ es un paralelogramo.



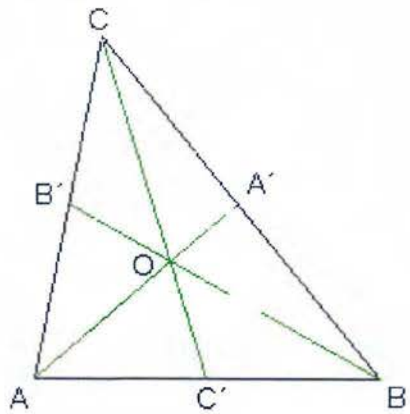
Actividad 1.4.: Medianas de un triángulo

Instrucciones: En esta actividad se pretende que el estudiante aplique los conocimientos adquiridos en octavo año para demostrar que las medianas de un triángulo se intersecan en un punto, lo cual fue ilustrado con la actividad anterior. A este resultado le llamaremos "teorema de las medianas". En esta misma demostración, el alumno prueba que la distancia del baricentro a un vértice es $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana correspondiente.

Se recomienda que la actividad se realice en clase con la guía del docente y la activa participación de los estudiantes.

"Teorema de las medianas"

En la figura adjunta se muestra un triángulo ΔABC donde A´, B´ y C´ son los puntos medios de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Llamemos O al baricentro del triángulo ΔABC

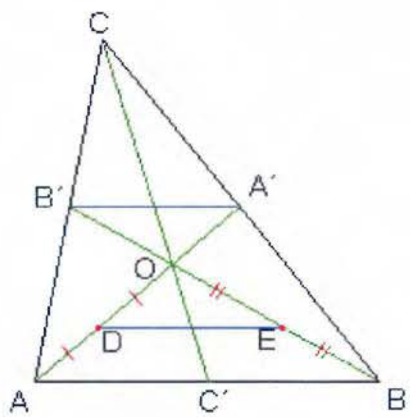


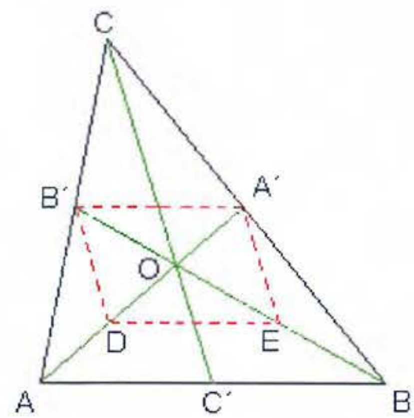
Demostremos que las siguientes igualdades se cumple:

$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$,

$\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

Demostración:





1. Consideremos las medianas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, y llamemos D y E a los puntos medios de los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ respectivamente.

2. Observe que $\overline{B'A'}$ es "paralela media" *del triángulo* ΔABC, y mide la mitad de

3. Entonces, el cuadrilátero □A´B´DE es un paralelogramo, puesto que $\overline{A'B'} // \overline{DE'}$, y estos dos segmentos tienen la misma longitud.

4. Como □A´B´DE es un paralelogramo, sus diagonales

$\overline{AB}$. También $\overline{DE}$ es "paralela media" del triángulo ΔDEO, y mide la mitad de $\overline{AB}$.

se bisecan, es decir, $\overline{A'O} \cong \overline{OD}$ y $\overline{B'O} \cong \overline{OE}$.

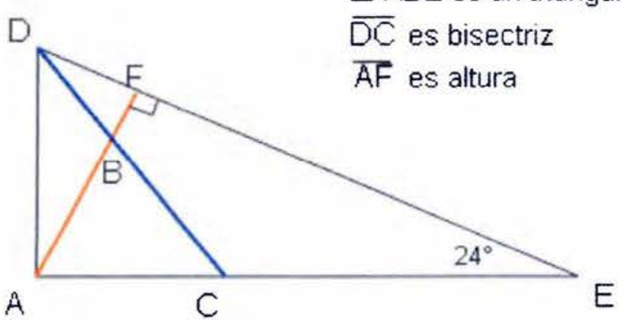
5. Finalmente, obtenemos que $\overline{A'O} \cong \overline{OD} \cong \overline{DA}$ y $\overline{B'O} \cong \overline{OE} \cong \overline{EB}$.

3. Lo anterior también podemos escribirlo de la siguiente forma: $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$, o de ésta: $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC'}$

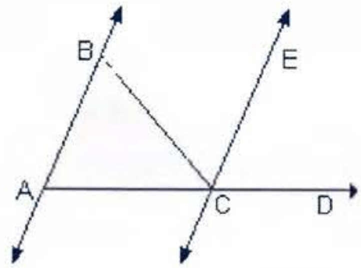
Ejercicios:

A. ¿Cómo podemos construir una circunferencia que contenga tres puntos dados?
B. ¿Cómo podemos determinar el centro de una circunferencia dada?
C. ¿Cómo puede ubicarse un punto que equidiste de los tres lados de un triángulo dado?
D. De acuerdo con los datos de la siguiente figura, demuestre que el triángulo Δ ABC es isósceles.

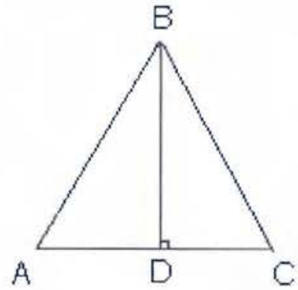
Δ ADE es un triángulo rectángulo en A
$\overline{DC}$ es bisectriz
$\overline{AF}$ es altura



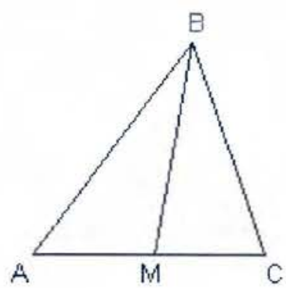
- En la figura de la derecha, $\overrightarrow{CE}$ es la bisectriz del ángulo $\angle$ BCD y las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CE}$ son paralelas. Demuestre que el triángulo Δ ABC es isósceles.



- En la figura de la derecha se presenta un triángulo Δ ABC y la altura $\overline{BD}$. Justifique por qué dicha altura es menor que el lado $\overline{BC}$. Luego, demuestre que la suma de las tres alturas de un triángulo, es menor que su perímetro.

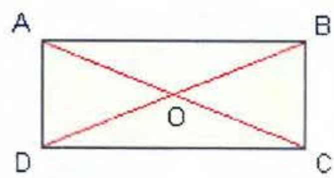


- En la figura adjunta se muestra un triángulo Δ ABC. $\overline{BM}$ es una mediana. Demuestre que $BA^2 + BC^2 = 2BM^2 + \dfrac{AC^2}{2}$.
- Sugerencia: Utilice suma de vectores para expresar $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ considerando $\overrightarrow{BD}$; además, escriba $\overrightarrow{MC}$ en términos de $\overrightarrow{MA}$.



- En un rectángulo □ABCD como el de la figura, O es el punto de intersección de las diagonales. Demuestre que

$$BA^2 + BC^2 + DA^2 + DC^2 = AC^2 + 2\left(BO^2 + DO^2\right)$$



- Investigue sobre la recta de Euler, las bisectrices exteriores de un triángulo, las circunferencias exinscritas, el círculo de nueve puntos y la recta de Simpson.

2. Homotecias

El objetivo primordial de este contenido es que el estudiante conozca la definición de homotecia y sus propiedades, para que así pueda efectuarse en clase una demostración sencilla del teorema de Tales y su recíproco.

Para el estudio de las homotecias será necesario que los alumnos retomen los conceptos antes estudiados de vectores, como lo son la fórmula de Chasles y el paralelismo, entre otros.

Además, en este apartado se incluyen algunos ejercicios resueltos que el docente puede proponer a sus estudiantes o resolver junto con ellos en clase. Dichos ejercicios se refieren, en su mayoría, a demostraciones de resultados, por lo cual tienen un nivel de dificultad un poco mayor a los que se acostumbra realizar en secundaria, sin embargo, han sido seleccionados para que puedan ser resueltos por los estudiantes con el conocimiento que tienen sobre homotecias hasta el momento.

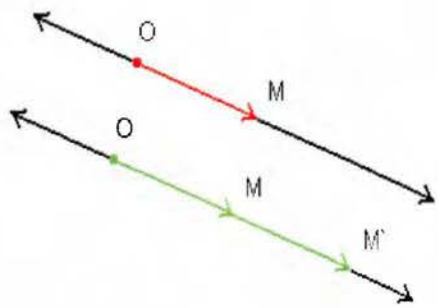
Actividad 2.1: Las homotecias y sus propiedades

Con el objetivo de que el estudiante conozca las homotecias y sus propiedades para poder aplicarlas en ejercicios y demostraciones, se presenta en esta actividad una guía de cómo el docente puede explicar este tema en su clase.

Durante el estudio de las homotecias se espera que los alumnos recuerden algunos conocimientos de geometría del nivel anterior, y que aporten sugerencias de cómo pueden resolverse los ejemplos.

Definición de homotecia:

En la figura adjunta tenemos una recta donde se identifican los puntos O y M. Es posible ubicar un punto M` en la recta, de modo que $\overrightarrow{OM`} = 2\overrightarrow{OM}$



En este caso, decimos que existe una relación llamada homotecia de centro O y razón k = 2 que transforma el punto M en el punto M`.

En general, podemos decir que una homotecia h de centro O y razón $k \in$ IR-{0} es una relación que transforma un punto M en un punto M´ de modo que $\overrightarrow{OM`} = k\,\overrightarrow{OM}$.

Notas:

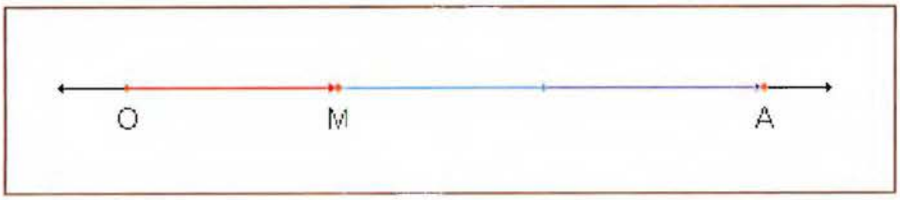
Se dice que M` es la imagen de M bajo la homotecia h, y esto se representa del siguiente modo: h(M) = M´. También decimos que los puntos M y M´ son homotéticos.

Si tenemos las homotecias h_1 y h_2 y sabemos que ambas tienen el mismo centro y la misma razón, podemos afirmar que $h_1 = h_2$.

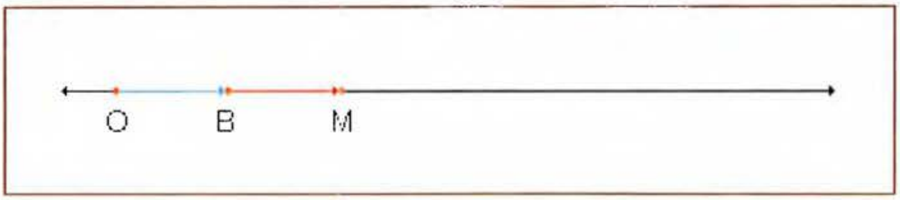
Ejemplos:

En las siguientes figuras se presenta una recta donde se han identificado los puntos O y M. Observe la ubicación de los puntos A, B, C, D y E de acuerdo a los datos que se indican en cada caso.

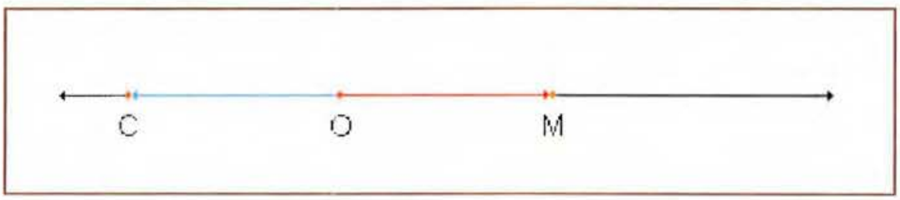
- El punto A es imagen de M bajo una homotecia de centro O y razón k = 3.



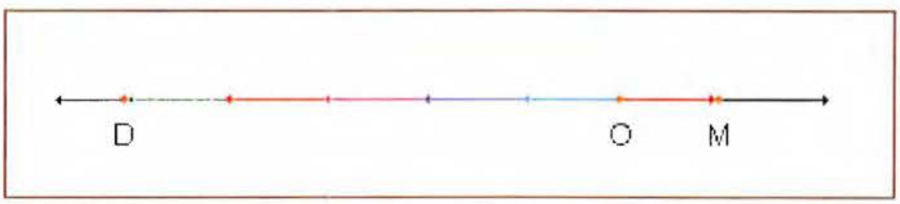
- El punto B es imagen de M bajo una homotecia de centro O y razón $k = \frac{1}{2}$.



- El punto C es imagen de M bajo una homotecia de centro O y razón k = - 1



- El punto D es imagen de M bajo una homotecia de centro O y razón k = - 5



- El punto E es imagen de M bajo una homotecia de centro O y razón $k = -\frac{1}{4}$.

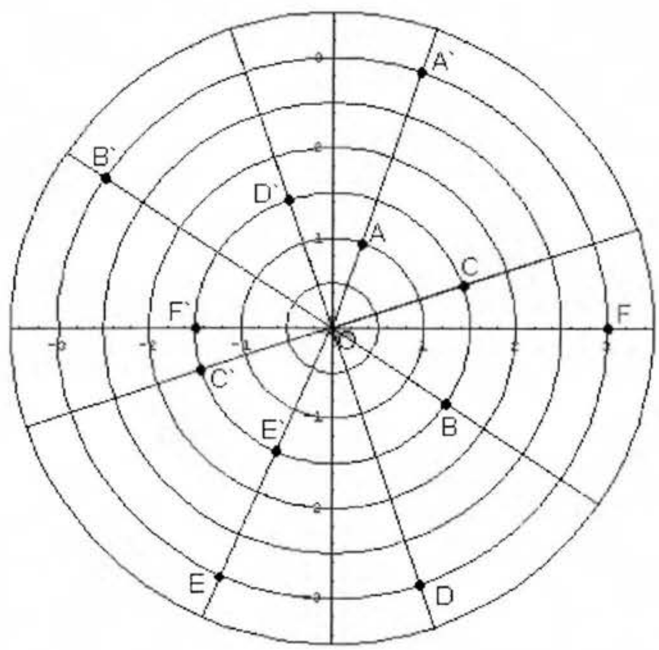
Observaciones generales:

Si $\overrightarrow{OM`}=k\,\overrightarrow{OM}$, se tiene también que $OM`=|k|OM$, es decir, $|k|=\dfrac{OM`}{OM}$.

Si $\overrightarrow{OM`}=k\,\overrightarrow{OM}$ se puede afirmar que existe una homotecia h` que transforma el punto M` en M de modo que $\dfrac{1}{k}\overrightarrow{OM`}\ =\ \overrightarrow{OM}$.

Ejercicios:

A. Observe la siguiente figura y luego complete los espacios en blanco con la información que se le solicita.



A`	es la imagen de	A	bajo una homotecia de centro O y razón:	_____.
B`	es la imagen de	B	bajo una homotecia de centro O y razón:	_____.
C`	es la imagen de	C	bajo una homotecia de centro O y razón:	_____.
D`	es la imagen de	D	bajo una homotecia de centro O y razón:	_____.
E`	es la imagen de	E	bajo una homotecia de centro O y razón:	_____.
F`	es la imagen de	F	bajo una homotecia de centro O y razón:	_____.
A`	es la imagen de	E	bajo una homotecia de centro O y razón:	_____.
E`	es la imagen de	A	bajo una homotecia de centro O y razón:	_____.

B. En la figura adjunta se presenta una recta en la cual se ubican los puntos A, B y C. Complete la tabla con la información que se le pide.

El punto…	es la imagen de…	bajo una homotecia de centro…	y razón k =…
B			$\frac{5}{2}$
C		A	
	A		$\frac{5}{3}$
	C	B	
		A	$-\frac{3}{2}$
A	B		

Propiedades de las homotecias

En los ejemplos y ejercicios anteriores fue posible notar la siguiente propiedad:

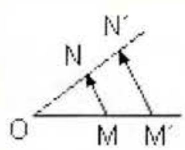
> (1) El centro O de la homotecia, un punto M y su imagen M´ están alineados.

Sabemos también que para una homotecia h de centro O debe cumplirse que $\overrightarrow{OM`}=k\overrightarrow{OM}$. Si M = O tenemos que $k\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OO}=\vec{0}=\overrightarrow{OM`}$, y eso quiere decir que M`= O, en otras palabras:

> (2) El centro O de la homotecia es invariante, es decir, la imagen de O bajo la homotecia h es O (h(O) = O).

Ahora consideremos una homotecia h de centro O, donde se cumple que h(M) = M´ y h(N) = N´, es decir, se satisfacen las siguientes condiciones: $\overrightarrow{OM`}=k\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON`}=k\overrightarrow{ON}$. Entonces tenemos que:

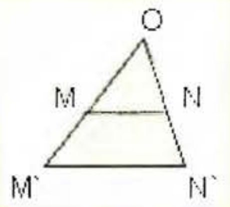
$k\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}\right)=k\overrightarrow{ON}\text{-}\,k\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON`}-\overrightarrow{OM`}=\overrightarrow{M`N`}$. Con lo cual se verifica la siguiente propiedad:

> (3) Si h(M) = M´ y h(N) = N´ entonces $\overrightarrow{M´N´}=k\overrightarrow{MN}$, de donde se deduce que $M´N´=|k|\,MN$.
>
> 
>
>
> Es decir, la longitud de un segmento se "estira" o "encoge" k veces, al ser transformado por una homotecia

Además, recordemos que si se cumple que $\overleftrightarrow{M`N`}=k\overleftrightarrow{MN}$, entonces las rectas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{M`N`}$ son paralelas, lo cual se sintetiza en el siguiente recuadro:

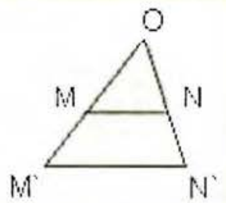
(4) Si se tiene una homotecia de centro O que transforma M en M` y N en N`, entonces $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{M`N`}$ son rectas paralelas.

Es decir, la imagen de un segmento bajo una homotecia, es un segmento paralelo al dado.



También se cumple el recíproco de la propiedad anterior:

(5) Sean $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{M`N}$ rectas paralelas. La homotecia de centro O que transforma M en M`, transforma también N en N`.



Para verificarlo, tomemos la homotecia de centro O y razón p que cumple $\overrightarrow{OM'} = p\,\overrightarrow{OM}$ y la homotecia de centro O y razón q que cumple $\overrightarrow{ON'} = q\,\overrightarrow{ON}$.

(1) Como las rectas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{M'N}$ son paralelas, se cumple que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

(2) Por fórmula de Chasles sabemos que: $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'}$ y $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$

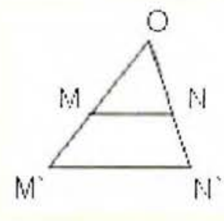
(3) Sustituyendo las expresiones de (2) en la igualdad de (1) obtenemos lo siguiente: $-\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'} = k\left(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right)$.

(4) Sabemos por hipótesis que $\overrightarrow{OM'} = p\,\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON'} = q\,\overrightarrow{ON}$, y estas igualdades podemos sustituirlas al lado izquierdo de la ecuación presente en (3), obteniendo $-p\,\overrightarrow{OM} + q\,\overrightarrow{ON} = k\left(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right)$.

(5) De lo anterior podemos afirmar que $\frac{-p}{k}\overrightarrow{OM} + \frac{q}{k}\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$. Observe que dicha ecuación se satisface cuando $\frac{p}{k} = \frac{q}{k} = 1$, es decir, cuando $p = q = k$.

(6) Como p = q, tenemos que las homotecias tomadas en la hipótesis son la misma, pues ambas tienen centro O y la misma razón.

(6) Si existe una homotecia de centro O y razón k que transforma M en M´ y N en N´, entonces podemos afirmar que $\dfrac{OM'}{OM} = \dfrac{ON'}{ON} = |k|$; y viceversa, si tenemos esta igualdad, podemos garantizar la existencia de dicha homotecia.



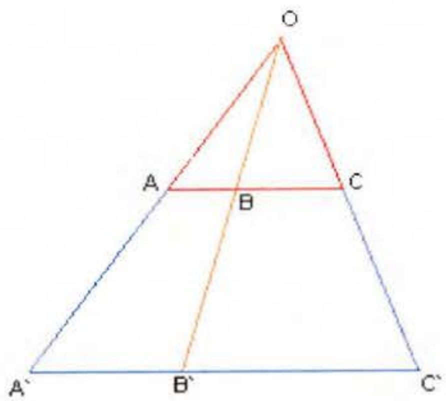
Lo anterior puede constatarse observando lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \\ h(N) = N' \Leftrightarrow \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON} \end{array}\right\} \Leftrightarrow |k| = \frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON}$$

Figuras homotéticas

Decimos que dos figuras son homotéticas si una de ellas se genera a partir de la otra por medio de una homotecia.

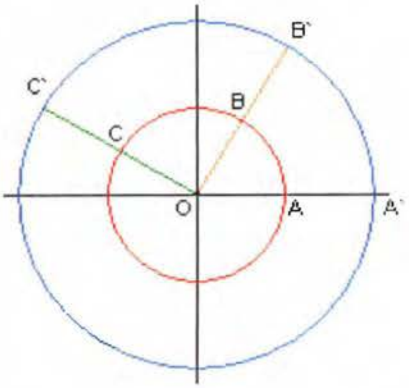
Observe los siguientes ejemplos:



$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A`C`}$

En esta figura podemos considerar la homotecia h de centro O y razón $\dfrac{OA`}{OA}$ que transforma A en A´. Esta misma homotecia (por la propiedad [5] transforma B en B` y C en C`. Así con todos los puntos del triángulo Δ OAC.

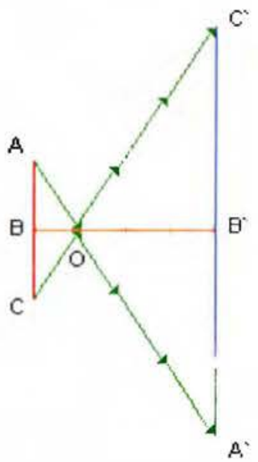
En este caso, decimos que los triángulos Δ OAC y Δ OA`C` son homotéticos de vértice O.



En esta otra, tenemos la transformación de la circunferencia roja en la azul, por medio de una homotecia h de centro O y razón $\frac{OB`}{OB}$.

Observe que h(A) = A`, h(B) = B`, h(c) = C` y todos los demás puntos de la circunferencia roja tienen su correspondiente punto en la circunferencia azul.

Entonces decimos que las dos circunferencias son homotéticas.



Y en esta otra figura, podemos considerar una homotecia h de centro O y razón -3 que transforma A en A´, B en B´ y C en C´. De igual manera, todos los puntos del segmento rojo tienen su correspondiente punto en el segmento azul.

En este caso, decimos que los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ son homotéticos.

Observación:

En los tres ejemplos anteriores, las figuras más pequeñas se transforman en las más grandes por medio de una homotecia de centro O. También podemos considerar una homotecia, con el mismo centro, que permita partir de la figura grande y llegar a la pequeña. Determine cuál sería la razón de dicha homotecia para cada uno de los ejemplos anteriores.

En este otro ejemplo podemos observar que el triángulo Δ ABC puede transformarse en Δ A`B`C` con una homotecia de centro O y razón $\frac{OA`}{OA}$.

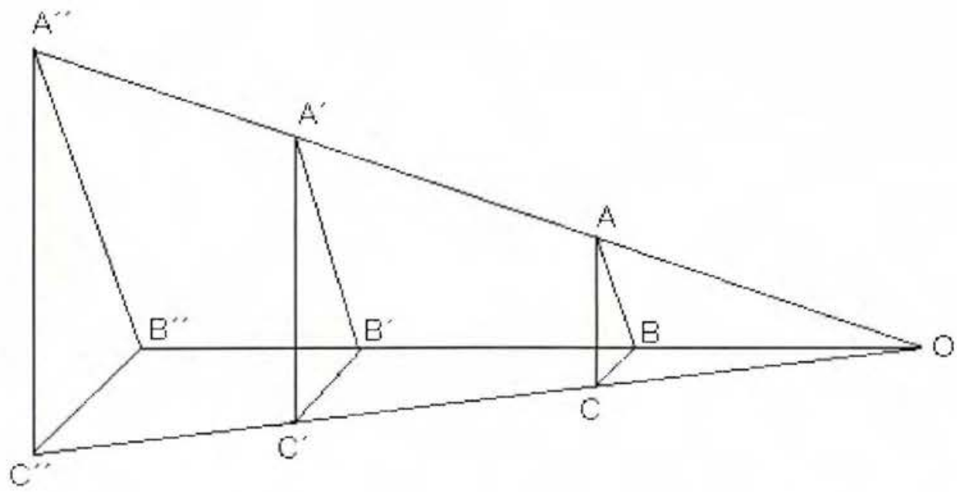
También, una homotecia con el mismo centro y razón $\frac{OA``}{OA`}$, transforma el triángulo

Δ A`B`C` en

Δ A``B``C``.

¿Cuáles son las razones de las homotecias de centro O que transforman Δ A``B``C`` en Δ A`B`C` y

Δ A`B`C` en Δ ABC?



Ejemplos:

1. Decidir cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas:

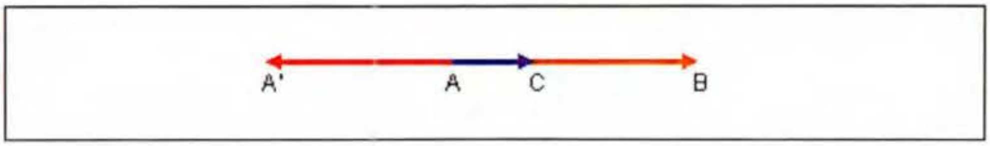
a) Si $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ entonces B es la imagen de A bajo la homotecia de centro C y razón $k = 3$.

b) Si $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ entonces C es la imagen de B bajo la homotecia de centro A y razón $k = 3$.

c) Si $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$ entonces C es la imagen de B bajo la homotecia de centro A y razón $k=\frac{1}{3}$.

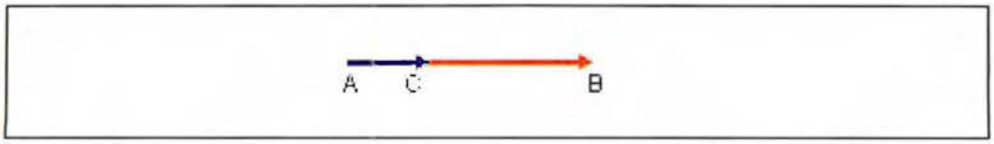
Solución:

a) Si hacemos un dibujo del enunciado del problema, entonces podemos ver que B no es la imagen de A bajo la homotecia de centro C y razón k = 3, pues la imagen de A bajo esta homotecia es un punto A\` opuesto a B.



b) En este caso sucede algo similar, con un dibujo como el anterior vemos que la imagen de B bajo la homotecia de centro A y razón k = 3 es un punto B\` que está después de B en la recta determinada por estos puntos, y por ende no puede ser C.

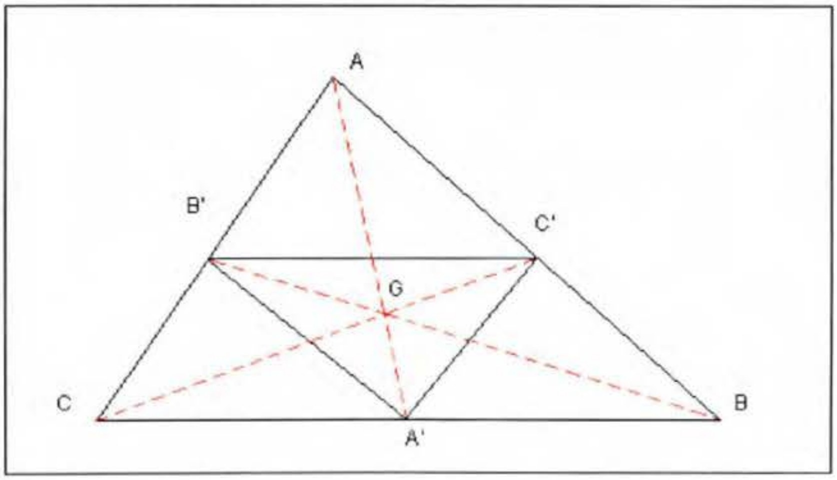
c) En este caso se tiene que la condición es verdadera, pues al tener que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$ esto es equivalente a $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$, de donde C debe ser la imagen de B bajo la homotecia de centro A y razón $k=\frac{1}{3}$.



2. Sea G el baricentro del $\triangle$ ABC y sea $\triangle$ A´B´C´ el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del $\triangle$ ABC. Demostrar que existe una homotecia de centro G que transforma $\triangle$ ABC en $\triangle$ A´B´C´.

Solución:

Para comprobar el resultado hay que verificar que verdaderamente existe tal homotecia, es decir, que los puntos relacionados verifican las propiedades de las homotecias.



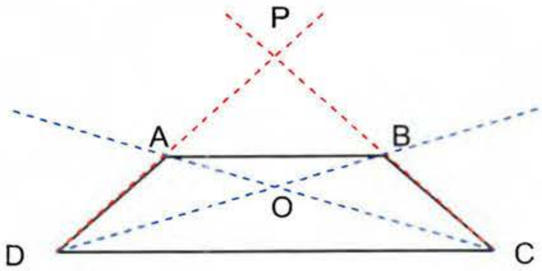
(1) Por el "teorema de las medianas" (demostrado en la actividad 1.3) podemos afirmar las siguientes igualdades:

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\ ,\ \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}\ ,\ \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$$

(2) Esto quiere decir que existe una homotecia de centro G y razón $k = -\frac{1}{2}$ que transforma A en A´, B en B´ y C en C´. Lo mismo ocurre para el resto de los puntos que conforman cada triángulo.

(3) Por esto, podemos afirmar que los triángulos Δ ABC y Δ A´B´C´ son homotéticos.

3. Configuración trapecio: Sea □ABCD un trapecio tal que $\overline{AB} \neq \overline{CD}$. Demostrar que existen dos homotecias que transforman $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$.



Solución:

(1) Llamemos P a la intersección de $\overleftrightarrow{DA}$ y $\overleftrightarrow{CB}$, y O a la intersección de $\overleftrightarrow{DB}$ y $\overleftrightarrow{CA}$.

(2) Si queremos una homotecia de centro P que transforme A en D, es decir, que se cumpla $\overrightarrow{PD} = k_1 \overrightarrow{PA}$, su razón debería ser $k_1 = \frac{PD}{PA}$. Esa homotecia también transformaría B en C y todos los puntos del segmento $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$.

(3) Entonces, sabiendo el centro (P) y la razón (k_1) queda definida una homotecia que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$.

(4) De manera parecida trabajamos para el caso de la otra homotecia. Queremos que su centro sea O y que transforme B en D, es decir, que se cumpla $\overrightarrow{OD} = -k_2 \overrightarrow{OB}$, de modo que su razón debe ser $k_2 = -\frac{OD}{OB}$. Esa homotecia también transformaría A en C y todos los puntos del segmento $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$.

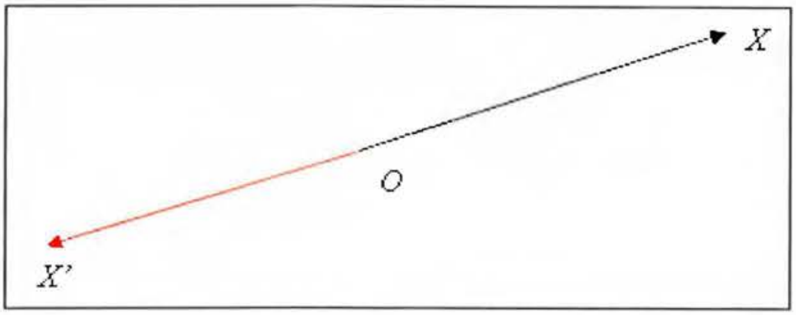
(5) Entonces, sabiendo el centro (O) y la razón (k_2) queda definida la otra homotecia que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$.

4. Demostrar que una homotecia de centro O y razón k = -1 coincide con la simetría axial de centro O.

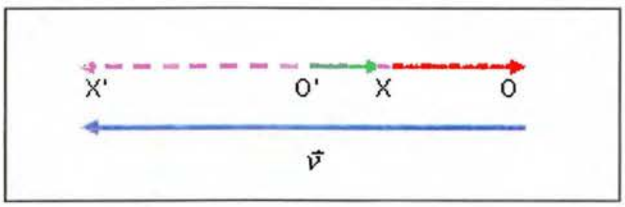
Solución:

Para esto, basta observar que si tomamos un punto X en el plano, y le aplicamos la transformación correspondiente a la homotecia de centro O y razón k =

-1 se obtiene un punto X´ que cumple lo siguiente: $\overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{OX'}$, pero esto es la misma definición de la simetría con respecto al punto O.



5. Sea O un punto del plano, k un número real distinto de cero, y $\vec{v}$ un vector. Hallar el centro O` de la homotecia tal que al aplicar primero la homotecia de centro O` y razón $\frac{1}{k}$ y luego la homotecia de centro O y razón k se obtenga como resultado la traslación de vector $\vec{v}$.



Solución:

(1) Primero tomemos O y apliquemos la homotecia de centro O` y razón $\frac{1}{k}$ y llamemos X al punto que se obtiene, es decir $\overrightarrow{O'X} = \frac{1}{k}\overrightarrow{O'O} = -\frac{1}{k}\overrightarrow{OO'}$.

(2) Al aplicar la homotecia de centro O y razón k, se tiene que $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX} = k(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X})$, por las propiedades de la suma de vectores.

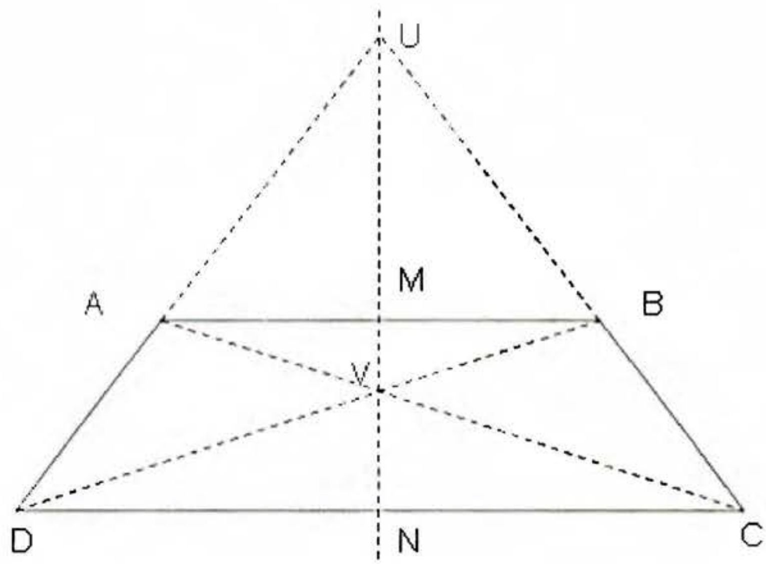
(3) Sustituyendo la igualdad de [1] en [2] obtenemos lo siguiente:

$$\overrightarrow{OX'} = k(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}) = k\left(\overrightarrow{OO'} - \frac{1}{k}\overrightarrow{OO'}\right) = k\left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OO'} = (k-1)\overrightarrow{OO'}.$$

(4) Finalmente, lo que queremos es hallar O` de manera que al hacer las dos *transformaciones* el resultado sea una traslación de vector $\vec{v}$, entonces queremos

además que $\overrightarrow{OX'}=(k-1)\overrightarrow{OO'}=\vec{v}$, y ya de esta fórmula se puede observar que O` es el único punto del plano para el cual se cumple que $\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{k-1}\vec{v}$.

6. Sea $\square ABCD$ un trapecio de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, con $AB \neq CD$. Llamaremos U a la intersección de $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, V a la intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ y M y N a los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Demostrar que M, N, U, V son colineales.



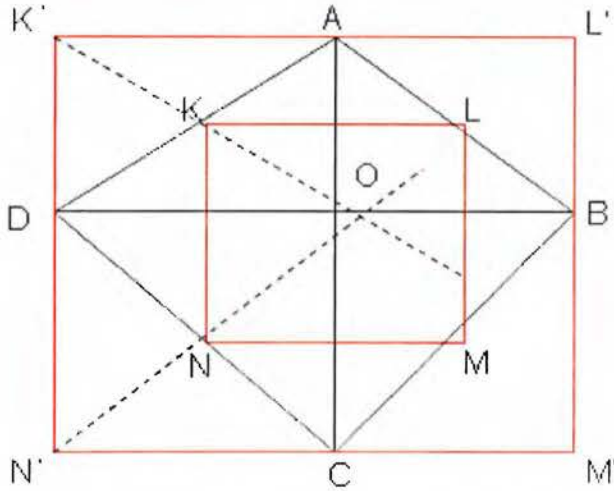
Solución:

(1) Por el resultado del ejercicio 3, existe una homotecia de centro U que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$, y por ende, el punto medio de $\overline{AB}$ en el punto medio de $\overline{DC}$, es decir M en N. Con esto y la propiedad (1) de homotecias, se concluye que U, M, N son colineales.

(2) Por otro lado, existe otra homotecia de centro V que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{DC}$, y por ende, el punto medio de $\overline{AB}$ en el punto medio de $\overline{DC}$, es decir M en N. Con esto y la propiedad (1) de homotecias, se concluye que V, M, N son colineales.

(3) Uniendo los dos resultados se obtiene que los puntos U, V, M, N son colineales.

7. Demostrar que el paralelogramo obtenido al unir por medio de una recta los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera es homotético a aquel que se obtiene al trazar por los extremos de cada diagonal, la paralela a la otra. Determinar el centro de la homotecia.



Solución:

(1) En la figura, consideremos □ABCD el cuadrilátero dado, y □KLMN el paralelogramo obtenido de unir los puntos medios de □ABCD. También consideremos □K´L´M´N´ el cuadrilátero obtenido al trazar, por los extremos de cada diagonal de □ABCD, la paralela a la otra, es decir, $\overline{K'L'} \,/\!/\, \overline{DB} \,/\!/\, \overline{N'M'}$ y $\overline{K'N'} \,/\!/\, \overline{AC} \,/\!/\, \overline{L'M'}$.

(2) Recordemos que dos puntos homotéticos son colineales con el centro de la homotecia por la propiedad (1), entonces el centro de la homotecia es el punto en el cual se intersecan las rectas $\overleftrightarrow{NN}$ y $\overleftrightarrow{KK'}$, por ejemplo.

(3) Observe que $\overline{NK} \,/\!/\, \overline{N'K'}$, esto quiere decir, por la propiedad (5) que existe una homotecia que transforma N en N´ y K en K´, por lo cual, los lados $\overline{NK}$ y $\overline{N'K'}$ son homotéticos.

(4) De la misma forma se demuestra que los demás lados son homotéticos, y se concluye, finalmente, que los paralelogramos son homotéticos.

3. Teorema de Tales y su recíproco

En esta sección se presenta la demostración del teorema de Tales y su recíproco con la utilización de homotecias y algunos contenidos estudiados anteriormente, como el paralelismo y la fórmula de Chasles. También se estudian estos teoremas para el caso particular de dos triángulos.

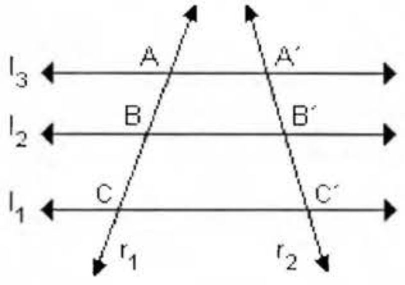
El objetivo de este tema es llegar a realizar ejercicios que puedan ser resueltos con dichos teoremas. Además, el teorema de Tales será la base para las demostraciones de los criterios de semejanza de triángulos, que se realizarán más adelante.

Se recomienda que las demostraciones que se presentan a continuación sean efectuadas en clase, con el apoyo del docente y la continua participación de los estudiantes.

Actividad 3.1: El teorema de Tales y su recíproco

Teorema de Tales

Si tres o más rectas paralelas son intersecadas cada una por dos transversales, los segmentos de las transversales determinados por las paralelas son proporcionales.



Para el caso de la figura, donde l_1, l_2, l_3 son rectas paralelas intersecadas por r_1, r_2, podemos afirmar que: $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$ $\left(\text{también } \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}\right)$.

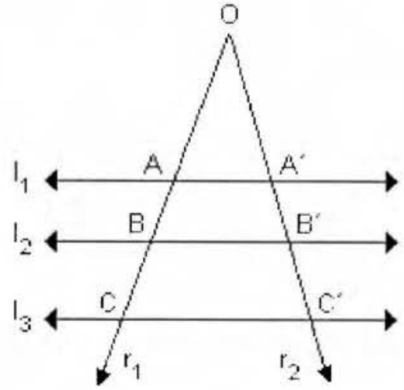
Demostración:

(1) Las rectas r_1 y r_2 se intersecan en un punto O.

(2) Por la propiedad (5) se tiene que:

La homotecia h_1 de centro O y razón k_1 que transforma A en B, también transforma A´ en B´, y la homotecia h_2 de centro O y razón k_2 que transforma A en C, también transforma A´ en C´.

(3) Por la propiedad (6) se tiene que:



$$\left.\begin{matrix} h_1(A) = B \\ h_2(A') = B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow |k_1| = \frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$$

$$\Rightarrow \frac{OA + AB}{OA} = \frac{OA' + A'B'}{OA'} \Rightarrow \frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'}$$

(4) Utilizando la homotecia h_2 se obtiene, de manera análoga, que $\frac{AC}{OA} = \frac{A'C'}{OA'}$.

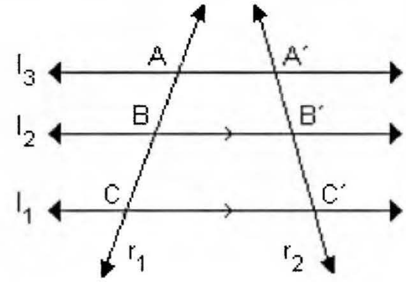
(5) Por los dos puntos anteriores, se tiene que $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$

$$\Leftrightarrow \frac{AB + BC}{AB} = \frac{A'B' + B'C'}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$$

Recíproco del teorema de Tales

Si se tiene un par de rectas paralelas l_1 y l_2, y una o varias rectas $l_3, l_4, \ldots l_n$ que son intersecadas cada una por dos transversales, y también se sabe que los segmentos de las transversales determinados por las rectas son proporcionales, entonces, las rectas $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots l_n$ son paralelas.

En el caso de la figura, las rectas l_1, l_2 y l_3 son intersecadas por r_1 y r_2, y sabemos que se cumple lo siguiente:



A. l_1 y l_2 son rectas paralelas.

B. $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{B'C'}{A'B'}\left(\text{o puede ser } \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{A'C'}{A'B'}\right)$

Entonces, se puede afirmar que las rectas l_1, l_2 y l_3 son paralelas.

Demostración:

(1) Tomemos $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{B'C'}{A'B'}=k\neq 0$. Con esto tenemos que $\overrightarrow{B'C'}=k\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AB}$, (recuerde que también podemos escribir $\overrightarrow{CB}=-k\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BA}$).

(2) Como $l_2 // l_3$ se cumple que $\overrightarrow{CC'}=m\,\overrightarrow{BB'}$.

(3) Por fórmula de Chasles sabemos que $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}$ de donde se deduce que $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{AA'}$.

(4) $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}$ por fórmula de Chasles

$\overrightarrow{CC'}=k\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}+k\overrightarrow{A'B'}$ por (1)

$\overrightarrow{CC'}=k\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'B'}\right)+\overrightarrow{BB'}$ por factor común

$\overrightarrow{CC'}=k\left(\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{AA'}\right)+\overrightarrow{BB'}$ por (3)

$\overrightarrow{CC'}=k\left(\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{AA'}\right)+\overrightarrow{BB'}=m\overrightarrow{BB'}$ por (2)

(5) *Ahora*, aplicamos propiedades algebraicas en la última igualdad:

$k\left(\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{AA'}\right)+\overrightarrow{BB'}=m\overrightarrow{BB'}\Rightarrow k\overrightarrow{BB'}-k\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}=m\overrightarrow{BB'}\Rightarrow$

$k\,\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BB'}-m\,\overrightarrow{BB'}=k\,\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\overrightarrow{BB'}\,(k+1-m)=k\,\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\dfrac{k+1-m}{k}\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}$

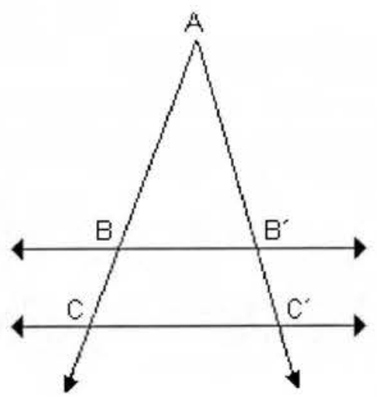
(6) Entonces tenemos que $\overrightarrow{AA'} = n\,\overrightarrow{BB'}$, con $n \in$ IR, es decir $\overleftrightarrow{AA'} // \overleftrightarrow{BB'}$, y concluimos que l_1, l_2 y l_3 son paralelas.

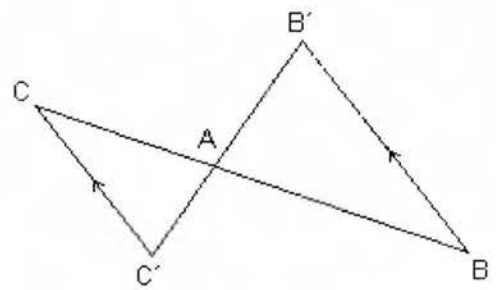
Observación: Si las condiciones que tuviésemos fueran que l_1 y l_2 son rectas paralelas y $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$, también se cumple el teorema, puesto que si sabemos que $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$ podemos afirmar que $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$, lo cual se demostró antes.

4. El teorema de Tales y su recíproco para triángulos

Teorema de Tales para triángulos

Si se tiene un triángulo $\triangle ABB'$, donde B pertenece a $\overleftrightarrow{AC}$, B´ pertenece a $\overleftrightarrow{AC'}$ y $\overleftrightarrow{BB'} // \overleftrightarrow{CC'}$, entonces $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{CC'}{BB'}$ $\left(\text{también } \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}\right)$.





$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC'}$$

Demostración:

(1) Por la propiedad (5) se tiene que:

La homotecia h de centro A y razón k que transforma B en C, también transforma B´ en C´.

(2) Por la propiedad (6) se tiene que:

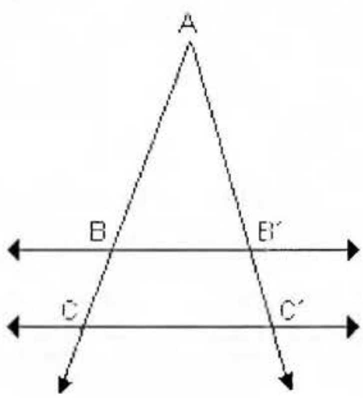
$$\left.\begin{array}{l} h(B) = C \\ h(B') = C' \end{array}\right\} \Rightarrow |k| = \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$$

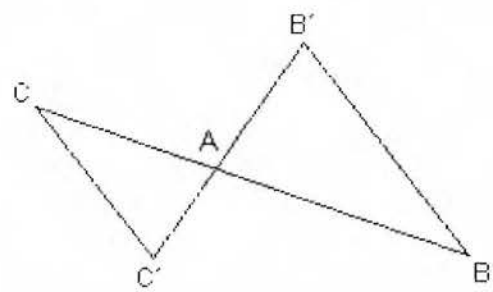
(3) En este caso, se cumplen las condiciones de la propiedad (3) de homotecias, por lo cual, podemos afirmar que $CC' = |k| BB'$, es decir, $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{CC'}{BB'}$

(4) Al igual que en la demostración del teorema de Tales general, tenemos que $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$

Recíproco del teorema de Tales para triángulos

Si se tiene un triángulo $\Delta ABB'$, donde B pertenece a $\overleftrightarrow{AC}$, B´ pertenece a $\overleftrightarrow{AC'}$ y $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$ $\left(\text{o puede ser } \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}\right)$, entonces $\overleftrightarrow{BB'} /\!/ \overleftrightarrow{CC'}$.

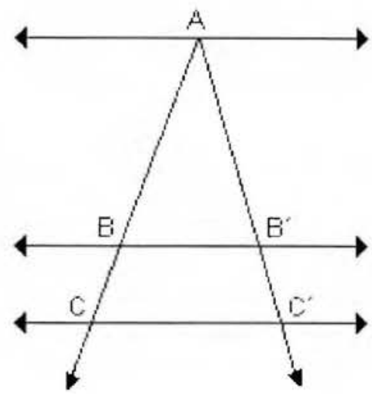




$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC'}$$

Demostración:

(1) Anteriormente se estudió que si tenemos una recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que contiene al punto y es paralela a la recta dada. Entonces, podemos considerar la recta que contiene al punto A y es paralela a $\overleftrightarrow{CC'}$.

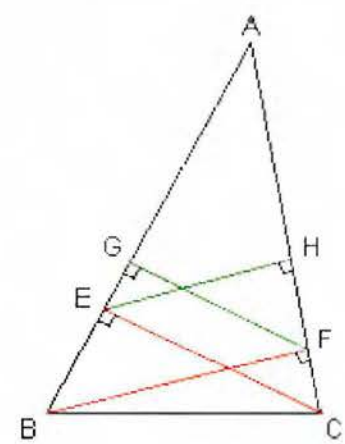


(2) Con lo anterior y la proporción $\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}$ tenemos las condiciones del recíproco del teorema de Tales general, por lo cual podemos afirmar que $\overleftrightarrow{BB'} // \overleftrightarrow{CC'}$

Observación: Si las condiciones que tuviésemos fueran que B está entre A y C, B´ está entre A y C´ y $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$, también se cumple el teorema, puesto que si sabemos que $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$ podemos afirmar que $\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}$, lo cual se demostró antes.

Ejemplos:

- En la figura de la derecha se presenta un triángulo acutángulo ΔABC donde se cumplen las siguientes condiciones:



- $\overline{BF}$ es la altura sobre el lado $\overline{AC}$ del triángulo ΔABC.
- $\overline{CE}$ es la altura sobre el lado $\overline{AB}$ del triángulo ΔABC.
- $\overline{EH}$ es la altura sobre el lado $\overline{AC}$ del triángulo ΔACE.
- $\overline{FG}$ es la altura sobre el lado $\overline{AB}$ del triángulo ΔABF.

Demuestre que $\overleftrightarrow{GH} // \overleftrightarrow{BC}$.

Solución:

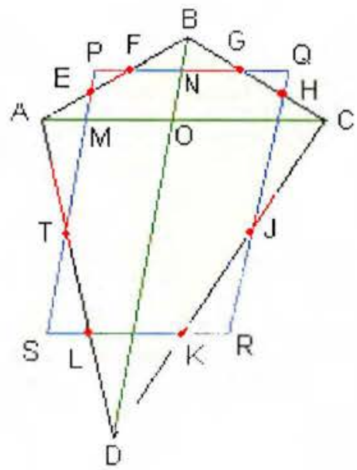
(1) Las rectas $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{EH}$ son perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{AC}$, y por un teorema estudiado anteriormente, se puede afirmar que $\overleftrightarrow{BF} // \overleftrightarrow{EH}$. De manera similar se deduce que $\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{FG}$.

(2) Por (1) podemos aplicar el teorema de Tales para los triángulos ΔABF y ΔAEH obteniendo que $\frac{AE}{AB}=\frac{AH}{AF}$, de modo parecido para los triángulos ΔACE y ΔAFG concluimos que $\frac{AG}{AE}=\frac{AF}{AC}$.

(3) De la parte [2] podemos afirmar que $\frac{AE}{AB}\cdot\frac{AG}{AE}=\frac{AH}{AF}\cdot\frac{AF}{AC}$, es decir, $\frac{AG}{AB}=\frac{AH}{AC}$.

(4) Por medio del recíproco de Tales, podemos afirmar finalmente que $\overleftrightarrow{GH} // \overleftrightarrow{BC}$.

- "El paralelogramo de Wittenbaeur"



Considere un cuadrilátero convexo □ABCD de modo que sus lados se dividen en tres partes congruentes, como se indica en la figura con puntos rojos. Se "unen" dichos puntos de manera que queda determinado un cuadrilátero □PQRS.

O es el punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. M es el punto de intersección de $\overline{PS}$ y $\overline{AC}$, y N es el punto de intersección de $\overline{PQ}$ y $\overline{BD}$.

A. Demuestre que $\overleftrightarrow{SR} // \overleftrightarrow{AC}$.

(1) Observe que $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

(2) Por el recíproco del teorema de Tales para triángulos tenemos que $\overleftrightarrow{SR} // \overleftrightarrow{AC}$.

B. Demuestre que □PQRS es un paralelogramo.

(1) Anteriormente se demostró que $\overleftrightarrow{SR} // \overleftrightarrow{AC}$. De manera similar podemos demostrar que $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{QR} // \overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{PS} // \overleftrightarrow{BD}$.

(2) Del punto (1) podemos concluir que $\overleftrightarrow{SR} // \overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{QR} // \overleftrightarrow{PS}$, por lo cual afirmamos que □PQRS es un paralelogramo.

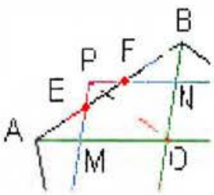
C. Demuestre que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BO}$

(1) Observe que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AT}$.

(2) Ahora considere los triángulos ΔTAM y ΔDAO. Ya se demostró que $\overleftrightarrow{PS} // \overleftrightarrow{BD}$, y por el teorema de Tales para triángulos tenemos que $\frac{AD}{AT} = \frac{AO}{AM}$.

(3) Por (1) y (2) tenemos que $3 = \frac{AO}{AM}$ y concluimos que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$.

(4) De manera similar, considerando por ejemplo los triángulos ΔBGN y ΔBCO, podemos asegurar que $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BO}$.



D. Demuestre que $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP}$

(1) De C. podemos deducir que $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{ON} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

(2) Como $\overleftrightarrow{PS} // \overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AC}$ tenemos que □MPNO es un paralelogramo, por lo cual ON = MP.

(3) Por [1] y [2] tenemos que $\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

(4) Por suma de vectores, sabemos que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP}$, por (1) y (3) tenemos que $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP}$

E. Deducir que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}\right)$

(1) Por D.

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$$

(2) Estas igualdades se demuestran con un procedimiento similar al del punto D.

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OQ}$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OR}$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OS}$$

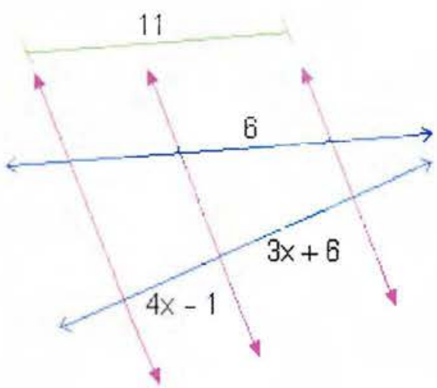
(3) Sumando las columnas

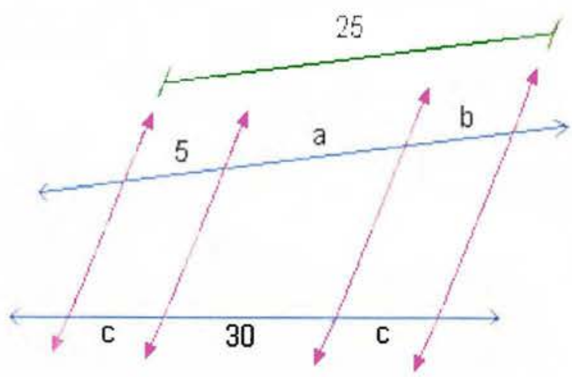
$$\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}\right)$$

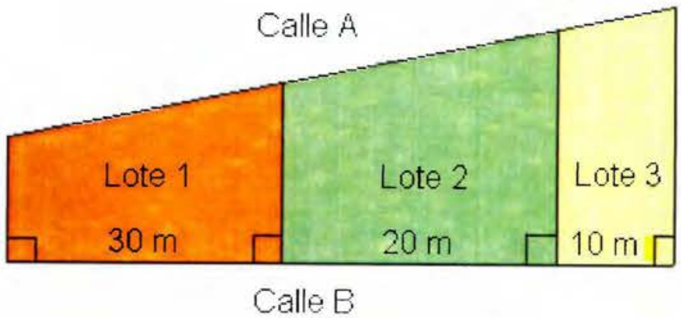
Ejercicios:

A. En las siguientes figuras, las rectas en rosado son paralelas. Determine el valor de x, a, b y c.





B. El siguiente dibujo representa tres lotes que colindan. El frente de ellos está sobre la Calle B y la parte del fondo sobre la Calle A.



Sus lados son perpendiculares a la Calle B y el fondo de los tres lotes mide en total 80 metros. Determine la longitud del fondo de cada uno de ellos.

C. Considere un triángulo isósceles ΔABC donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. En $\overline{AB}$ se ubica un punto D, y en $\overline{AC}$ un punto E, de manera que $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$. Demuestre que $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.

D. Considere l, l´ y l´´ tres rectas que se intersecan en un punto O. Dos rectas paralelas m y m´ cortan respectivamente a l en los puntos A y A´, a l´ en los puntos B y B´ y a l´´ en los puntos C y C´. Demuestre que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.
Sugerencia: Considere primero los triángulos ΔOAC y $\Delta OA`C`$, luego los triángulos ΔOAB y $\Delta OA`B`$.

5. Semejanza de triángulos, teorema fundamental de semejanza, "teorema de la paralela media" y su recíproco

En este apartado se presenta con detalle el desarrollo del tema de semejanza de triángulos. Primero se establece la definición de triángulos semejantes y su relación con el antes demostrado teorema de Tales. Luego, se demuestra el segundo teorema de Tales y el "teorema de la paralela media", para concluir con la demostración de los criterios de semejanza.

El docente notará que, con las bases que se espera que el estudiante tenga hasta el momento, dichas demostraciones resultan muy sencillas. Cabe resaltar que muchos de los ejercicios se resuelven con la aplicación de los criterios de semejanza, tal y como se ha venido realizado en secundaria, sin apelar cada vez al uso de las homotecias.

Actividad 5.1: Desarrollo de los contenidos sobre semejanza de triángulos

En esta actividad se presenta el antes mencionado desarrollo del tema de semejanza de triángulos, en el cual aparecen varias demostraciones de resultados que se aplicarán en la resolución de ejercicios. Se recomienda que dichas demostraciones sean efectuadas en clase, con el apoyo del docente y la continua participación de los estudiantes.

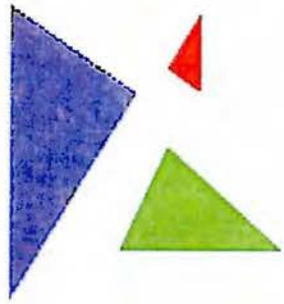
Es necesario que el alumno recuerde los conocimientos adquiridos sobre transformaciones isométricas, puesto que son aplicados en las demostraciones de los criterios de semejanza de triángulos.

Por otra parte, en este desarrollo se encuentra también una demostración del "teorema de la paralela media" basada en la semejanza de triángulos; es importante que los estudiantes recuerden que dicho teorema fue demostrado de otra manera en octavo año.

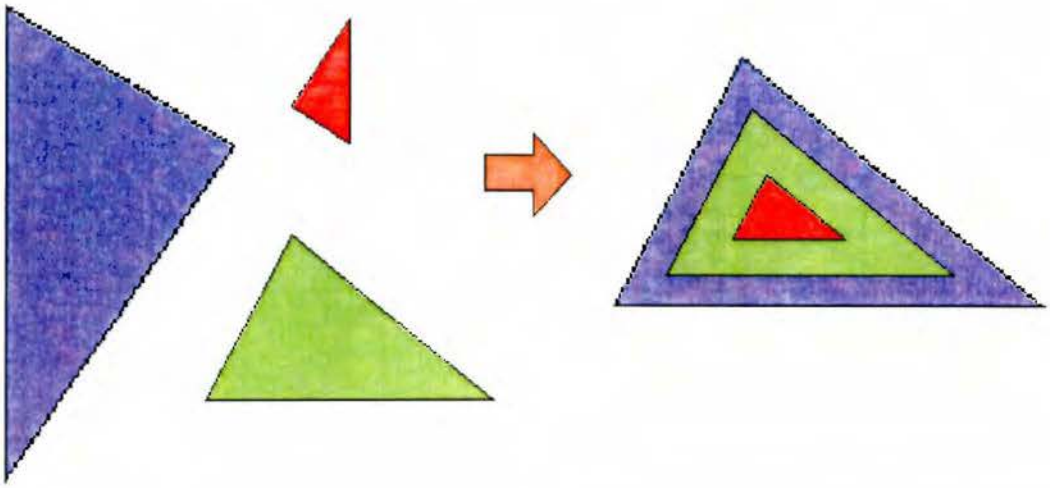
Introducción a triángulos semejantes

Para introducir el concepto de triángulos semejantes, se comienza con algunos ejemplos gráficos.

Con este fin, el docente lleva a su clase tres triángulos semejantes elaborados con cartulinas de colores, y los pega en la pizarra de forma similar a la de la figura de la derecha.



Luego, puede sugerir a los estudiantes que trasladen y roten los triángulos, de modo que uno quede sobre el otro, como se indica en la siguiente figura:



De esta manera, los alumnos pueden notar que los triángulos en cuestión tienen la misma forma, pero los lados de un triángulo no son del mismo tamaño que los del otro.

¿Sucede lo mismo con los ángulos?

¿Guardará alguna relación los lados de un triángulo con respecto a los del otro?

Luego de reflexionar sobre eso, el docente menciona que este tipo de triángulos se llaman semejantes y proporciona la definición.

Después, con la ayuda del profesor, se toman las medidas de dos de los triángulos, y se verifican las condiciones de la definición.

Definición de triángulos semejantes

Sean Δ ABC y Δ DEF dos triángulos para los cuales se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$
2. $\angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F$

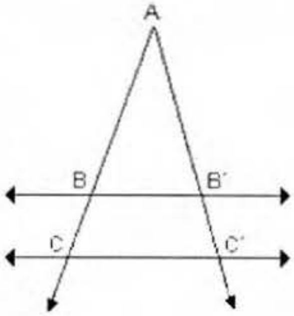
En este caso, se dice que ambos triángulos son semejantes y se denota así: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

El valor "k" se conoce como la razón de semejanza o de proporcionalidad.

Los pares de lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ reciben el nombre de lados correspondientes. Los pares de ángulos $\angle A$ y $\angle D$, $\angle B$ y $\angle E$, $\angle C$ y $\angle F$ se llaman ángulos correspondientes.

Observación: Note que para los triángulos Δ ABC y Δ DEF estudiados anteriormente, también se cumple que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$. En este caso se sigue diciendo que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ y se considera como razón de semejanza al valor $\frac{1}{k}$.

La semejanza de triángulos y el teorema de Tales



* Anteriormente demostramos el teorema de Tales para el caso particular de triángulos, de modo que, en una figura como la de la izquierda, donde sabemos que $\overleftrightarrow{BB'} // \overleftrightarrow{CC'}$, podemos afirmar que $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{CC'}{BB'}$

* Además, se tienen las siguientes congruencias de ángulos:

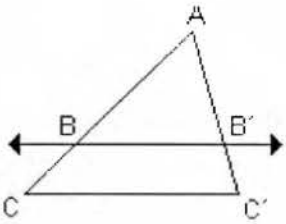
$\angle BAB' \cong \angle CAC'$ (son el mismo)

$\angle ABB' \cong \angle ACC'$ (correspondientes entre paralelas)

$\angle AB'B \cong \angle AC'C$ (correspondientes entre paralelas)

Por los dos puntos anteriores tenemos que $\Delta ABB' \sim \Delta ACC'$, con lo cual queda demostrado el siguiente teorema:

Segundo teorema de Tales o teorema fundamental de semejanza:



Una paralela trazada a un lado de un triángulo y que lo interseca, determina dos triángulos semejantes.

En el caso de la figura, se tiene que $\overleftrightarrow{BB'} // \overleftrightarrow{CC'}$; entonces $\Delta ABB' \sim \Delta ACC'$.

A partir del segundo teorema de Tales podemos considerar, de modo particular, la recta paralela donde B es el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Por la semejanza de los triángulos $\Delta ABB' \sim \Delta ACC'$ se tiene que

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}\Rightarrow\frac{AB}{2\,AB}=\frac{AB'}{2\,AB'}=\frac{1}{2}.$$

Y esto resulta ser otra demostración del "teorema de la paralela media" ya conocido por el estudiante.

Recíproco del "teorema de la paralela media"

Si se tienen dos triángulos, como en la figura anterior, que son semejantes con una razón de $\frac{1}{2}$, entonces las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC}$ son paralelas.

Demostración:

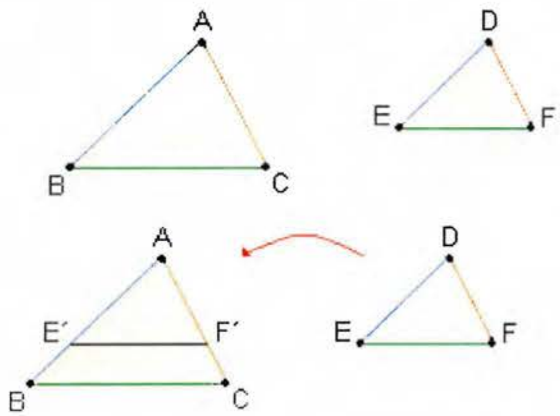
Si se tiene que $\Delta ABB \sim \Delta ACC$ con una razón de semejanza $\frac{1}{2}$, podemos afirmar que se cumple la siguiente igualdad: $\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\frac{1}{2}$, y por la propiedad (6) sabemos que existe una homotecia de centro A y razón $\frac{1}{2}$ que transforma C en B y C´ en B´, luego, por la propiedad (4) tenemos que las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC}$ son paralelas.

6. Criterios de semejanza

A continuación se presentan tres teoremas que nos garantizan la semejanza de dos triángulos conociendo tan sólo unas cuantas de las condiciones requeridas en la definición.

Criterio LLL (lado, lado, lado)

Si para dos triángulos Δ ABC y Δ DEF se cumple que $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=k$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



Demostración

Mediante transformaciones isométricas es posible que $\overline{DE}$ sea transformado en $\overline{AE'}$, donde $E' \in \overleftrightarrow{AB}$. Bajo esas mismas transformaciones se tiene que $\overline{AF'}$ es la imagen de $\overline{DF}$ y $\overline{E'F'}$ es la imagen de $\overline{EF}$, donde $F' \in \overleftrightarrow{AC}$.

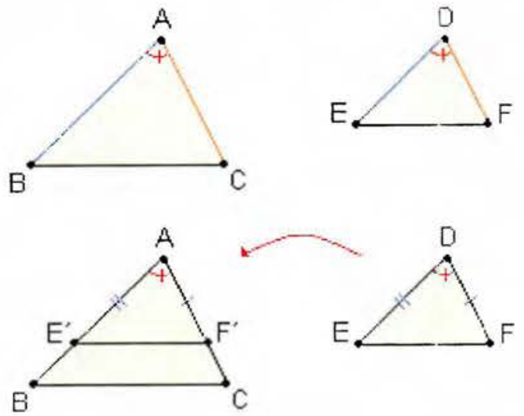
Se sabe que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$, o bien $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = \frac{BC}{E'F'} = k$. Esto quiere decir que existe una homotecia h de centro A y razón k que transforma E´ en B y F´ en C. Por (4) se concluye entonces que $\overleftrightarrow{E'F'} // \overleftrightarrow{BC}$.

Se cumplen entonces las hipótesis del segundo teorema de Tales, por lo cual se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$.

Como el $\Delta AE'F'$ es imagen bajo transformaciones isométricas del ΔDEF, se afirma finalmente que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Criterio LAL (lado, ángulo, lado)

Si para dos triángulos Δ ABC y Δ DEF se cumple que $\angle BAC \cong \angle EDF$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



Demostración

Mediante transformaciones isométricas es posible que el $\angle EDF$ sea transformado en el $\angle BAC$. Bajo esas mismas transformaciones se tiene que $\overline{DE} \cong \overline{AE'}$ y $\overline{DF} \cong \overline{AF'}$, donde $E' \in \overleftrightarrow{AB}$ y $F' \in \overleftrightarrow{AC}$.

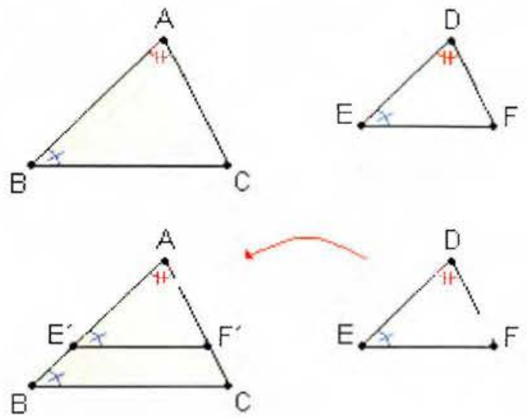
Se sabe que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k$, o bien $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = k$. Esto quiere decir que existe una homotecia h de centro A y razón k que transforma E´ en B y F´ en C. Por (4) se concluye entonces que $\overleftrightarrow{E'F'} // \overleftrightarrow{BC}$.

Se cumplen entonces las hipótesis del segundo teorema de Tales, por lo cual se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$.

Como el $\Delta AE'F'$ es imagen bajo transformaciones isométricas del ΔDEF, se afirma finalmente que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Criterio AA (ángulo, ángulo)

Si para dos triángulos Δ ABC y Δ DEF se cumple que $\angle BAC \cong \angle EDF$ y $\angle ABC \cong \angle DEF$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



Demostración

Mediante transformaciones isométricas es posible que el $\angle EDF$ sea transformado en el $\angle BAC$. Bajo esas mismas transformaciones, el $\angle AE'F'$ es imagen del $\angle DEF$, donde $E' \in \overleftrightarrow{AB}$ y $F' \in \overleftrightarrow{AC}$.

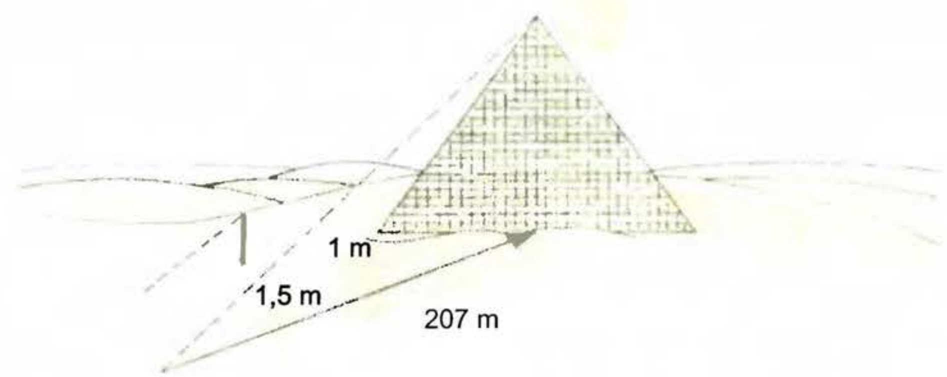
Tenemos entonces que $\angle AE'F' \cong \angle ABC$ y son ángulos correspondientes (considerando las rectas $\overleftrightarrow{E'F'}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ que son intersecadas por la recta $\overleftrightarrow{AB}$), por lo tanto $\overleftrightarrow{E'F'} // \overleftrightarrow{BC}$.

Se cumplen entonces las hipótesis del segundo teorema de Tales, por lo cual se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$.

Como el $\Delta AE'F'$ es imagen bajo transformaciones isométricas del ΔDEF, se afirma finalmente que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Ejercicios:

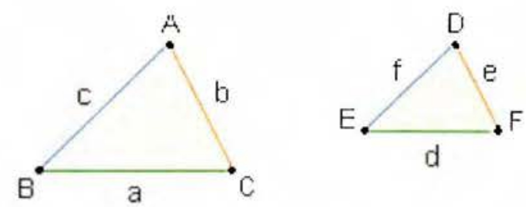
A. Un científico visitó la Pirámide de Keops, en Egipto, y se interesó en calcular su altura, para ello, clavó una estaca en el suelo y midió la sombra que proyectaba tanto la estaca como la pirámide, obteniendo los resultados que se muestran en la figura.



Describa el procedimiento que tuvo que llevar a cabo el científico para lograr su objetivo, y determine usted también la altura de la pirámide.

B. Demuestre que la razón de los perímetros de dos triángulos semejantes es igual a su razón de semejanza. Es decir, si $\triangle ABC$ $\triangle DEF$ como en la figura adjunta, entonces

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{a+b+c}{d+e+f}$$



Sugerencia: Llamar k a la razón de semejanza de los triángulos y escribir a, b y c en términos de k. Luego, verificar que $\frac{a+b+c}{d+e+f} = k$

C. Un triángulo cuyos lados miden 3, 5 y 10 cm es semejante a otro cuyo perímetro es 72 cm. Hallar la medida de los lados del segundo triángulo y la razón de semejanza.

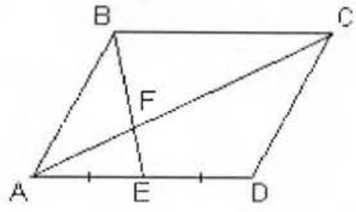
D. La distancia entre Atenas y Orotina es de 24 km, mientras que en un plano de carreteras, ellos distan 1,2 cm.

a) ¿Cuál es la escala del mapa?

b) Si la escala del mapa fuese de 1 : 500 000. ¿Cuál sería la distancia sobre el papel entre ambos pueblos?

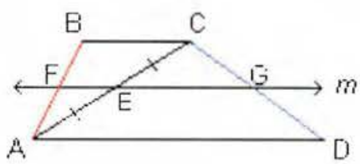
E. Sea un triángulo Δ ABC y E, F y G los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Demostrar que $\overline{EF}$ y $\overline{CG}$ se intersecan en el punto medio.

F. En la siguiente figura, □ABCD es un paralelogramo y E es el punto medio del segmento $\overline{AD}$. Demuestre que $\overline{BE}$ divide a la diagonal $\overline{AC}$ en la relación de $\frac{1}{3}$.



G. Sugerencia: Considere los triángulos ΔAFE y ΔCFB .

H. Considere un trapecio □ABCD como el que aparece en la figura adjunta. E es el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y por él se traza una recta m paralela a las bases del trapecio, y que interseca a los lados no paralelos del mismo. Demuestre que dichas intersecciones (puntos F y G) corresponden a los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



7. Congruencia de triángulos

De manera similar al apartado de semejanza, se incluye en éste el desarrollo del contenido de congruencia de triángulos, que contiene la definición y las demostraciones de los criterios, basadas en la semejanza de triángulos.

Posteriormente, se presentan algunos ejercicios que en su mayoría se resuelven con la aplicación de dichos criterios.

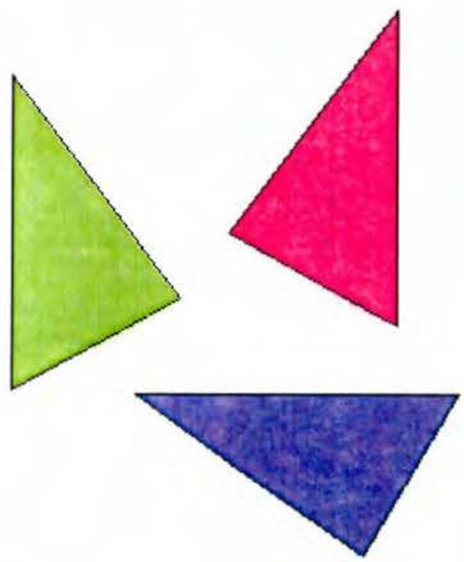
Actividad 7.1: Desarrollo de los contenidos sobre congruencia de triángulos

En esta actividad se presenta el antes mencionado desarrollo del tema de congruencia de triángulos, en el cual aparecen varias demostraciones de resultados que se aplicarán en la resolución de ejercicios. Se recomienda que dichas demostraciones sean efectuadas en clase, con el apoyo del docente y la continua participación de los estudiantes.

Es necesario que el alumno retome los conocimientos adquiridos sobre semejanza de triángulos, puesto que son aplicados en las demostraciones de los criterios de congruencia de triángulos.

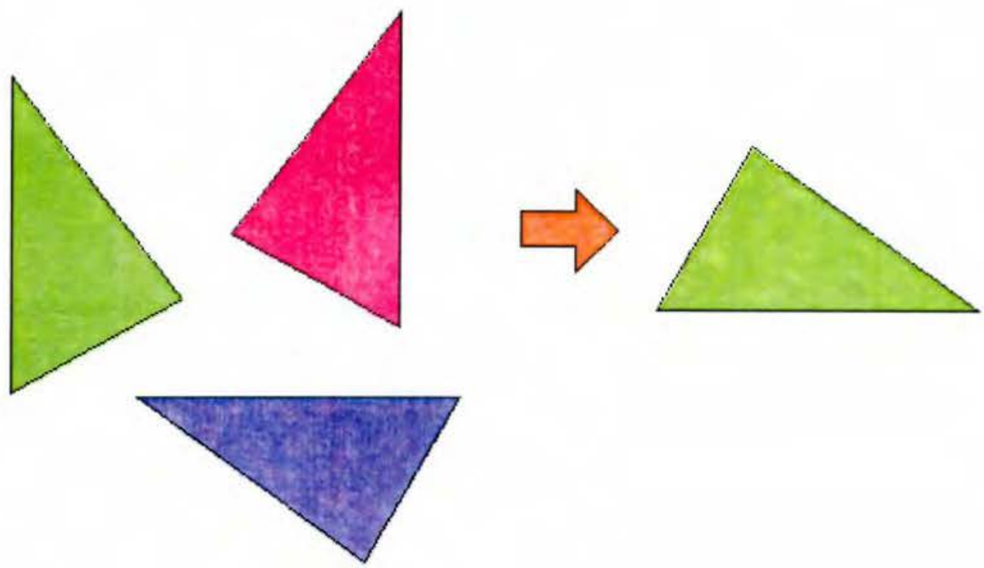
Introducción a triángulos congruentes:

Para introducir el concepto de triángulos congruentes, se realiza una actividad similar a la elaborada con los triángulos semejantes.



El docente lleva a su clase tres triángulos congruentes elaborados con cartulinas de colores, y los pega en la pizarra de forma similar a la de la figura de la derecha.

Luego, puede sugerir a los estudiantes que trasladen y roten los triángulos, de modo que uno quede sobre el otro, como se indica en la siguiente figura:



De esta manera, los alumnos pueden notar que los triángulos en cuestión tienen la misma forma y que las longitudes de los lados de un triángulo, coinciden con los de los demás triángulos.

¿Sucede lo mismo con los ángulos?

¿Qué relación tiene esto con lo estudiado sobre triángulos semejantes?

Luego de reflexionar sobre eso, el docente menciona que este tipo de triángulos se llaman congruentes y proporciona la definición.

Definición de triángulos congruentes:

Sean Δ ABC y Δ DEF dos triángulos para los cuales se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$
2. $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

En este caso, se dice que ambos triángulos son congruentes y se denota así: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

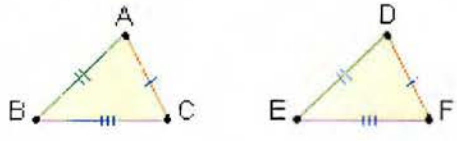
Observación: De la hipótesis 1. se desprende que $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = 1$ y junto a la hipótesis 2. se obtiene que, además de congruentes, los triángulos ΔABC y ΔDEF son semejantes, donde la razón de semejanza es k = 1. Con esto se tiene que todos los triángulos congruentes son también semejantes, sin embargo, no todos los triángulos semejantes son congruentes.

Criterios de congruencia

A continuación se presentan cuatro teoremas que nos garantizan la congruencia de dos triángulos conociendo tan sólo unas cuantas de las condiciones requeridas en la definición.

Criterio LLL (lado, lado, lado)

Si para dos triángulos Δ ABC y Δ DEF se cumple que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



Demostración

Por el Criterio LLL anteriormente estudiado, se tiene que Δ ABC ~ Δ DEF, y en este caso la razón de semejanza es k = 1, por lo cual puede afirmarse que la semejanza es una congruencia, es decir, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Criterio LAL (lado, ángulo, lado)

Si para dos triángulos Δ ABC y Δ DEF se cumple que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Demostración

Análogamente al caso anterior, sólo que utilizando el Criterio LAL anteriormente estudiado, se obtiene que la semejanza de los triángulos Δ ABC y Δ DEF es una congruencia.

Criterio ALA (ángulo, lado, ángulo)

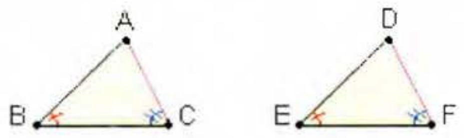
Si para dos triángulos Δ ABC y Δ DEF se cumple que $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Demostración

Por el Criterio AA anteriormente estudiado, se tiene que Δ ABC $\sim \Delta$ DEF, y en este caso la razón de semejanza es k = 1 (debido a que $\overline{BC} \cong \overline{EF}$). Entonces puede afirmarse que la semejanza es una congruencia, es decir, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Criterio LAA (lado, ángulo, ángulo)

Si para dos triángulos Δ ABC y Δ DEF se cumple que $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



Demostración

Análogamente al caso anterior, se tiene que la semejanza de los triángulos Δ ABC y Δ DEF es una congruencia.

Ejercicios:

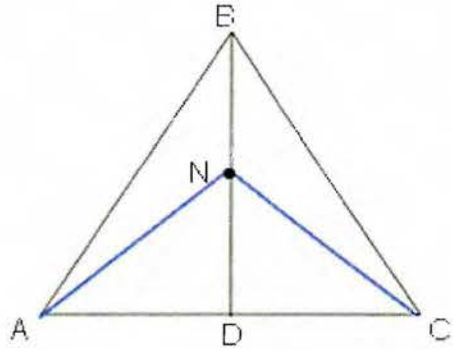
A. Demuestre que si en un triángulo ΔABC, la mediana $\overline{AM}$ es perpendicular al lado $\overline{BC}$, dicho triángulo es isósceles.

B. Demuestre que en un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes (resultado estudiado en octavo año).

C. Demuestre que las perpendiculares trazadas desde un punto fijo de la bisectriz de un ángulo, a sus lados, son congruentes

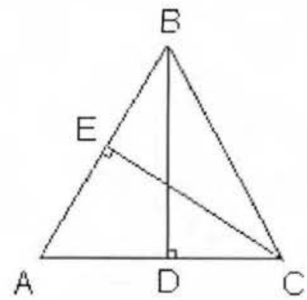
D. El triángulo determinado por los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero, es equilátero.

E. Considere un triángulo isósceles Δ ABC donde $\overline{AC}$ es el lado desigual. Sea D el punto medio de $\overline{AC}$ y N un punto que pertenece a la mediana $\overline{BD}$. Determine qué tipo de triángulo es Δ ANC de acuerdo a sus lados.



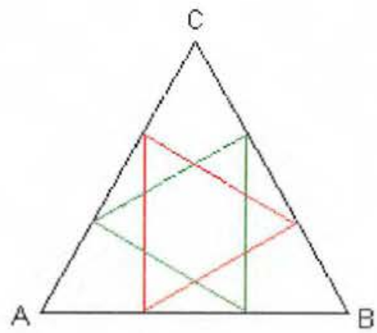
F. Considere un triángulo isósceles Δ ABC donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Tome un punto cualquiera P sobre la altura $\overline{AH}$ y considere la recta que es perpendicular a dicha altura y que contiene al punto P, ésta interseca a $\overline{AB}$ en E, y a $\overline{AC}$ en D. Demuestre que $\overline{PE} \cong \overline{PD}$, $\overline{EH} \cong \overline{HD}$ y $\angle BEH \cong \angle HDC$.

G. En la figura de la derecha se presenta un triángulo ΔABC donde $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son segmentos congruentes y perpendiculares a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Demuestre que el triángulo es isósceles.

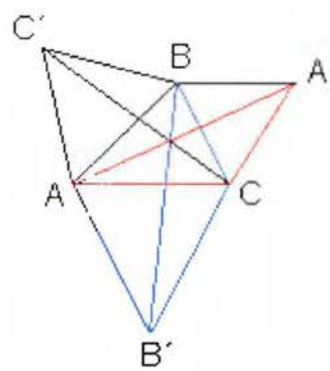


Sugerencia: Considere los triángulos ΔAEC y ΔADB.

H. La siguiente figura corresponde a un triángulo equilátero ΔABC. En cada uno de sus lados se han ubicado dos puntos que los dividen en tres segmentos congruentes. Con dichos puntos se han formado dos triángulos, tal y como aparece en la figura adjunta (triángulos rojo y verde). Demuestre que los triángulos formados son equiláteros.



I. En la figura adjunta se presenta un triángulo ΔABC cualquiera. Sobre sus lados se construyen los triángulos equiláteros $\Delta ABC'$, $\Delta ACB'$ y $\Delta BCA'$. Demuestre que $\overline{AA'} \cong \overline{BB'} \cong \overline{CC'}$. Sugerencia: Considere los triángulos rojo y azul presentes en la figura.



8. Teorema de Pitágoras y sus derivados

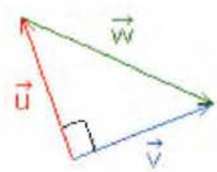
Con este contenido se pretende que los estudiantes conozcan el teorema de Pitágoras y sus derivados para que sean aplicados en la resolución de ejercicios y de algunas demostraciones.

Actividad 8.1: El teorema de Pitágoras

A continuación se presentan las demostraciones del teorema de Pitágoras y sus derivados con la utilización de vectores, las cuales el docente puede desarrollar en clase con la participación de sus estudiantes.

El teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece que, dado un triángulo de lados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, donde el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$, y $\vec{v}$, es recto, se cumple que:



$\vec{u}^2 + \vec{v}^2 = \vec{w}^2$

Demostración

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{v} - \vec{u}\| \Rightarrow \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \Rightarrow \vec{w}^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{u}^2$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, se tiene que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ y resulta que $\vec{w}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$.

El recíproco también se cumple, es decir, si se tiene un triángulo de lados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, donde se cumple que $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 = \vec{w}^2$, entonces dicho triángulo es rectángulo.

Demostración

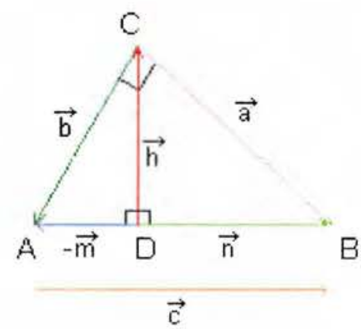
Anteriormente se determinó que en un triángulo de lados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ se cumple que $\vec{w}^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{u}^2$, y si tenemos que $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 = \vec{w}^2$ entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, esto quiere decir que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

Actividad 8.2: Derivados del teorema de Pitágoras

Considere un triángulo ΔABC de lados $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, donde el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es recto.

La altura sobre $\overline{AB}$ es $\vec{h} = \overrightarrow{DC}$.

Además, se tiene que $\overrightarrow{AD} = \vec{m}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{n}$, de modo que, $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + \vec{n} = \vec{c}$.



	Probar que...	Demostración
"Teorema de la Altura"	$\vec{h}^2 = \vec{m}\cdot\vec{n}$	Por el teorema de Pitágoras sabemos que: $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = (\vec{m}+\vec{n})^2 = \vec{m}^2 + 2\,\vec{m}\cdot\vec{n} + \vec{n}^2$ (*) También por el teorema de Pitágoras tenemos que: $\vec{h}^2 + \vec{n}^2 = \vec{a}^2$ y $\vec{h}^2 + (-\vec{m})^2 = \vec{b}^2$ $\Rightarrow \vec{h}^2 = \vec{a}^2 - \vec{n}^2$ y $\vec{h}^2 = \vec{b}^2 - (-\vec{m})^2 = \vec{b}^2 - \vec{m}^2$. Sumando ambas expresiones se obtiene: $2\vec{h}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \vec{m}^2 - \vec{n}^2$. Pero por (*) resulta que: $2\vec{h}^2 = (\vec{m}^2 + 2\,\vec{m}\cdot\vec{n} + \vec{n}^2) - \vec{m}^2 - \vec{n}^2 = 2\,\vec{m}\cdot\vec{n}$ y finalmente se obtiene que: $\vec{h}^2 = \vec{m}\cdot\vec{n}$.
"Teorema del Cateto"	$\vec{a}^2 = \vec{n}\cdot\vec{c}$ $\vec{b}^2 = \vec{m}\cdot\vec{c}$	Para demostrar que $\vec{a}^2 = \vec{n}\cdot\vec{c}$, recordemos que $\vec{a}^2 = \vec{h}^2 + \vec{n}^2$ (por teorema de Pitágoras). Pero, por el "teorema de la Altura" sabemos que $\vec{h}^2 = \vec{m}\cdot\vec{n}$, así

		que sustituimos esto en la expresión anterior, obteniendo: $\vec{a}^2 = \vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{n}^2$. Observemos que $\vec{a}^2 = \vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{n}^2 = \vec{n}(\vec{m} + \vec{n}) = \vec{n} \cdot \vec{c}$ que es lo que buscábamos demostrar. La demostración de que $\vec{b}^2 = \vec{m} \cdot \vec{c}$ es análoga.

Actividad 8.3: Otras demostraciones del teorema de Pitágoras[2]

En esta actividad se presentan otras demostraciones del teorema de Pitágoras, las cuales pueden ser realizadas por los estudiantes de manera individual o en parejas. Se pretende que ellos tengan una continua participación a raíz de las preguntas que pueda plantear el docente.

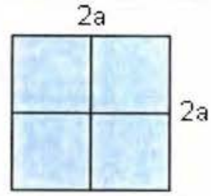
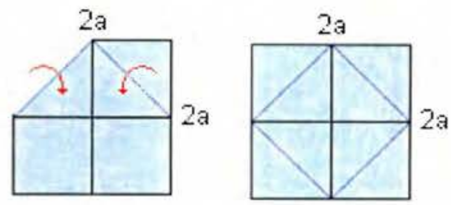
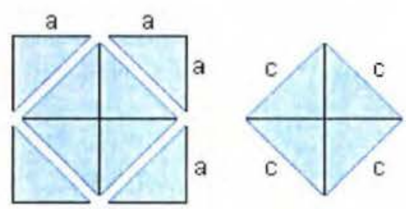
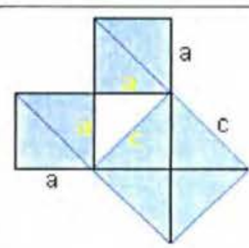
Además de permitir a los alumnos convencerse de la veracidad del resultado, la realización de tres demostraciones sencillas de las muchas existentes para este teorema se presta para el repaso de algunos conocimientos previos, como por ejemplo el área del triángulo, del cuadrado y del trapecio, el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo y algunas herramientas algebraicas.

Materiales:

- Papel bond
- Lápiz
- Borrador
- Tijeras
- Regla graduada
- Escuadra

[2] Demostraciones consultadas en http://es.wikipedia.org

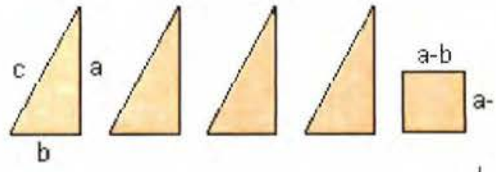
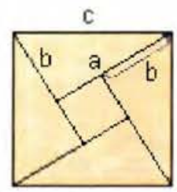
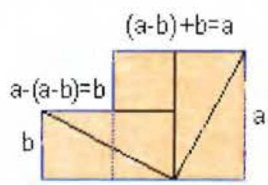
Instrucciones: La siguiente prueba verifica el teorema de Pitágoras para el caso particular de triángulos rectángulos isósceles. La misma está basada en la realizada por Platón3 para demostrar la duplicación del cuadrado.

Indicaciones para la demostración	Ilustración
Tomar una hoja de papel cuadrada de lado "2a". Doblarla a la mitad y luego nuevamente a la mitad, de manera que quede como se muestra en la figura.	
Cada esquina del papel se dobla hacia delante, de manera que cada vértice se lleve hacia el centro del cuadrado. Con esto se forma un rombo. Luego, se vuelve a estirar el papel.	
Se recortan los cuatro triángulos rectángulos isósceles de las esquinas (cuyos catetos miden "a" cada uno), de modo que nos queda un cuadrado cuya longitud del lado denotaremos por "c". Observe que la suma de las áreas de los cuatro triángulos coincide con el área del cuadrado de lado "c".	
Se reacomodan las piezas, tal y como se muestra en la ilustración y se deduce que $a^2 + a^2 = c^2$ en donde a es la longitud de cada cateto y c es la hipotenusa del triángulo formado entre las figuras.	

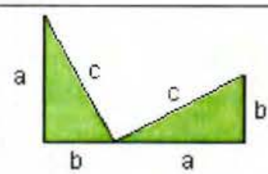
[3] Filósofo griego que vivió durante el periodo 428 - 347 a.C.

Las siguientes demostraciones son para triángulos rectángulos en general.

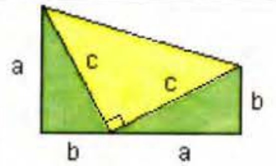
Bhaskara4

Indicaciones para la demostración	Ilustración
En una hoja de papel se construyen cuatro triángulos rectángulos del mismo tamaño, de manera que los catetos tengan dos medidas distintas que denotaremos por "a" y "b", con a > b. También se construye un cuadrado de lado a – b.	
Ahora, las piezas se ordenarán formando un cuadrado cuya longitud del lado llamaremos "c", tal y como se muestra en la figura. Observe que el área de dicho cuadrado (que es c^2) coincide con la suma de las áreas de la totalidad de las piezas.	
Se reacomodan las piezas como se muestra en la ilustración. Ellas forman ahora dos cuadrados. Uno de área a^2 y otro de área b^2. Finalmente se concluye que $a^2 + b^2 = c^2$.	

James Garfield[5]

Indicaciones para la demostración	Ilustración
En una hoja se construyen dos triángulos rectángulos cuyos catetos miden "a" y "b" y la hipotenusa "c", en la posición que se muestra en la figura adjunta.	

[4] Matemático y astrónomo hindú del siglo XII.
[5] Vigésimo Presidente de los Estados Unidos.

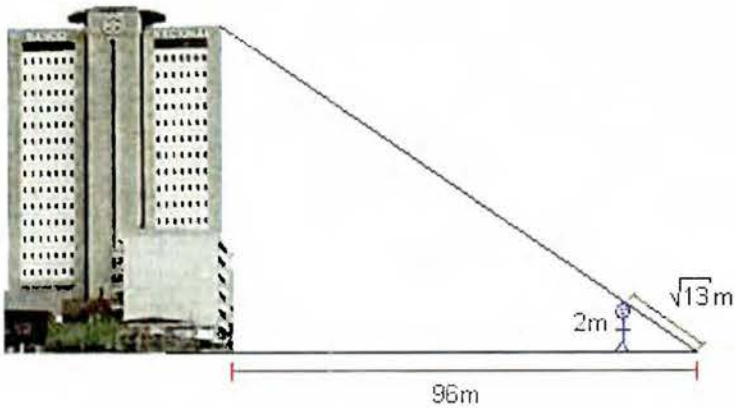
Ahora, podemos completar la figura con un triángulo isósceles que además es rectángulo (el estudiante debe justificar por qué), y así se obtiene un trapecio.	
Por una parte, calcule el área del trapecio formado, y por otra, realice la suma de las áreas de los tres triángulos rectángulos. Algebraicamente se verifica que $a^2 + b^2 = c^2$.	Área del trapecio Suma de áreas de triángulos $\frac{(a+b)(a+b)}{2} = 2\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$ $\Rightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{2} = \frac{2ab+c^2}{2}$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Ejercicios:

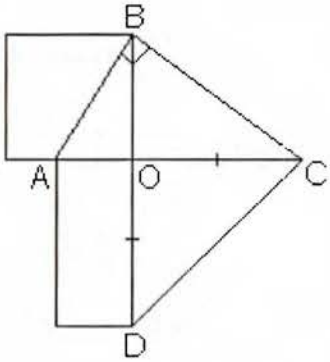
A. Una escalera de 3 m de longitud está apoyada sobre la pared a una altura de 2 m. ¿Cuál es la distancia del pie de la escalera a la pared?

B. El perímetro de un trapecio isósceles es 170 cm, su base mayor mide 60 cm y su base menor 30 cm. Determine cuánto mide la altura del trapecio?

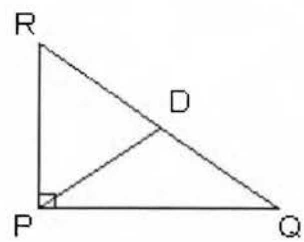
C. En la siguiente figura se presenta un hombre de dos metros de altura que va hacia el Banco Nacional. Con los datos que se le suministran, determine la altura del BNCR.



D. * En la siguiente figura, ΔABC es un triángulo rectángulo y $\overline{OC} \cong \overline{OD}$. Compare las áreas del cuadrado rosado y del rectángulo celeste.



E. En la siguiente figura, $\overline{PD}$ es una mediana del triángulo rectángulo ΔPQR . Demuestre que esa mediana tiene la misma medida que los segmentos $\overline{QD}$ y $\overline{RD}$.



F. Demuestre los teoremas derivados de Pitágoras utilizando semejanza de triángulos.

Actividad 8.4: Triángulos especiales

En esta actividad se pretende que el estudiante recuerde lo estudiado para que pueda deducir las características de los llamados "triángulos especiales". Esto permite al alumno saber de dónde se originan las longitudes de los lados de estos triángulos, para posteriormente, resolver ejercicios en los cuales se vean involucrados.

Se recomienda que la actividad se realice en clase con la guía del docente y la activa participación de los estudiantes.

Instrucciones: Las indicaciones que cada uno de los estudiantes debe seguir son las siguientes:

Construya en la hoja un triángulo rectángulo isósceles con regla marcada y transportador.

Asigne a los catetos la letra x que representará su longitud.

¿Cuál es la longitud de la hipotenusa? ¿Cómo podemos calcularla?

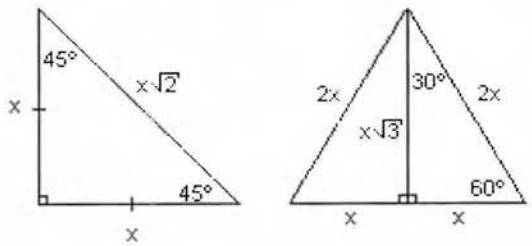
Hemos obtenido así el llamado "triángulo especial 45, 45" por la medida de sus ángulos agudos.

Ahora, construya en la hoja, con regla y transportador, un triángulo equilátero, a sus lados les vamos a asignar la medida 2x.

Tome uno de los vértices de dicho triángulo y trace la altura correspondiente. ¿Cuánto miden los segmentos que se determinan en el lado opuesto al vértice elegido? Justifique.

¿Cuál es la longitud de la altura trazada? ¿Cómo podemos calcularla?

Observe que al haber trazado la altura, quedaron determinados dos triángulos rectángulos. Considerando uno de ellos tenemos el llamado "triángulo especial 30, 60" por la medida de sus ángulos agudos.



Ejercicios:

A. Si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos agudos mide 30º y la hipotenusa es de $4\sqrt{3}$ cm. ¿Cuánto miden los otros lados del triángulo?

B. Si la diagonal de un cuadrado mide 2 metros. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado

C. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide el doble que el otro ángulo agudo, y la longitud del cateto más largo es 8 cm. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

D. Hallar el perímetro y el área de un triángulo equilátero sabiendo que su altura mide $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ cm.

3.3.2 Unidad 2: Trigonometría

Introducción

Esta unidad, en la que se tratan los contenidos de trigonometría, y que corresponde a la última unidad del tercer ciclo, ha querido estructurarse de manera que funcione como un puente entre la última etapa de la Educación General Básica y la primera de la Educación Diversificada.

Por esta razón, notará el docente un cambio bastante significativo, tanto de forma como de fondo, en el abordaje de los temas tratados en esta unidad, respecto de la manera en que tradicionalmente se abordan en noveno año.

En primer lugar, partiendo de las nociones que sobre transformaciones isométricas y sistemas de coordenadas cartesianas en el plano han sido adquiridas por los alumnos en años anteriores, se introducen las seis razones trigonométricas fundamentales (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente) a partir de la noción de circunferencia trigonométrica.

Para ello se ha optado por introducir un plano orientado, noción que se ha trabajado implícitamente desde el octavo año, al trabajar el concepto de ángulo como rotación. Así, se define el valor de las razones trigonométricas de arcos comprendidos en [-180°,180°[, a partir de las coordenadas rectangulares de un punto ubicado sobre la circunferencia trigonométrica, y se explica el valor de las razones trigonométricas de arcos con medidas menores que -180° o mayores que 180°, por medio de equivalencias.

Esta concepción da cabida para referirse a las razones trigonométricas de arcos con medidas positivas y negativas, pudiendo así hablar apropiadamente del seno, el coseno o la tangente de valores mayores o iguales a 180° o menores o iguales que cero, nociones que, desde la concepción euclídea de ángulo carecen de sentido.

De esta forma, se trabaja desde el principio de la unidad con una perspectiva más amplia, que permitirá facilitar luego el paso a la noción de función trigonométrica. Además, esta concepción permite verificar de manera sencilla algunas de las identidades trigonométricas fundamentales, como las identidades pitagóricas, las identidades de tangente y cotangente, y las identidades trigonométricas recíprocas.

Debe recordar el docente, sin embargo, que la utilización de la circunferencia trigonométrica, si bien es una herramienta que enriquece el trabajo del alumno, no debe ser una camisa de fuerza. Debe explicársele al estudiante que el aprendizaje *de las razones* trigonométricas no necesariamente se limita a ángulos centrados en el origen y ubicados en posición "estándar", según el sistema de coordenadas establecido, sino que son válidas aún cuando salimos de ese marco de referencia.

Otro aporte de la unidad, que pretende enriquecer el alcance de los contenidos estudiados, es la verificación de algunas identidades trigonométricas elementales, así como la resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas, con el fin de que el estudiante se vaya familiarizando con estos objetos para su posterior profundización, formalización y aplicación en el cuarto ciclo, de la mano de la teoría y el lenguaje de las funciones reales de variable real.

Debe tenerse en cuenta por parte del docente, que sin dejar de lado la formalización gradual de los conceptos estudiados, el énfasis debe hacerse hacia la comprensión intuitiva de los mismos; procurando, en cada paso del proceso, enlazar los nuevos conceptos con los precedentes, de manera que, como se ha insistido desde la primera unidad, pueda verse claramente la interrelación entre ellos, aún con aquellos más elementales estudiados desde sétimo año; con el fin de que el campo cognoscitivo vaya ampliándose de manera significativa y a través de un proceso secuencial y lógico.

Aprendizajes esperados

Se espera que, al finalizar esta unidad, los estudiantes se encuentren en capacidad de:

1. Utilizar la circunferencia trigonométrica de radio unidad como sistema de referencia para ubicar ángulos en posición estándar.
2. Determinar los valores de las seis razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, secante, cosecante, cotangente, para ángulos en el primer cuadrante; particularmente para ángulos de 45°, 60°, 30°.
3. Aplicar el teorema de senos para resolver ejercicios y problemas extraídos de diversos contextos.

4. Aplicar el teorema de cosenos para resolver ejercicios y problemas extraídos de diversos contextos.
5. Aplicar las identidades trigonométricas de ángulos complementarios e identidades pitagóricas para simplificar expresiones trigonométricas.

Secuencia de contenidos y actividades sugeridas

1. Circunferencia trigonométrica

El objetivo de esta unidad es formalizar, a partir de las concepciones de ángulo estudiadas en octavo año, la noción de circunferencia trigonométrica, para abordar el estudio de las razones trigonométricas fundamentales desde esta perspectiva.

Así, el estudiante aprenderá a ubicar ángulos en posición estándar, positivos y negativos, y a calcular ángulos equivalentes o "coterminales"[6]. De este modo la actividad trabaja no sólo la ubicación de puntos sobre la circunferencia, sino la interpretación de éstos como referentes al ángulo o arco que subtienden; así como las nociones de ángulos en posición estándar y ángulos equivalentes, con las que, de por sí, se ha familiarizado implícitamente en años anteriores.

Actividad 1.1. Construyendo la circunferencia trigonométrica

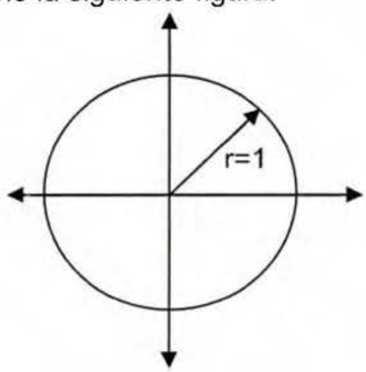
El objetivo de esta actividad es que el alumno se familiarice con el uso de la circunferencia trigonométrica, y la ubicación de puntos sobre la misma, a la vez que identifique ángulos equivalentes módulo 2π.

---

[6] En esta unidad se ha decidido trabajar con el nombre de **ángulos equivalentes** en vez de ángulos coterminales, por considerarlo un término más amigable al alumno, de más fácil comprensión, y más familiar; a la vez que hace referencia directa a la noción matemática de clases de equivalencia, en este caso módulo 2π, que es, en el fondo, lo que hace que puedan trabajarse las razones trigonométricas de dos ángulos coterminales, como si fuesen las del mismo ángulo.

La idea es que el docente, como guía de la actividad, gire indicaciones y vaya conduciendo la discusión del grupo de modo que centre su atención en aspectos relevantes del uso de la circunferencia trigonométrica. Por ejemplo, puede darse una dinámica como la que se describe en seguida:

Indicaciones: Construya, sobre un plano cartesiano, una circunferencia centrada en el origen, y de radio 1. Se obtiene la siguiente figura:



Ubique, sobre la circunferencia construida, los puntos (1,0); (0,1); (-1,0) y (0,-1) ¿Qué ángulos se forman al rotar el semieje x positivo hasta el segmento que contiene a cada uno de los puntos anteriores? El alumno debe observar que, los ángulos determinados por los lados que contienen esos puntos son, respectivamente, de 0°, 90° 180° y 270° grados. El semieje x positivo se llama lado inicial del ángulo, y el otro lado se llama lado terminal del ángulo. Los ángulos construidos en esta posición se llaman ángulos en posición estándar.

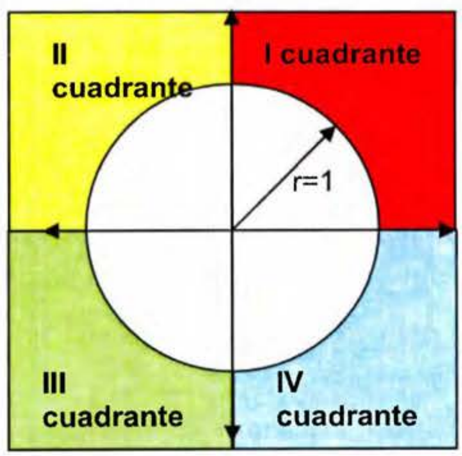
¿Varían las coordenadas del punto correspondiente sobre la circunferencia si se utiliza un ángulo equivalente al ángulo dado pero de "medida distinta", mayor o menor? (Por ejemplo, si quiero ubicar un ángulo de 450° o -270° en vez de uno de 90° [7]). El alumno debe deducir que el punto sobre la circunferencia se mantiene invariante, siempre que los ángulos buscados sean equivalentes entre sí. Recuérdese que el alumno ha trabajado con ángulos de rotación en años anteriores.

---

[7] Note el profesor que, lo anterior, dicho más formalmente, equivale a aplicar al lado terminal del ángulo una rotación de ángulo $2\pi n$, con "n" un número natural; o bien, a determinar ángulos congruentes módulo 2π.

De esta discusión puede deducirse que, para cada "familia" de ángulos equivalentes, existe un único punto sobre la circunferencia que los determina. Dicho de otro modo, se puede ubicar un ángulo, y cualquier otro equivalente a él, por las coordenadas del punto del lado terminal correspondiente sobre la circunferencia construida. De esta forma, un ángulo de 90º (o bien de 450º, o de -270º) queda determinado por el punto (0,1).

Cada uno de los sectores circulares determinados por dos semiejes no alineados recibe el nombre de cuadrante, y se numeran siguiendo el mismo orden usado para construir ángulos, en sentido contrario de las agujas del reloj, del siguiente modo:



Partiendo de la información anterior, ¿qué medidas puede tomar un ángulo cuyo lado terminal se ubique en el primer cuadrante, el segundo, tercero o cuarto cuadrante?

¿Qué signo tienen las coordenadas (x, y) de un punto sobre el lado terminal de un ángulo, si dicho lado está ubicado en el primer cuadrante? ¿Y si está en el segundo? ¿Y si está en el tercero o cuarto cuadrante?

Ejercicios:

A. Ubique, en la circunferencia trigonométrica, cada uno de los siguientes ángulos, y determine en qué cuadrante se localizan:

45º	-225º	-220º
-90º	300º	90º
120º	-135º	-360º

B. Determine, para cada uno de los siguientes ángulos, dos ángulos equivalentes positivos y dos negativos:

90º	-290º
250º	360º
-175º	-240º
115º	-70º
270º	-137º

C. Indique en qué cuadrante se ubica el ángulo α, si las coordenadas del punto P, de su lado terminal sobre la circunferencia trigonométrica, son las dadas en cada caso.

$P\,(1,1)$	$P\,(-1,-1)$	$P\,(-1,1)$	$P\,(1,-1)$
$P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$P\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$
$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$	$P\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. Razones trigonométricas para ángulos en el primer cuadrante

Note el docente que, hasta este punto, hemos ubicado ángulos dados en la circunferencia trigonométrica, a partir de su medida en grados, sin hablar específicamente de los valores de sus razones trigonométricas; o bien, hemos ubicado ángulos a partir de las coordenadas del punto de su lado terminal sobre la circunferencia trigonométrica. En este apartado introduciremos la noción de razón trigonométrica, a partir de las coordenadas del punto sobre la circunferencia que determina el lado terminal del ángulo.

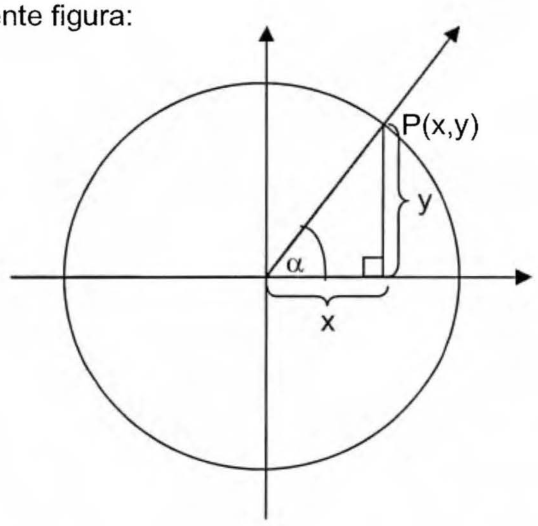
Actividad 2.1. Razones trigonométricas básicas para ángulos agudos positivos

Por medio de esta actividad, se espera que el docente introduzca, a partir de los conocimientos adquiridos anteriormente, la idea de razón trigonométrica, utilizando ángulos ubicados en el primer cuadrante.

Se definirá así los valores de las seis razones trigonométricas fundamentales, en términos de las coordenadas (x, y) del punto ubicado sobre la circunferencia, correspondiente al lado terminal del ángulo. Como se hizo en la actividad anterior.

De este modo se deducirán algunas de las propiedades de las razones trigonométricas para cualquier ángulo agudo.

Instrucciones: Considere un ángulo α, ubicado en el primer cuadrante de la circunferencia trigonométrica, y sean (x, y) las coordenadas del punto P, ubicado sobre el lado terminal del ángulo y sobre la circunferencia trigonométrica. Como se muestra en la siguiente figura:



Observe que las coordenadas "x" y "y" del punto P determinan, respectivamente, las longitudes de un segmento horizontal y otro vertical, perpendiculares entre sí, y que definen un triángulo rectángulo con ángulo recto sobre el eje X y de hipotenusa igual a una unidad de longitud.

Note además, que el segmento de medida "y" es el cateto opuesto al ángulo α, mientras que el de medida "x" es el cateto adyacente al ángulo α. Observe también que, dado que a cada ángulo distinto le corresponde un único punto de la circunferencia trigonométrica (salvo si los ángulos son equivalentes) cada ángulo queda enteramente determinado por un punto de la circunferencia trigonométrica. A partir de estas observaciones, se puede definir lo siguiente:

Sea α un ángulo agudo ubicado en posición estándar, y sean (x, y) las coordenadas de un punto P ubicado en el lado terminal del ángulo α y sobre la circunferencia trigonométrica, se definen las seis razones trigonométricas fundamentales del ángulo α como sigue:

1. $\text{Sen } \alpha = y$ (se lee "seno del ángulo α")
2. $\cos\alpha = x$ (se lee "coseno del ángulo α")
3. $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ (se lee "tangente del ángulo α")
4. $\csc \alpha = \frac{1}{y}$ (se lee "cosecante del ángulo α")
5. $\sec \alpha = \frac{1}{x}$ (se lee "secante del ángulo α")
6. $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ (se lee "cotangente del ángulo α")

Se hará en este punto un paréntesis, para deducir una propiedad que será necesaria más adelante, y sobre la que se profundizará en apartados posteriores. Para ello, note que en el triángulo del esquema anterior, los catetos miden, respectivamente "x" y "y", mientras que la hipotenusa mide 1. Es decir, aplicando el teorema de Pitágoras, o la fórmula de la distancia entre dos puntos, para calcular la distancia del origen al punto P(x, y), se tiene la siguiente igualdad:

$$x^2 + y^2 = 1$$

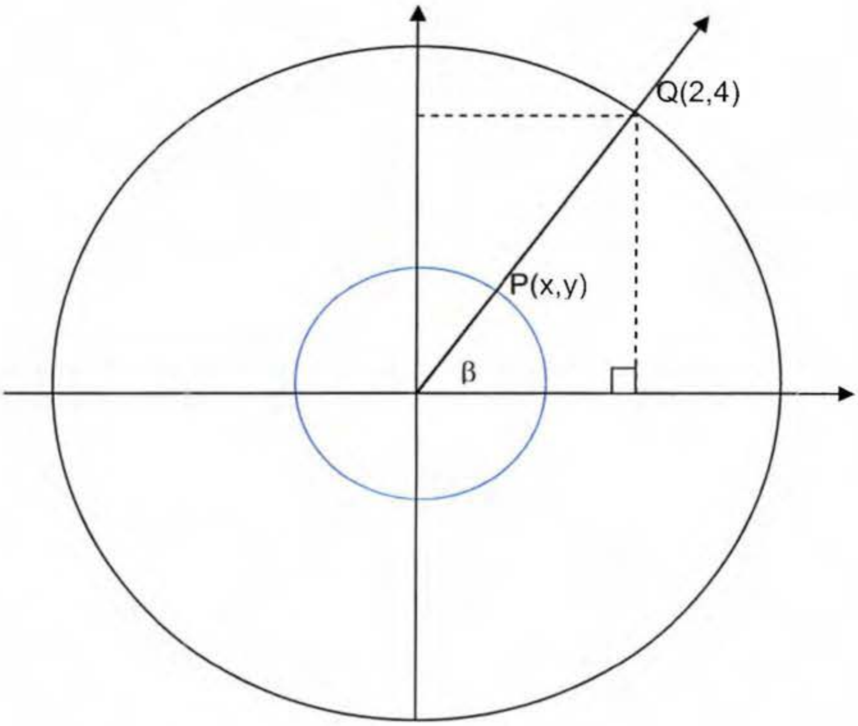
Como se ha definido $\operatorname{sen}\alpha = y$ y $\cos\alpha = x$, sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos lo siguiente:

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de primera identidad pitagórica, y será necesaria para deducir otra serie de propiedades conforme se avance en el estudio de este tema.

Volviendo al asunto: ¿Cómo calculamos las razones trigonométricas para un ángulo, si no tenemos las coordenadas del punto sobre la circunferencia trigonométrica que le corresponde?

Veamos un ejemplo. Considere el ángulo β, cuyo lado terminal contiene el punto Q(2,4). ¿Cómo determinamos si dicho punto se ubica o no sobre la circunferencia trigonométrica? Para que sea de este modo, la hipotenusa del triángulo, que coincide con el radio de la circunferencia trigonométrica, debe ser de longitud 1, calculando la distancia del origen hasta Q, tenemos que $d = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \neq 1$. Por tanto, el punto no pertenece a la circunferencia trigonométrica, y sería erróneo afirmar, por ejemplo, que $\operatorname{sen}\beta = 4$, pero si ubicamos el ángulo de manera que esté centrado en el origen, obtenemos lo siguiente:



Se aprecia, entonces, que las longitudes de los catetos del triángulo definido por el punto Q(2,4) son 2 y 4 unidades, mientras que la hipotenusa es de longitud $2\sqrt{5}$.

¿Cómo obtenemos un triángulo semejante, pero cuya hipotenusa sea de longitud 1? Basta considerar la homotecia centrada en el origen y de razón $\frac{\sqrt{5}}{10}$, que manda el punto Q(2,4) al punto $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ el cual cumple que $d=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{25}+\frac{20}{25}}=1$, por lo que se deduce que el punto está sobre la circunferencia trigonométrica. Luego, tenemos que los valores de las razones trigonométricas para el ángulo β son los siguientes (note que, en todos los casos, los valores se dan racionalizados):

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \csc\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\beta = \sqrt{5}$$

$$\tan\beta = 2 \qquad \cot\beta = \frac{1}{2}$$

Ejercicios:

A. Determine cuáles de los siguientes puntos se ubican sobre la circunferencia trigonométrica. En caso de no estarlo, encuentre el punto sobre la circunferencia trigonométrica que determina un ángulo equivalente:

$P(1,0)$ $\qquad$ $P\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ $\qquad$ $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P(2,0)$ $\qquad$ $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $P\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right)$

$P(0,-1)$ $\qquad$ $P\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ $\qquad$ $P\left(0,\frac{1}{5}\right)$

$P\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

B. Determine los valores de las seis razones trigonométricas básicas para un ángulo cuyo lado terminal contiene al punto P(x, y), en cada caso (si el punto dado no está sobre la circunferencia trigonométrica, primero calcule las coordenadas del punto correspondiente sobre la circunferencia):

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $P\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ $P\left(\sqrt{7}, \sqrt{2}\right)$

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $P\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$ $P\left(5, 2\sqrt{5}\right)$

C. Determine los valores de las seis razones trigonométricas básicas de θ, si se sabe que θ es un ángulo agudo tal que $\cos\theta = \frac{3}{4}$. Sugerencia: ubique el ángulo en la circunferencia trigonométrica, y calcule las coordenadas del punto correspondiente.

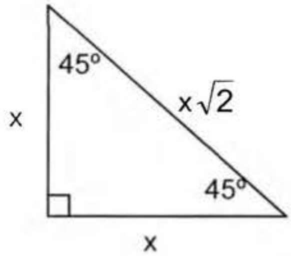
Actividad 2.2. Razones trigonométricas básicas para ángulos especiales en el primer cuadrante.

Con esta actividad se espera que el alumno logre, con apoyo del docente, deducir los valores de las seis razones trigonométricas de los ángulos especiales (45°, 30° y 60°), para su posterior empleo como ángulos de referencia, para calcular los valores de las razones trigonométricas en cualquier cuadrante.

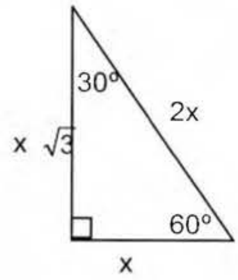
Debe hacerse la observación de que, en las actividades anteriores, se ha trabajado con ellos implícitamente, de modo que, a este nivel, no sea algo totalmente nuevo para el estudiante, sino una manera de formalizar resultados adquiridos antes.

Instrucciones: La actividad puede introducirse recordando a los alumnos los valores de los lados, en general, de los triángulos especiales, actividad que se trabajó en la unidad de geometría. Así pues, puede hacerse un resumen de tales resultados, en un esquema como el que sigue:

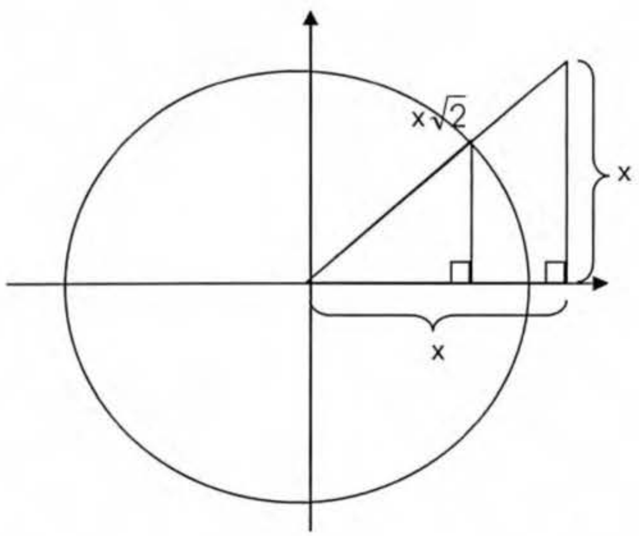
Triángulo 45°;45°



Triángulo 30°;60°



A partir de tales proporciones podemos deducir que, centrando el ángulo de 45° en el origen, y haciendo coincidir su lado inicial con el eje X, su lado terminal quedará ubicado en el primer cuadrante. Ahora, puesto que ambos catetos son congruentes, cualquier punto en el lado terminal del ángulo tendrá por coordenadas P(x, x), obteniendo lo siguiente:



En particular, si deseamos que el punto esté sobre la circunferencia trigonométrica, dividimos los lados por $x\sqrt{2}$, y observamos que sus catetos miden, ambos, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y su hipotenusa 1. De donde se deducen los valores de las seis razones trigonométricas fundamentales para un ángulo de 45° :

Razones trigonométricas básicas para un ángulo de 45°	
sen 45°= $\frac{\sqrt{2}}{2}$	csc 45°= $\sqrt{2}$
cos 45°= $\frac{\sqrt{2}}{2}$	sec 45°= $\sqrt{2}$
tan 45°= 1	cot 45°= 1

Procediendo de manera análoga, el alumno podrá deducir los siguientes resultados:

Razones trigonométricas básicas para un ángulo de 30°	
sen 30°= $\frac{1}{2}$	csc 30°=2
cos 30°= $\frac{\sqrt{3}}{2}$	sec 30°= $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
tan 30°= $\frac{\sqrt{3}}{3}$	cot 30°= $\sqrt{3}$

Razones trigonométricas para un ángulo de 60°	
sen 60°= $\frac{\sqrt{3}}{2}$	csc 60° = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
cos 60°= $\frac{1}{2}$	sec 60° = 2
tan 60° = $\sqrt{3}$	cot 60° = $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Es importante hacer ver al alumno el hecho de que, cuando el ángulo en cuestión se ubica en el primer cuadrante, los valores de sus seis razones trigonométricas son siempre positivos, y que esto no necesariamente se cumple en los demás cuadrantes.

Ejercicios: Hallar los valores de las seis razones trigonométricas que corresponden a cada uno de los siguientes ángulos, usando el método empleado anteriormente. Efectúe un diagrama que ilustre su solución, en cada caso.

a) 60°

b) 30°

3. Razones trigonométricas para ángulos en cualquier cuadrante

Una vez familiarizado con la circunferencia trigonométrica; así como con la forma de ubicar puntos en ella, y de calcular las razones trigonométricas de los ángulos en el primer cuadrante, se puede hacer la generalización a los otros tres cuadrantes, haciendo uso del concepto de ángulos de referencia.

Para ello se propone una actividad similar a la que a continuación se describe, de modo que el desarrollo de la teoría se aprecie, desde el punto de vista del alumno, como una secuencia lógica, cuyo punto de partida sea siempre los conocimientos previos, y procurando entrelazar los nuevos con éstos de una manera significativa. Es decir, que la nueva situación sea percibida como una extensión natural y razonable de experiencias anteriores.

De este modo, se espera que la noción de ángulo de referencia nazca, de manera intuitiva, de la generalización de los resultados del primer cuadrante a los otros tres.

Se recuerda al docente que debe tenerse cuidado al explicar el cambio de signo de cada una de las razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes, así como trabajar de forma constante con ángulos equivalentes, para reforzar dicho concepto.

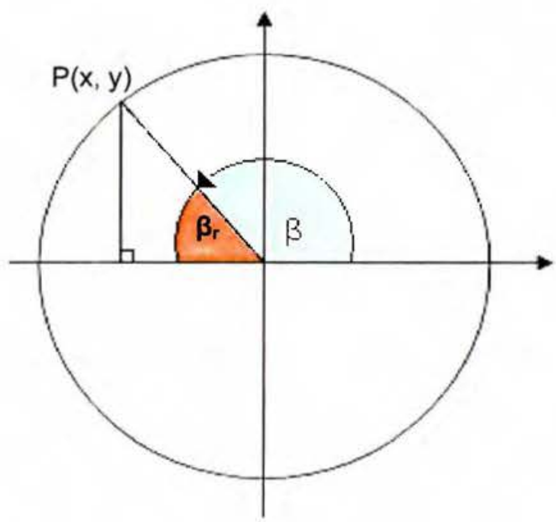
Actividad 3.1. Empleo de ángulos de referencia para deducir las razones trigonométricas de un ángulo ubicado en cualquier cuadrante.

Instrucciones: Partiendo de la circunferencia trigonométrica, ubicar un ángulo cuyo lado terminal se localice en el segundo cuadrante (por ejemplo, uno de

120°). Luego, plantearle al alumno interrogantes sobre las coordenadas de su punto correspondiente sobre la circunferencia trigonométrica, sobre el ángulo en sí.

La idea es que conjeture, por ejemplo, sobre el signo de las coordenadas del punto, y sobre el suplemento del ángulo, lo que llevará a la idea de ángulo de referencia.

Considere, en primer lugar, un ángulo en el segundo cuadrante. De acuerdo al signo de las coordenadas del punto P(x, y) de la circunferencia trigonométrica que lo determina, el valor de "x" será negativo, mientras que el valor de "y" positivo. Como se muestra en la siguiente figura:

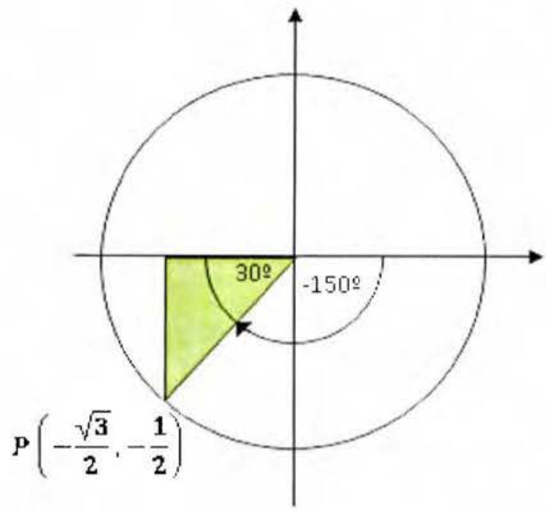


Ahora bien, observe que, pasando por alto los signos de las coordenadas del punto P(x, y), el lado terminal del ángulo β, la longitud determinada por la coordenada "x", y la longitud determinada por la coordenada "y", definen un triángulo rectángulo, con ángulo recto sobre el eje X, de catetos $|x|$ y $|y|$ de hipotenusa 1.

Por otro lado, note que el ángulo de dicho triángulo que descansa sobre el eje X (denotado en la figura por β_r) es agudo, y tiene por medida el suplemento de β (es decir $m\angle\beta_r = 180° - m\angle\beta$). Luego, los valores de las coordenadas de P(x, y) no varían, y por tanto tampoco los de las seis razones trigonométricas de β y β_r, salvo por su signo. El ángulo β_r recibe el nombre de ángulo de referencia.

Es decir, si se conocen los valores de las seis razones trigonométricas, o las coordenadas del punto sobre la circunferencia que determina un ángulo de referencia β_r, podemos saber los valores de las seis razones trigonométricas para el ángulo β, anteponiendo a cada una el signo correspondiente al cuadrante en que se encuentre.

El anterior razonamiento sigue siendo válido si el ángulo en cuestión se localiza en el tercer o cuarto cuadrante. Por ejemplo, si se desea calcular el valor de las seis razones trigonométricas para un ángulo de -150°, se tiene en primer lugar, que su ángulo de referencia será de 30°.



Como el punto P_r sobre la circunferencia trigonométrica del lado terminal de un ángulo de 30° tiene por coordenadas $P_r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; y además, el ángulo de -150° se ubica en el tercer cuadrante, se sigue que las coordenadas del punto de su lado terminal sobre la circunferencia serán $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, como se aprecia en la figura de la derecha.

Utilizando como referencia las razones trigonométricas del ángulo de 30°, y anteponiendo el signo correspondiente al cuadrante en el que se ubica el ángulo dado, tenemos los siguientes resultados:

sen (-150°)= $-\frac{1}{2}$	csc (-150°)=-2
cos (-150°)= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	sec (-150°)= $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
tan(-150°)= $\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	cot (-150°)= $\sqrt{3}$

En este punto, es necesario que el docente haga ver al alumno que, con las herramientas que dispone, no se puede calcular, de manera exacta, el valor de las razones trigonométricas para cualquier ángulo.

Es por esta razón que, si bien es cierto, los valores de los ángulos especiales serán los utilizados más frecuentemente a lo largo del curso, el estudiante se podrá enfrentar, en ocasiones, a ejercicios donde se le pida encontrar valores aproximados de las razones trigonométricas de ciertos ángulos, para lo cual puede emplear las tablas trigonométricas, o bien la calculadora científica (el uso de una u otra -o ambas- queda a criterio del docente, que debe para ello considerar las posibilidades de los estudiantes con los que trabaja, y la realidad socio-económica en la que se encuentra inmerso).

Ejercicios:

A. Determine los valores exactos, cuando sea posible, o aproximados, de las seis razones trigonométricas para un ángulo cuya medida sea de:

45°	-130°
-95°	-220°
120°	90°
-230°	-360°
300°	1300°

B. Calcule los valores exactos de las seis razones trigonométricas del ángulo β, si se sabe que el punto de su lado terminal sobre la circunferencia trigonométrica posee las coordenadas dadas, en cada caso:

P(1,1)	$P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$
P(-1,-1)	$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$
P(-1,1)		$P\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$P\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
P(1,-1)			

C. Determine los valores exactos, en caso de ser posible, o aproximados, de las seis razones trigonométricas para un ángulo cuyo lado terminal contiene el punto P(x, y), en cada caso. (Si el punto dado no está sobre la circunferencia trigonométrica, determine el punto sobre la circunferencia que corresponde al ángulo dado).

P(1,0)	$P\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$	$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
P(2,0)	$P\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$	$P\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right)$
P(0,-1)	$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	$P\left(0,\frac{1}{5}\right)$
	$P\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$	

4. Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales

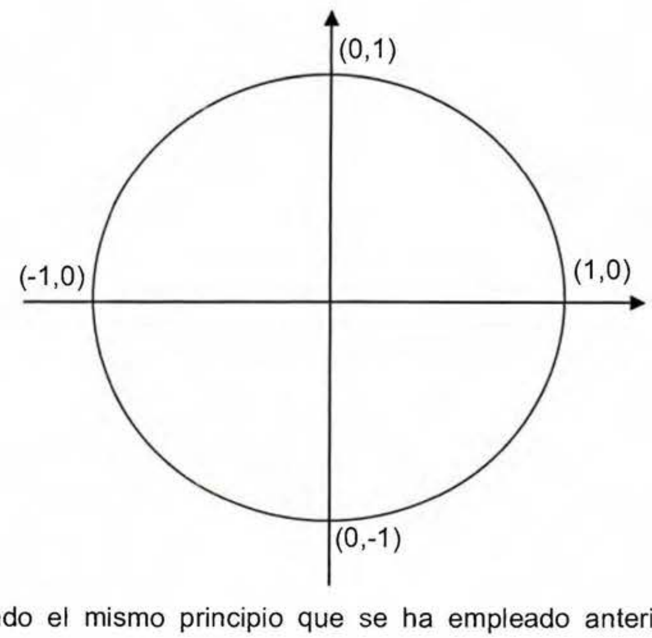
El docente habrá notado que, a lo largo del presente discurso, se ha dejado de lado el tratamiento de los ángulos cuyo lado terminal coincide exactamente con alguno de los semiejes del plano, es decir, los ángulos cuyas medidas son 0°, 90°, 180°, -90°, -180°, o cualquier otro equivalente, que serán llamados ángulos cuadrantales.

Esto se debe al hecho de que algunas razones trigonométricas se indefinen en estos valores, por lo que se ha considerado pertinente estudiar estos casos de manera separada, para hacer ver al alumno, al menos de modo intuitivo, el porqué de los resultados obtenidos, particularmente en el caso de que alguna razón trigonométrica resulte indefinirse para algún valor.

Actividad 4.1. Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Esta actividad pretende, haciendo uso de las herramientas desarrolladas anteriormente, deducir los valores de las seis razones trigonométricas fundamentales para los ángulos cuadrantales.

Instrucciones: Dibuje la circunferencia trigonométrica, y ubique en ella las coordenadas de los puntos correspondientes a los ángulos de -90°, 0°, 90° y 180°. Como se aprecia en la ilustración siguiente:



Aplicando el mismo principio que se ha empleado anteriormente para calcular los valores de las seis razones trigonométricas de un ángulo, partiendo de las coordenadas del punto de su lado terminal sobre la circunferencia, se obtienen en este caso resultados muy interesantes. Comencemos por el ángulo de 0°, para el cual se tiene que:

sen 0° = 0	csc 0° = $\frac{1}{0}$
cos 0° = 1	sec 0° = $\frac{1}{1}$ = 1
tan 0° = $\frac{0}{1}$ = 0	cot 0° = $\frac{1}{0}$

Observe que para el caso de la cosecante y la cotangente se obtiene el valor $\frac{1}{0}$. Y, puesto que la división por cero no está definida, se sigue que la cosecante y la cotangente no están definidas para un ángulo de cero grados.

Procediendo de igual modo para el ángulo de 90° se tienen los siguientes resultados:

sen 90° = 1	csc 90° = $\frac{1}{1}$
cos 90° = 0	sec 90° = $\frac{1}{0}$
tan 90° = $\frac{1}{0}$	cot 90° = $\frac{0}{1}$ = 0

Note que, en este caso, se concluye que la tangente y la secante se indefinen para el ángulo de 90°. De una manera similar, podemos llegar a los siguientes resultados:

sen (-90°) = -1	csc (-90°) = $-\frac{1}{1}$
cos (-90°) = 0	sec (-90°) = $-\frac{1}{0}$
tan (-90°) = $-\frac{1}{0}$	cot (-90°) = $-\frac{0}{1}$ = 0

sen 180° = 0	csc 180° = $-\frac{1}{0}$
cos 180° = -1	sec 180° = $-\frac{1}{1}$
tan 180° = $-\frac{0}{1} = 0$	cot 180° = $-\frac{1}{0}$

De las dos tablas anteriores se concluye que la tangente y la secante se vuelven a indefinir cuando el ángulo es de -90°, mientras que si el ángulo es de 180° se indefine la cosecante y la cotangente.

Estos resultados, si bien no se utilizarán a profundidad en el presente curso, sentarán algunas de las bases para caracterizar las funciones trigonométricas (periodo, asíntotas, etcétera), por lo que es fundamental que el alumno los comprenda, a un nivel intuitivo, para facilitar su posterior formalización.

Es importante, una vez hecho este desarrollo teórico, integrar los diversos tópicos trabajados hasta el momento, y también hacer ver al alumno que los resultados siguen siendo válidos en un contexto tradicional, es decir, si se prescinde del sistema de coordenadas cartesianas, y de la circunferencia trigonométrica para ubicar los ángulos en posición estándar, o si, aún en un sistema de coordenadas cartesianas, se ubican los ángulos fuera de la circunferencia trigonométrica.

Se recomienda, por ello, trabajar ejercicios y problemas contextualizados, y no necesariamente llevados al plano coordenado para su resolución. Se puede, por ejemplo, resolver ejercicios con triángulos rectángulos arbitrarios.

Dado que se espera que el alumno sepa resolver ecuaciones lineales, es deseable a este nivel, integrar este conocimiento como conocimiento previo, para resolver ejercicios donde deba calcular la medida de algún lado de un triángulo rectángulo dado, conociendo la medida de alguno de sus ángulos agudos, ya sea trasladando el problema a la circunferencia trigonométrica, o no.

También es recomendable trabajar problemas con ángulos de elevación y de depresión, haciendo énfasis en promover en el estudiantado diversas estrategias de discusión y resolución de los mismos, en lugar de convertirlos en problemas rutinarios y mecánicos. Estos puntos se consideran en la siguiente colección de ejercicios.

Ejercicios:

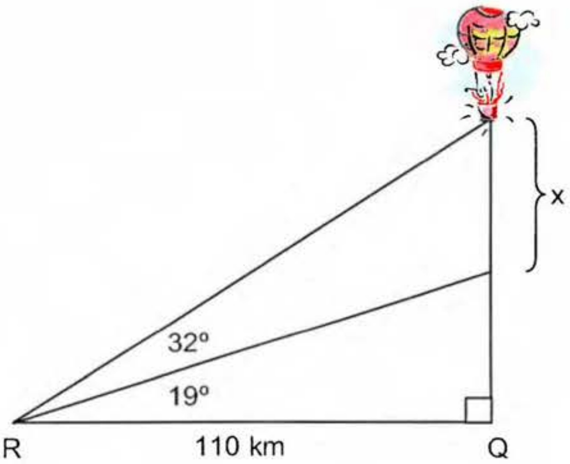
A. Aproximar, a dos decimales, el valor de $\cot 55^\circ$.

B. Si en el triángulo ΔABC, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 34^\circ$ y $\theta = 10{,}5^\circ$, determine la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

C. Si en el triángulo ΔABC, $\alpha = 90^\circ$, a=12,3º y b=31,6º determine las medidas de las partes restantes del triángulo.

D. Una escalera de 22 pies de largo descansa sobre la pared de un edificio. Si el ángulo entre la escalera y el edificio es de 24°, ¿aproximadamente, a qué distancia del edificio está la parte inferior de la escalera?. Si esa distancia se incrementa en 5 pies, ¿aproximadamente, qué tanto desciende la parte superior de la escalera?.

E. A medida que un globo se eleva verticalmente, su ángulo de elevación desde un punto R, en el suelo, situado a 110 km del punto Q, que está directamente bajo el globo, cambia de 19° a 32°. Determine qué tanto se eleva el globo durante ese período.



5. Inversas de las razones trigonométricas

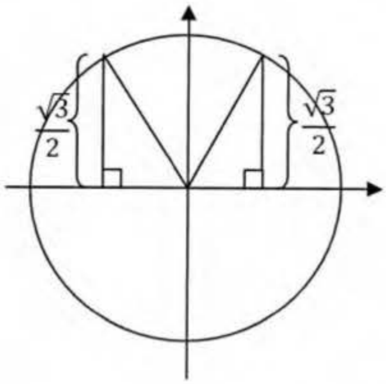
El objetivo de este apartado es familiarizar al alumno con la noción de inversas de las razones trigonométricas, particularmente con el arcoseno, el arcocoseno y la arcotangente, con la finalidad de emplearlas para encontrar el valor de los ángulos en un triángulo rectángulo a partir de las medidas de sus lados.

De este modo, cambiaremos ahora la situación, y dadas las medidas de los lados del triangulo rectángulo, el alumno deberá estar en capacidad, no sólo de calcular los valores de las razones trigonométricas para cualquiera de sus ángulos agudos, sino también encontrar la medida de cualquiera de dichos ángulos. Igual que antes, si bien todos los problemas de esta índole pueden reducirse a trabajar en la circunferencia trigonométrica, se invita al docente a plantear situaciones donde el alumno prescinda de dicha herramienta, y a formular situaciones contextualizadas.

Actividad 5.1. Deducción de la noción de arcoseno

Instrucciones: Hasta el momento se ha trabajado a partir de un ángulo dado, de manera que se calcule el seno, el coseno, la tangente, la secante, la cosecante o la cotangente de éste, ubicándolo sobre la circunferencia trigonométrica. Sin embargo, ¿se puede encontrar la medida del ángulo, en grados, dado el valor del seno o el coseno, o cualquier otra razón trigonométrica del mismo? Veámoslo con un ejemplo: Intentaremos determinar la medida del ángulo δ, si se sabe que $\operatorname{sen}\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En primer lugar, como el seno es positivo, el ángulo en cuestión debería estar ubicado, o bien en el primer cuadrante, o en el segundo, y además, la coordenada en el eje Y del punto sobre la circunferencia trigonométrica que determina el ángulo es, precisamente $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Por otro lado, sabemos que la hipotenusa, que coincide con el radio de la circunferencia, tiene por longitud 1. Podemos visualizar esto en la siguiente figura.



Por el teorema de Pitágoras, se deduce que la coordenada en X del punto es $\frac{1}{2}$, de donde se deduce que el triángulo obtenido es un triángulo especial (30º, 60º) y, necesariamente el ángulo debe ser de 60º si está en el primer cuadrante, o de 120º, si está en el segundo cuadrante. El primero de estos valores (60º) recibe el nombre de arcoseno de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, e indica, precisamente, el menor valor positivo que debe tomar el ángulo, para que su seno sea $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dicho de otro modo, el arcoseno de un número real w, es otro número real z, de modo que se cumple que sen z = w.

Además, note que, el seno de cualquier ángulo siempre es un valor entre -1 y 1; no tiene sentido hablar del arcoseno de, por ejemplo, -3 o 7, o de cualquier otro valor fuera del intervalo $[-1,1]$; pues no existe ningún ángulo z tal que sen z > 1, o bien, que sen z < -1. Tenemos así, la siguiente definición[8].

[8] Debe el docente ser cuidadoso al introducir esta notación, y hacer ciertas aclaraciones, principalmente si se conviene en utilizar $z = \text{sen}^{-1}(w)$, que es la notación empleada en la mayoría de calculadoras disponibles en el mercado. Debe mencionarse al alumno que esta es simplemente una forma de denotar el arcoseno, y nada tiene que ver con el inverso multiplicativo, o recíproco de la expresión (explícitamente: $\text{sen}^{-1}(w) \neq \frac{1}{\text{sen}(w)}$), y que, para estos casos, no aplican las propiedades de las expresiones exponenciales o potencias. Por ello, y para evitar ambigüedades y errores de interpretación, se recomienda, más bien, usar la notación $z = \text{arcsen}(w)$.

ARCOSENO

Dado un número real w, tal que $w \in [-1,1]$, se define el arcoseno de w como aquel número real z, Denotamos z = arcsen(w), o bien z = $sen^{-1}(w)$.

Hecha esta definición, se recomienda al docente hacer una deducción de algunos otros valores importantes, que involucren ángulos de 45º, 30º, -45º, -30º,-60º, 90º y -90º, procediendo de un modo similar al anterior, con la colaboración del grupo; y resumir estos resultados en una tabla.

Actividad 5.2. Deducción de la noción de arcocoseno y arcotangente

Esta actividad tiene como propósito deducir, de una manera similar a la empleada en el apartado anterior, las nociones de arcocoseno y arcotangente, para luego plantear una definición de ambas utilizando, implícitamente, la noción de función.

Instrucciones: El docente hará una aproximación a la cuestión, partiendo de premisas similares a la empleada en el apartado anterior, de modo que, a partir del valor del coseno de un ángulo, o la tangente de un ángulo, y por medio de un razonamiento geométrico, que puede reforzarse con un dibujo de la situación, el alumno sea capaz de interpretar la idea de arcocoseno o arcotangente como "el valor de un ángulo cuyo coseno (o tangente) sea el dado". De este modo, y basándose en el razonamiento anterior, a la vez que empleando como herramientas la circunferencia trigonométrica y los triángulos especiales, se espera llegar a construir las siguientes definiciones:

ARCOCOSENO

Dado un número real w, tal que $w \in [-1, 1]$, se define el arcocoseno de w como aquel número real z, tal que $z \in [0^{\circ}, 180^{\circ}]$ y, además cos z = w. Denotamos z = arccos(w), o bien $z=\cos^{-1}(w)$

ARCOTANGENTE

Dado un número real w, tal que $w \in IR$, se define la arcotangente de w como aquel número real z, tal que $z \in]-90^{\circ}, 90^{\circ}[$ y, además tan z = w. Denotamos z = arctan(w), o bien $z=\tan^{-1}(w)$.

Del mismo modo que con el arcoseno, se recomienda al docente, en este punto, deducir algunos valores importantes, que involucren ángulos de 45º, 30º, -45º, -30º, -60º, 90º y -90º, y resumir tales resultados en una tabla. También es importante recordar que, a la larga, lo que se pretende es que el alumno tenga un primer acercamiento a los conceptos, y sepa trabajar con ellos, de una forma muy intuitiva, siempre recordando que el énfasis de los ejercicios planteados a los alumnos debe darse hacia la búsqueda de ángulos cuyo seno, coseno o tangente sea un valor dado. Principalmente problemas de aplicación, donde se le pida encontrar el valor del ángulo, dados los dos catetos o un cateto y la hipotenusa.

Por otro lado, es importante explicitar que, del mismo modo que no se tienen a este nivel las herramientas para calcular el valor exacto del seno, coseno o tangente para cualquier ángulo, y en ocasiones es necesario trabajar con tablas o calculadoras para encontrar aproximaciones, también sucede lo mismo para el caso contrario; es decir, algunas veces (para efectos del curso, cuando no se trabaje con triángulos especiales), el valor del ángulo debe obtenerse por medio de una aproximación, empleando las tablas o la calculadora.

Ejercicios:

A. Aproxime la medida del ángulo β de las siguientes razones trigonométricas:

$\text{sen}\,\beta = 0{,}06612$

$\cos\beta = 0{,}8620$

$\tan\beta = 4{,}91$

B. Calcule, aproximando a dos decimales, el ángulo agudo que satisfaga la igualdad dada:

$\text{sen}\,\theta = -0{,}5640$

$\cos\theta = 0{,}7490$

$\tan\theta = 2{,}798$

C. Conteste las siguientes preguntas:

- ¿Existe un ángulo α que cumpla que $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{4}{3}$?
- ¿Existe un ángulo α que cumpla que $\cos\alpha = \dfrac{4}{3}$?

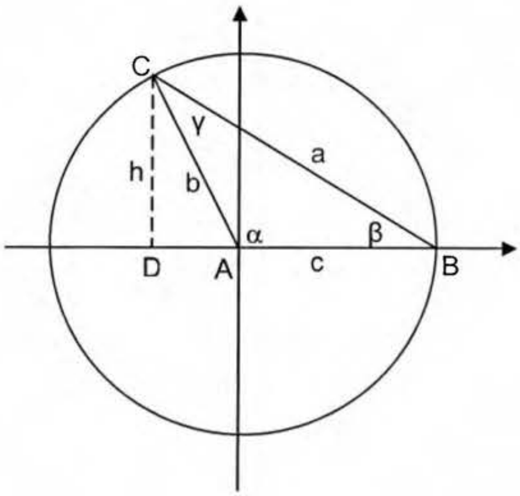
6. Teorema de senos y teorema de cosenos

Actividad 6.1. Deducción del teorema de senos

La siguiente actividad tiene por objetivo deducir la fórmula de la ley de senos, empleando la circunferencia trigonométrica, así como el lenguaje elemental de los vectores con el que hemos venido trabajando.

Aunque la prueba está hecha para el caso particular de un triangulo obtusángulo, y con uno de sus ángulos colocado en posición normal (esto por comodidad de notación), la prueba sigue siendo válida, y de hecho idéntica, para el caso general.

Instrucciones: Considere los puntos A, B, C, vértices de un triángulo arbitrario, cuyos ángulos miden, respectivamente "α", "β" y "γ", y sus lados opuestos miden "a", "b" y "c". Por comodidad para trabajar, vamos a asumir que el ángulo α está centrado en el origen y colocado en posición normal, como se muestra en la siguiente figura.



Considere el segmento $\overline{CD}$ paralelo al eje Y, que interseca el eje X en D, y tal que CD = h. Considere ahora el triángulo ΔADC, recto en D, y con el ángulo A suplemento de α. Para el ángulo α se tiene que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}$ lo que implica que $h = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$.

Por otro lado, aplicando las transformaciones necesarias para centrar el vértice B (y posteriormente el C) en el origen, y siguiendo luego el mismo razonamiento, se deduce que $\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}$ de donde $h = a \cdot \operatorname{sen}\beta$.

Igualando ambas expresiones se obtiene que $a \cdot \operatorname{sen}\beta = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$, de donde se sigue que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

Similarmente, colocando el triángulo original de modo que C se ubique sobre el eje X, y aplicando el mismo razonamiento, puede comprobarse que $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$. De lo anterior, igualando las tres expresiones obtenidas, se obtiene el teorema que se enuncia a continuación:

★★★★★★★★★★

Teorema de Senos:

Si $\triangle ABC$ es un triángulo arbitrario, con la nomenclatura tradicional, entonces se cumple que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

★★★★★★★★★★

Es importante hacer ver al alumno que, en la práctica, el teorema proporciona tres ecuaciones, dadas a continuación:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}} \qquad \boxed{\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}} \qquad \boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}}$$

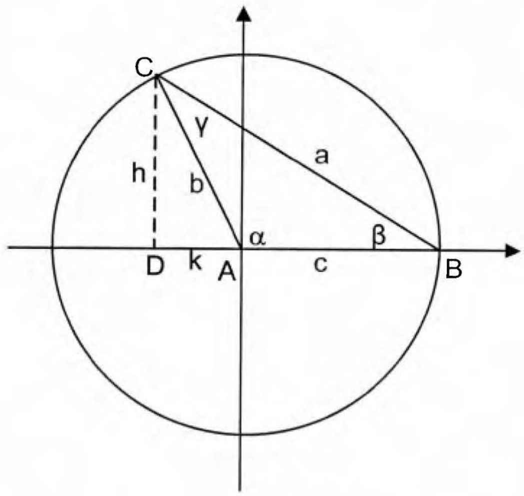
Dichas ecuaciones permiten encontrar el valor de un ángulo dado su lado opuesto y otro par de elementos correspondientes (es decir, otro lado y su ángulo opuesto); o bien hallar el valor de un lado dados dos ángulos y el lado correspondiente a uno de ellos.

Además, observe que este resultado proporciona, en caso de que el triángulo sea rectángulo, la definición tradicional del seno de un ángulo agudo como cateto opuesto dividido entre la hipotenusa, pues si, por ejemplo $\alpha = 90°$ se sigue que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \operatorname{sen}\beta$$

Actividad 6.2. Deducción del teorema de cosenos

De una forma similar a la anterior, se puede fácilmente deducir la fórmula del teorema de cosenos, considerando un triángulo arbitrario, con la nomenclatura igual que el apartado anterior, y colocado, de la misma forma, con el ángulo α centrado en el origen.



Una vez más considere el segmento $\overline{CD}$ de longitud h, y paralelo al eje Y; y considere el segmento $\overline{AD}$ de longitud k, sobre el eje X.

Considere el triángulo ADC, con las mismas características que en el apartado anterior, y note que se cumple que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}$, y además, $\cos\alpha = \frac{k}{b}$; de donde se sigue que $k = b \cdot \cos\alpha$ y $h = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$.

Por otro lado, empleando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, para el segmento $\overline{BC}$ se tiene que $a^2 = (k - c)^2 + (h - 0)^2$, sustituyendo los valores obtenidos para h y k, se obtiene que

$$a^2 = (b \cdot \cos\alpha - c)^2 + (b \cdot \operatorname{sen}\alpha)^2 \Longrightarrow$$

$$a^2 = (b \cdot \cos\alpha - c)^2 + (b \cdot \operatorname{sen}\alpha)^2 \Longrightarrow$$

$$a^2 = b^2 \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + c^2 + b^2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha \Longrightarrow$$

$$a^2 = b^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + c^2 \Longrightarrow$$

$$a^2 = b^2 \cdot 1 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + c^2 \Longrightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Lo anterior aplica para cualquiera de los tres ángulos del triángulo dado. Siempre
que se tenga el cuidado de escribir correctamente las correspondencias entre *lados* y ángulos. Enunciamos el resultado anterior como un teorema:

★★★★★★★★★★
Teorema de Cosenos:
Si ΔABC es un triángulo arbitrario, con la nomenclatura tradicional, entonces se cumple que

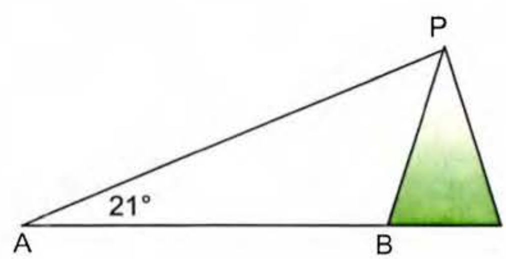
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

★★★★★★★★★★

Ejercicios:

A. Sea ΔABC un triángulo en donde $\alpha = 48°, \theta = 57°$ y b=47,3°, determine las medidas de las partes restantes del triángulo.

B. Un teleférico lleva pasajeros del punto A, que se encuentra a 1 km del pie de una montaña al Pico del Mirador, en el punto P. El ángulo de elevación de A hasta P es de 21°, mientras que el ángulo de elevación desde B a P es de 65°. ¿Qué distancia recorre el teleférico entre A y P? y ¿cuál es la diferencia de elevación entre los puntos A y P?



7. Identidades trigonométricas

En este último apartado se propondrá una manera sencilla de deducir algunas identidades trigonométricas elementales: identidades recíprocas, de tangente, cotangente, y pitagóricas, utilizando un razonamiento geométrico, y a partir de la circunferencia trigonométrica.

Actividad 7.1. Deducción de algunas identidades trigonométricas elementales, empleando la circunferencia trigonométrica

Para esta actividad se retomarán las definiciones básicas dadas para el seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente, para deducir algunas identidades importantes.

Se pretende que esta deducción sea hecha de un modo que para el alumno resulte sencillo el apreciar, y en dado momento justificar, la razón de ser de dichas identidades, y no que se presenten como fórmula acabadas, sin explicación alguna.

Para ello se iniciará con la circunferencia trigonométrica, y las definiciones básicas que postulamos al inicio de la unidad, las cuales se retoman en seguida:

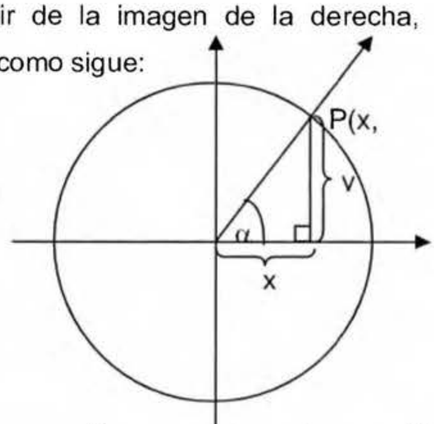
Recordará el docente que, a partir de la imagen de la derecha, se definieron las seis razones trigonométricas como sigue:

$\text{sen}\alpha = y$ $\qquad$ $\cos\alpha =$

x

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $\csc\alpha = \dfrac{1}{y}$

1 $\qquad$. $\quad x$



A partir de aquí, y por medio de sustituciones sencillas, se puede verificar los siguientes seis resultados:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$	$\csc\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$
$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
$\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$	$\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

De la definición dada para la tangente y la cotangente, además, pueden deducirse, de forma evidente, las dos identidades que se mencionan a continuación:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

En la actividad 2.1. se utilizó la circunferencia trigonométrica y el teorema de Pitágoras para verificar que , y deducir la primera identidad pitagórica: . Retomando la primera igualdad, y dividiendo ambos miembros de la expresión por se tiene:

Similarmente, dividiendo toda la expresión por , se puede deducir fácilmente que . Sintetizando, tenemos las tres identidades pitagóricas fundamentales:

Capítulo IV

Material para el alumno

El presente documento tiene como propósito fundamental constituirse en un esbozo de material de texto para el alumno de Matemáticas del Tercer ciclo, en el cual el estudiante pueda ver desarrollados de una forma didáctica, amena y cercana a su realidad, los contenidos de geometría con los que se encontrará durante su paso por la Educación General Básica.

El material está estructurado en dos unidades, correspondientes, cada una, a un año lectivo. Se presenta un breve abordaje de la teoría, partiendo de conceptos o conocimientos previamente adquiridos por el estudiante, en años anteriores, y construyendo sobre esto los nuevos aprendizajes. Posterior al desarrollo teórico de los contenidos, se presentan una serie de ejemplos, seguidos de ejercicios para el alumno, que inician siendo situaciones intuitivas y muy elementales, y van creciendo en el nivel de profundización y formalización de los temas tratados, conforme se avanza en el texto.

La primera unidad abarca los temas relacionados con vectores en el plano, para sétimo año, introduciendo el concepto de vector y de sistemas de coordenadas en el plano, a partir de situaciones concretas, para luego hablar de operaciones con vectores, regla de Chasles, y producto escalar (o producto punto).

La segunda unidad presenta los conceptos de geometría elemental, para octavo año, abordados desde el enfoque vectorial. Haciendo uso de las herramientas que el álgebra lineal nos proporciona para definir los conceptos clásicos, y abordar los ejercicios tradicionales, así como otros más novedosos. Se abordan entonces las nociones de recta, rayo, segmento, así como las propiedades elementales de los triángulos y cuadriláteros, entre otras, haciendo uso del lenguaje propio de los vectores, así como planteando ejemplos donde el alumno se vea en la necesidad de usar esas nociones a través de la herramienta vectorial.

Por otro lado, los ejercicios planteados en los diferentes apartados, tienen como objetivo servir a su vez de modelo, en cuanto al tipo de situaciones y problemas que se espera el estudiante sea capaz de abordar y resolver exitosamente al terminar el estudio de la unidad correspondiente.

Este documento se presenta, entonces, con la esperanza de ser una primera aproximación al asunto de la geometría abordada vectorialmente, de modo que sea sencillo para el alumno, y a la vez, permita al docente, visualizar el tipo de ejercicios y situaciones que se espera que el alumno de tercer ciclo sea capaz de manejar.

4.1 Vectores para sétimo año

4.1.1 Sistema de coordenadas

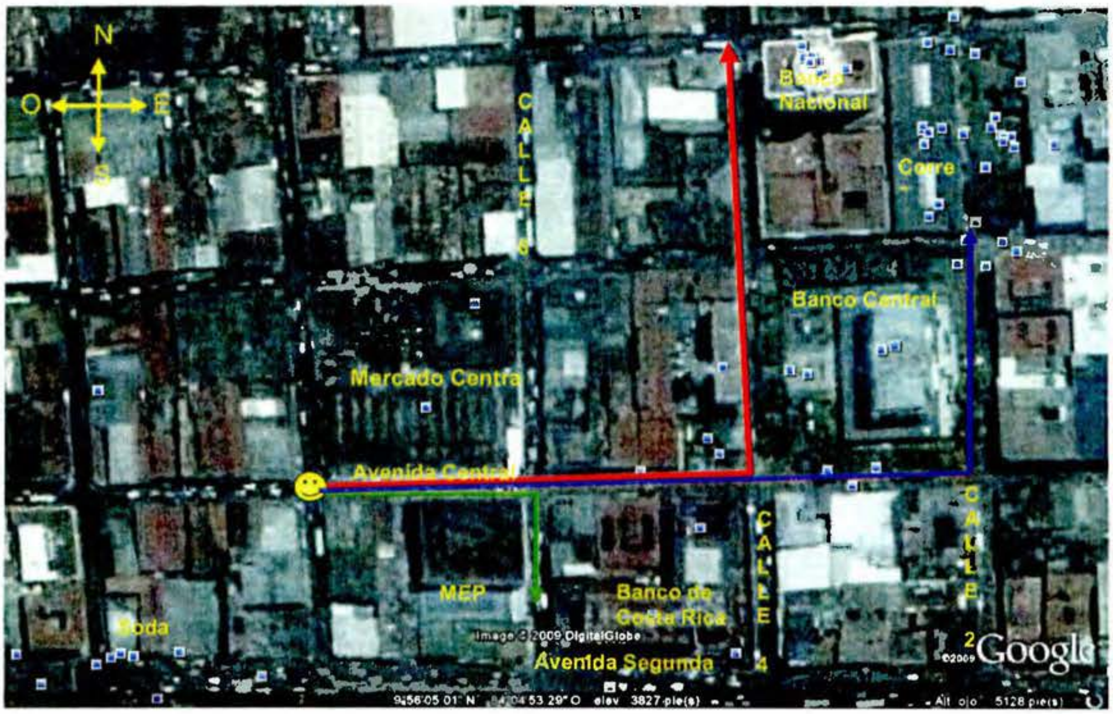
Cuando necesitamos dar direcciones lo hacemos a partir de un punto de referencia y utilizamos los puntos cardinales, lo que nos permite ubicar lugares de una forma sencilla. A esto se le llama un sistema de referencia. Veamos el siguiente ejemplo en el cual usamos una fotografía de un sector del centro de San José.

Margarita necesita ir al Banco Nacional a depositar dinero en su cuenta de ahorros. Ella se bajo del bus en la parada ubicada donde está la carita feliz (Ver siguiente figura), y de ahí, camina hacia el Banco Nacional. Al llegar, ella está dos calles al este, y dos avenidas al norte de la carita feliz (recorrido marcado en rojo). Ahí se encuentra con Mariana, una amiga suya, quien le pide que la acompañe al correo.

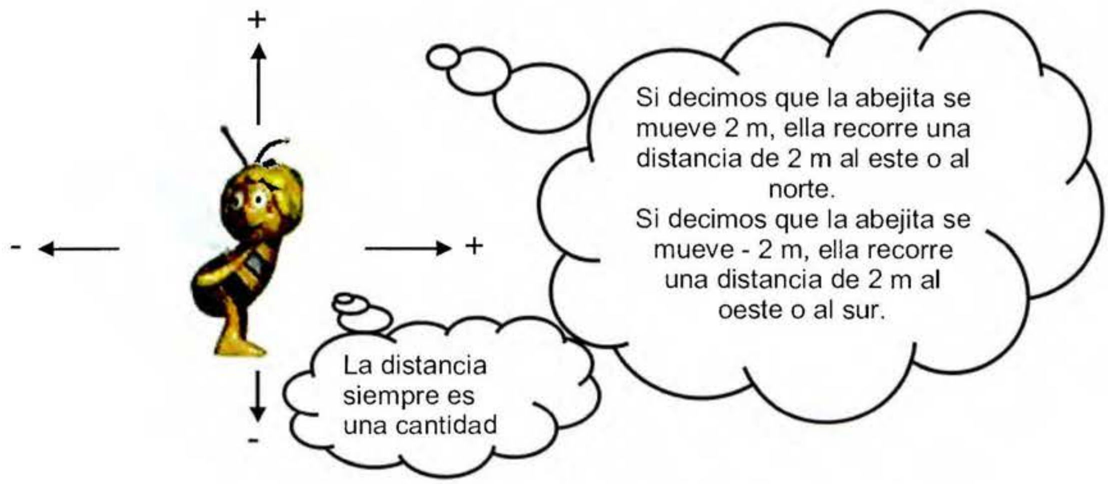
¿A cuántas calles y avenidas, y en qué dirección, está el correo de la carita feliz? (Ver el recorrido marcado en azul.) ______________________________

Luego, ellas van al Ministerio de Educación Pública (MEP) a pedir información sobre los exámenes de Bachillerato, ¿a cuántas calles y avenidas están de la carita feliz y en qué dirección? (Ver recorrido en verde.)

____



Ahora tomemos como punto de origen el lugar donde Margarita se bajó del bus, y acordemos que si caminamos calles, hacia el este será un número positivo, y al oeste será un número negativo, igual para las avenidas, si caminamos hacia el norte será un número positivo y hacia el sur será un número negativo.



Utilizando lo anterior tenemos que cuando Margarita llegó al Banco Nacional estaba a 2 avenidas y 2 calles de su punto de origen.

Cuando estaban en el correo, Margarita y Mariana están a 3 calles y a 1.5 avenidas. Y cuando están en el MEP, su ubicación con respecto al punto de origen es de 1 calle y -1 avenida.

Margarita y Mariana ya están cansadas, y casi es medio día, entonces se van a comer a la soda (ver figura anterior). ¿Cuál es la ubicación de las jóvenes en este sitio? ____

A cada lugar que aparece en el mapa, se le puede ubicar por dos números, uno corresponde al número de calles que se recorren desde el punto de origen, y el otro al número de avenidas. Por ejemplo, al Banco Nacional le corresponde el par de números (2,2), al correo el par (3,1) y al MEP el par (1,-1).

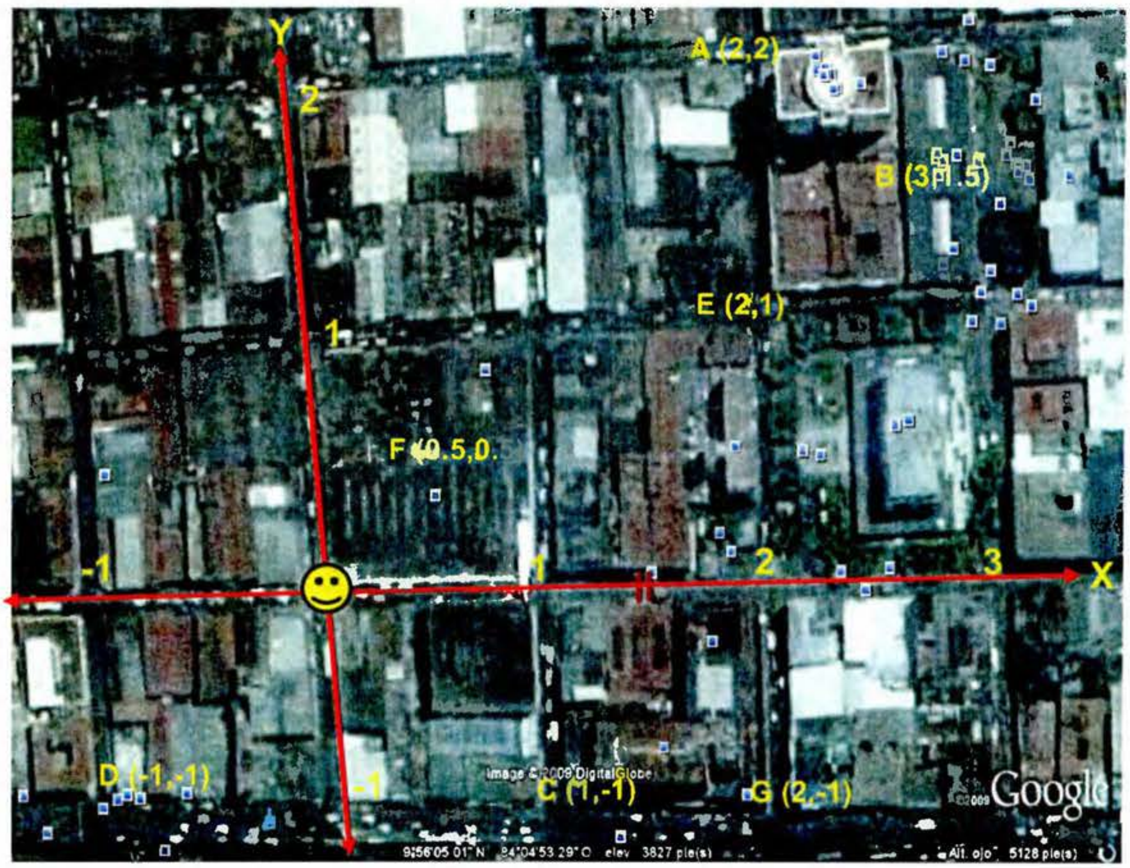
¿Cuál par de números le corresponde a la soda a la que fueron Margarita y Mariana a comer?____

Las calles y avenidas son nuestros ejes de referencia, porque con estos es que podemos dar una ubicación a cada lugar. En adelante, vamos a llamarles **eje X** y **eje Y** respectivamente.

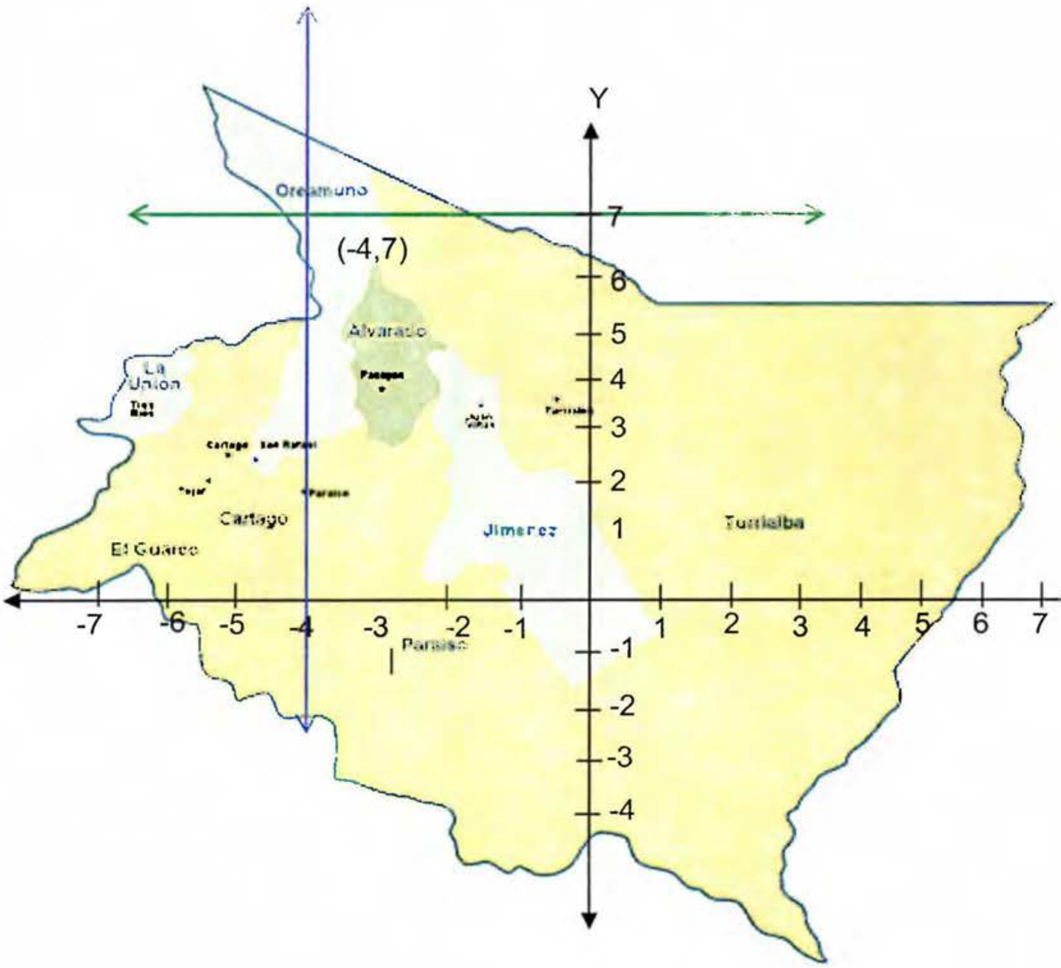
De ahora en adelante a los puntos en el plano vamos a asignarles una letra mayúscula, y podemos escribir el par de números que lo ubican a la par de su letra.

Veamos la siguiente tabla

Lugar	Letra	Símbolo
Banco Nacional	A	A(2,2)
Correo	B	B(3,1.5)
MEP	C	C(1,-1)
Soda	D	D(-1,-1)
Banco Central	E	E(2,1)
Mercado Central	F	F(0.5,0.5)
Banco de Costa Rica	G	G(2,-1)



Esto que acabamos de realizar con el mapa del centro de San José, se puede hacer con cualquier mapa. En forma general, una manera de ubicar puntos en un plano es como lo hicimos anteriormente, con un punto de origen y dos ejes de referencia. Sin embargo, no en todos los planos podemos identificar las calles y las avenidas, por lo cual, utilizamos rectas horizontales y rectas verticales. Veamos el siguiente ejemplo, en donde se muestra el mapa de Cartago.

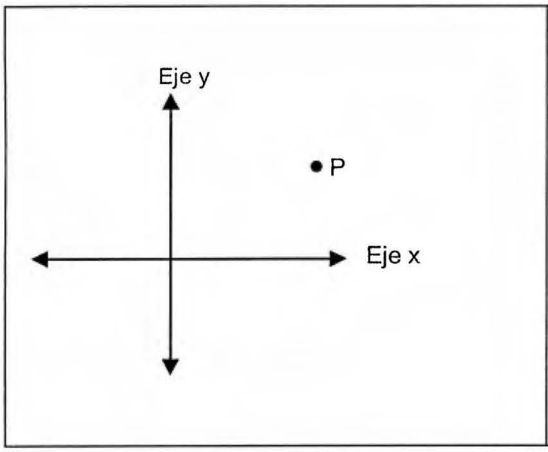


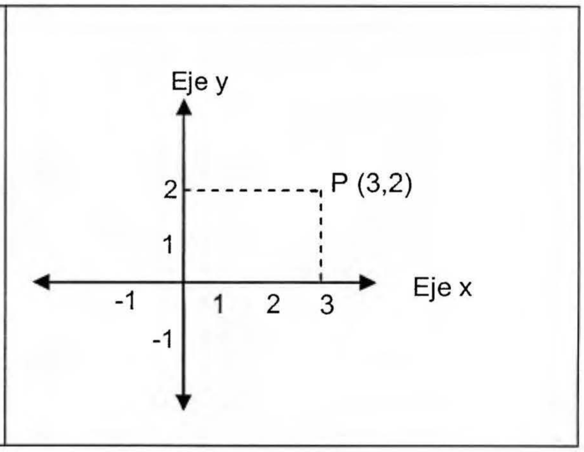
Oreamuno está ubicado en la recta horizontal que contiene el punto 7 en el eje **Y** y en la recta vertical que contiene el punto -4 en el eje **X**.

Vamos a ubicar el eje X en posición horizontal, y el eje Y en posición vertical, de manera que se intersequen formando un ángulo de 90°. Bajo el acuerdo anterior, a cada punto del plano se le asigna un par de números reales (a, b), en donde *a* es el número que le corresponde en el eje *X* y *b* es el número que le corresponde en el eje *Y*. A los números *a* y *b* se les llama coordenadas en el eje *X* y *Y* respectivamente; y al par (a, b) se le llama par ordenado. Esto significa que en cualquier plano se puede poner un sistema de coordenadas, y entonces podemos ubicar cada punto mediante sus coordenadas en este sistema, es decir, cada punto tiene un par de coordenadas, y cada par de coordenadas ubican un punto.

Ejemplo

Dibujemos un punto P en el plano, si ponemos un sistema de coordenadas en el plano, el punto P tiene coordenadas (3,2). La representación del punto P (3,2) en el plano es la siguiente

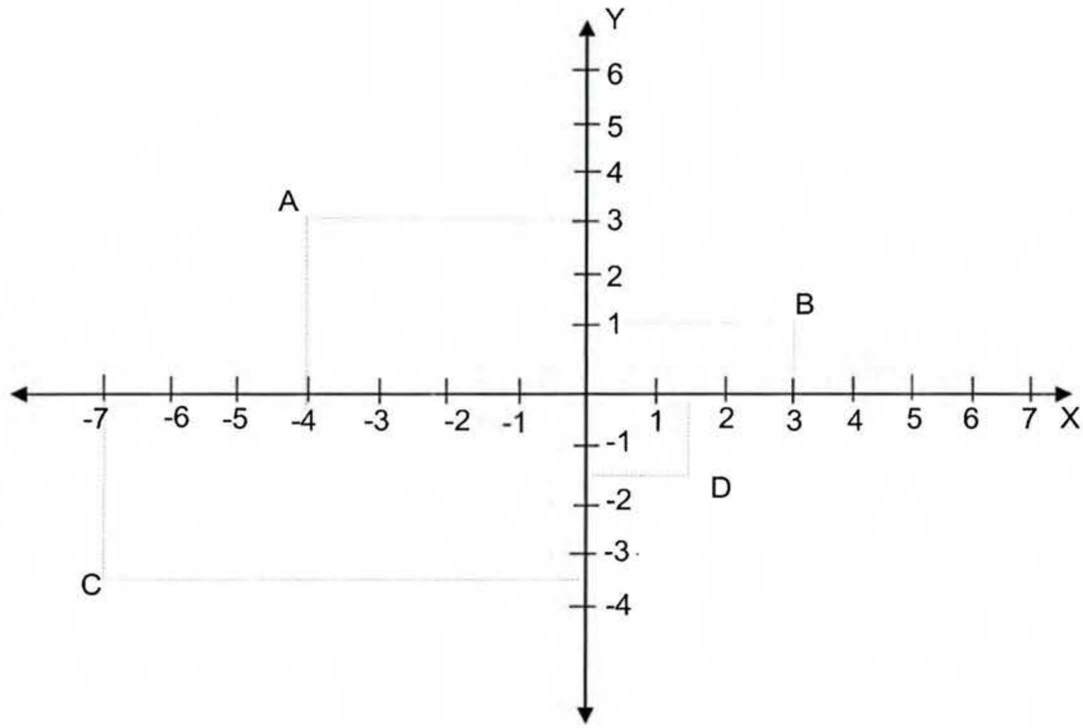




En el dibujo anterior, se observa la representación del punto P en el plano. Vemos que 3 es el número que le corresponde en el eje *X* y 2 es el número que le corresponde en el eje *Y*.

Ejercicio 1.1

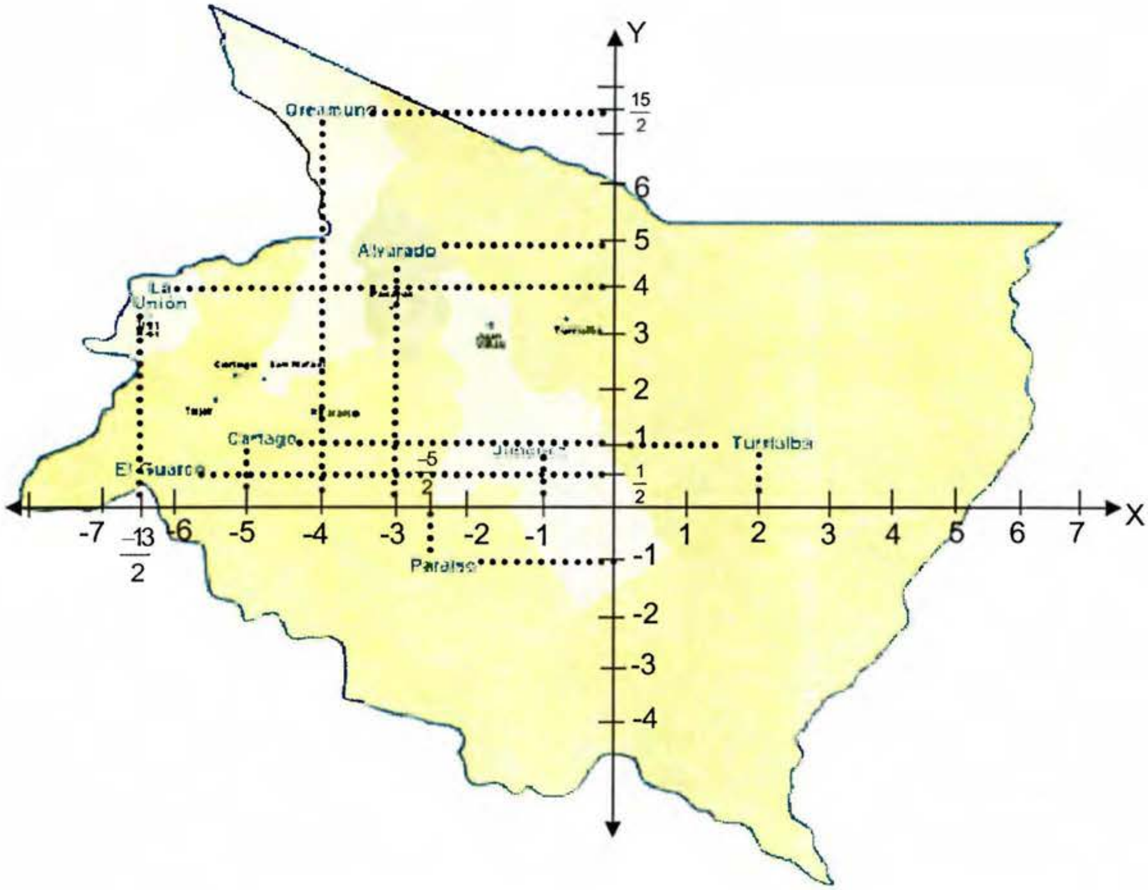
A. Determine las coordenadas de los puntos A, B, C, D en el siguiente plano



A ____________________ C ____________________

B ____________________ D ____________________

B. Localice las coordenadas de los cantones de la provincia de Cartago.



Oreamuno ______________

Jiménez ________________

Paraíso________________

Alvarado ________________

El Guarco _______________

La Unión________________

Cartago ________________

Turrialba ________________

4.1.2 Suma y resta de puntos

Sumar o restar puntos en este momento no tiene mucho sentido, ya que no tiene ninguna utilidad el sumar o restar el punto A + B. Sin embargo, más adelante tendrá una gran ventaja el poder sumar o restar las coordenadas de dos o más puntos. Veamos los siguientes ejemplos

Consideremos A(1,2) y B(3,4), entonces A+B =(1,2)+(3,4)=(1+3,2+4)=(4,6)
Entonces para sumar dos o más puntos en el plano se suman las coordenadas en X y las coordenadas en Y respectivamente y obtenemos un par ordenado. En general tenemos

Si A(a,b) y B (c,d) entonces
A+B=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)

Ahora, para restar puntos se realiza el mismo procedimiento pero con resta, veamos el siguiente ejemplo: A – B = (1,2) - (3,4)= (1 - 3, 2 - 4) = (-2,-2)

En general tenemos

Si A(a,b) y B (c,d) entonces
A - B=(a,b) -(c,d)=(a-c,b-d)

Estudiemos más ejemplos. Tomemos M(-5,-2) y N(-3,6)

M+N= (-5,-2) + (-3,6) = (-5+-3,-2+6) = (-8,4)

M-N= (-5,-2) - (-3,6) = (-5-(-3),-2-6) = (-5+3,-2+-6) = (-2,-8)

Ejercicio 2.1

Tome A(6,2), B(-2,-1), C(-4,6). Sume y reste lo que se le solicita

A + B = ____

A + B + C= ____

A - B= ____

B - A= ____

A - C= ____

A + B - C= ____

4.1.3 <u>Longitud de segmentos paralelos a los ejes de referencia</u>

Utilicemos de nuevo el mapa del centro de San José que se encuentra en la página 346. ¿Cuál es la distancia que hay entre el punto C y el punto G, es decir entre el MEP y el Banco de Costa Rica? (ver flecha verde en la figura)

____

Cuando nos movemos del punto C al punto G nos estamos trasladando en forma paralela al eje X, pasando del punto que tiene coordenada 1 al punto que tiene coordenada 2; mientras que en el eje Y estamos fijos, en el punto que tiene coordenada -1. Entonces la distancia es de 1 cuadra.

De esta forma la distancia va a estar dada por el valor absoluto de la resta de las coordenadas en X de cada uno de los puntos, es decir

$$|2-1|=1.$$

Observemos que si preguntamos por la distancia entre el punto *G* y el punto C la distancia va a ser la misma, es decir es de 1 cuadra, que se obtiene de la siguiente operación

$$|1-2|=|-1|=1$$

¿Cuál es la distancia que hay entre el punto A y el punto G, es decir entre el Banco Nacional y el Banco de Costa Rica? (ver flecha azul)

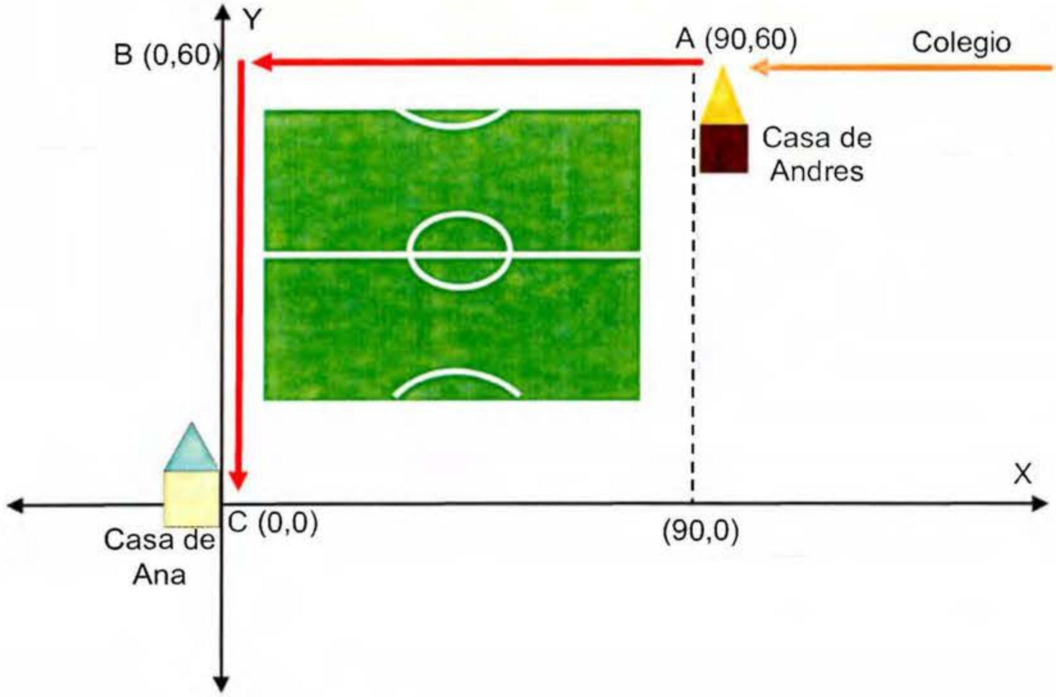
En este caso nos estamos moviendo en forma paralela al eje *Y*, pasamos de la coordenada -2 a la coordenada 1, mientras que en el eje *X* la coordenada es fija, es 2.

Así que la distancia va a estar determinada por el valor absoluto de la resta de las coordenadas en Y de cada uno de los puntos, es decir

$|2- -1|=3.$

Estudiemos otro Ejemplo

Andrés y Ana son compañeros del colegio. Cursan el sétimo año y viven en el mismo barrio. Andrés se comprometió con la mamá de Ana de ir a dejarla luego de salir del colegio. En los primeros días, ellos decidieron irse por el camino marcado con rojo, es decir, salen del punto *A* (Casa de Andrés), pasan por el punto *B* y llegan al punto *C* (Casa de Ana). Tomemos como unidad de medida el metro.

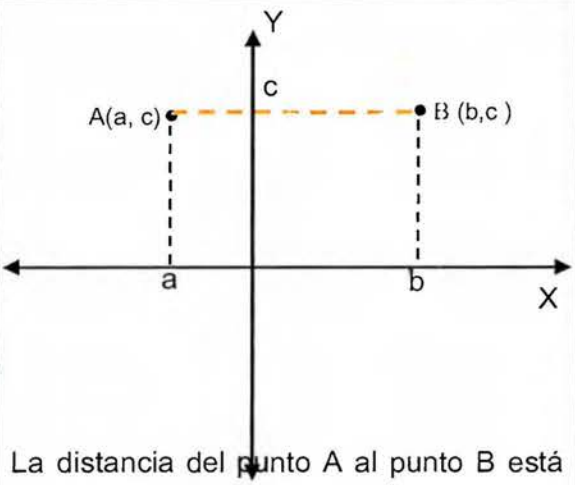
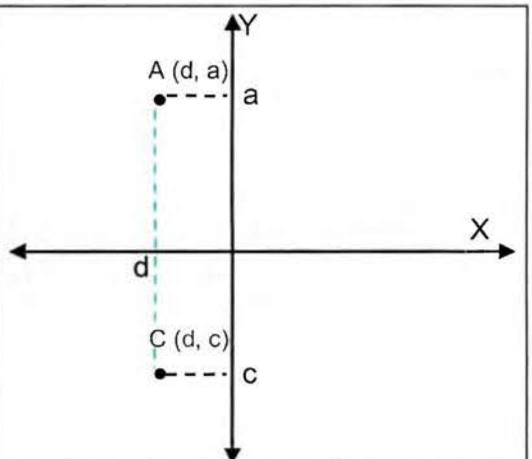


¿Cuál es la distancia que recorren desde la casa de Andrés hasta la casa de Ana?____

El primer recorrido del punto *A* al punto *B* tiene una distancia de 90 m, que se obtiene al restar $|0 - 90|=90$, ya que caminamos en forma paralela al eje *X*. Luego el recorrido de *B* a *C* es de 60 m, ya que si restamos $|60 - 0| = 60$. Entonces tenemos que el recorrido total es de 90 m + 60 m = 150 m

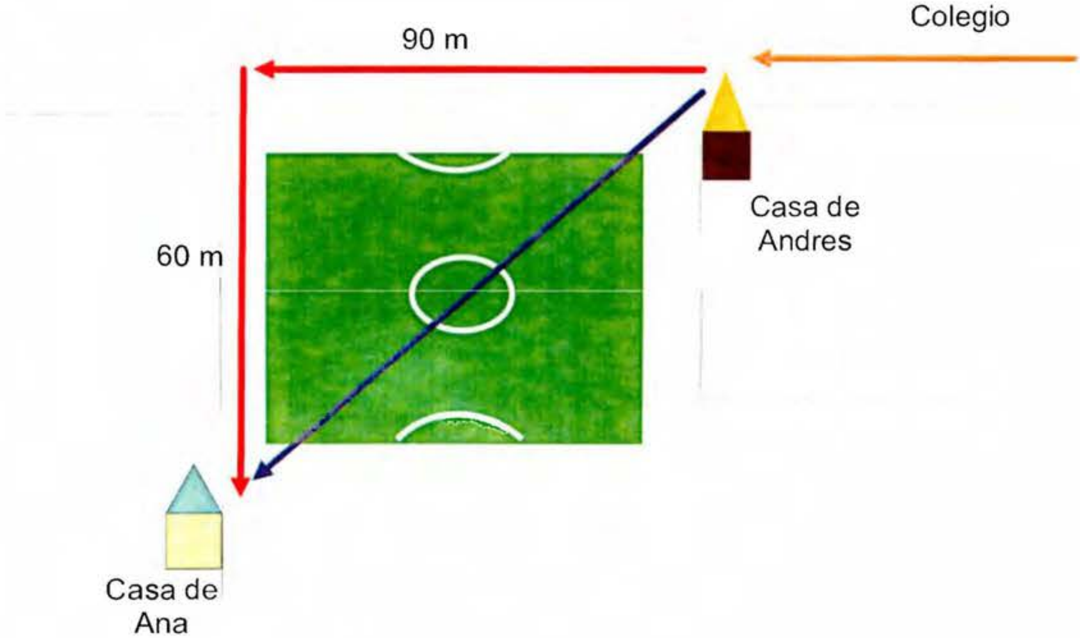
Observemos que cuando necesitamos encontrar la longitud de un segmento paralelo a uno de los ejes tenemos que obtener el valor absoluto de la resta de las coordenadas del punto de inicio y el punto final respectivas al eje.

En forma general tenemos:

	
La distancia del punto A al punto B está dada por | b-a|	La distancia del punto A al punto C está dada por | c-a |

4.1.4 Distancias entre dos puntos

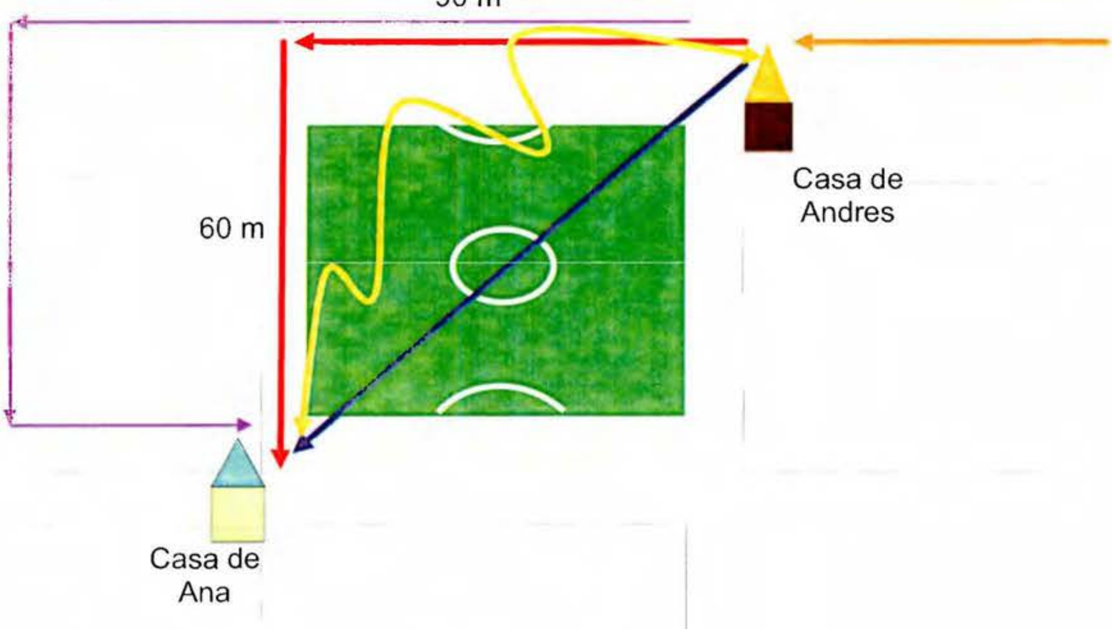
Andrés y Ana se cansan de ir siempre por el mismo camino, por lo que deciden atravesar la cancha por el camino marcado con azul en la siguiente figura.



¿Cuál es el camino más corto para ir a la casa de Ana desde la casa de Andrés, el camino marcado con rojo o el camino marcado con azul?______________________

Entonces, podemos observar que si vamos de un punto a otro, podemos elegir muchos caminos, pero que el camino más corto es recorriendo el segmento de recta que une los dos puntos.

En la siguiente figura, se observa otros caminos recorridos en color rosado y anaranjado.



Si observamos más detenidamente, vemos que se formó un triángulo rectángulo con los desplazamientos rojos y azul. Este tipo de triángulos fue estudiado por el matemático griego Pitágoras, quien formuló que la suma de las medidas de los dos lados rojos al cuadrado es igual a la medida del lado azul al cuadrado.

Por ejemplo, averigüemos cuánto mide la diagonal de la cancha de fútbol; utilizando la fórmula de Pitágoras y suponiendo que las medidas de la cancha son de 90m por 60 m. Entonces $90^2 + 60^2 = d^2$

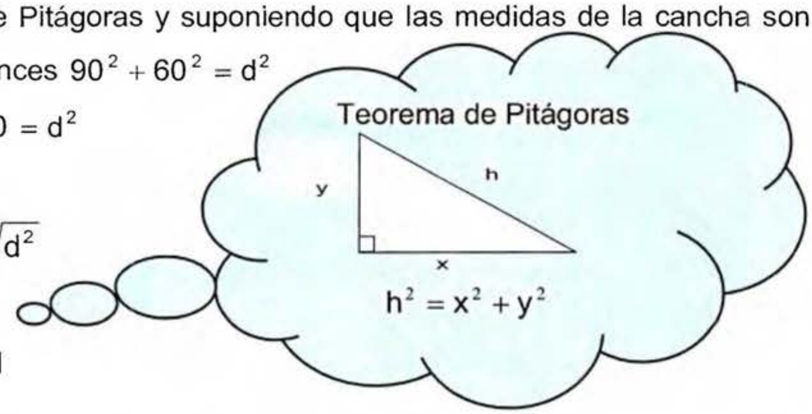
$8100 + 3600 = d^2$

$11700 = d^2$

$\sqrt{11700} = \sqrt{d^2}$

$30\sqrt{13} = d$

$108{,}16 \approx d$

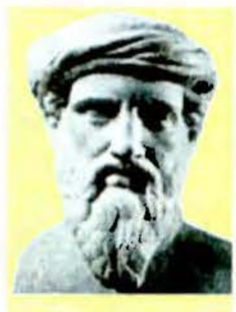


Por tanto, la longitud de la diagonal de la cancha de fútbol es de 108,16 m. De esta forma también verificamos que ese es el camino más corto.

Cateto: Son los dos lados que se oponen a los ángulos agudos en un triángulo rectángulo. En el dibujo corresponde a los lados que miden "x" y "y"

Hipotenusa: Es el lado que se le opone al ángulo recto. En el dibujo corresponde al lado que mide "h".

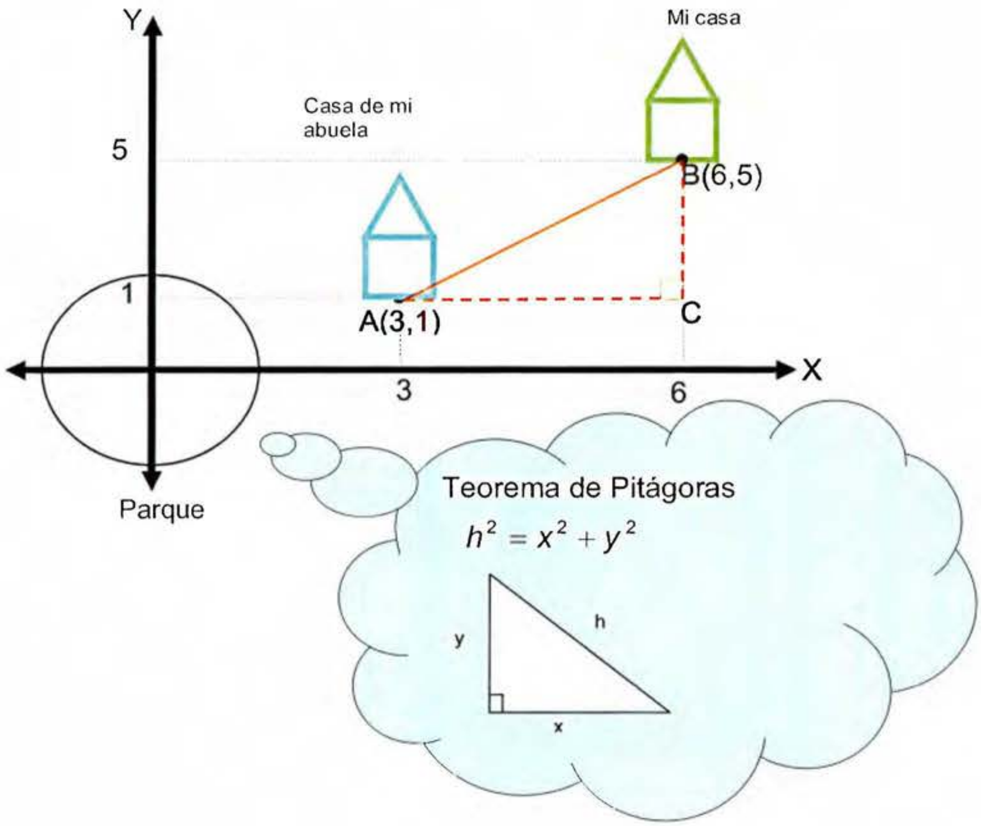
Pitágoras vivió en el 500 AC, y fue uno de los primeros pensadores matemático griego. Ellos llevaban el cabello largo, y vestía sólo simples prendas de vestir. Tanto los hombres como las mujeres eran pitagóricos. [36]
Los pitagóricos estaban interesados en la filosofía, pero especialmente en la música y las matemáticas, ellos decían: "la música es el ruido que tiene sentido, y la Matemática son las normas de cómo funciona el mundo."



Atribuido a Pitágoras de Samos

Recordemos que todo punto en el plano tiene dos coordenadas, una en el eje X y otra en el eje Y. Averigüemos la distancia entre dos puntos utilizando sus coordenadas. Para ello, consideremos el siguiente ejemplo.

Supongamos que quiero averiguar la distancia entre mi casa y la casa de mi abuelita. Para ello dibujo un plano cartesiano y coloco el origen donde más le convenga, en este caso vamos a colocarlo en el parque del pueblo. Luego obtengo las coordenadas de mi casa y las coordenadas de la casa de mi abuela (ver *siguiente* figura).



Ahora, si quiero averiguar la distancia entre el punto *A* y el punto *B* utilizando el Teorema de Pitágoras necesito dibujar un triángulo rectángulo; en la figura anterior corresponde al triángulo pintado de anaranjado. Marquemos el punto *C* y sus coordenadas.

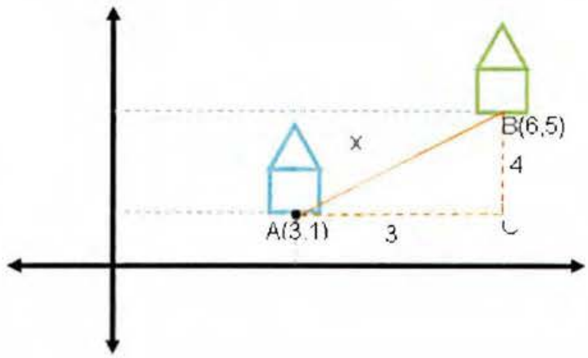
Luego de identificar el triángulo rectángulo, necesito conocer la distancia entre el punto *A* y *C* y entre *C* y *B*; que son respectivamente _______ y _______.

Entonces tenemos:

- La distancia entre *A* y *C* es ________ $= |6-3| = |3-6|$
- La distancia entre *C* y *B* es ________ $= |5-1| = |1-5|$

Ahora aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos

$$(6-3)^2+(5-1)^2=x^2$$
$$3^2+4^2=x^2$$
$$9+16=x^2$$
$$25=x^2$$
$$\sqrt{25}=\sqrt{x^2}$$
$$5=x$$



Analizando el procedimiento anterior, podemos deducir una fórmula para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano $P(a,b)$ y $Q(c,d)$, pero antes usemos la simbología $d(P,Q)$ para evitar escribir "*la distancia entre P y Q*". Entonces tenemos:

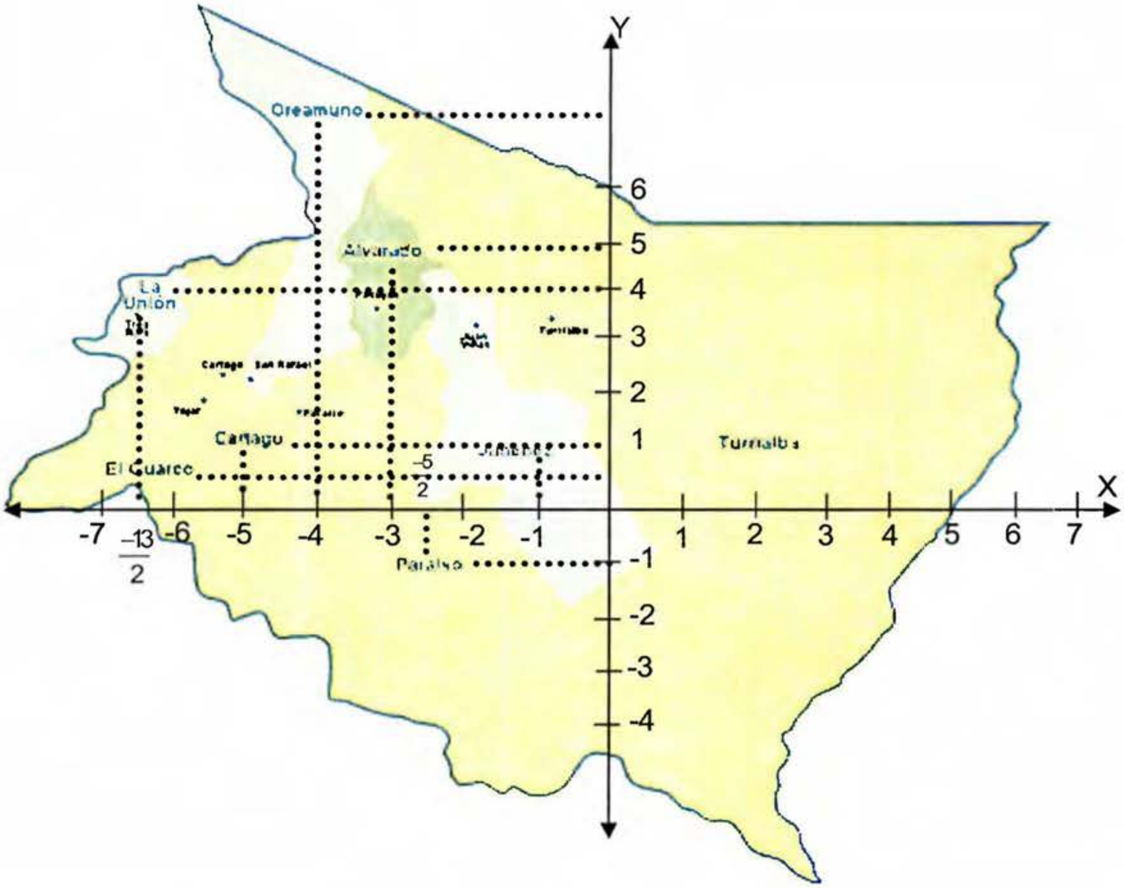
$$d(P,Q)=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$

En el teorema de Pitágoras, las longitudes de los segmentos paralelos a los ejes de referencia van elevados al cuadrado, por lo que no es necesaria la utilización del valor absoluto, ya que el resultado es el mismo. Veamos un ejemplo concreto:

$$(2-5)^2=(-3)^2=9$$
$$(5-2)^2=(3)^2=9$$

Ejemplo

1. Utilizando el mapa de la provincia de Cartago, encuentre la distancia entre Cartago y Alvarado.



Solución:

Lugar	Coordenadas
Cartago	(-5,1)
Alvarado	(-3,5)

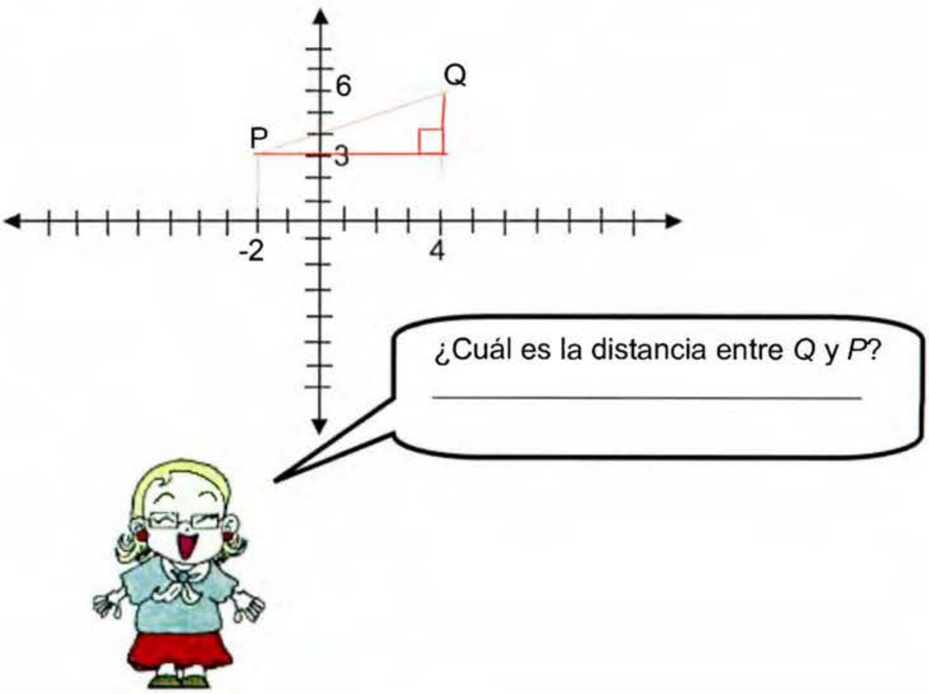
Las distancia entre Cartago y Alvarado es

$$\sqrt{(-3--5)^2+(5-1)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

Ahora, ¿cuál es la distancia entre Alvarado y Cartago?. Pues será la misma que de Cartago a Alvarado, que es $2\sqrt{5}$

2. Si P(-2, 3) y Q(4,6), entonces la distancia entre P y Q es

$$d(P,Q)=\sqrt{(4-(-2))^2+(6-3)^2} = \sqrt{(6)^2+(3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$



Entonces la distancia entre *P* y *Q* es la misma que entre *Q* y *P*, por lo que tenemos

$$d(P,Q)=d(Q,P)$$

Ejercicios 4.1

A. Determine la distancia entre los puntos y grafíquelos en el plano

- $N\left(\frac{-1}{3},\frac{1}{3}\right)$ y $M\left(\frac{-1}{3},\frac{1}{2}\right)$
- R(-5,-4) y S(0,-8)

B. Determinar la distancia entre los puntos A y B, B y C, C y D y A y D del ejercicio 1.1.1

d (A, B) ________________ d (C, D) ________________

d (B,C) ________________ d (A, D) ________________

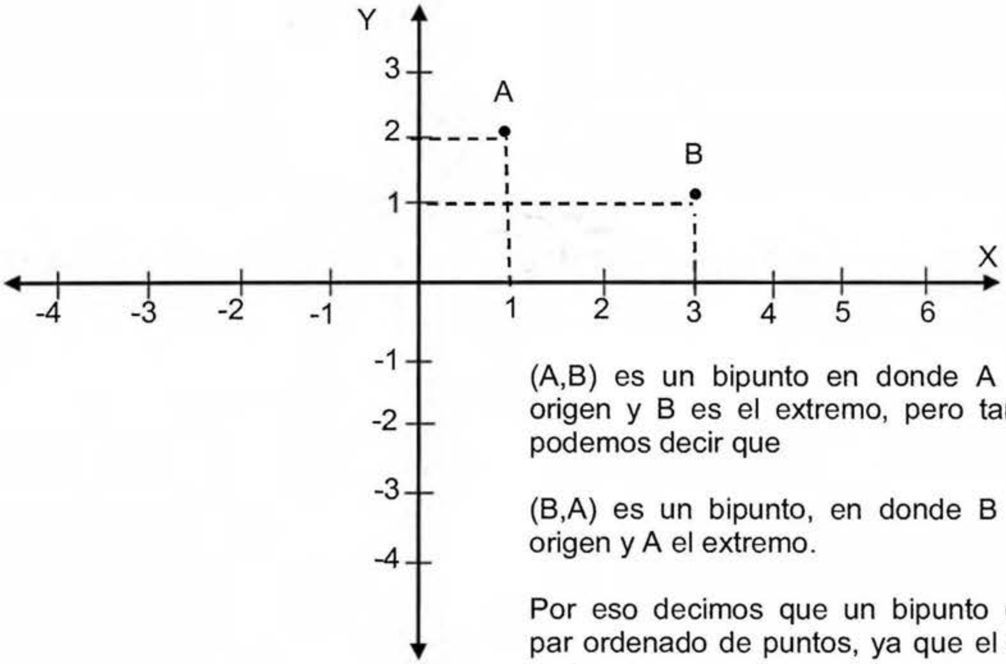
C. Utilizando el mapa de Cartago del ejemplo anterior encuentre la distancia entre los siguientes lugares:

- El Guarco a Paraíso
- Oreamuno a Alvarado
- Cartago a Paraíso.

Bipunto

A continuación vamos a estudiar el concepto de bipunto, el cual hace referencia a dos puntos en el plano y es de gran utilidad para los temas que se desarrollarán posteriormente.

Se llama bipunto a un par ordenado de puntos del plano, es decir, si *A* y *B* son puntos del plano cartesiano, entonces (A,B) es un bipunto. El punto *A* se le origen y punto *B* se le llama extremo del bipunto.



(A,B) es un bipunto en donde A es el origen y B es el extremo, pero también podemos decir que

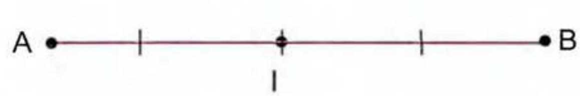
(B,A) es un bipunto, en donde B es el origen y A el extremo.

Por eso decimos que un bipunto es un par ordenado de puntos, ya que el orden de los puntos es importante.

Observemos que el bipunto (A,B) no es el mismo que el bipunto (B,A), ya que el orden importa. Otro aspecto a observar es la notación de bipunto, ya que es muy similar a la notación de par ordenado de números reales. El bipunto está formado por dos puntos del plano, entonces entre paréntesis van dos letras en mayúscula, que es la notación de los puntos "(A,B)", y el par ordenado es un par de número reales entre paréntesis también, en ocasiones para generalizar un par ordenado se utilizan letras minúsculas. "(a,b)" .

Punto medio de un bipunto

Consideremos (A,B) un bipunto en el plano, I se dice que es el punto medio del bipunto (A,B) si la distancia de *I* a *A* es igual que la distancia de *I* a *B*. Ejemplo



Más adelante estudiaremos otras propiedades importantes del bipunto y de su punto medio, pero antes vamos a estudiar el tema de Vectores, en el cual utilizaremos el concepto de bipunto.

4.1.5 Vectores

La sección 7-1 visitó para fin de año el parque de diversiones. Comenzaron el trayecto en los casilleros y se dirigieron a la Rueda de Chicago. Ellos recorrieron el camino marcado con rojo. (Ver siguiente figura)

Imagen tomada de http://www.parquediversiones.com/mapa_atracciones.htm

Aunque de que recorrieron el camino rojo, el desplazamiento es el marcado con morado; porque es la distancia más corta desde los casilleros hasta la Rueda de Chicago.

Luego se dirigieron al Bocaracá por la plaza de Tío Conejo, sin embargo se tuvieron que devolver a los casilleros a traer la cámara fotográfica. Por tanto, recorrieron el camino marcado en rojo (ver siguiente figura). Ahora, el desplazamiento desde la Rueda de Chicago hasta el casillero es la flecha marcada con morado.

Viendo las dos figuras anteriores, en la primera se señala el desplazamiento desde los casilleros hasta la Rueda de Chicago; y el segundo está en dirección contraria, desde la Rueda de Chicago hasta los casilleros.

Cada uno de estos desplazamientos tiene una **dirección** y una **magnitud** determinada y se representan con una flecha. Para este caso en particular, las longitudes son las mismas, ya que la distancia entre los casilleros y la Rueda de Chicago es la misma que de la Rueda de Chicago a los casilleros. En cuanto a la dirección no podemos decir lo mismo, ya que tiene dirección contraria. Por lo tanto los desplazamientos son diferentes.

Los desplazamientos se representan con una flecha, en donde su inicio marca el punto de partida y la flecha su punto de llegada

La magnitud de un desplazamiento es la distancia entre el punto de partida y el punto de llegada del mismo

Ejercicio 5.1

Pinte con una flecha los siguientes desplazamientos en el mapa de abajo

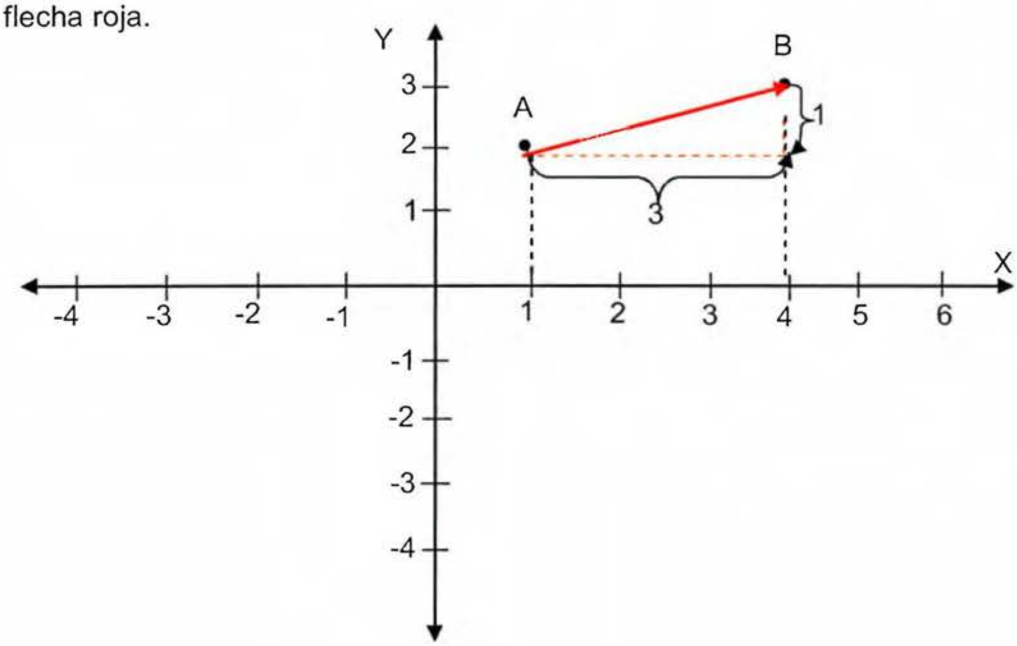
A. De los casilleros hasta el Teatro Bomberos.

B. Del Teatro de Bomberos hasta el Teletren.

C. Del Teletren hasta los Choconitos

Lo anterior podemos también visualizarlo en un plano que tiene un sistema de referencia. Recordemos que a cada punto del plano se le asigna un par ordenado.

El desplazamiento del punto A (1,2) al punto B (4,3) se puede representar con la flecha roja.



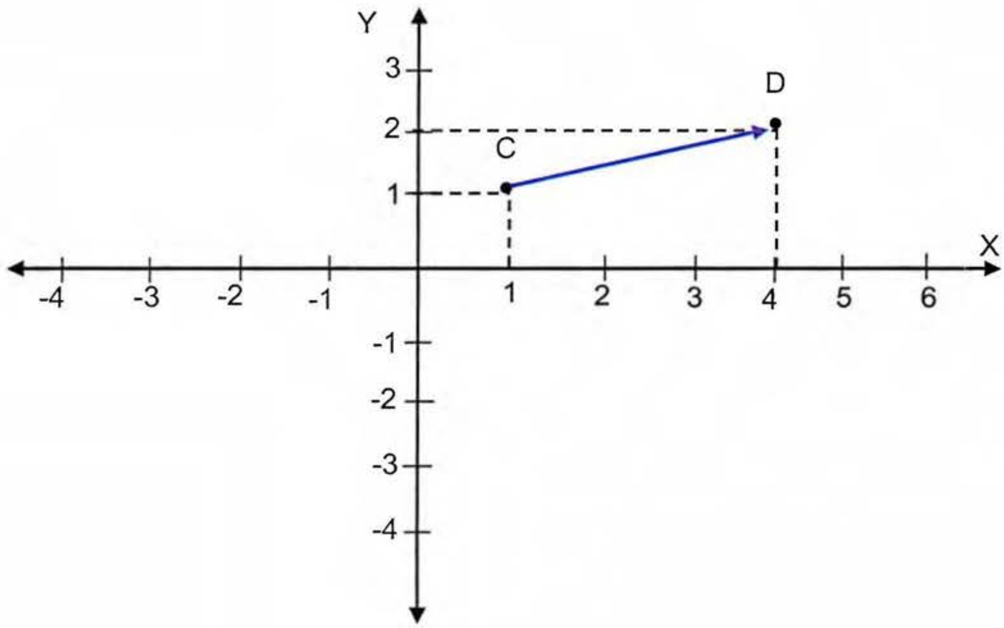
Entonces podemos decir que al bipunto (A,B) se le asocia un desplazamiento

Observemos que, si partimos desde el punto de origen hasta el extremo del bipunto por la línea puntada se está avanzando 3 unidades en el eje X y 1 unidad en el eje Y. El desplazamiento resultante es el señalado por la flecha roja. Esto nos da una manera de representar un desplazamiento usando un punto inicial y un punto final, es decir, utilizando un bipunto.

Es importante observar que si restamos las coordenadas de B menos las de A obtenemos el par ordenado (3,1) que representa las unidades que se avanza sobre el eje X y sobre el eje Y, es decir: B - A= (4,3) - (1,2) = (4-1,2-2) = (3,1)

Entonces podemos decir que el bipunto (A,B) determina el desplazamiento del punto A al punto B, y que el par ordenado que se le asoció está dado por la resta de las coordenadas del extremo del bipunto menos las coordenadas del origen "(0,0)".

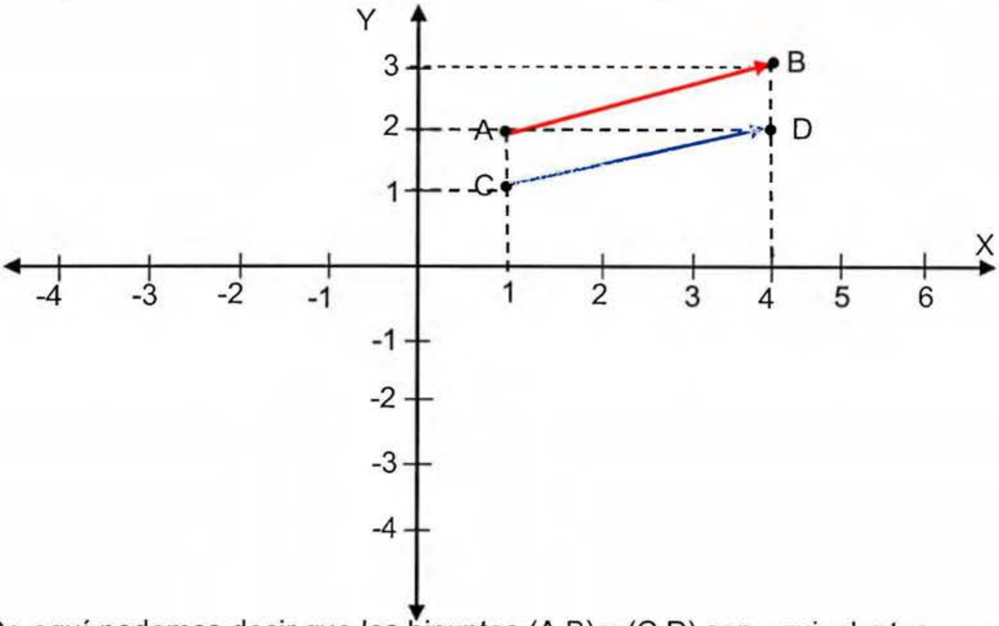
Consideremos ahora el bipunto (C,D) como se muestra en la siguiente figura



El desplazamiento desde el punto C hasta el punto D se le asigna el par ordenado (3,1), ya que si hacemos D-C= (4,2)-(1,1)= (3,1)

Analizando los dos desplazamientos anteriores tenemos que el desplazamiento determinado por el bipunto (A,B) se le asigna el par ordenado B-A=(3,1); y el desplazamiento determinado por el bipunto (C,D) se le asigna el par ordenado D-C=(3,1).

Ahora, observemos los dos desplazamientos en el plano



De aquí podemos decir que los bipuntos (A,B) y (C,D) son equivalentes y por lo tanto representan el mismo desplazamiento.

En general tenemos que si (A,B) y (C,D) son dos bipuntos que cumple que B-A=(x,y), y C-D=(x,y), con x y y números reales, entonces los bipuntos (A,B) y (C,D) son equivalentes y representan el mismo desplazamiento.

Ejercicios 5.2

A. Consideremos los siguientes puntos: A(1,4), B(-2,5), C(-1,-2), D(-4,-1), E(-5,6). Determine cuál de los siguientes bipuntos es equivalente al bipunto (A,B)

(A,C) ____________________________

(A,E) ____________________________

(B,D) ____________________________

(B,E) ____________________________

(C,D) ____________________________

(C,E) ____________________________

(B,C) ____________________________

(E,C) ____________________________

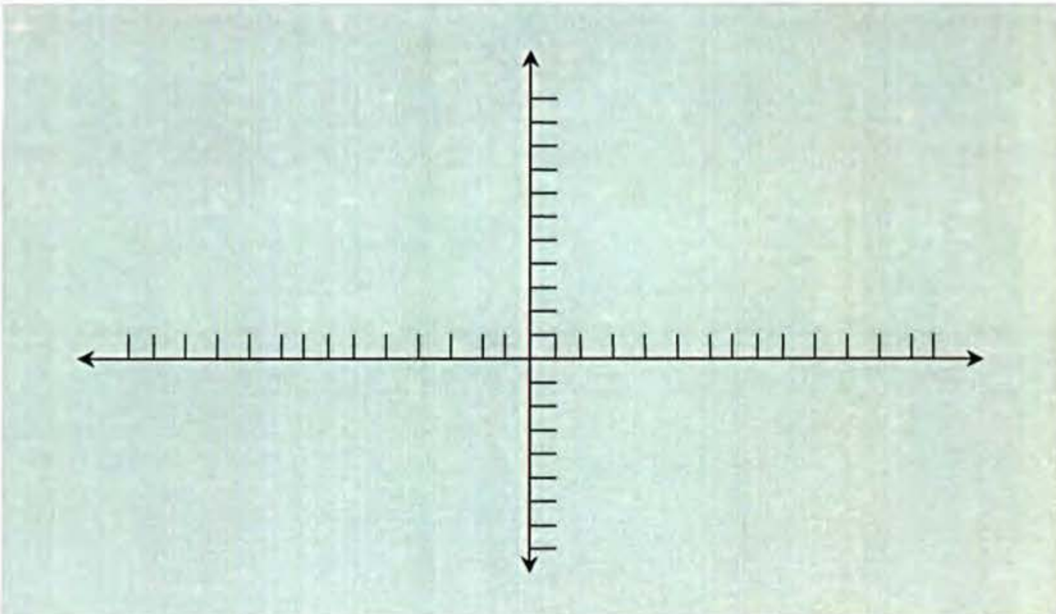
B. Determinar cuáles de los siguientes bipuntos son equivalentes. Considere los siguientes puntos: A(1,3), B(3,4), C(0,0), D(1,1), E(-1,1), F(1,0), G(2,-1), H(3,5), I(2,2), J(2,-1), K(1,3).

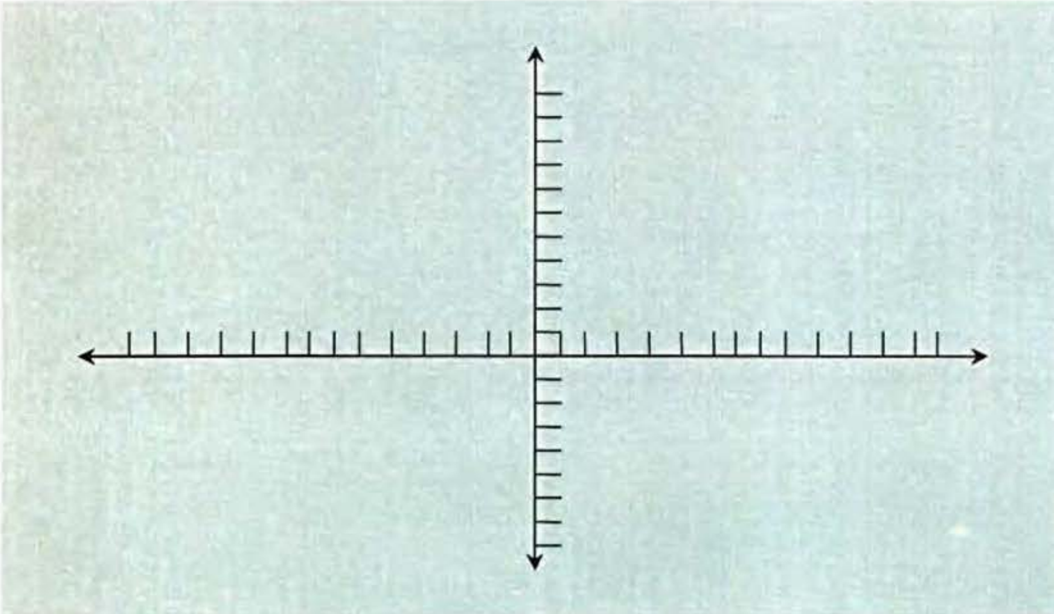
a) (A, B) y (C, D)

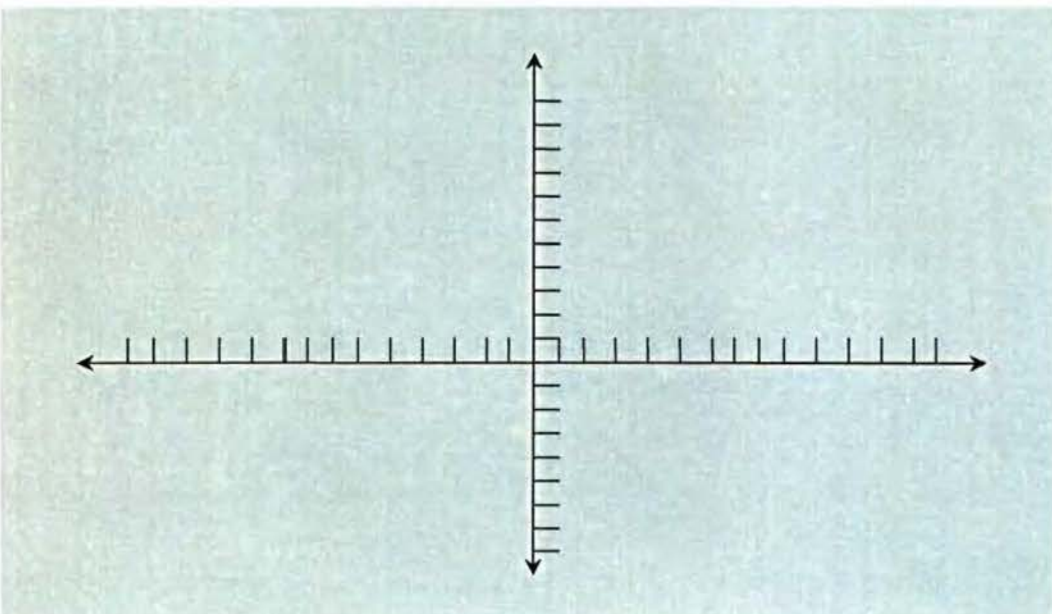
b) (E, F) y (G, D)

c) (H, I) y (J, K)

C. Graficar todos los bipuntos del ejercicio B

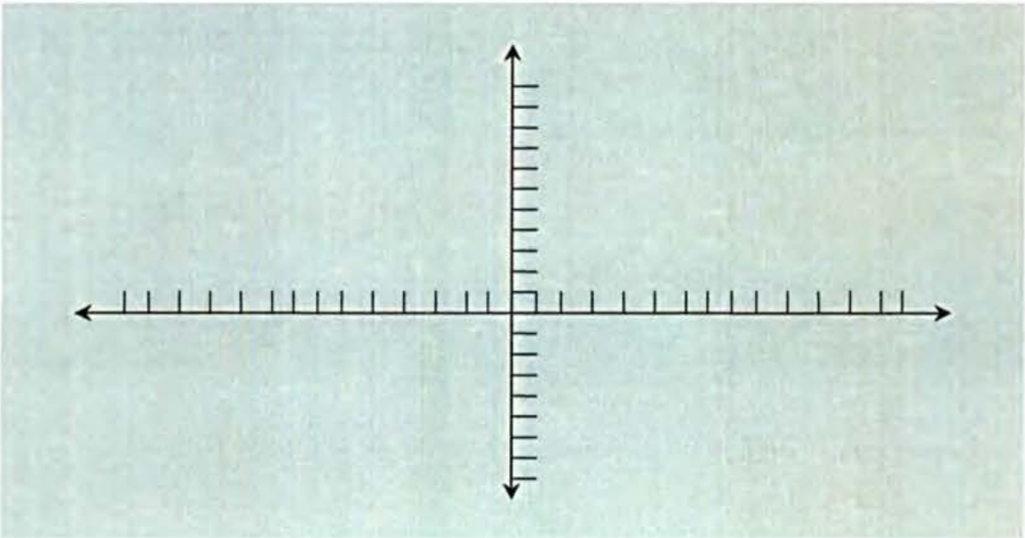




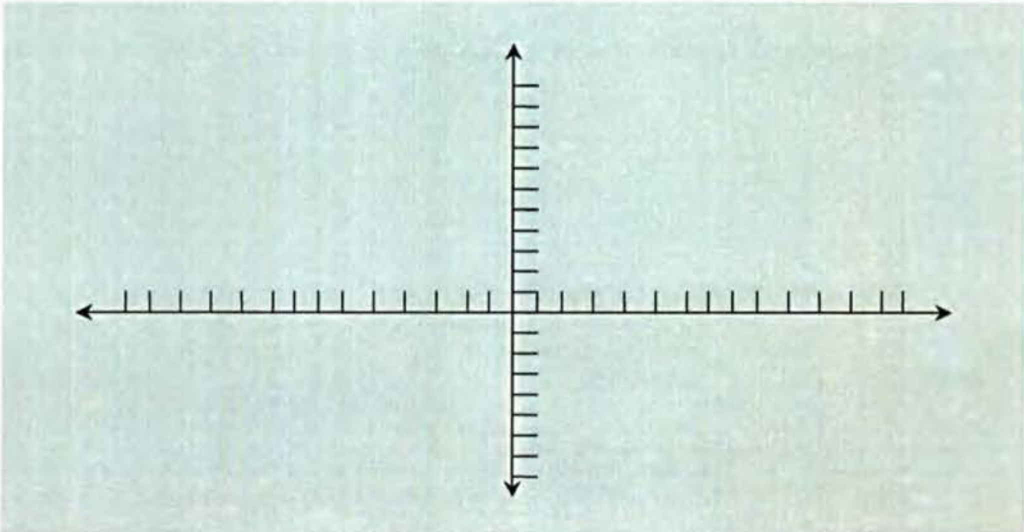


D. Representе gráficamente los siguientes pares de bipuntos para determinar si se intersecan. Observe que si tenemos dos puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, el bipunto (A,B) también lo podemos escribir de la siguiente forma: $((x_1,y_1), (x_2,y_2))$.

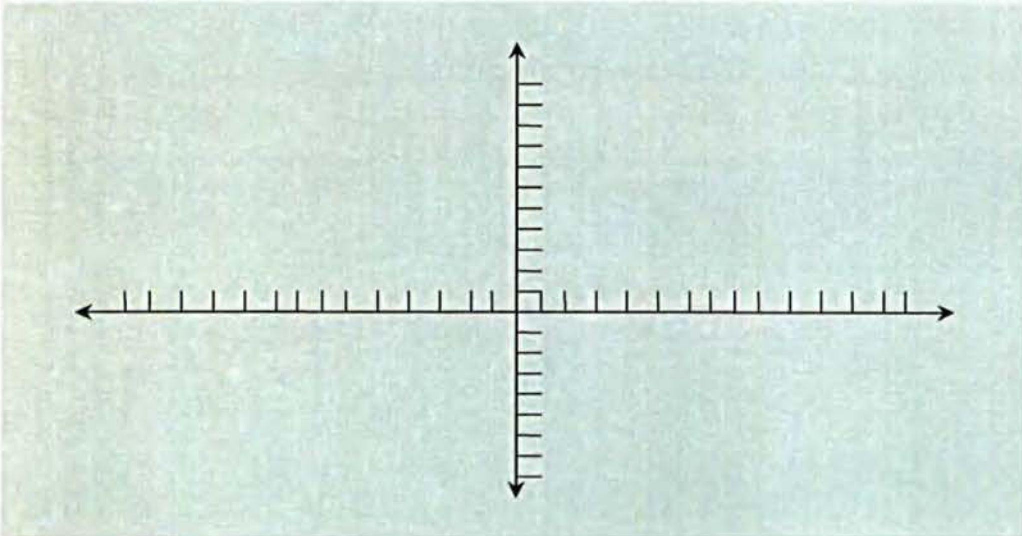
a) ((0,0),(1,1)) y ((3,1),(1,-1))



b) ((1,1),(1,-2)) y ((3,0),(-2,2))



c) ((-1,1),(1,1)) y ((2,-2),(-2,2))

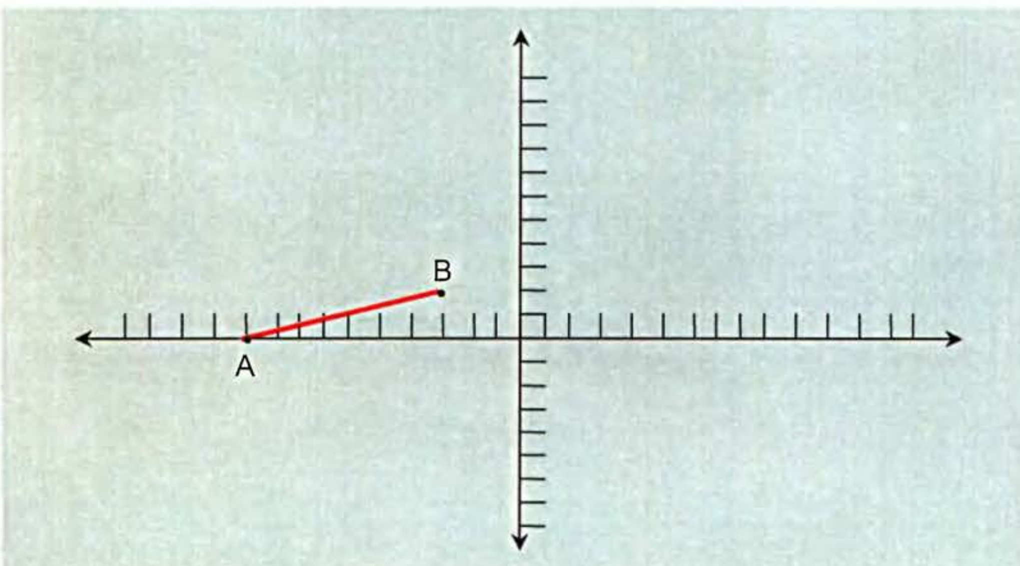


E. Si se tienen cuatro puntos no colineales en el plano, ¿cuántos bipuntos diferentes pueden determinar?

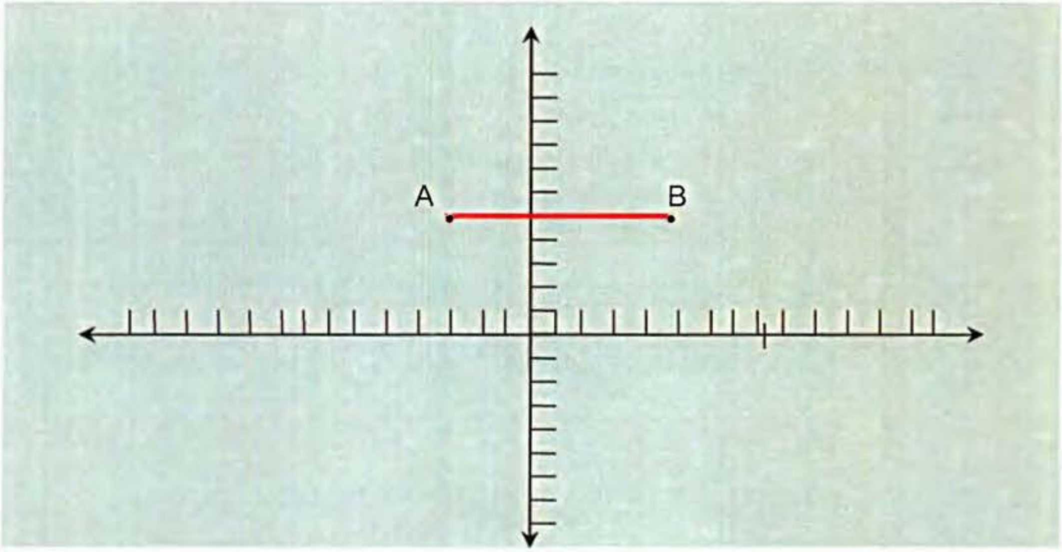
____

F. Escribir los bipuntos (A, B) representados en las siguientes gráficas.

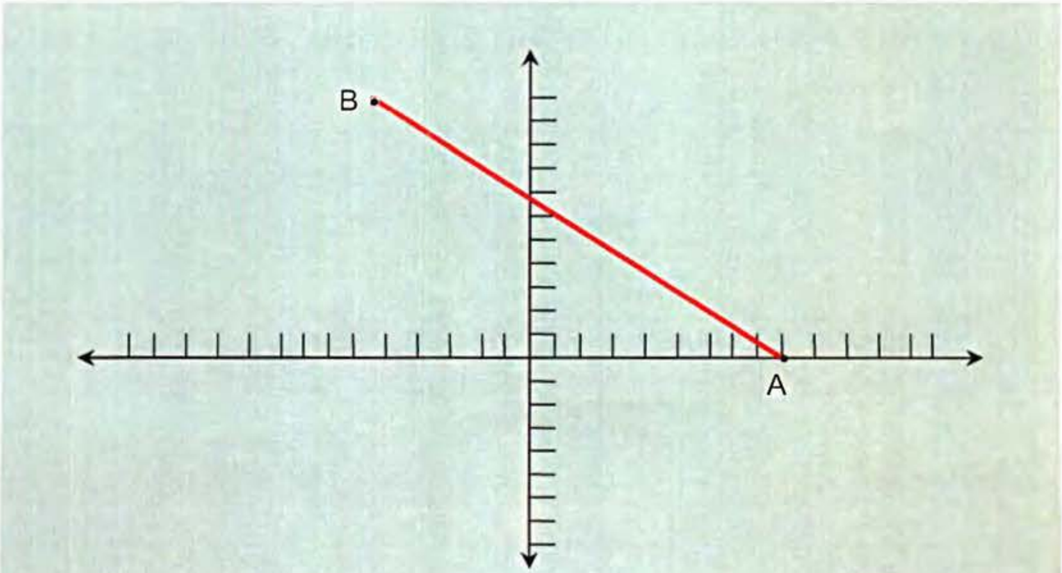
a)



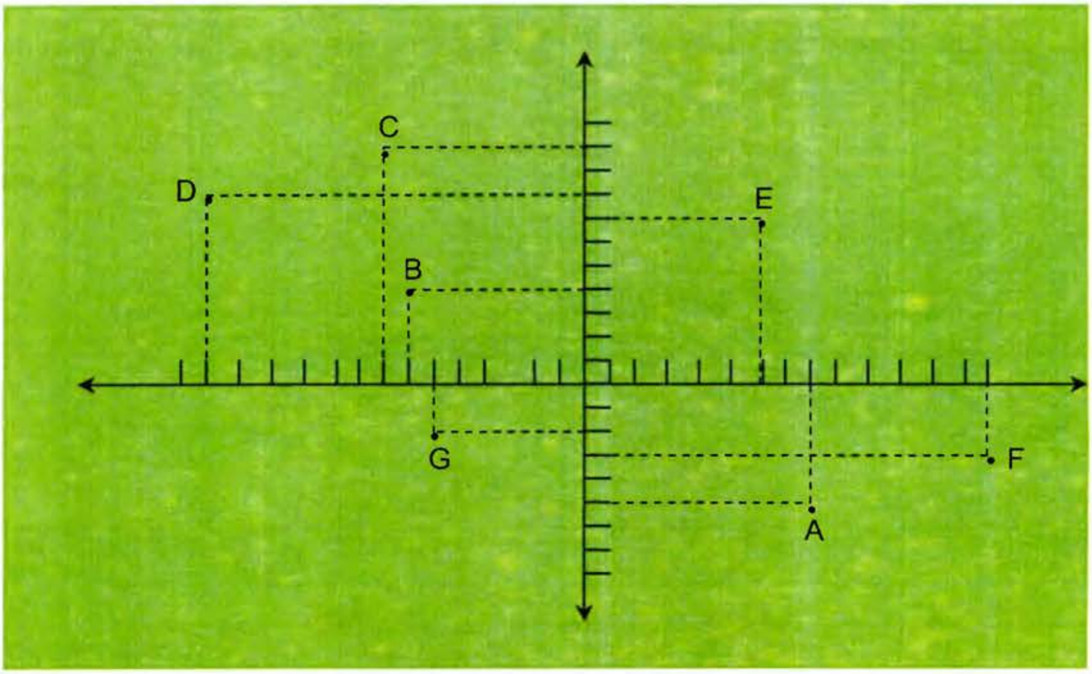
b)



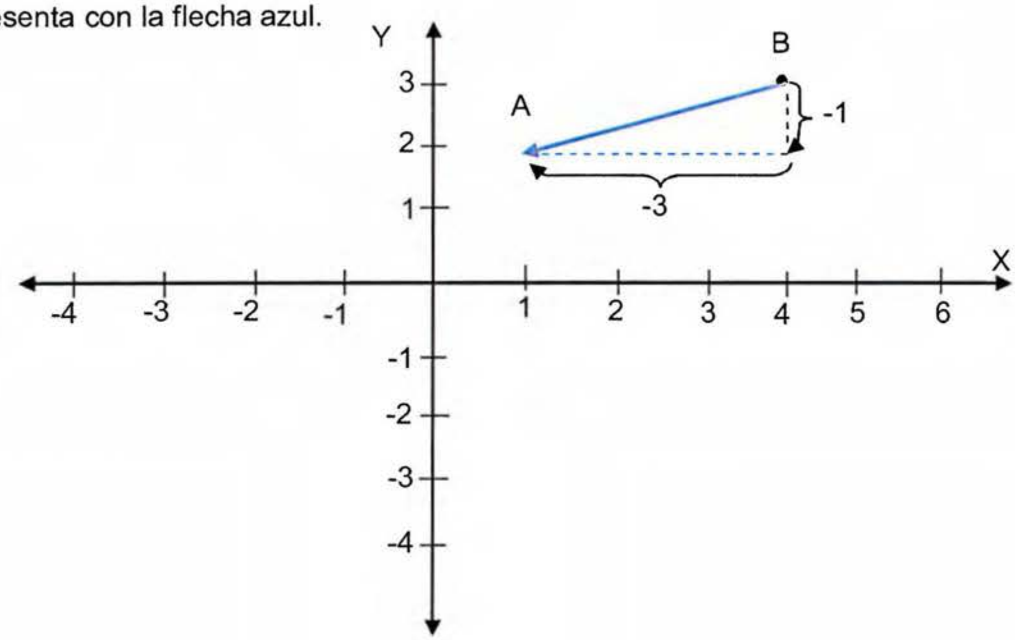
c)



G. En la siguiente figura aparecen varios puntos, determinar cuáles de estos determinan bipuntos equivalentes.



Ahora, volvamos de nuevo a los desplazamientos. Consideremos el bipunto (B,A), en donde B (4,3) es el origen y A (1,2) el extremo. El desplazamiento se representa con la flecha azul.



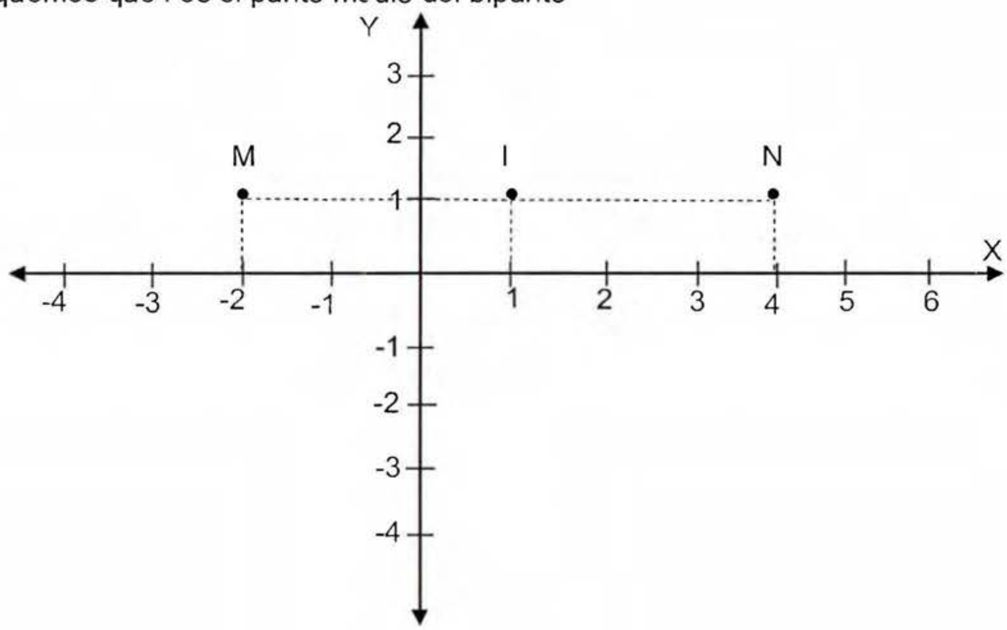
En este caso el desplazamiento está dado por el bipunto (B,A), por lo que el par ordenado que se le asigna es A – B = (1,2) – (4,3) = (1-4,2-3) = (-3 -1). Observemos que (-3,-1)=-1(3,1), es decir, que el desplazamiento desde A hasta B es opuesto al desplazamiento de *B* hasta *A*

Una ventaja al trabajar con el plano coordenado, es que podemos calcular la longitud del desplazamiento.

Ejercicio 5.3

Encuentre la magnitud del desplazamiento de *A* hasta *B* y de *B* hasta *A* en las figuras anteriores.

Veamos el siguiente ejemplo en donde se trabaja con el punto medio de un bipunto. Consideremos el bipunto (M,N) como se muestra en la siguiente figura. Verifiquemos que I es el punto medio del bipunto



Como estudiamos antes, si I es el punto medio del bipunto (M,N) entonces la distancia del punto M al punto I tiene que ser igual a la distancia del punto I al punto N, verifiquemos esto utilizando la fórmula de distancia:

$$d(M,I)=\sqrt{(1--2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{3^2+0^2}=\sqrt{9}=3$$

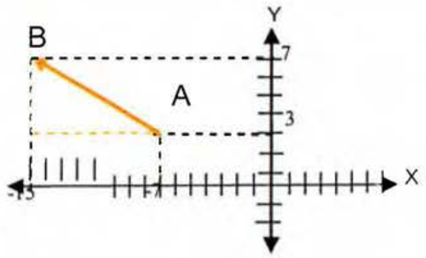
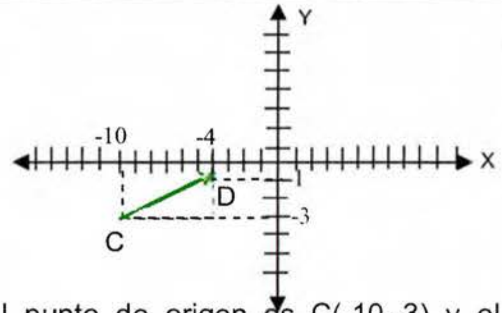
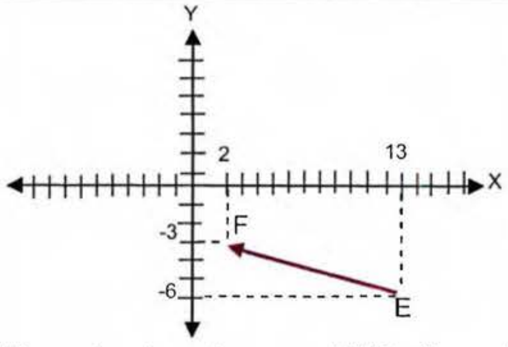
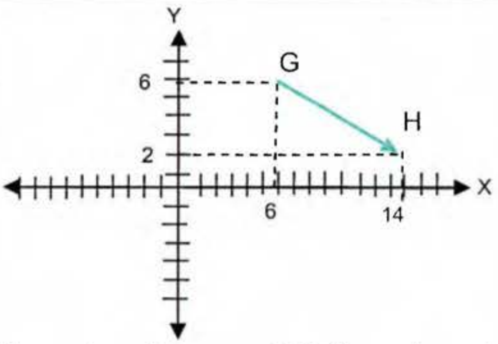
$$d(I,N)=\sqrt{(4-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{3^2+0^2}=\sqrt{9}=3$$

Entonces podemos decir que I es el punto medio del bipunto (M,N). Ahora, vamos a estudiar que pasa con los desplazamientos:

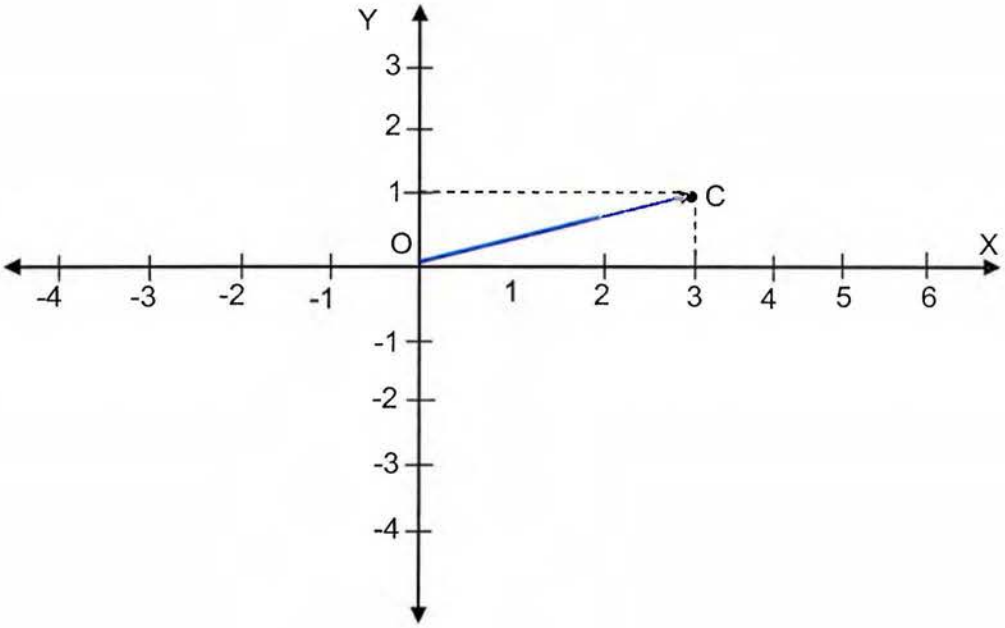
Tenemos que el bipunto (M,I) determina las coordenadas dadas por M-I= (-2,1)-(1,1)=(-3,0), si consideramos el bipunto (I,M) este tiene coordenadas dadas por I-M=(1,1)-(-2,1)=(3,0), por lo que podemos decir que los desplazamientos determinados por los bipuntos (M,I) y (I,M) son opuestos. Ahora, igualmente podemos decir que los desplazamientos determinados por (I,N) y (N,I) son opuestos, pero hay algo más que se debe observar, las coordenadas determinadas por el bipunto (I, N) son (-3,0), y las de el bipunto (N,I) son (3,0). Entonces tenemos que el bipunto (M,I) es equivalente al bipunto (I,N); y el bipunto (I,M) es equivalente al bipunto (N,I). De lo anterior se pueden extraer varias conclusiones, por **Ejemplo** que el desplazamiento determinado por el bipunto (M,I) es opuesto al determinado por (N,I), y el desplazamiento determinado por el bipunto (I,N) es opuesto al determinado por el bipunto (I,M). Más adelante estudiaremos más sobre desplazamientos opuestos.

Ejemplo

Determine el par ordenado establecido por cada uno de los siguientes bipuntos.

 El punto de origen es A(-7,3) y el punto extremo es B (-15,7) B-A = (-15,7) - (-7,3)=(-15 - (-7),7-3)= (-8,4) Se avanza -8 unidades en el eje X y 4 unidades en el eje X	 El punto de origen es C(-10,-3) y el punto extremo es D (-4,-1) D-C= (-4,-1) - (-10,-3)= (-4-(-10),-1-(-3))=(6,2) Se avanzan 6 unidades en el eje X y 2 unidades en el eje Y.
 El punto de origen es E(13,-6) y el punto extremo es F(2,-3) F-E =(2,-3)-(13,-6)=(2 -13,-3 - (-6))= (-11,3) Se avanza -11 unidades en el eje X y 3 unidades en el eje Y	 El punto origen es G(6,6) y el punto extremo es H(14,2) H-G=(14,2)-(6,6)=(14-6,2-6)=(8,-4) Se avanza 8 unidades en el eje X y -4 unidades en el eje Y.

Ahora, tomemos el bipunto (O,C) como se muestra en la siguiente figura.



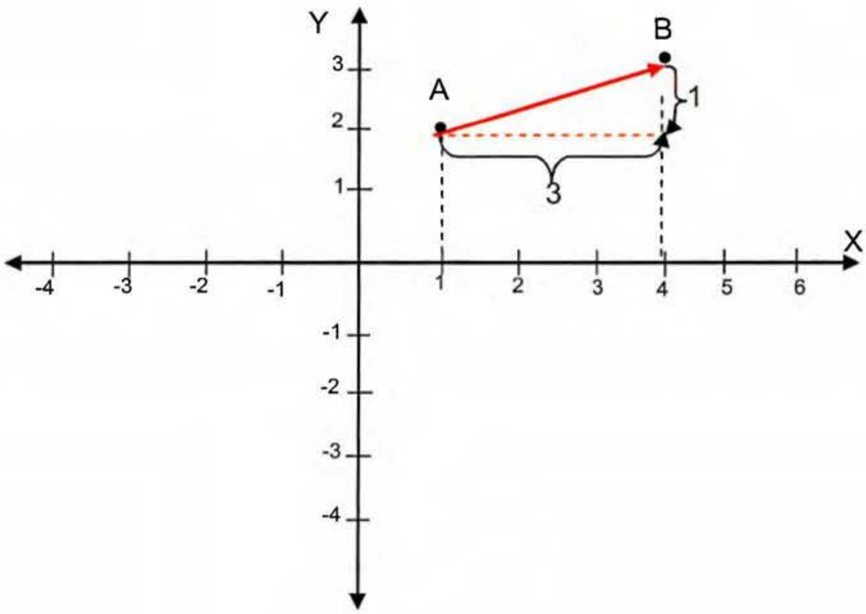
El par ordenado determinado por el bipunto (O, C) es C – O = (3,1) – (0,0)= (3-0,1-0)=(3,1). Es decir, desde el punto O al punto C se recorrió 3 unidades en el eje X y 1 unidad en el eje Y.

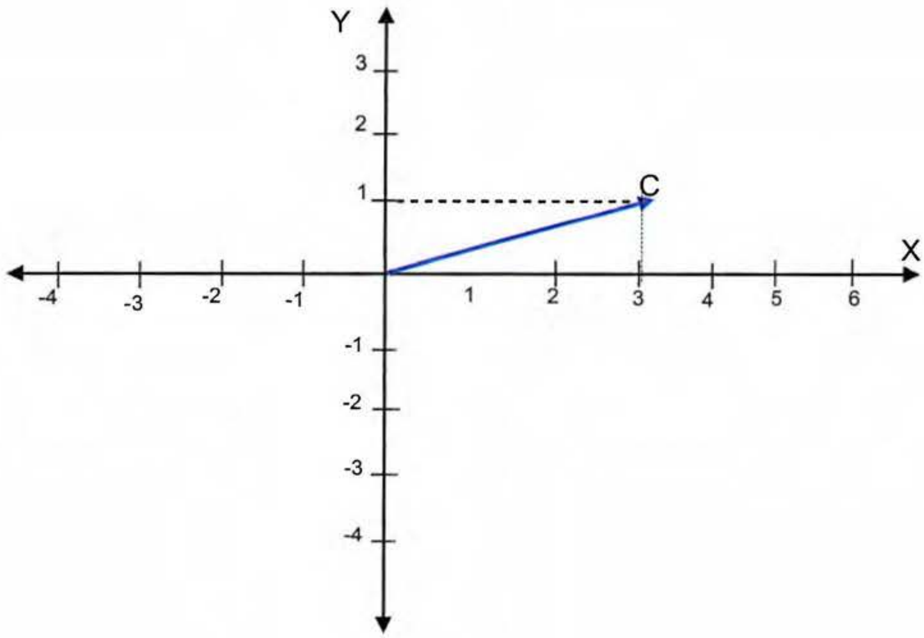
Observemos que en este caso C – O coincide con las coordenadas del punto C, ya que las coordenadas de O son 0 en el eje X y 0 en el eje Y.

Ejercicio 5.4

De la figura anterior, determine la magnitud del desplazamiento de O hasta C

Estudiemos de nuevo las siguientes figuras y comparemos su longitud, y el par ordenado que se le asocia a cada uno de los desplazamientos.

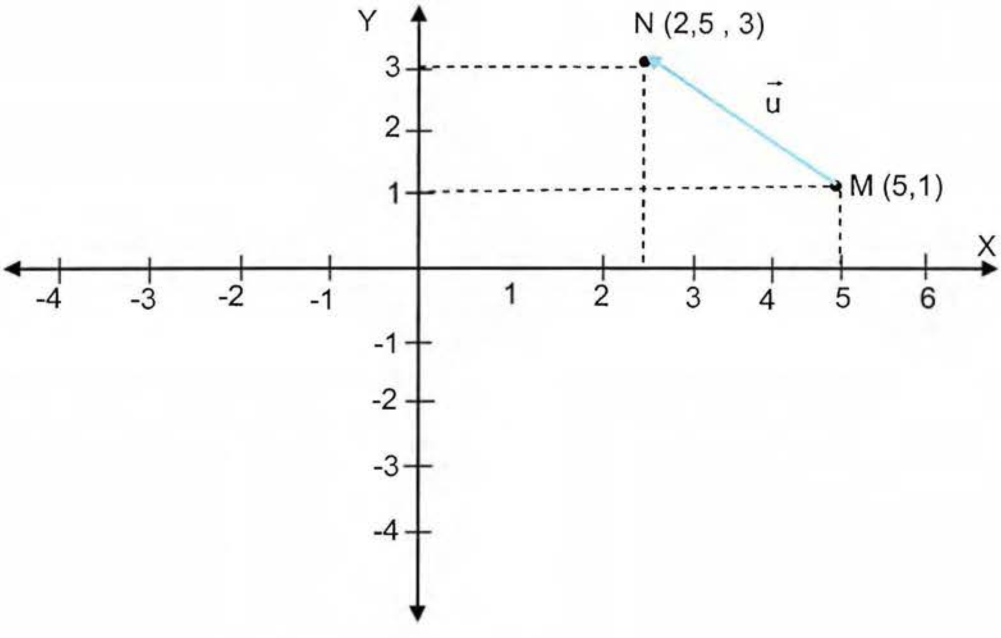




	Desplazamiento en rojo	Desplazamiento en azul
Longitud	$\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$
Par ordenado asociado a cada desplazamiento	B – A = (3,1)	C – O = (3,1)

Podemos observar que el desplazamiento en ambos casos es el mismo ya que tiene la misma longitud y la resta del par de puntos asociado es la misma, es decir, que los bipuntos (A,B) y (O,C) son equivalentes. La única diferencia es su punto de origen y su punto extremo.

A los desplazamientos estudiados anteriormente se le llaman **vectores**. Como vimos anteriormente a cada desplazamiento se le asigna un bipunto del plano, por lo tanto, a cada vector también se le va a asignar un bipunto en el plano. Los vectores se representan utilizando el punto de origen y el punto extremo del bipunto asociado, o utilizando una letra minúscula, ambos con una flecha arriba. Observemos el siguiente ejemplo



Entonces al vector formado por el bipunto (M,N) se puede representar con $\overrightarrow{MN}$ o $\vec{u}$. El "desplazamiento" realizado por el vector $\overrightarrow{MN}$ se le asigna el par ordenado obtenido de la resta de las coordenadas del punto de origen menos el punto extremo del bipunto. Es decir, $\overrightarrow{MN}$ se le asocia el par ordenado obtenido de realizar $N-M$

En el ejemplo anterior $N - M = (2{,}5\ ,3) - (5{,}1) = (-2{,}5\ ,2)$.

Al par ordenado asignado a un vector se le llama coordenadas del vector y se obtiene restando las coordenadas del punto exmenos las coordenadas del punto de origen del bipunto asociado.

$\overrightarrow{MN}$ tiene coordenadas $N-M$

También podemos escribir que

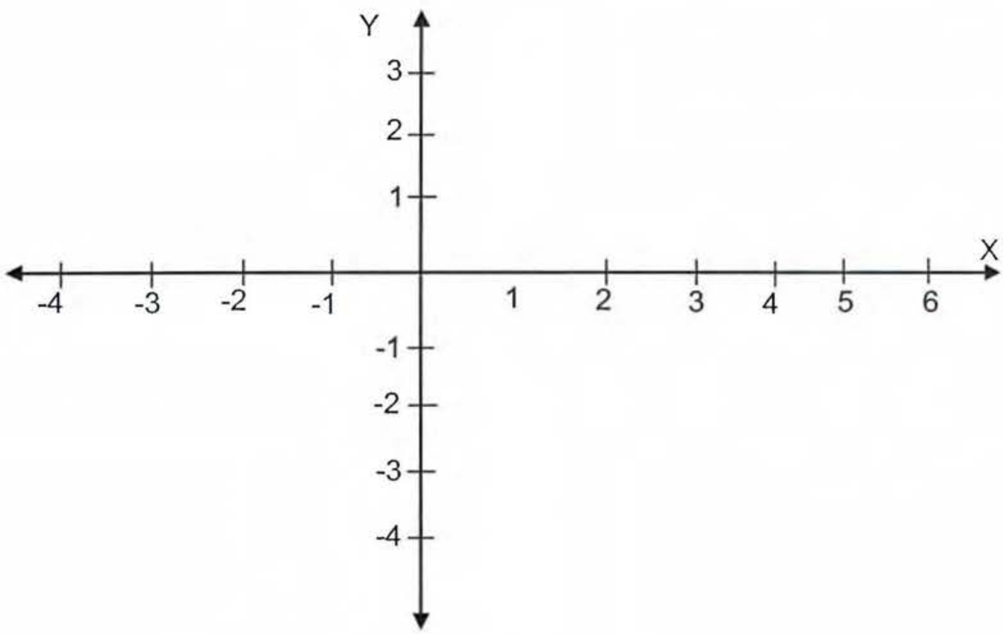
$\overrightarrow{MN} = N - M$

Al par ordenado que se obtiene de la resta del punto final menos el puntos inicial de un vector se le llama coordenadas del vector, es decir en el **Ejemplo** anterior (-2,5, 2) son las coordenadas de $\overrightarrow{MN}$

Además, $\overrightarrow{MN}$ tiene una longitud de

$\sqrt{(5-2{,}5)^2+(3-1)^2} = \sqrt{6{,}25-4} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ cm.

Ahora, en el siguiente plano dibuja el vector que está determinado por el bipunto (O,P), en donde O (0,0) y P (-2,5, 2).



Ejercicio 5.5

Determine las coordenadas y la longitud del vector $\overrightarrow{OP}$ del ejemplo anterior

Coordenadas de $\overrightarrow{OP}$ ______________________________

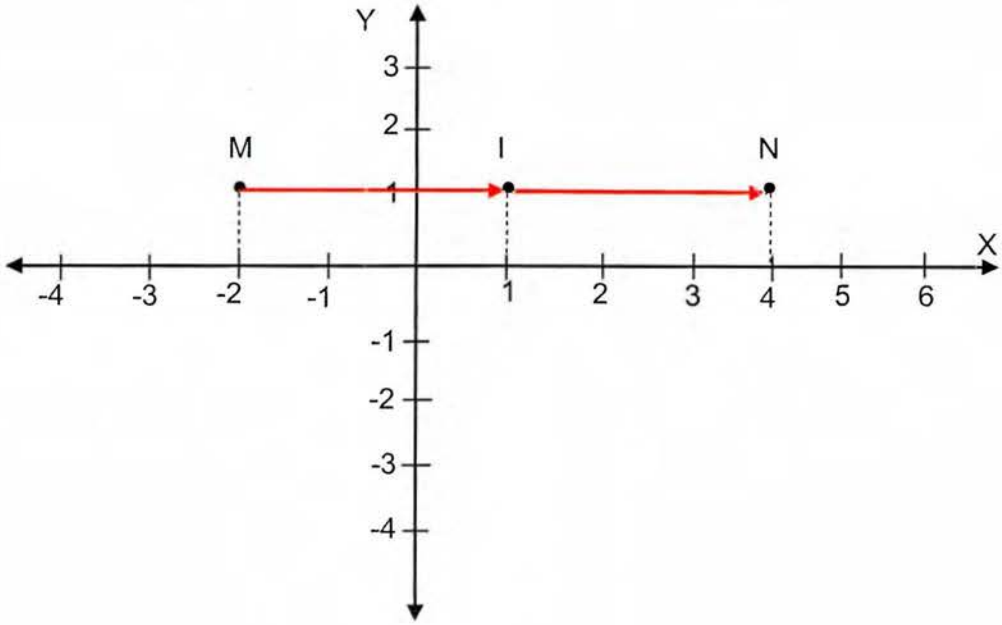
Longitud de $\overrightarrow{OP}$ ________________________________

De lo anterior observamos que el vector

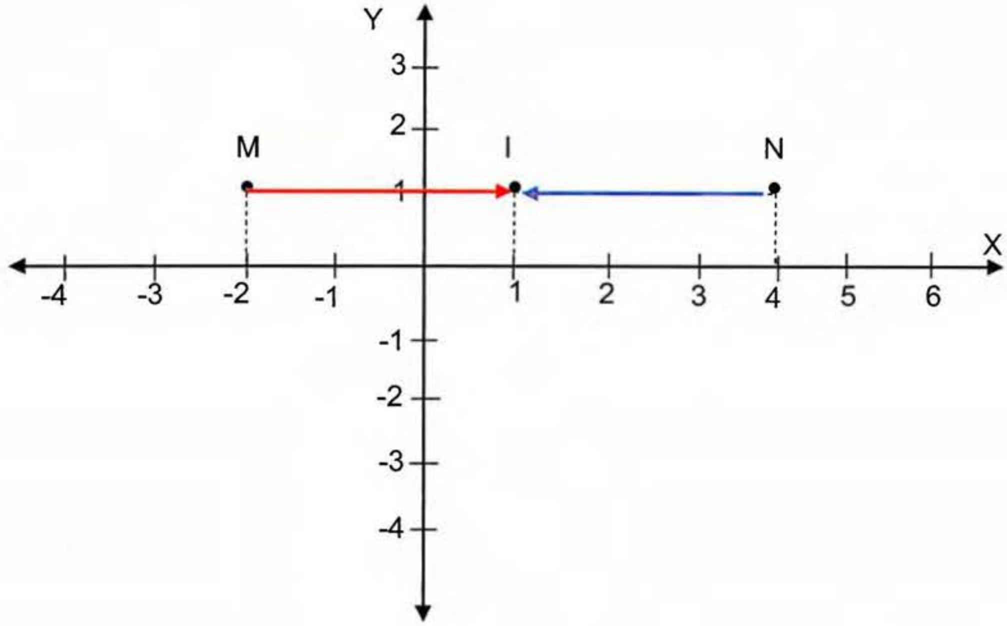
- $\overrightarrow{MN}$ tiene coordenadas $N - M = (2{,}5\ ,3) - (5{,}1) = (-2{,}5\ ,2)$ y tiene una longitud de 1,5 cm.
- $\overrightarrow{OP}$ tiene coordenadas $P - O = (-2{,}5,\ 2) - (0{,}0) = (-2{,}5\ ,2)$ y tiene una longitud de 1,5 cm.

Observemos que los bipuntos (M,N) y (O,P) son equivalentes, por lo que el vector que los representan es el mismo, es decir, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OP}$

Anteriormente vimos un ejemplo en donde hablamos de desplazamiento opuestos, ahora, a estos desplazamientos los llamamos vectores y entonces vamos a hablar de vectores opuestos, recordemos el ejemplo:



Teníamos que el bipunto (M,I) es equivalente con el bipunto (I,N), entonces el vector $\overrightarrow{MI}$ es igual al vector $\overrightarrow{IN}$, pero los bipuntos (M,I) y (N,I) determinaban desplazamientos opuestos, por lo que ahora vamos a decir que los vectores $\overrightarrow{MI}$ y $\overrightarrow{NI}$ son **vectores opuestos.** Observamos la siguiente figura

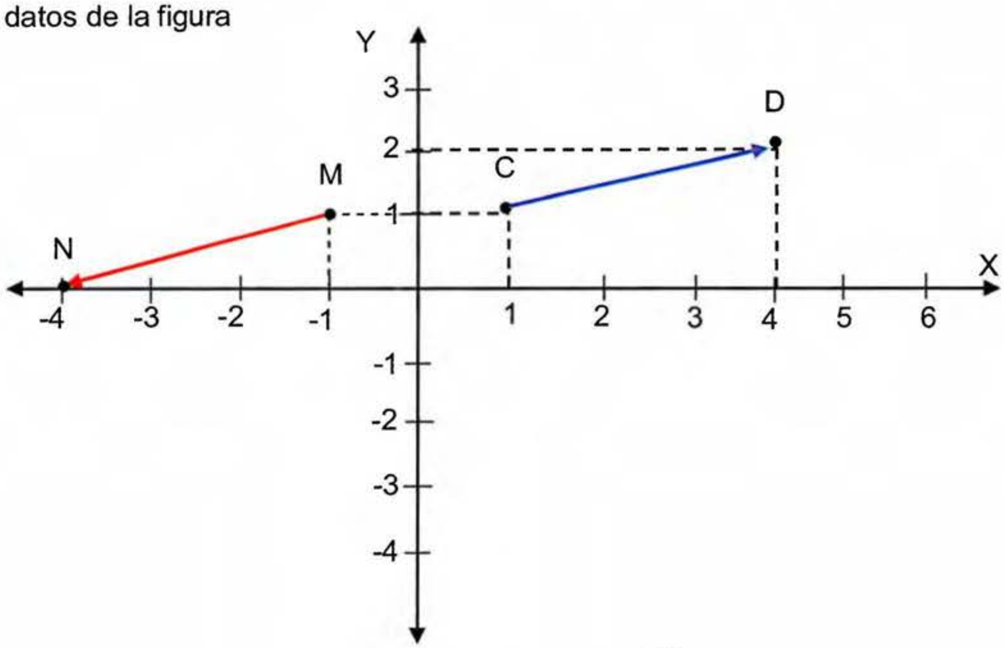


Se puede observar que las coordenadas del vector $\overrightarrow{MI}$ son (3,0), y las coordenadas del vector $\overrightarrow{NI}$ son (-3,0). En conclusión se puede decir que:

Dos vectores son opuestos si las entradas de sus coordenadas son números opuestos, es decir si el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene coordenadas (x,y), y el vector $\overrightarrow{CD}$ tiene coordenadas (-x,-y) entonces los vectores son opuestos

Ejemplo

Determine si los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{MN}$ son vectores opuestos de acuerdo con los datos de la figura



Tenemos lo siguiente: las coordenadas de $\overrightarrow{CD}$ son (3,1) y las coordenadas de $\overrightarrow{MN}$ son (-3,-1), entonces como 3 es el opuesto de -3 y 1 es el opuesto de -1 y viceversa entonces podemos afirmar que $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{MN}$ son vectores opuestos. Es importante destacar que el vector $\overrightarrow{AB}$ es opuesto al vector $\overrightarrow{BA}$ siempre.

Ejercicio 5.6

A continuación se le presentan las coordenadas de un par de vectores, determine si dichas coordenadas determinan vectores opuestos.

a) (1,1) y (-1,-1)

b) (0,0) y (0,0)

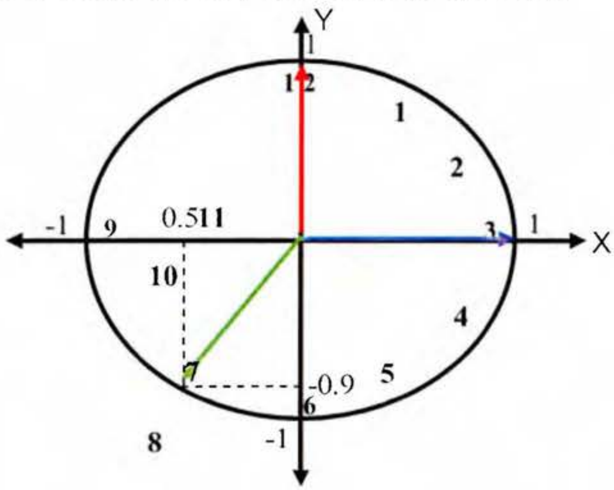
c) (2,-3) y (-2,3)

d) (5,3) y (-5,3)

e) (7,-4) y (7,4)

f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$ y $\left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

Las agujas de un reloj se pueden ver como vectores en donde su punto inicial está en el origen y el punto extremo está en la circunferencia del reloj. Supongamos que el círculo del reloj tiene un radio de 1 cm.



Cuando el reloj da las 12 medio día, la aguja determina el vector de coordenadas (0,1).

Cuando son las 3 de las tarde, la aguja determina el vector de coordenadas (1,0).

Cuando son las 7 de la noche, la aguja determina el vector de coordenada (0,5 , -0,9).

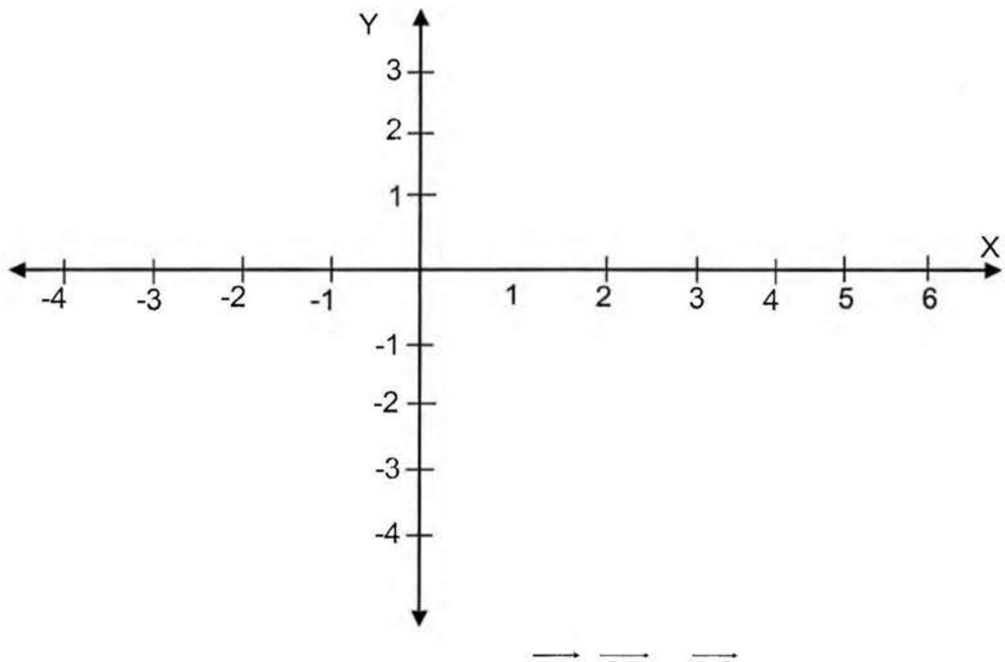
Cuando son las 6 de la tarde, la aguja determina el vector de coordenada (0, -1).

Cuando son las 9 de la noche, la aguja determina el vector de coordenada (-1, 0).

Hora	Coordenadas del vector	Longitud
12	(0,1)	1
3	(1,0)	1
6	(0,-1)	1
7	(0.5, -0.9)	1
9	(-1,0)	1

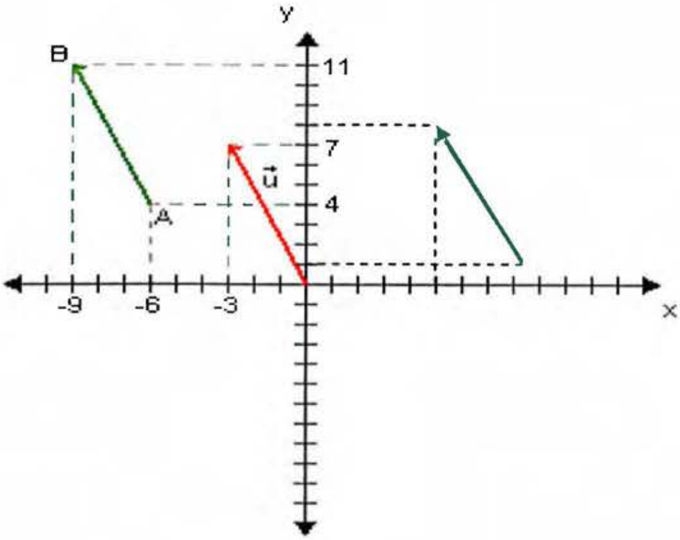
Ejercicio 5.7

Dibuje el vector determinado por el bipunto (R,S), en donde R(3, 0), S (0.5, 2). Determine las coordenadas de dicho vector y su longitud.

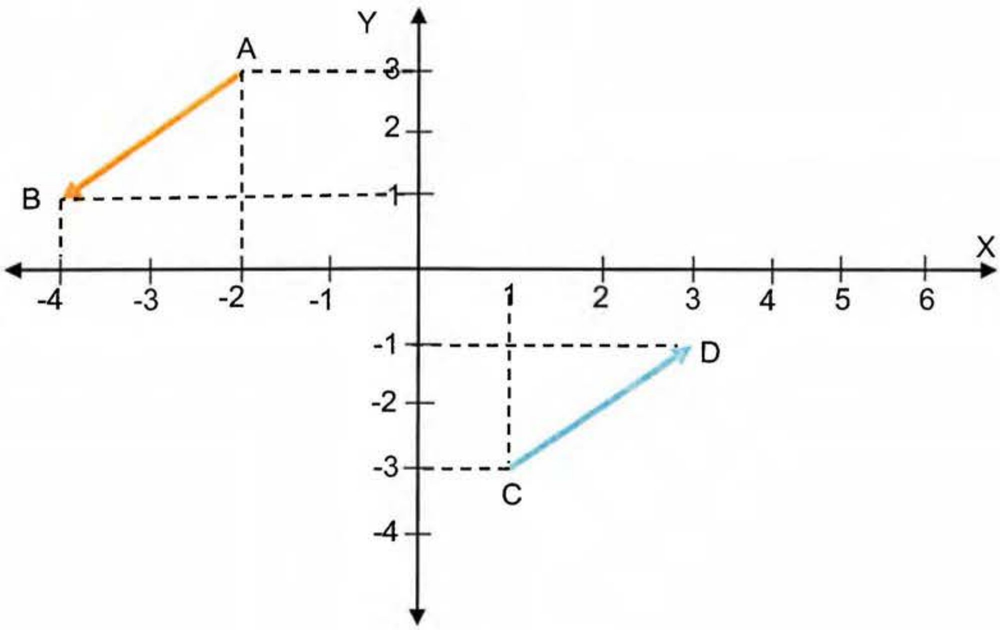


¿Qué tienen en común los vectores $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{RS}$ anteriores?

Entonces, podemos decir que cada vector tiene un representante que tiene su punto inicial en el origen. Veamos la siguiente figura en donde se pinta un vector ubicado en diferentes partes del plano.



En los tres casos se realiza el mismo desplazamiento con la misma dirección, sólo cambia su punto inicial. Ahora, observemos la siguiente figura



Determine la longitud y las coordenadas que representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$

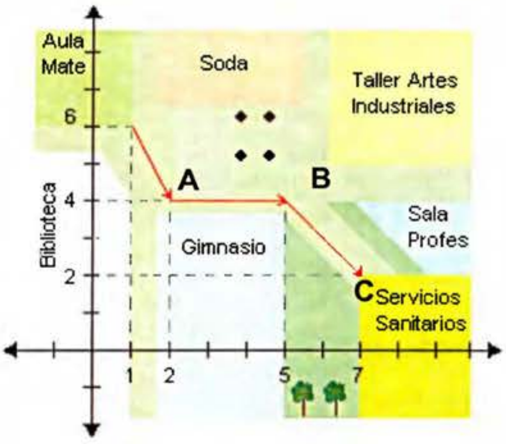
Longitud de $\overrightarrow{AB}$	Longitud de $\overrightarrow{CD}$
Coordenadas de $\overrightarrow{AB}$	Coordenadas de $\overrightarrow{CD}$

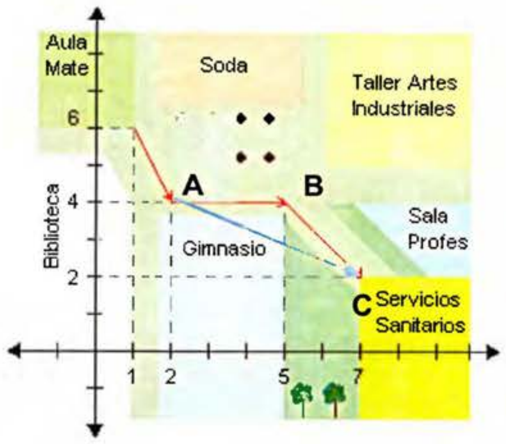
¿Se puede decir que los dos vectores representan el mismo desplazamiento? ____

Por tanto, dos vectores representan el mismo desplazamiento si los bipuntos que los determinan son equivalentes, es decir, si las coordenadas de los vectores son iguales, también se dice que dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y la misma dirección. En la figura anterior estos vectores no representan el mismo desplazamiento pues, aunque tienen la misma longitud, sus direcciones son contrarias. Así mismo, sus coordenadas en el eje X son números opuestos, al igual que las coordenadas en el eje Y, es decir, 3 es opuesto de -3 y 2 es opuesto de -2.

4.1.6 Suma de vectores

Jeremías, un alumno de la 7-7, se encontraba en el Gimnasio viendo un partido de Fútbol Sala, pero los baños estaban ocupados. Él decide ir a los baños cerca de la Sala de Profesores. (Ver siguientes figuras)





Él recorre el camino marcado con rojo. Entonces, se desplaza con el vector $\overrightarrow{AB}$ y luego con el vector $\overrightarrow{BC}$. Tenemos lo siguiente:

Vector	Coordenadas
$\overrightarrow{AB}$	$B - A = (3,0)$
$\overrightarrow{BC}$	$C - B = (2,-2)$
$\overrightarrow{AC}$	$C - A = (5,-2)$

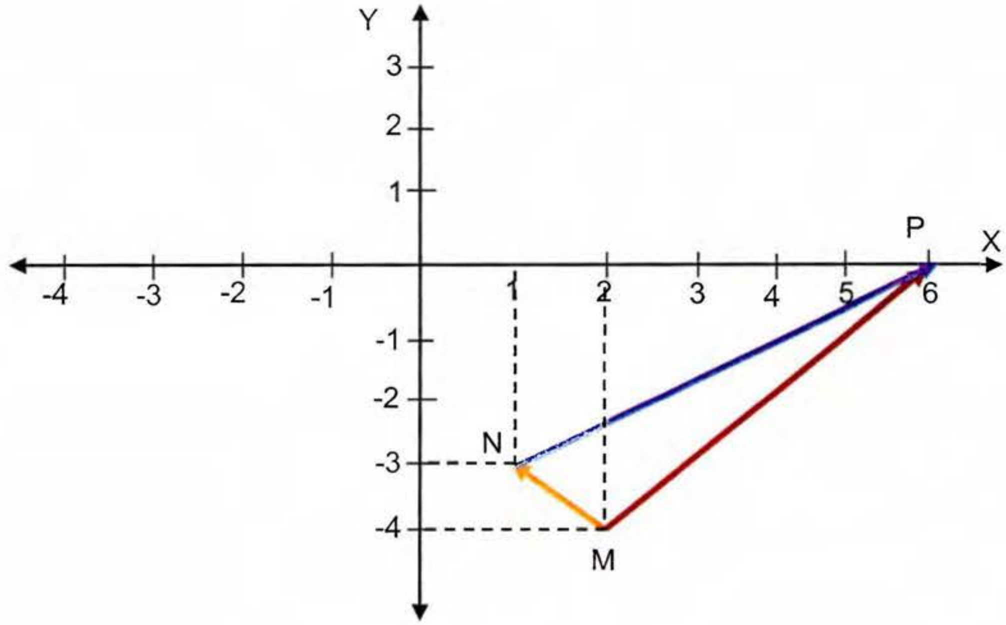
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = -A + C = C - A = \overrightarrow{AC}$$

Del ejemplo anterior, podemos observar que $\overrightarrow{AC}$ es el resultado de la suma de los desplazamientos realizados por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y que el vector $\overrightarrow{AC}$ tiene como coordenadas la suma de las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

Ejemplo

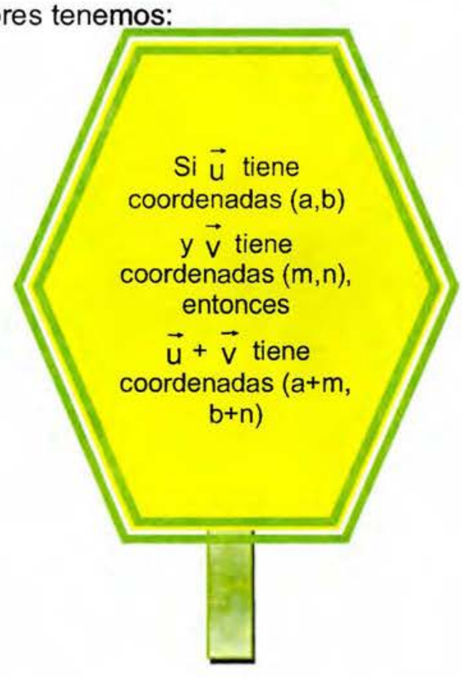
1. Si $\overrightarrow{MN} = N - M$, y $\overrightarrow{NP} = P - N$ entonces

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = N - M + P - N = -M + P = P - M = \overrightarrow{MP}$$

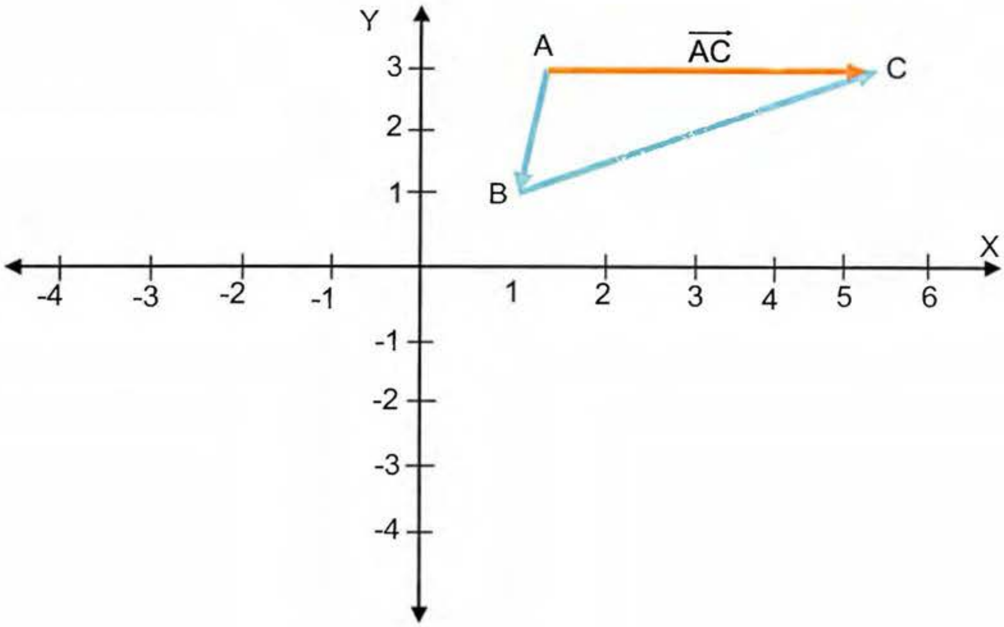


Si utilizamos las coordenadas de los vectores tenemos:

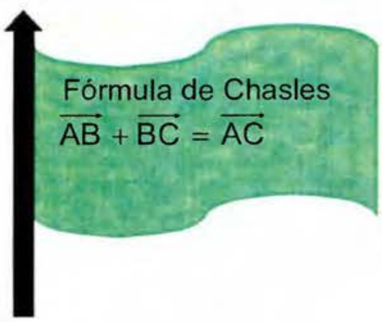
Vector	Coordenadas
$\overrightarrow{MN} = N - M$	$(1,-3) - (2,-4) = (-1,1)$
$\overrightarrow{NP} = P - N$	$(6,0) - (1,-3) = (5,3)$
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = P - M = \overrightarrow{MP}$	$(-1,1) + (5,3) = (4,4)$



2. Consideremos la siguiente figura

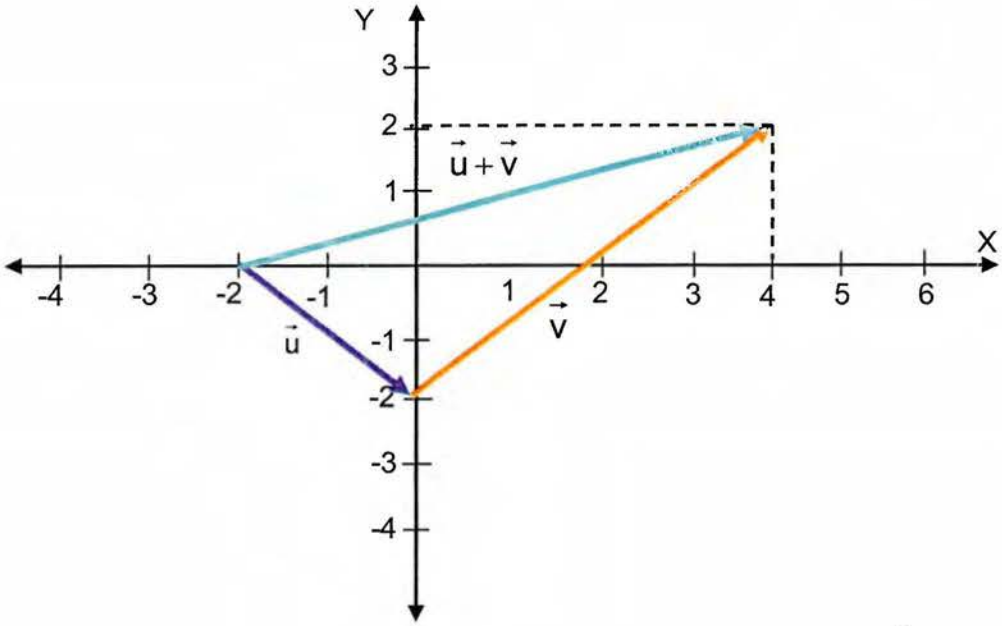


Si sumamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, el resultado es el vector $\overrightarrow{AC}$. Lo anterior se conoce como la Fórmula de Chasles.



Michel Chasles (1793-1880) Matemático francés. Realizó importantes estudios relativos a geometría pura. Profesor de la Escuela Politécnica y de la Facultad de Ciencias de París. [34]

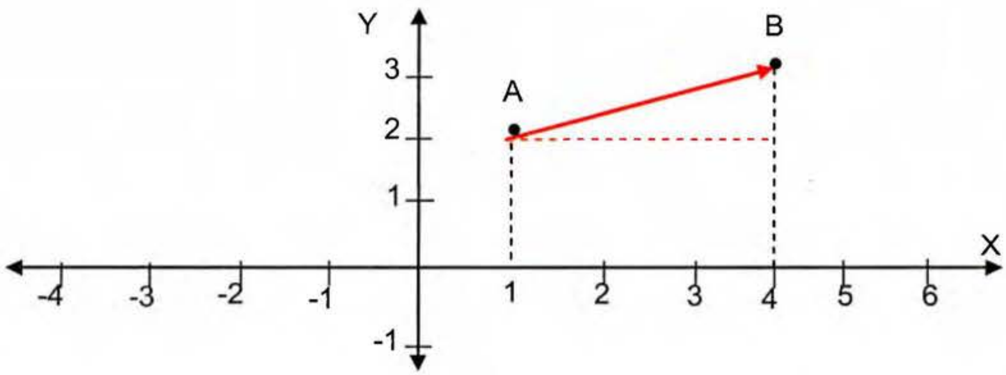
Observemos que la fórmula de Chasles sirve para vectores en donde el punto final de uno coincide con el punto inicial del otro. Tal y como lo muestra la siguiente figura, el punto final del vector $\vec{u}$ es el punto inicial del vector $\vec{v}$.



Entonces, el vector suma va desde el punto inicial del vector $\vec{u}$ hasta el punto final del vector $\vec{v}$.

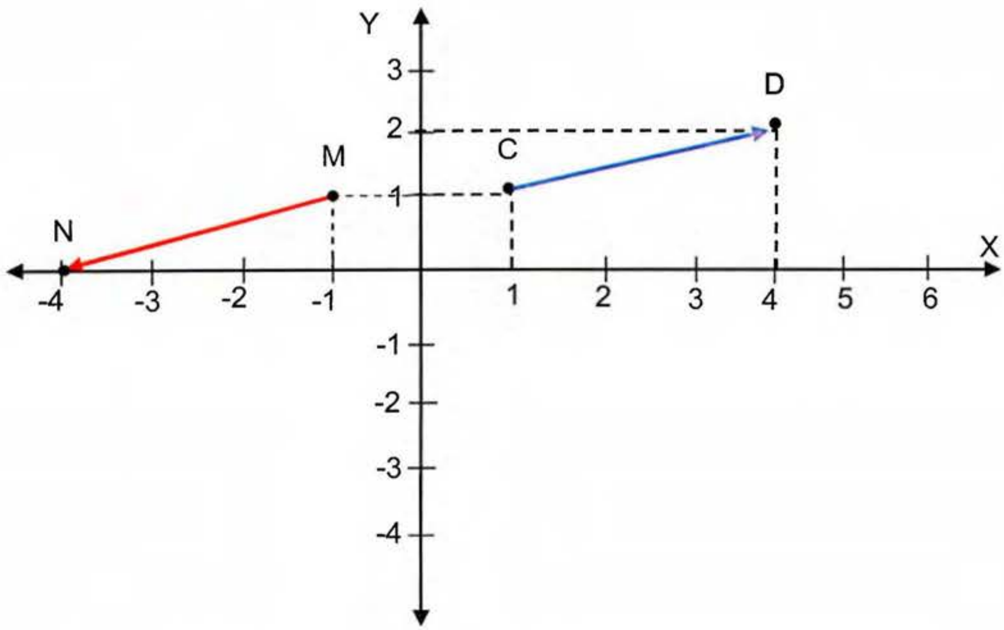
Ejemplo

Anteriormente estudiamos los vectores opuestos, ahora vamos a sumar dichos vectores para establecer una propiedad muy importante. Primero vamos a trabajar con el vector $\overrightarrow{AB}$ y su opuesto, es decir, $\overrightarrow{BA}$.



Utilizando La fórmula de Chasles tenemos lo siguiente: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$ y el vector $\overrightarrow{AA}$ está determinado por el bipunto (A,A), es decir, que se realiza un desplazamiento del punto A al mismo punto A, por lo que el desplazamiento es 0 o nulo. Al vector $\overrightarrow{AA}$ se le llama vector nulo y se puede escribir también $\vec{0}$, además, observemos lo siguiente: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=B-A+A-B=-A+A+B-B=0$

Veamos de nuevo el ejemplo que estudiamos anteriormente en donde teníamos los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{MN}$ con coordenadas (3,1) y (-3,-1) respectivamente; estos vectores son opuestos, vamos a sumar los vectores.

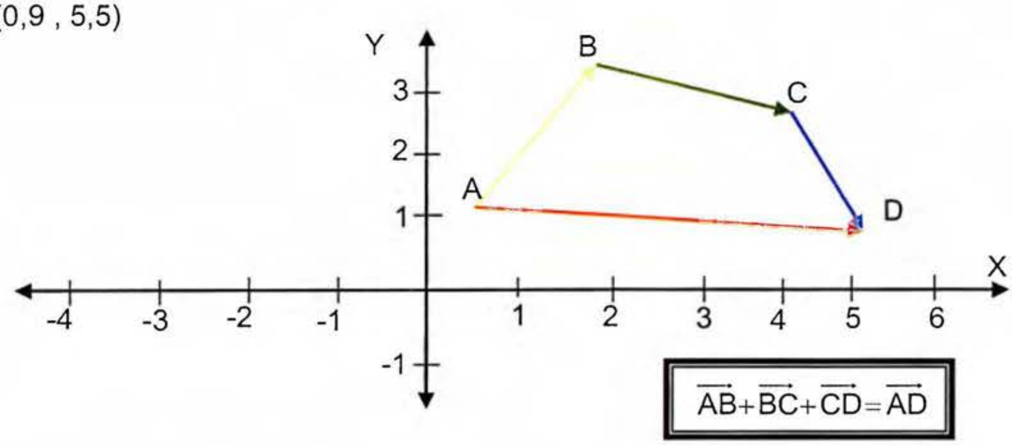


$$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}=D-C+N-M=(3,1)+(-3,-1)=(3+-3,1+-1)=(0,0)=\vec{0}$$

En resumen

Si sumamos dos vectores opuestos el resultado es el vector nulo, es decir $\vec{0}$

El método de la fórmula de Chasles se puede ampliar para sumar tres o más vectores. Veamos el siguiente ejemplo, en donde A (1,5 , 1,1), B (2, 3,5), C (4, 3,8), D(0,9 , 5,5)

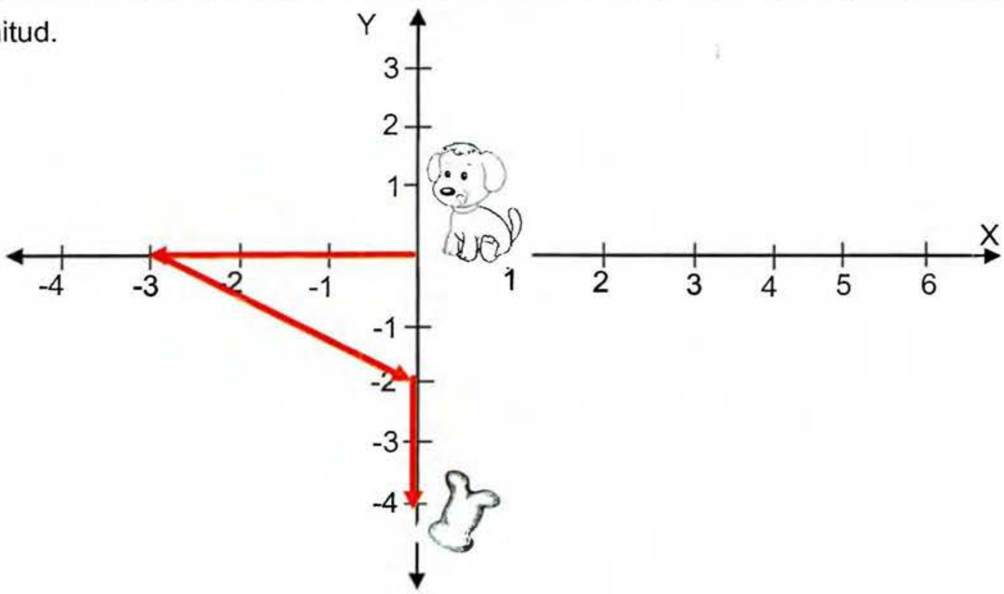


Determine las coordenadas de los siguientes vectores

$\overrightarrow{AB}$ ______ $\overrightarrow{BC}$ ______ $\overrightarrow{CD}$ ______ $\overrightarrow{AD}$ ______

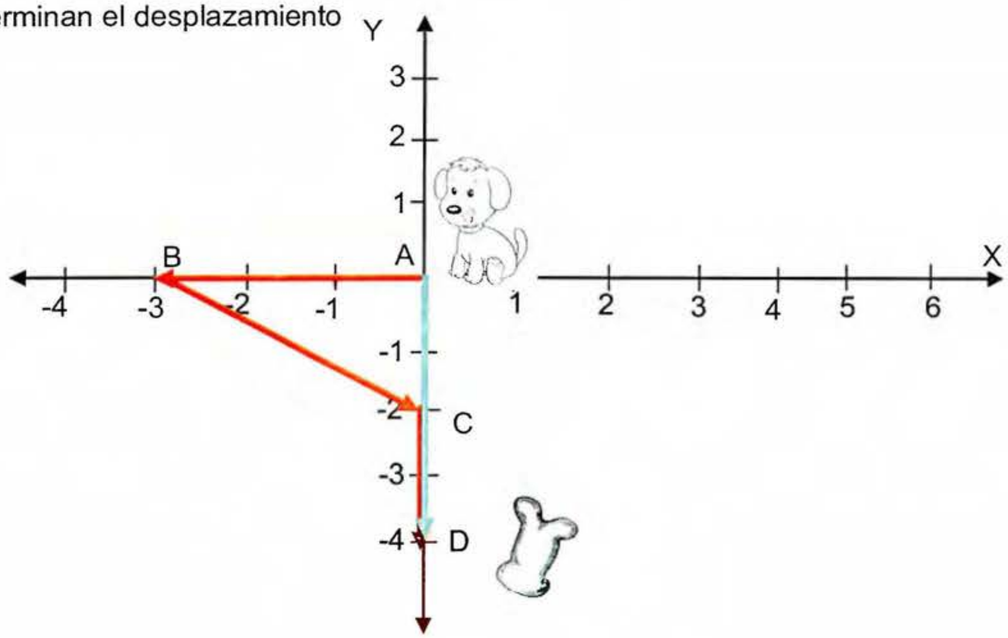
Ejemplo

Un perro que busca un hueso, realiza el recorrido marcado en la figura. Determine el vector que representa el desplazamiento total del perro y determine su magnitud.



Solución:

Primero trabajemos con el gráfico y determinemos los vectores que determinan el desplazamiento



Tenemos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$. El desplazamiento total está dado por la suma de los vectores, es decir:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, utilizando la fórmula de Chasles tenemos

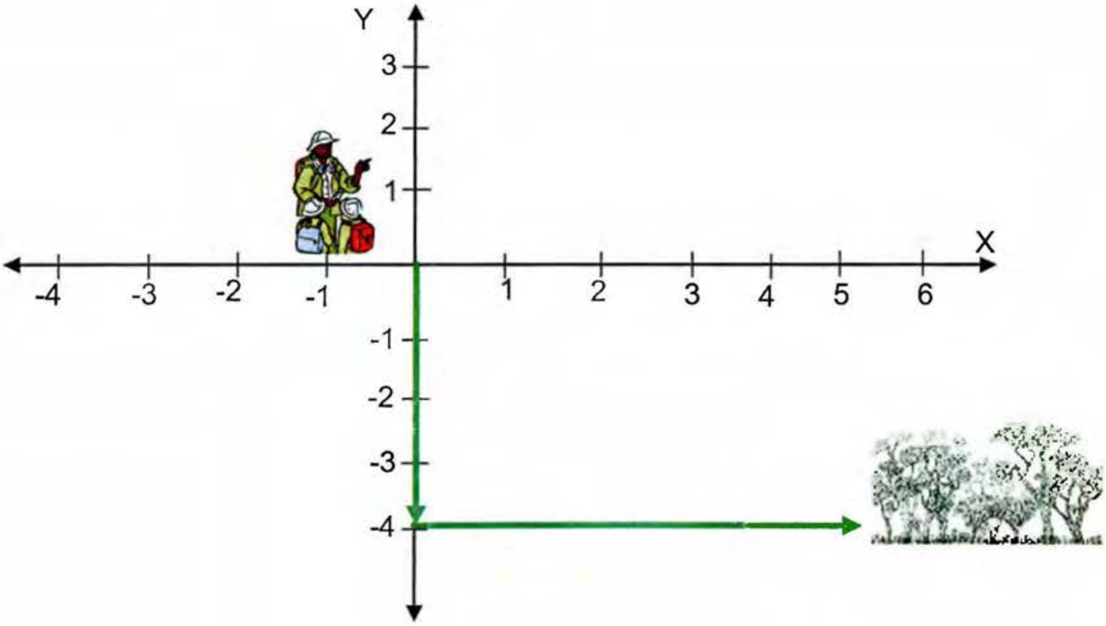
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

Entonces el vector que determina el desplazamiento total es $\overrightarrow{AD}$. Ahora para determinar su magnitud vamos a utilizar el bipunto que lo determina, es decir (A,D), utilizando la fórmula de la distancia tenemos:

$d(A,D)=\sqrt{(0-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{16}=4$

Ejercicio 6.1

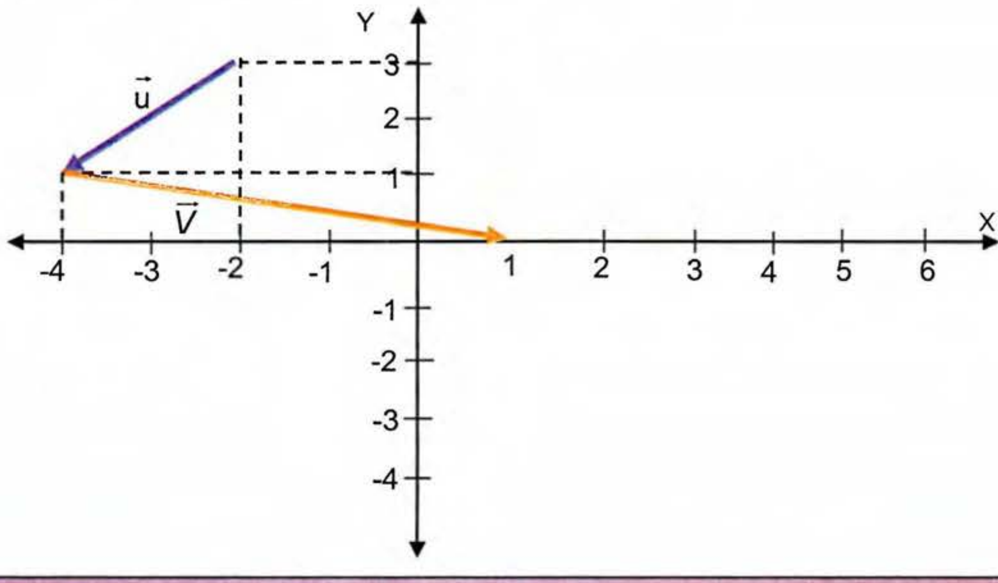
Un hombre perdido en un bosque lleva a cabo tres desplazamientos consecutivos de forma que al final de la caminata está de regreso *en el punto* de partida. Consideremos el punto de partida el origen, como se muestra en la figura, el primer desplazamiento es de 4 m al oeste, el segundo, 5 m al norte. Determine la magnitud del tercer desplazamiento y grafíquelo en la figura.



Ejercicio 6.2

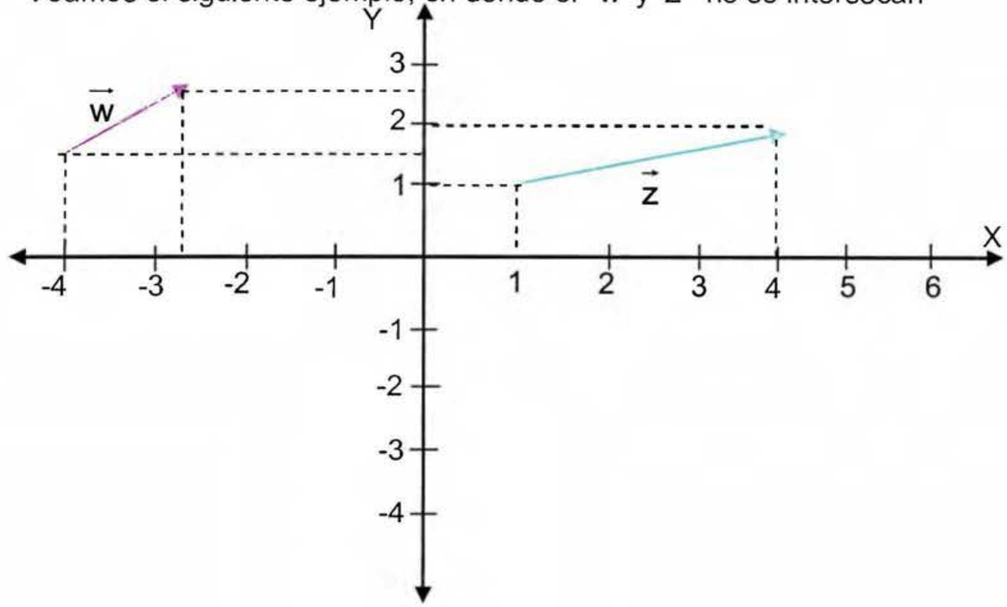
A. Dibuje el vector $\vec{u} + \vec{v}$

B. Determine las coordenadas del vector $\vec{u} + \vec{v}$



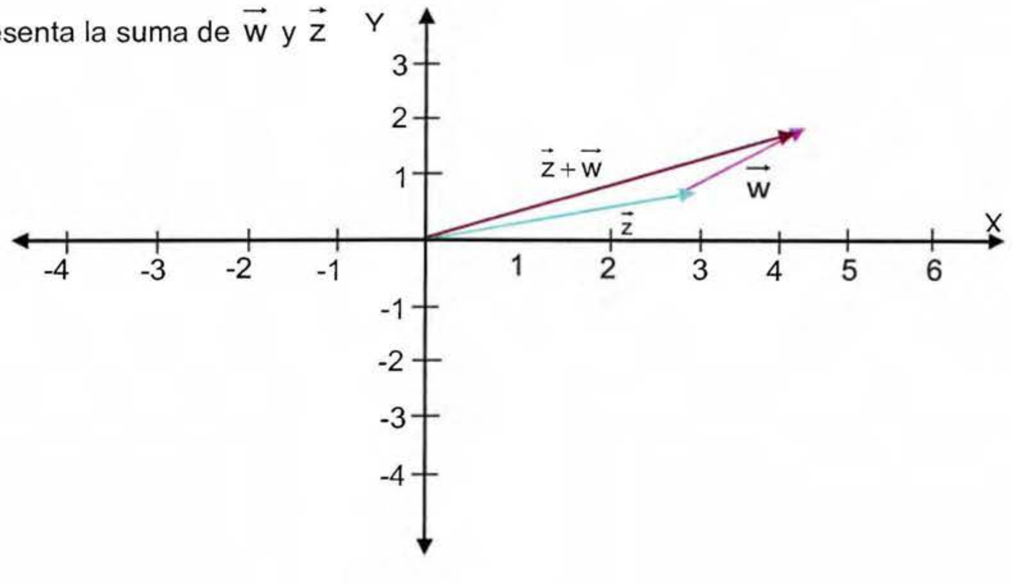
¿Qué haríamos si quisiéramos sumar dos vectores en que el punto final no coincide con el punto inicial del otro?

Veamos el siguiente ejemplo, en donde el $\vec{w}$ y $\vec{z}$ no se intersecan



En realidad sumar dos desplazamientos que el punto final de uno no es el punto inicial del otro, no tiene mucho sentido, pero recordemos que los vector puede ubicarse en diferentes lugares del plano y aún así sigue siendo el mismo vector, y que el punto inicial del vector se puede colocar en el origen del plano cartesiano.

Siendo esto así, podemos mover los vectores hasta que "queden pegados", como se muestra en la siguiente figura, y ahora si podemos determinar el vector que representa la suma de $\vec{w}$ y $\vec{z}$



Ejercicio 6.3

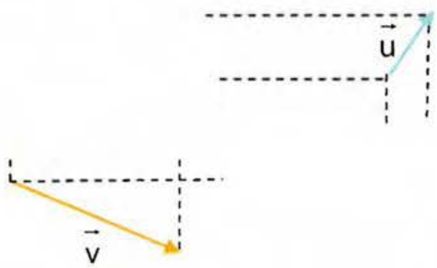
A. Utilizando el ejemplo anterior determine las coordenadas de los siguientes vectores

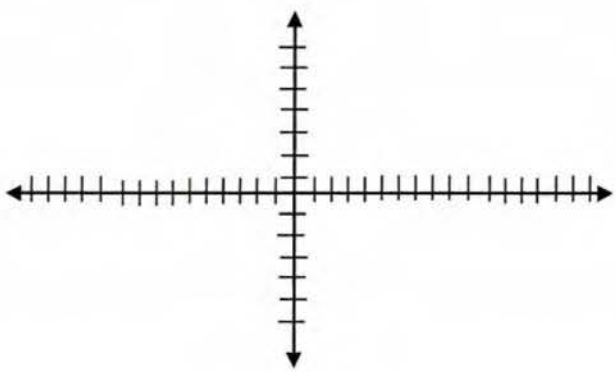
$\vec{z}$ ____________

$\vec{w}$ ____________

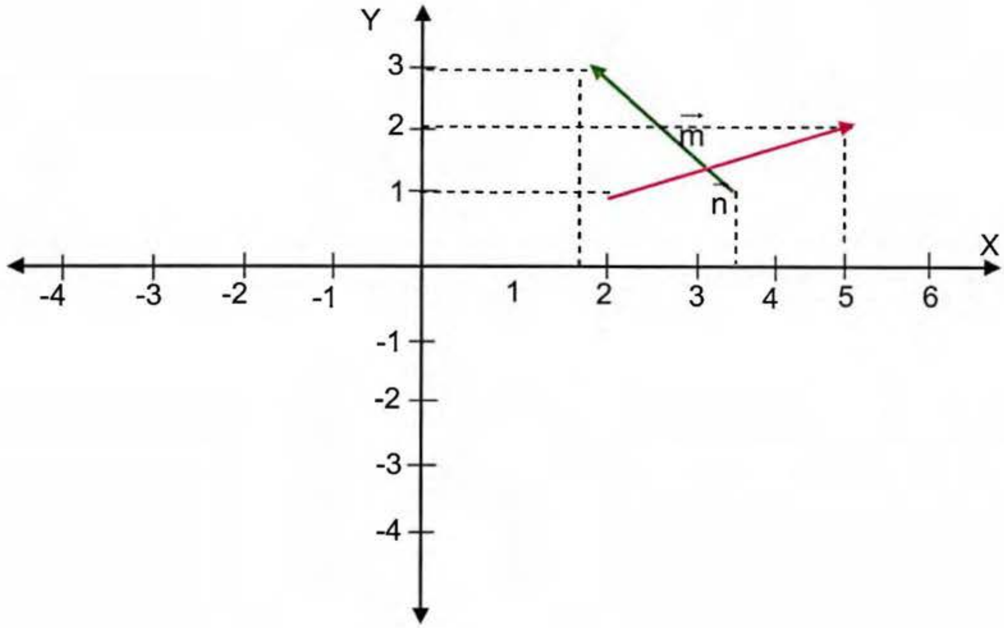
$\vec{z}+\vec{w}$ ____________

B. Represente gráficamente la suma de los siguientes vectores y determine sus coordenadas.

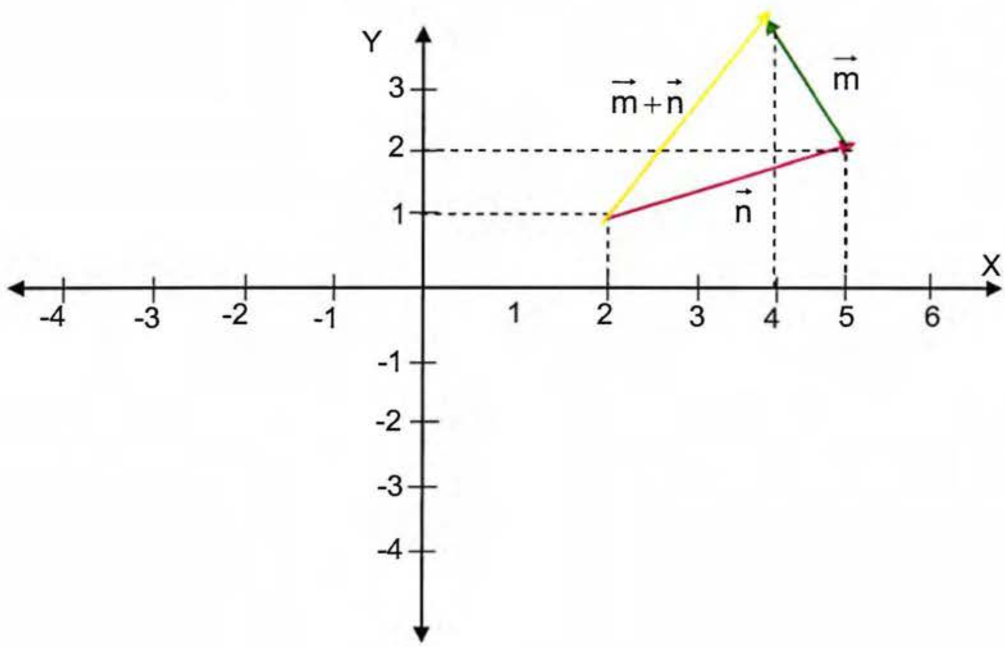




En el siguiente ejemplo, los puntos finales de los vectores coinciden, ahora, ¿Cómo podemos sumar estos vectores?



En este caso, podemos hacer lo mismo que en el caso en donde los vectores no estaban "pegados". El vector $\vec{m}$ lo trasladamos para colocarlo en donde terminó el vector $\vec{n}$, y de esta forma podemos utilizar la fórmula de Chasles.

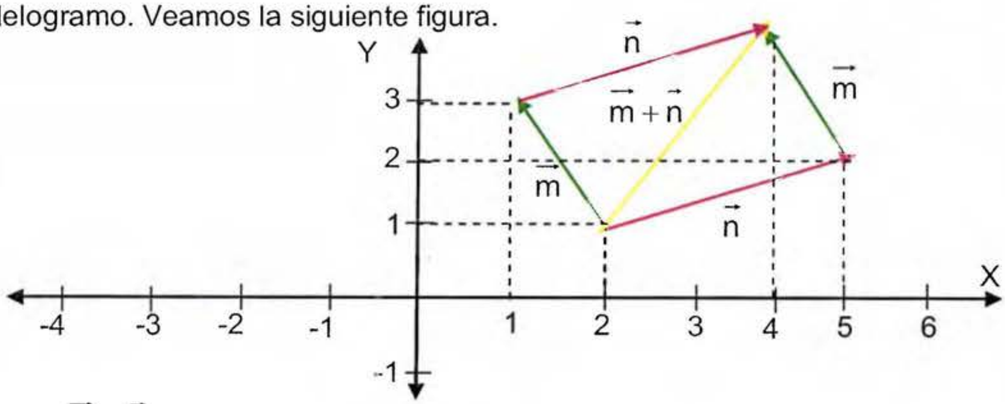


Encuentre las coordenadas de $\vec{m}$ y $\vec{n}$ y las coordenadas de la suma de ambos.

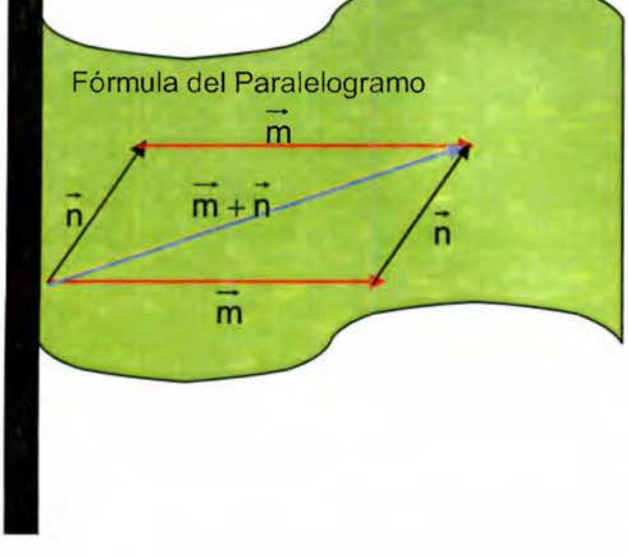
$\vec{m}$ __________

$\vec{n}$ __________ $\vec{m}+\vec{n}$ __________

Algo curioso que se puede observar cuando sumamos vectores en donde los puntos finales coinciden, es que podemos formar un parelologramo con los dos vectores, $\vec{m}$ y $\vec{n}$; y la suma de ambos va a estar representada por la diagonal del paralelogramo. Veamos la siguiente figura.



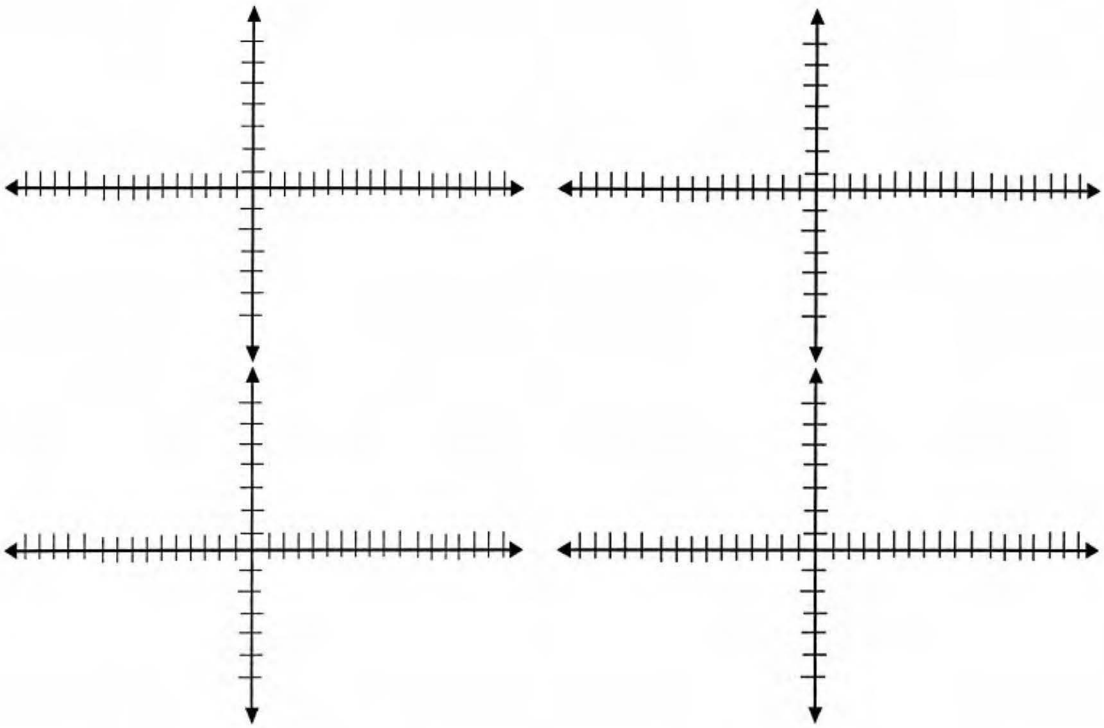
El $\vec{m}+\vec{n}$ representa la diagonal del paralelogramo.



Ejercicio 6.4

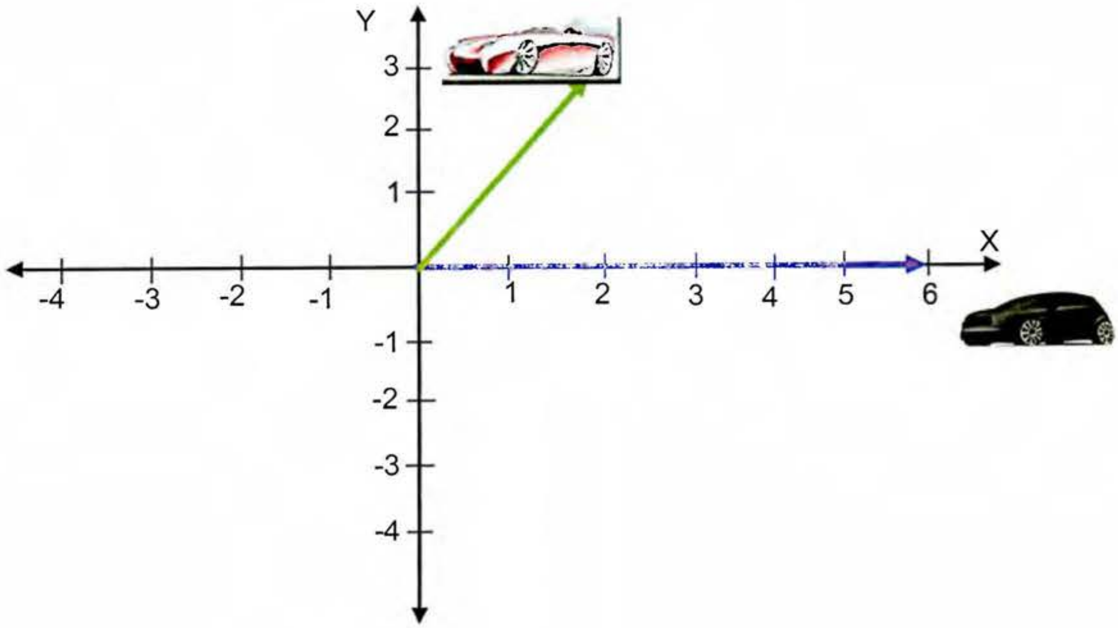
Considere $\vec{m}$ con coordenadas $(-2,-3)$, $\vec{n}$ con coordenadas $(1,-5)$ y $\vec{p}$ con coordenadas $(3,4)$. Determine y grafique las siguientes suma de vectores.

$\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{m}+\vec{p}$, $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$, $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$



Ejercicio 6.5

Un automóvil recorre el camino marcado con azul en la figura y otro automóvil recorre el camino marcado con verde. Determine el vector que resulta de la suma de los dos recorridos y establezca la magnitud de dicho desplazamiento.



En el tema de suma de vectores no es necesario siempre obtener las coordenadas del vector suma, sino que depende de la naturaleza del problema podemos trabajar con el bipunto asociado al vector. Estudiemos los siguientes

Ejemplos

1. Consideremos cuatro puntos en el plano A, B, A´, B´; sea O el punto medio de (A,B) y O´ el punto medio de (A´,B´). Demuestre que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OO'}$

Solución:

Utilizando la fórmula de Chasles podemos decir lo siguiente

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'}$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB'}$

De aquí podemos decir $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB'}$ como O es el punto medio de (A,B) entonces $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{BO}$ son vectores opuestos por lo que la suma da el vector nulo, entonces tenemos $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$

Ahora, igualmente por la fórmula de Chasles tenemos

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A'}$

$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B'}$

De aquí que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B'}$ Como O´ es el punto medio de (A´,B´) entonces los vectores $\overrightarrow{O'A'}$ y $\overrightarrow{O'B'}$ son opuestos, por lo que la suma da el vector nulo, entonces tenemos

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OO'}$

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OO'}$

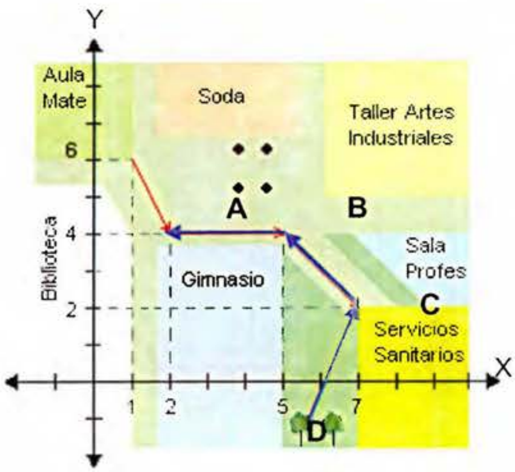
Ejercicio 6.6

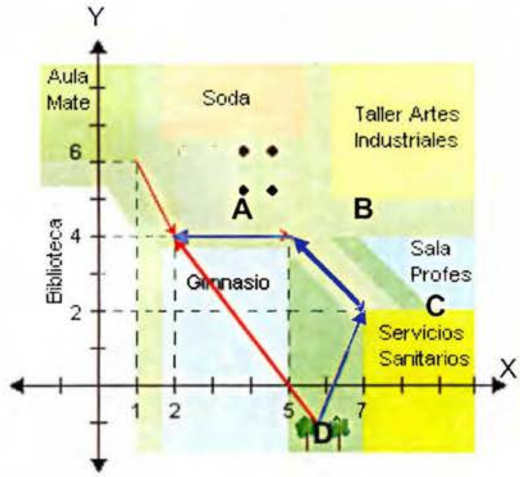
Consideremos los bipuntos (A,B) y (C,D) y sean O y O´ los puntos medios respectivamente. Demuestre que $2\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

1. Consideremos cuatro puntos en el plano, A, A´, B, B´,
2. Sea (A,B) un bipunto del plano e I su punto medio. Demuestre que para todo punto M que al segmento determinado por $\overline{AB}$ se cumple que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

4.1.7 <u>Resta de vectores</u>

Juanita y Andrea estaban sentados por los arbolitos cuando ven a Jeremías entrando a los servicios sanitarios, entonces deciden ir a conversar con él. Para ello recorren el vector $\vec{w}$. Cuando se encuentran con Jeremías, se enteran de que hay un partido de fútbol sala en el gimnasio del colegio, entonces deciden ir. Recorren el mismo camino que realizó Jeremías, solo que en dirección contraria. En la siguiente figura se muestra el recorrido de Juanita y Andrea con los vectores azules, y el recorrido total con el vector rojo.





Escribiendo los desplazamiento de Juanita y Andrea con vectores tenemos:

$$\overrightarrow{DC} + -\overrightarrow{BC} + -\overrightarrow{AB}$$

Como ellas recorren tres desplazamientos, estudiemos primero dos, es decir, de los árboles a los baños, y luego de los baños a la primera esquina del gimnasio. Esto es

$$\overrightarrow{DC} + -\overrightarrow{BC}$$

Pero, recordemos que

$$\overrightarrow{DC} + -\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$$

Entonces podemos decir que restar dos o más vectores es sumar el vector opuesto.

$\overrightarrow{DC} + -\overrightarrow{BC} + -\overrightarrow{AB} =$
$C - D + -(C - B) + -(B - A) =$
$C - D - C + B - B + A =$
$-D + A = A - D = \overrightarrow{DA}$

Ahora trabajemos con coordenadas

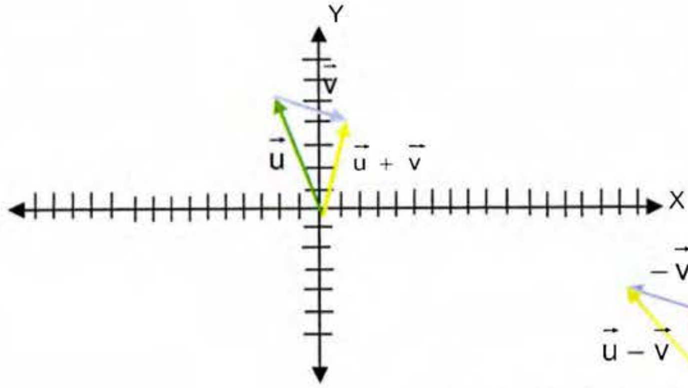
Vector	Coordenadas
$\overrightarrow{DC}$	(1,5 , 3)
$\overrightarrow{BC}$	(-2, 2)
$\overrightarrow{AB}$	(-3, 0)
$\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$	(1,5-(-2), 3-2)= (3,5 , 1)
$DC-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=$	(3,5 -(-3) ,1-0)= (6,5 , 1)

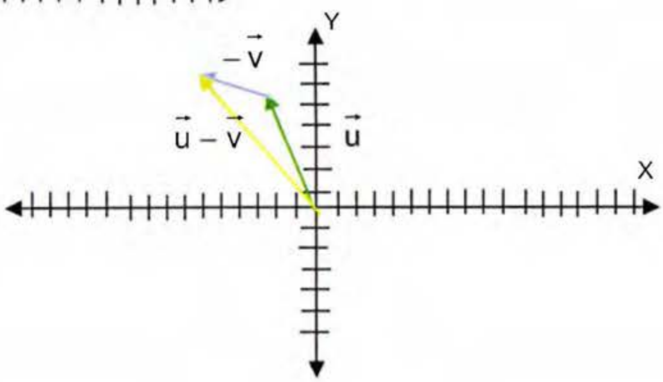
Si $\vec{u}$ tiene coordenadas (a,b) y $\vec{v}$ tiene coordenadas (m,n), entonces $\vec{u}$ - $\vec{v}$ tiene coordenadas (a-m, b-n)

Veamos otro ejemplo

Considere el vector $\vec{u}$ con coordenadas $(-2,5)$ y el vector $\vec{v}$ con coordenadas $(3,-1)$. Determine las coordenadas de $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$. Represente gráficamente en un plano cada uno de ello.

Vector	Coordenadas
$\vec{u}+\vec{v}$	(-2+3, 5+-1)=(1,4)
$\vec{u}-\vec{v}$	(-2-3, 5--1)=(-5,6)

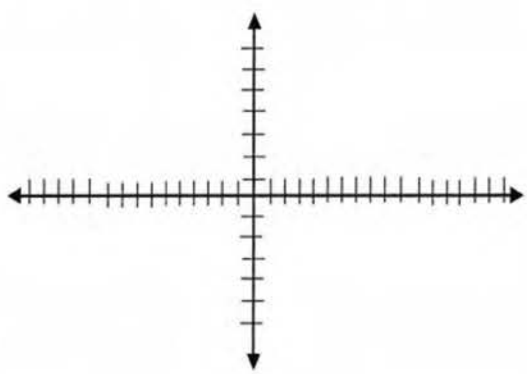


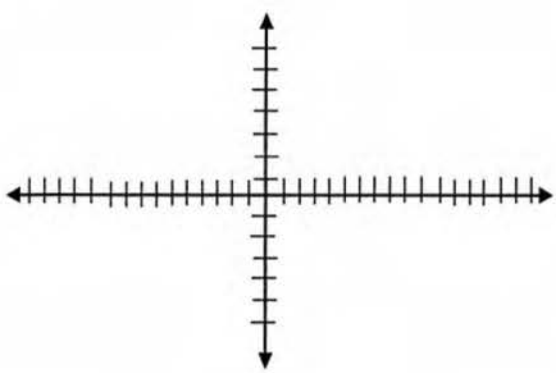


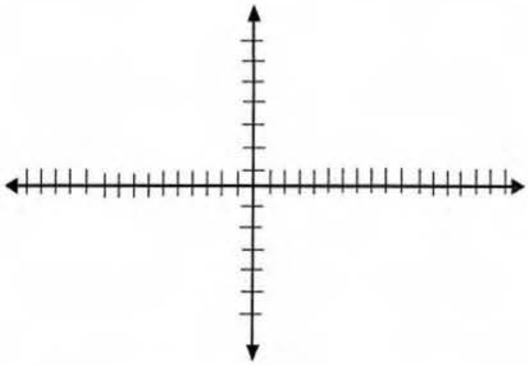
Ejercicio 7.1

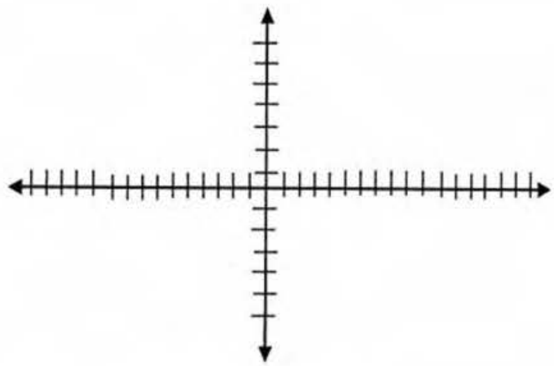
Considere el vector $\vec{m}$ con coordenadas $(-2,-3)$, $\vec{n}$ con coordenadas $(1,-5)$ y $\vec{p}$ con coordenadas $(3,4)$. Determines y grafique las siguientes restas de vectores.

$\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{m}-\vec{p}$, $\vec{m}-\vec{n}-\vec{p}$, $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$



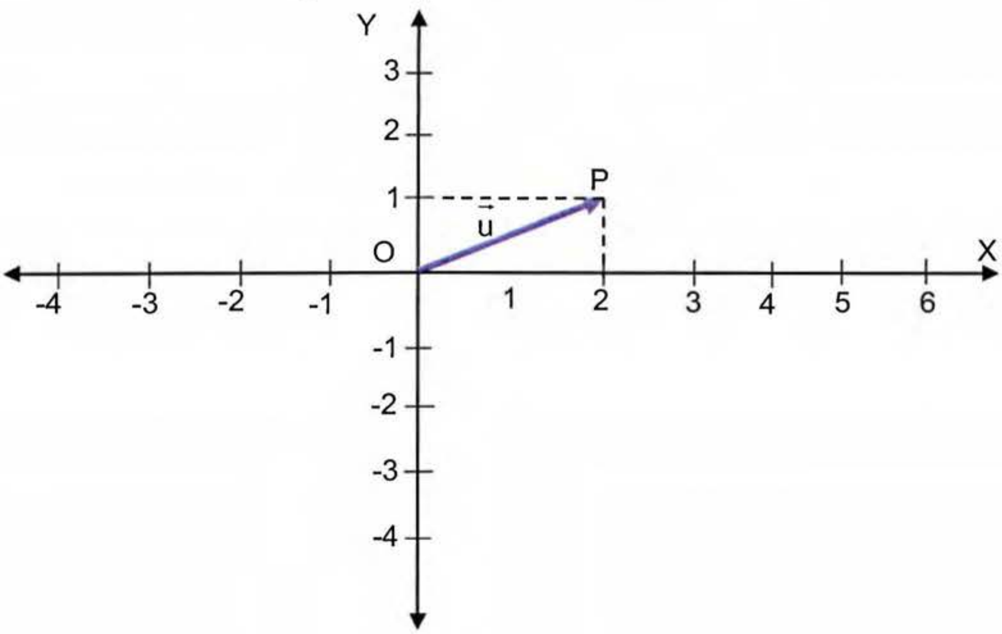






4.1.8 La multiplicación de un número real por un vector

Consideremos la siguiente figura

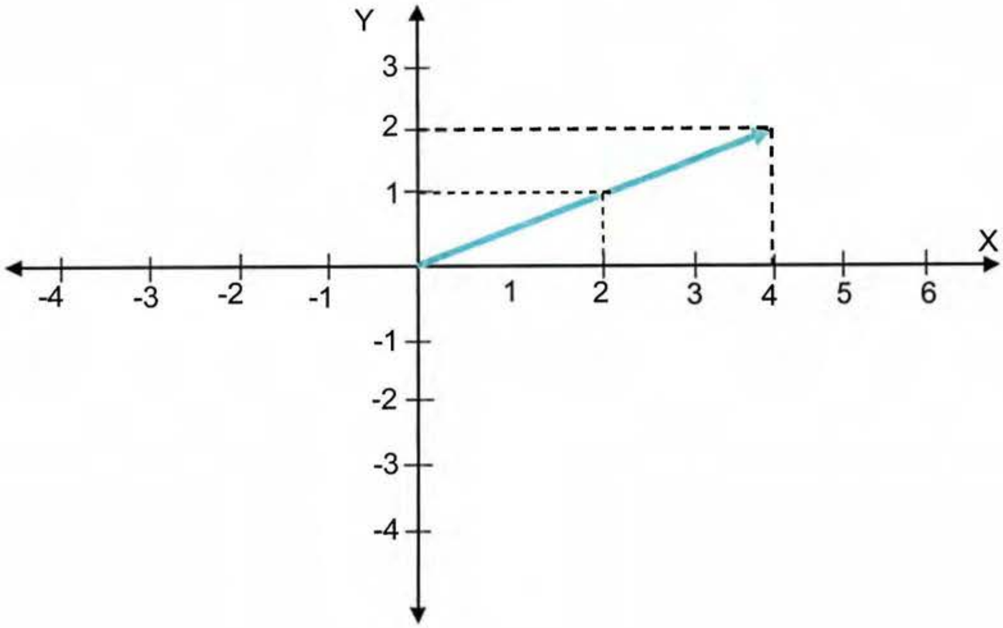


Observemos que el vector $\vec{u}$ tiene coordenadas (2,1). Ahora, obtengamos $\vec{u}+\vec{u} = (2,1) + (2,1) = (4,2)$

También lo podemos trabajar de la siguiente forma

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}=P-O+P-O=2P-2O=2(P-O)=2\overrightarrow{OP}$

Gráficamente, el vector $\vec{u}+\vec{u}$ se representa de la siguiente manera

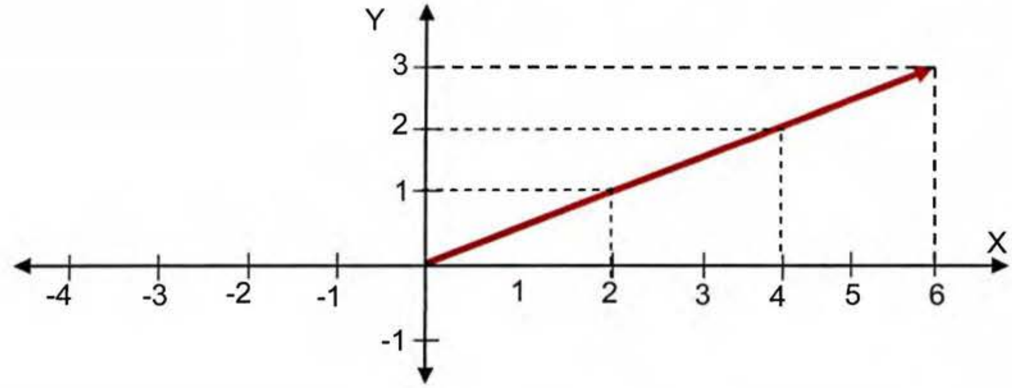


Ahora, obtengamos $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$

$\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = (2,1) + (2,1) + (2,1) = (6,3)$

También $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP} = P - O + P - O + P - O = 3P - 3O = 3(P - O) = 3\overrightarrow{OP}$

Gráficamente, el vector $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$ se representan como en la siguiente figura.



Entonces observamos que en este caso al sumar el vector por el mismo, se "estira" cada vez más el vector.

Ahora, comparemos las coordenadas de dichos vectores.

$\vec{u}$	$\vec{u}+\vec{u}$	$\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$
(2,1)	(4,2)	(6,3)

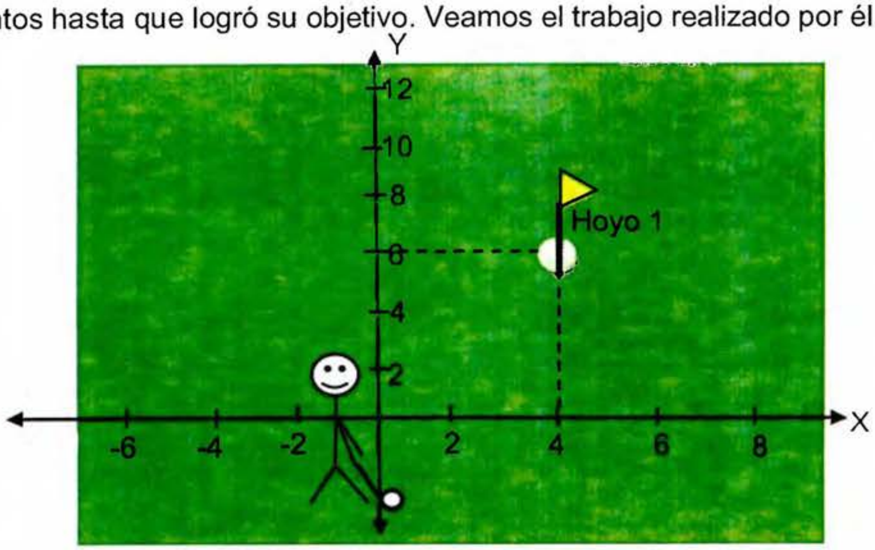
Si observamos con detenimiento, las coordenadas del vector $\vec{u}+\vec{u}$ salen de multiplicar las coordenadas del vector $\vec{u}$ por 2, es decir, $2 \bullet 2 = 4$ y $1 \bullet 2 = 2$, y las de $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$ salen de multiplicar por 3 las coordenadas: $2 \bullet 3 = 6$ y $1 \bullet 3 = 3$. Por otro lado, $\vec{u}+\vec{u} = 2\vec{u}$ y $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u} = 3\vec{u}$, en resumen tenemos

$\vec{u} = \overrightarrow{OP}$	$2\vec{u} = 2\overrightarrow{OP}$	$3\vec{u} = 3\overrightarrow{OP}$
$(P-O)=(2,1)$	$2(P-O)=(2 \bullet 2, 1 \bullet 2)=(4,2)$	$3(P-O)=(2 \bullet 3, 1 \bullet 3)=(6,3)$

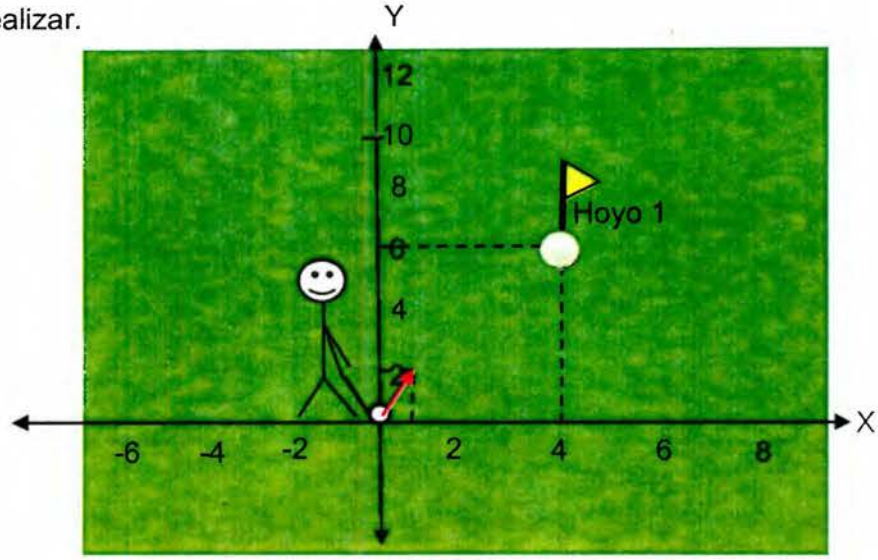
Se puede entonces intuir que para multiplicar un número real k por un vector, se multiplican las coordenadas de ese vector por ese mismo k.

Ejemplo

Arturo está aprendiendo a jugar golf. En su primera práctica el profesor le asigna la tarea de ingresar la bola en el primer hoyo (ver figura). El realizó varios intentos hasta que logró su objetivo. Veamos el trabajo realizado por él.

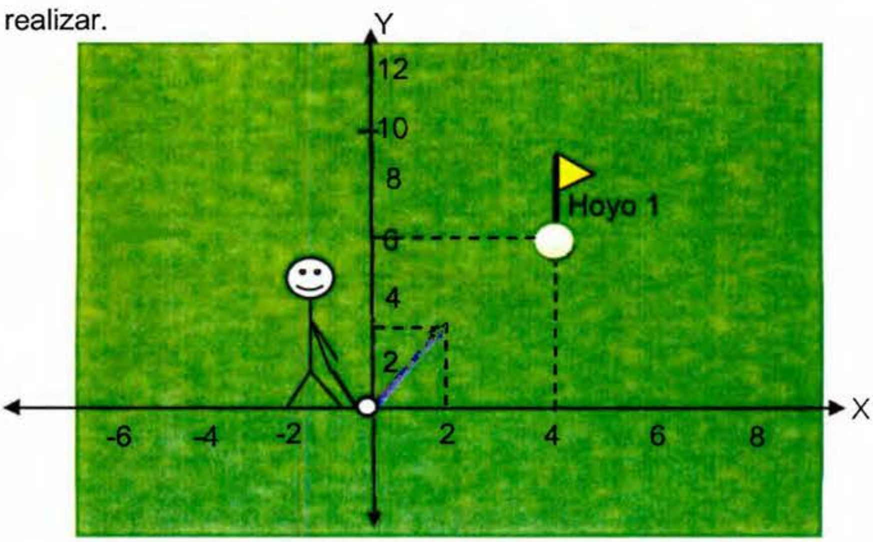


• En el primer intento, Arturo no logró llegar la bola al hoyo. Le dio con poca fuerza y la bola apenas llegó al punto $\left(\frac{4}{3},\frac{6}{3}\right)$, es decir a $\frac{1}{3}$ del desplazamiento que tenía que realizar.



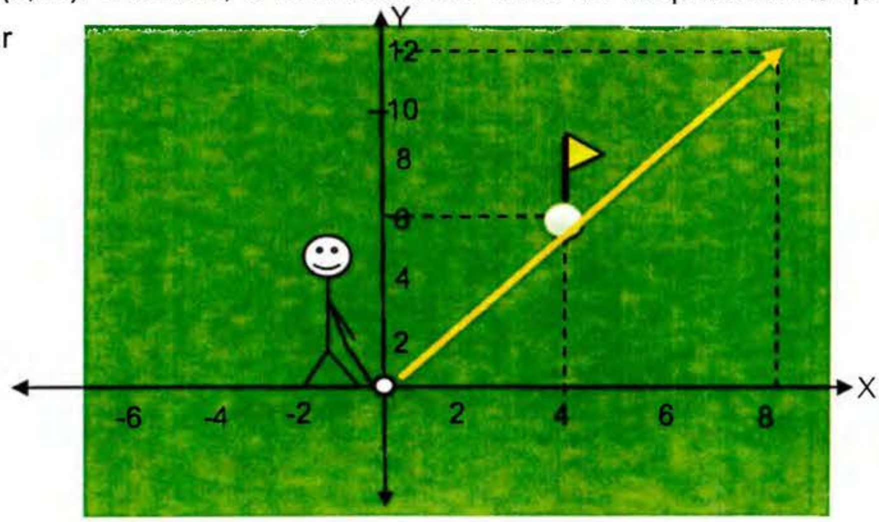
$\frac{1}{3}\vec{u}$ tiene coordenadas $\frac{1}{3}(4,6)=\left(\frac{4}{3},\frac{6}{3}\right)$

• En el segundo intento, Arturo le dio con más fuerza pero aún así no logró llegar la bola al hoyo, y quedó en el punto $(2,3)$, es decir, a la mitad del desplazamiento que tenía que realizar.



$\frac{1}{2}\vec{u}$ tiene coordenadas $\frac{1}{2}(4,6)=\left(\frac{4}{2},\frac{6}{2}\right)=(2,3)$

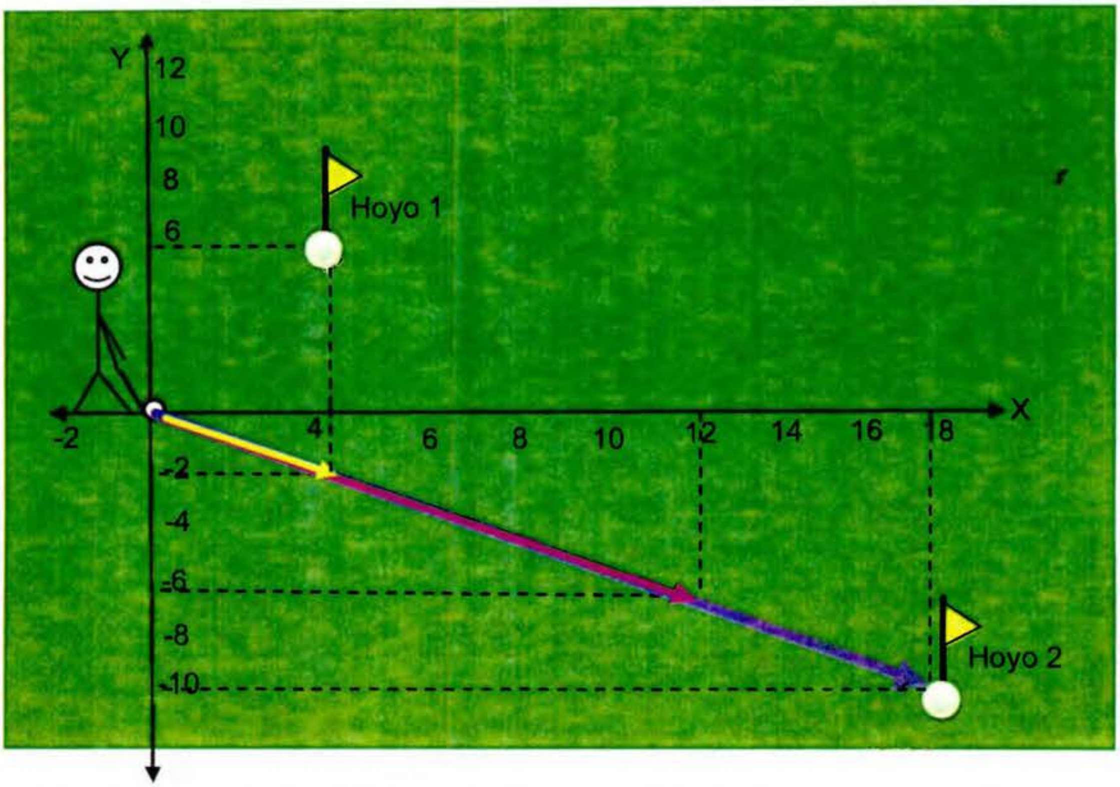
- Al tercer intento, le dio con tanta fuerza que se pasó del hoyo y fue a dar al punto (8,12). Entonces, la bola recorrió el doble del desplazamiento que tenía que realizar



$2\vec{u}$ tiene coordenadas $2(4,6)=(8,12)$

- Por fin, al cuarto intento, la bola entro al hoyo llegando al punto (4,6).

Ahora, el profesor, le asigna su segunda tarea, de ingresar la bola al segundo hoyo ubicado en el punto (12,-6).

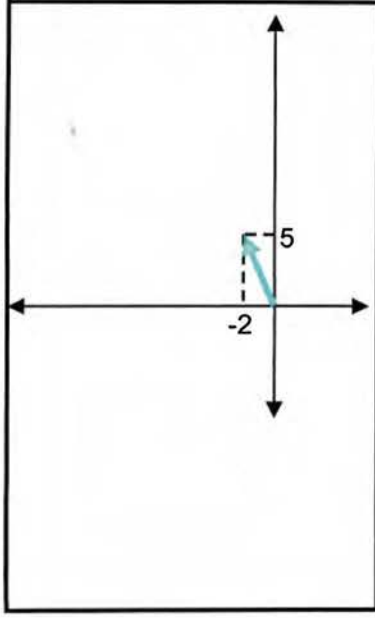
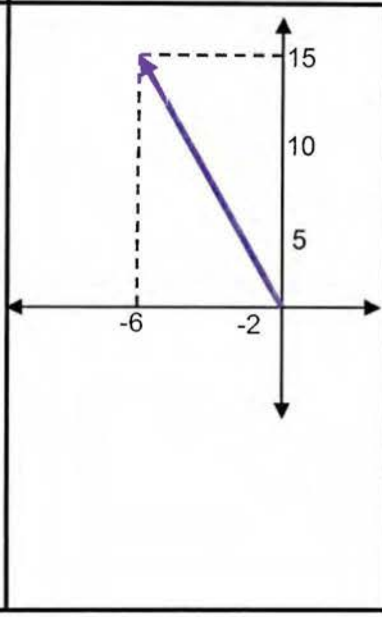
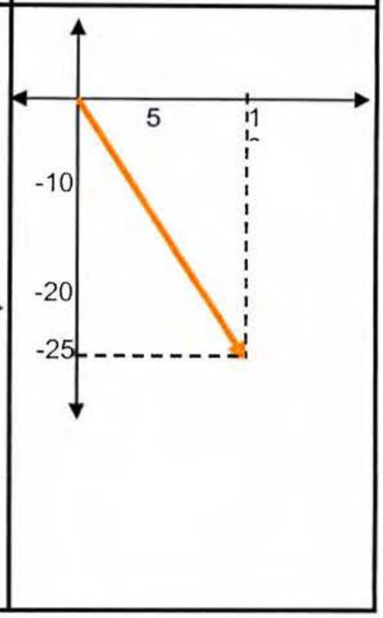


- En el primer intento, Arturo no le dio con suficiente fuerza y apenas llego a un tercio del recorrido total, es decir llego a $(4,-2)=\left(\frac{12}{3},\frac{-6}{3}\right)=\frac{1}{3}(12,-6)$
- En el segundo intento, la bola llego al punto $(18,-9)=\left(12\bullet\frac{3}{2},-6\bullet\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}(12,-6)$
- Ya en el tercer intento, por fin Arturo logro ingresar la bola en el hoyo 2.

Ejemplo

Encuentre la coordenadas de $3\vec{u}$, $-5\vec{u}$ si $\vec{u}$ = (-2,5) y grafique cada uno de ellos.

Vector	Coordenadas
$3\vec{u}$	$(3\bullet-2,\ 3\bullet5)$= (-6,15)
$-5\vec{u}$	$(-5\bullet-2,\ -5\bullet5)$=(10,-25)

$\vec{u}$	$3\vec{u}$	$-5\vec{u}$
		

Observe del ejemplo anterior que al multiplicar $\vec{u}$ por un número entero positivo, el vector se estira y conserva la misma dirección. En cambio, cuando se multiplica por un número entero negativo se estira pero cambia de dirección como en el caso de $-5\vec{u}$

Para multiplicar n veces un vector se multiplican sus entradas por n, es decir,

$$n \bullet \vec{u} = (n \bullet a,\ n \bullet b),\ \text{donde las coordenadas de } \vec{u} \text{ son } (a, b).$$

Si un vector $\vec{v}$ es el resultado de multiplicar $\vec{u}$ por un número real, entonces se dice que $\vec{v}$ es múltiplo de $\vec{u}$ o que $\vec{u}$ es múltiplo de $\vec{v}$

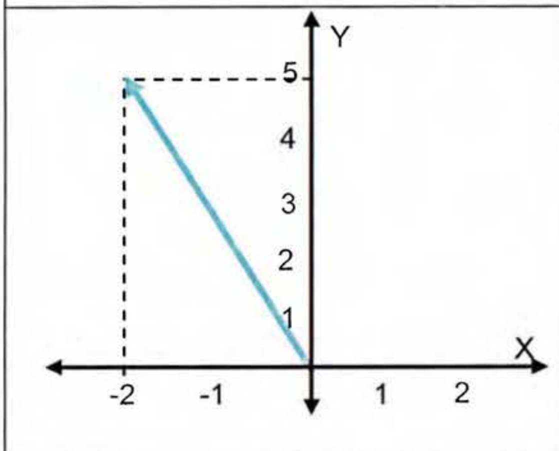
Ahora, determinemos las coordenadas de $\frac{3}{4}\vec{u}$ y $\frac{-3}{2}\vec{u}$

$$\left(\frac{3}{4}\bullet -2,\ \frac{3}{4}\bullet 5\right)=\left(\frac{-6}{4},\frac{15}{4}\right)=\left(\frac{-3}{2},\ \frac{15}{4}\right)$$

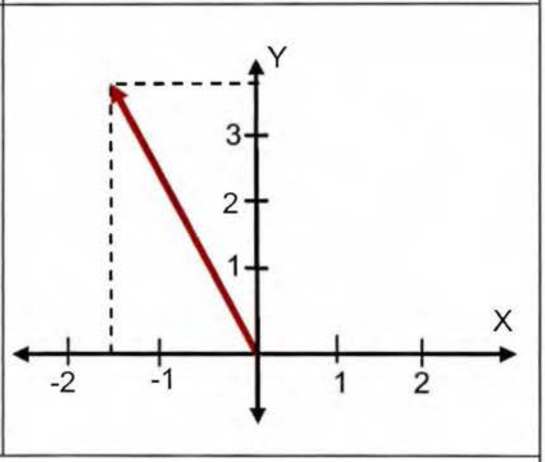
$$\left(\frac{-3}{2}\bullet -2,\ \frac{-3}{2}\bullet 5\right)=\left(3,\frac{-15}{2}\right)$$

Gráficamente los vectores se representan de la siguiente manera

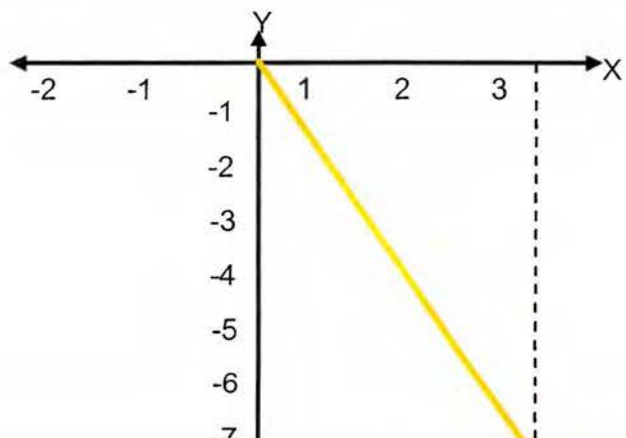
$\vec{u}$



$\frac{3}{4}\vec{u}$



$\frac{-3}{2}\vec{u}$



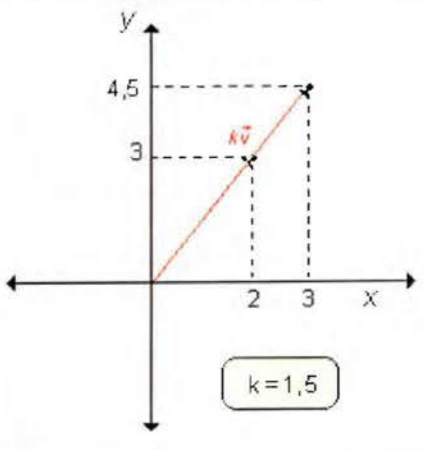
Podemos observar de los ejemplos anteriores que cuando multiplicamos por un número mayor que 1 o menor que -1, el vector se "agranda", y si multiplicamos por un número que se encuentra entre -1 y 1, se disminuye su tamaño. Así mismo, si multiplicamos por un número positivo conserva la dirección y si se multiplica por uno negativo cambia a la dirección opuesta como en este último caso.

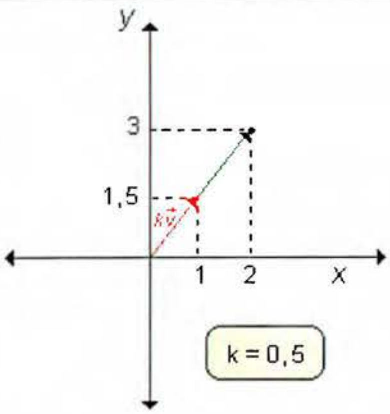
En resumen

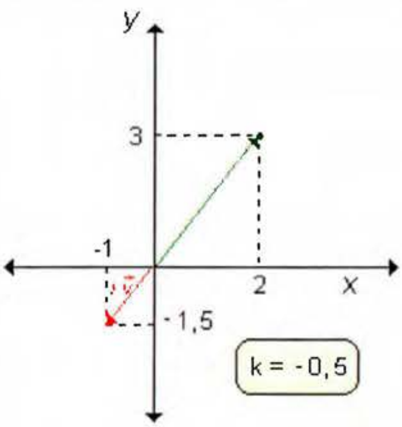
Dependiendo del número real k puede pasar los siguientes casos:

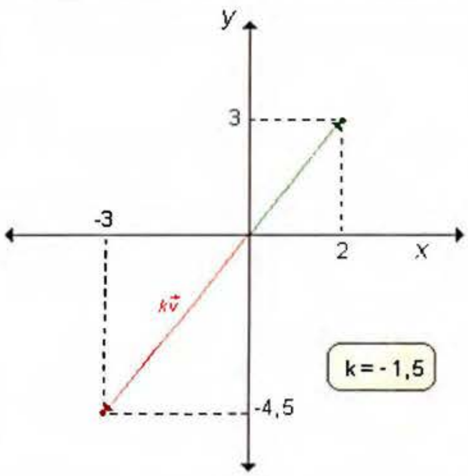
- si k>1 el vector $k\vec{v}$ mantiene la dirección y se *"estira"*.
- si 0<k<1 el vector $k\vec{v}$ mantiene la dirección y se *"encoje"*.
- si -1<k<0 el vector $k\vec{v}$ tiene dirección opuesta a $\vec{v}$ y se *"encoje"*.
- si k<-1 el vector $k\vec{v}$ tiene dirección opuesta a $\vec{v}$ y se *"estira"*.

La multiplicación de un número real k por un vector $\vec{v}$, puede representarse, gráficamente, de la siguiente manera, dependiendo del número real k por el que se multiplique ese vector:

	Si k = 1,5 el vector $k\vec{v}$ mantiene la dirección y se estira. Lo mismo ocurre al multiplicar por cualquier número k que sea mayor que 1.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Si k = 0,5 el vector $k\vec{v}$ mantiene la dirección y se encoje.

Lo mismo ocurre al multiplicar por cualquier número k que sea mayor que cero, pero menor que 1.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Si k = -0,5 el vector $k\vec{v}$ tiene dirección opuesta y se encoje.

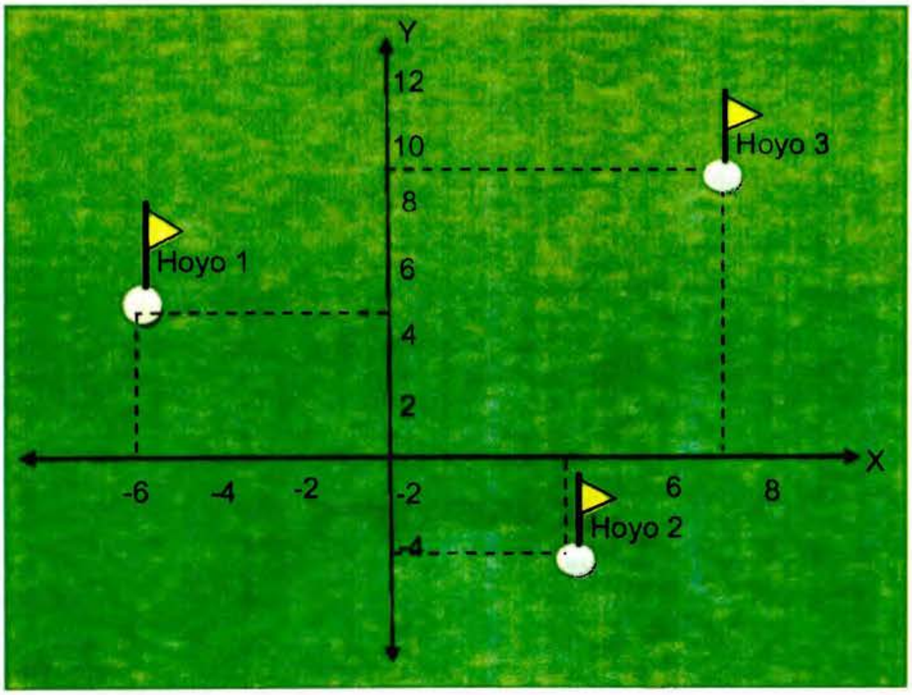
Lo mismo ocurre al multiplicar por cualquier número k que sea mayor que -1 pero menor que 0.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Si k = -1,5 el vector $k\vec{v}$ tiene dirección opuesta y se estira.

Lo mismo ocurre al multiplicar por cualquier número k que sea menor que
-1.</td>
</tr>
</table>

Ejercicios 8.1

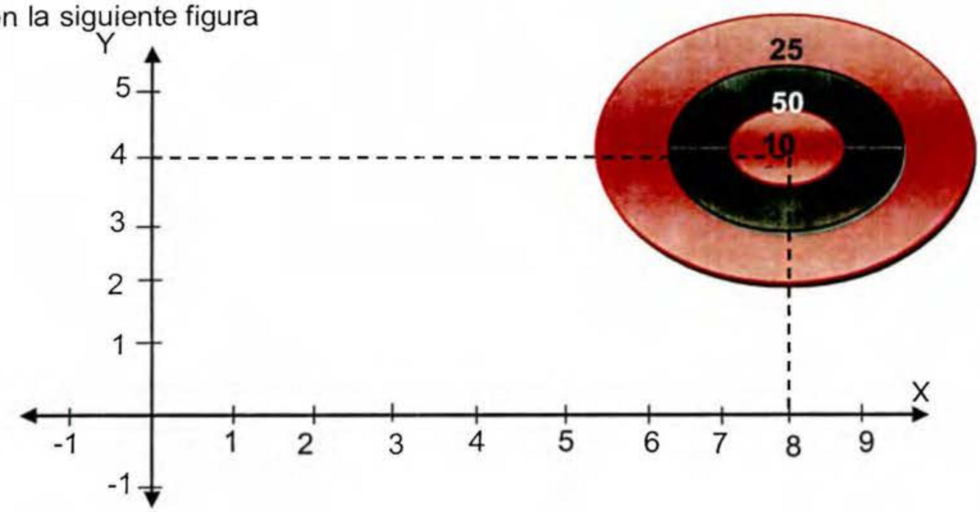
A. La siguiente práctica de golf de Arturo consiste en ingresar la pelota en los hoyos 1, 2 y 3, tal como lo muestra la siguiente figura. Para ello, él tiene puede utilizar cualquiera de los siguientes vectores: $(-12,\ 8)$, $(1,\ 1)$, $(-1,\ 1)$, $\left(\frac{7}{3},\ 3\right)$.

Escoja uno de los vectores anteriores y determine el número real por el cual hay que multiplicar dicho vector para que la pelota ingrese en alguno de los hoyos. Complete la tabla adjunta con la información obtenida. Sobra un vector.



Hoyos	Vector a usar	Número por el que hay que multiplicar	Resultado
1			
2			
3			

B. Patricia, Joselyn y Carlos juegan a los dardos. Cada uno tiró un dardo de acuerdo con la siguiente figura



Patricia escogió el vector (3,1) y lo multiplico por el número 3. María José utilizó el vector $\left(\frac{2}{5},\frac{3}{11}\right)$ y lo multiplico por 15 y Carlos escogió $\left(3,\frac{3}{2}\right)$ y lo multiplico por 3.

C. Con la información anterior, complete la siguiente tabla

Jugador	Vector	Número por el que multiplico	Resultado	Puntaje
María José				
Patricia				
Carlos				

D. De acuerdo con los datos de la tabla ¿Quién ganó la competencia?

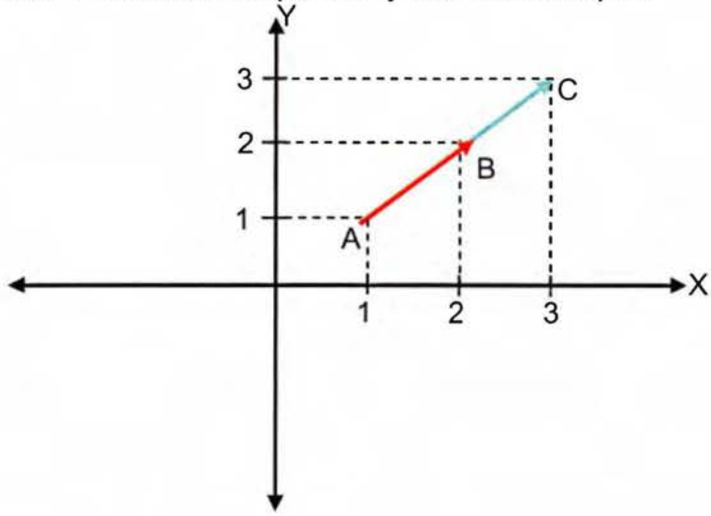
____

Hasta el momento hemos visto multiplicación de números reales por un vector que tiene su punto inicial en el origen.

Ahora, cuando queremos multiplicar un número real por un vector que no inicia en el origen se puede hacer igual que antes.

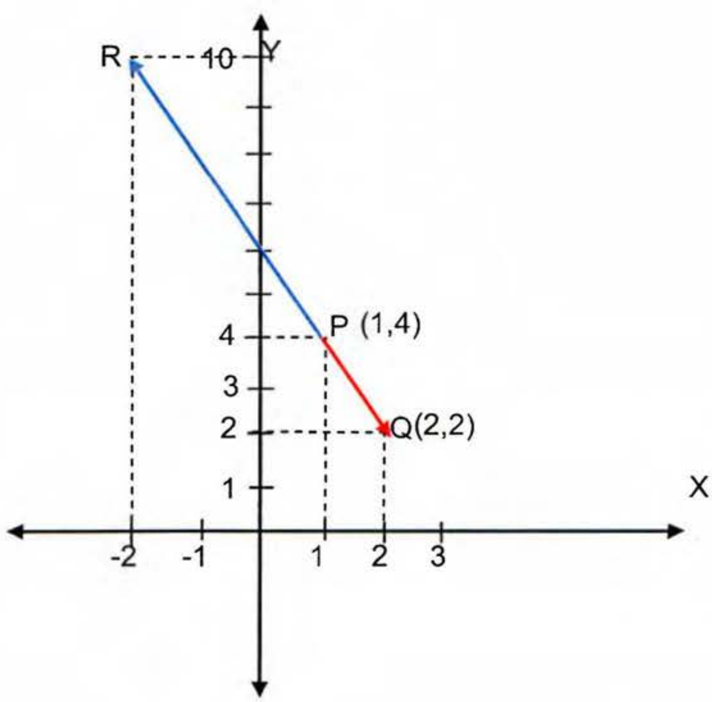
Veamos los siguientes ejemplos

1. En la siguiente figura se muestra el vector $\overrightarrow{AB}$. Si multiplicamos $2\overrightarrow{AB} = 2(B - A)$ tiene coordenadas $2(1,1) = (2,2)$, entonces el vector $2\overrightarrow{AB}$ es el vector pintado de celeste $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Recordemos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son múltiplos



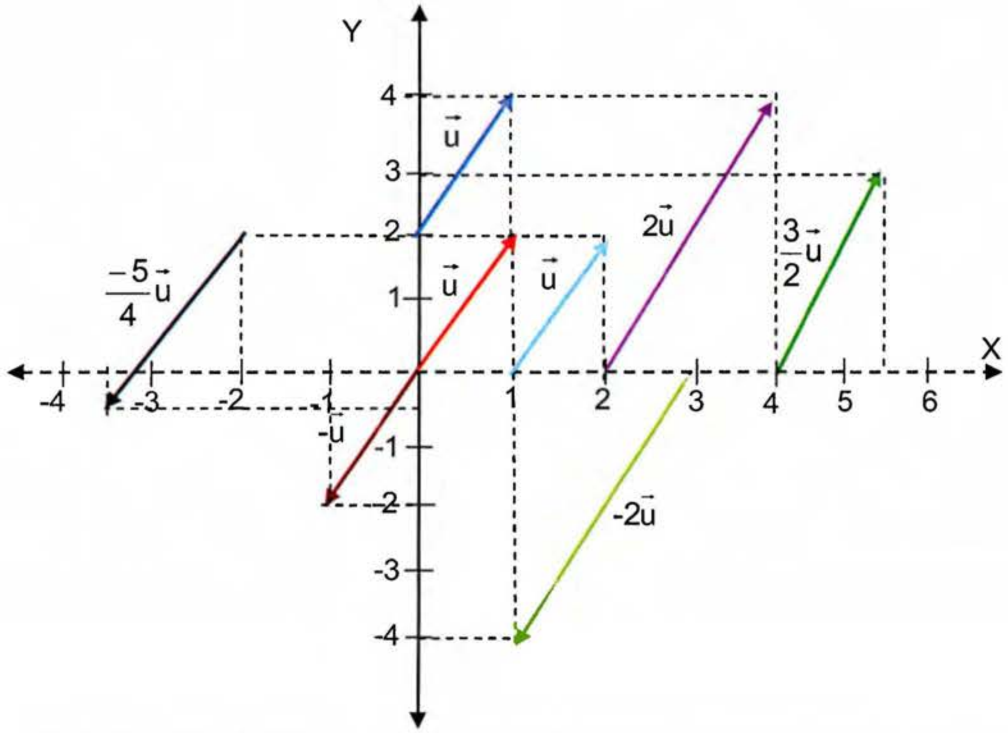
2. Ahora veamos $\overrightarrow{PQ}$ de coordenadas (1,-2) y multipliquémoslo por -3

$-3\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$ tiene coordenadas $3(1,-2) = (-3,6)$



El vector $\overrightarrow{PR}$ es el marcado con azul, y observemos que tiene su punto inicial en P y se desplaza -3 unidades sobre el eje X y 6 unidades sobre el eje Y.

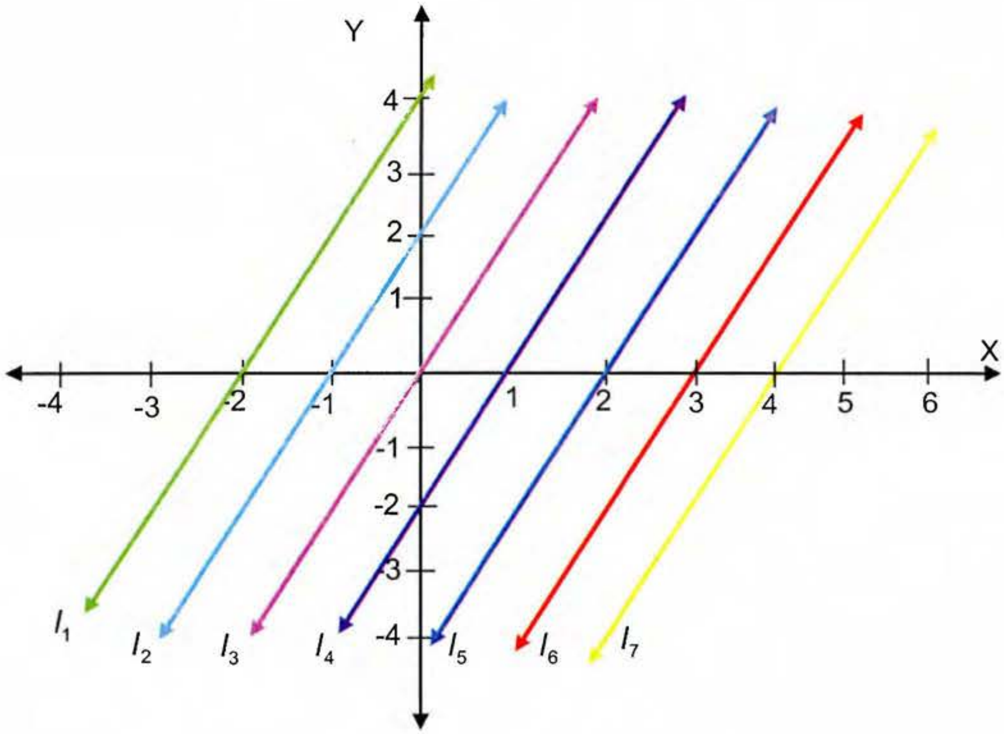
En los dos ejemplos anteriores vimos vectores que son múltiplos y que tienen el mismo punto de inicio. También, podemos tener vectores que son múltiplos pero que su punto de inicio no es el mismo. Veamos el siguiente ejemplo



$\vec{u}$	$\vec{u}$	$-\vec{u}$	$2\vec{u}$	$\frac{3}{2}\vec{u}$	$-2\vec{u}$	$\frac{-5}{4}\vec{u}$
(1,2)	1(1,2)	-1(1,2)	2(1,2)	$\frac{3}{2}(1,2)$	-2(1,2)	$\frac{-5}{4}(1,2)$
(1,2)	(1,2)	(-1,-2)	(2,4)	$\left(\frac{3}{2},3\right)$	(-2,-4)	$\left(\frac{-5}{4},\frac{-5}{2}\right)$

Observando la tabla anterior podemos notar que cada uno de los vectores es múltiplo de $\vec{u}$.

Si dibujamos las rectas que contienen a cada uno de los vectores, se puede observar que son rectas paralelas. Por esa razón a estos vectores se les llama vectores paralelos.



Resumiendo tenemos lo siguiente:

- El producto de un número real por un vector produce vectores múltiplos
- Si trazamos las rectas que contienen a vectores múltiplos obtenemos que las rectas son paralelas.
- De aquí se dice que los vectores también son paralelos.

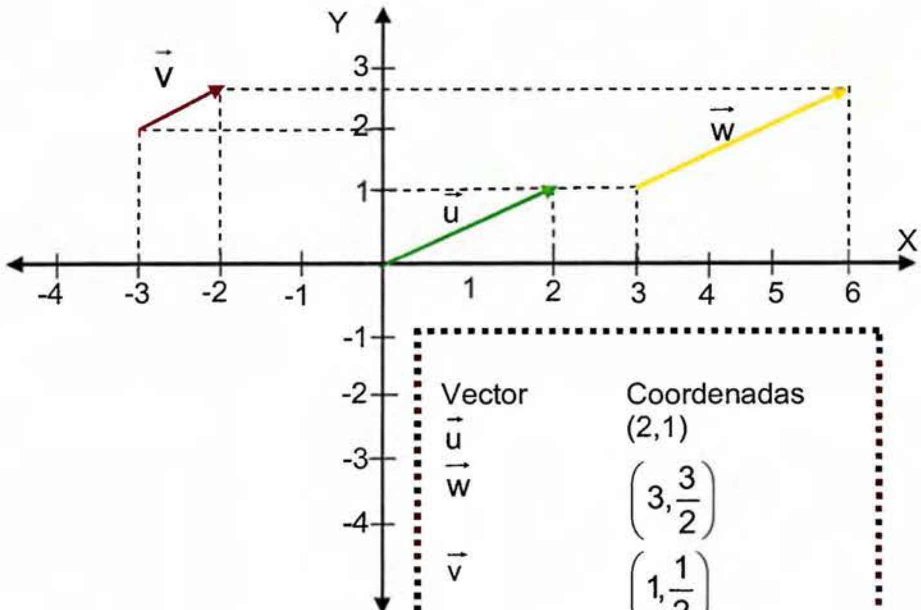
Luego

Dos o más vectores son paralelos si uno es múltiplo del otro

Si $\vec{v} = n\vec{u}$, con n un número real, entonces podemos decir que $\vec{v} \,//\, \vec{u}$

Ejemplos

1.



Vector	Coordenadas
$\vec{u}$	$(2,1)$
$\vec{w}$	$\left(3,\frac{3}{2}\right)$
$\vec{v}$	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$

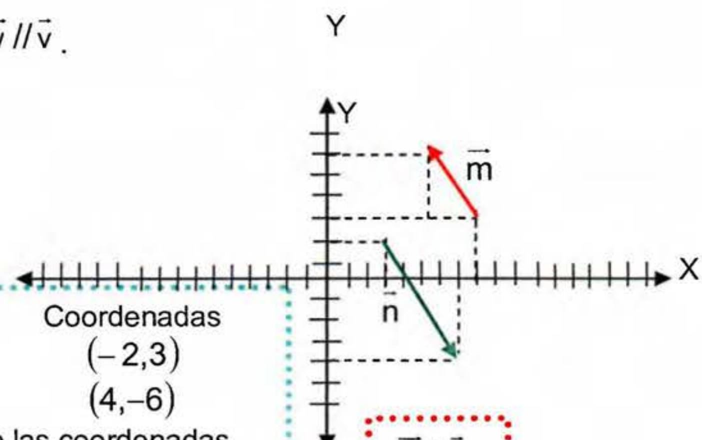
Tenemos

$\vec{w}=\frac{3}{2}\vec{u}$, entonces $\vec{w}$ tiene coordenadas $\frac{3}{2}(2,1)=\left(3,\frac{3}{2}\right)$

$\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}$ entonces $\vec{v}$ tiene coordenadas $\frac{1}{2}(2,1)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$

De donde tenemos que $\vec{w}$ y $\vec{V}$ son múltiplos de $\vec{u}$, por lo que podemos decir que $\vec{u}\,//\,\vec{w}\,//\,\vec{v}$.

2.

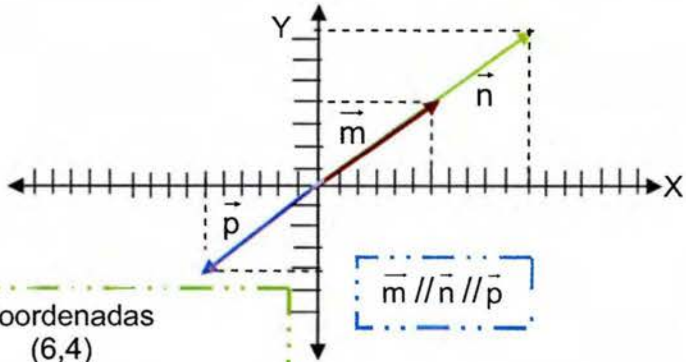


Vector	Coordenadas
$\vec{m}$	$(-2,3)$
$\vec{n}$	$(4,-6)$

Observemos que las coordenadas de $\vec{n}$ son $-2(-2,3)=(4,-6)$

$\vec{m}\parallel\vec{n}$

3.



Vector	Coordenadas
$\vec{m}$	(6,4)
$\vec{n}$	$\left(11, \frac{22}{3}\right)$
$\vec{p}$	(−6,−4)

$\vec{n} = \frac{11}{6}\vec{m}$ entonces el vector $\vec{n}$ tiene coordenadas $\frac{11}{6}(6,4) = \left(11, \frac{22}{3}\right)$

$\vec{p} = -1\,\vec{m}$ entonces el vector $\vec{p}$ tiene coordenadas $-1(6,4) = (-6,-4)$

4. Tomemos un vector $\vec{u}$ con coordenadas (2,5), $\vec{V}$ con coordenadas $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$, y $\vec{w}$ con coordenadas (3,4). Escriba falso o verdadero según corresponda.

a) $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ ( )

b) $\vec{u} \,//\, \vec{w}$ ( )

c) $\vec{v} \,//\, \vec{w}$ ( )

Solución:

a) Si $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ entonces se debe cumplir que $\vec{u} = k\vec{v}$, es decir $(2,5) = k\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$, de aquí tenemos

$2 = k\frac{1}{5}$ y $5 = k\frac{1}{2}$

$10 = k \qquad 10 = k$

Entonces $\vec{u} \,//\, \vec{v}$

b) Si $\vec{u} // \vec{w}$ entonces se debe cumplir que $\vec{u} = k\vec{w}$, es decir $(2,5) = k(3,4)$

$2 = k3 \quad 5 = k4$

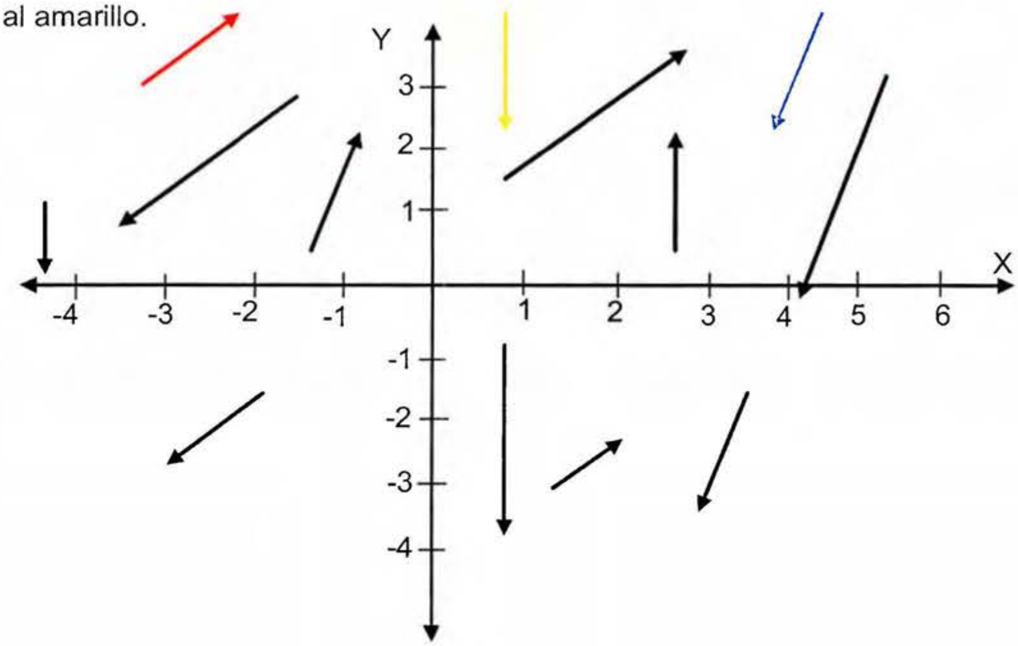
$\frac{2}{3} = k$ y $\frac{5}{4} = k$

Como tenemos que $k = \frac{2}{3}$ y $k = \frac{5}{4}$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{w}$ no son vectores paralelos.

c) Tenemos que $\vec{u} // \vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ no son vectores paralelos, por lo que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no pueden ser paralelos.

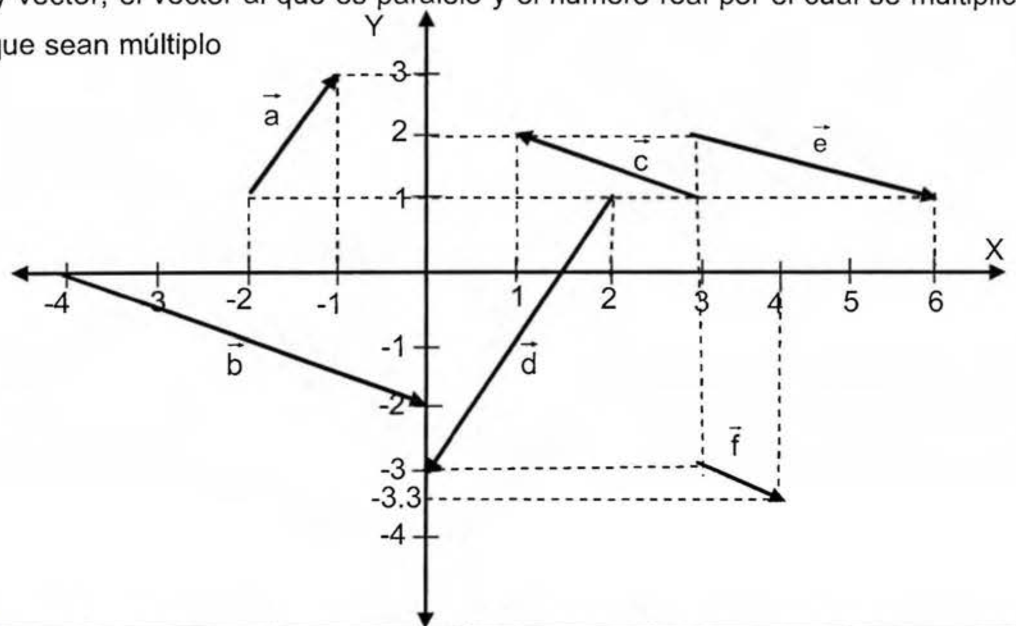
Ejercicio 8.2

A. A continuación se le presentan tres vectores pintados de rojo, azul y amarillo. Pinte del color correspondiente los vectores paralelos a los vectores rojo, al azul y al amarillo.



B. En la siguiente imagen se muestra un portón. Construya un plano cartesiano sobre dicha figura y pinte los vectores paralelos que considera que son paralelos y verifíquelo.

C. En el siguiente dibujo se muestran diferentes vectores. Si $\vec{u}$ tiene coordenadas $(1,2)$, $\vec{v}$ tiene coordenadas $(3,-1)$, y $\vec{w}$ tiene coordenadas $(4,-2)$. Pinte de verde los vectores paralelos a $\vec{u}$, de anaranjado los vectores paralelos a $\vec{v}$ y de celeste los vectores paralelos a $\vec{w}$. Complete la tabla de abajo escribiendo la coordenada de cada y vector, el vector al que es paralelo y el número real por el cual se multiplica para que sean múltiplo



$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$	$\vec{f}$
(1,2)					
1(1,2)					
$\vec{a} // \vec{u}$					

D. Determine si los vectores $\vec{m} // \vec{n}$ y si $\vec{n} // \vec{p}$ si el vector $\vec{m}$ tiene coordenadas $(3,-2)$

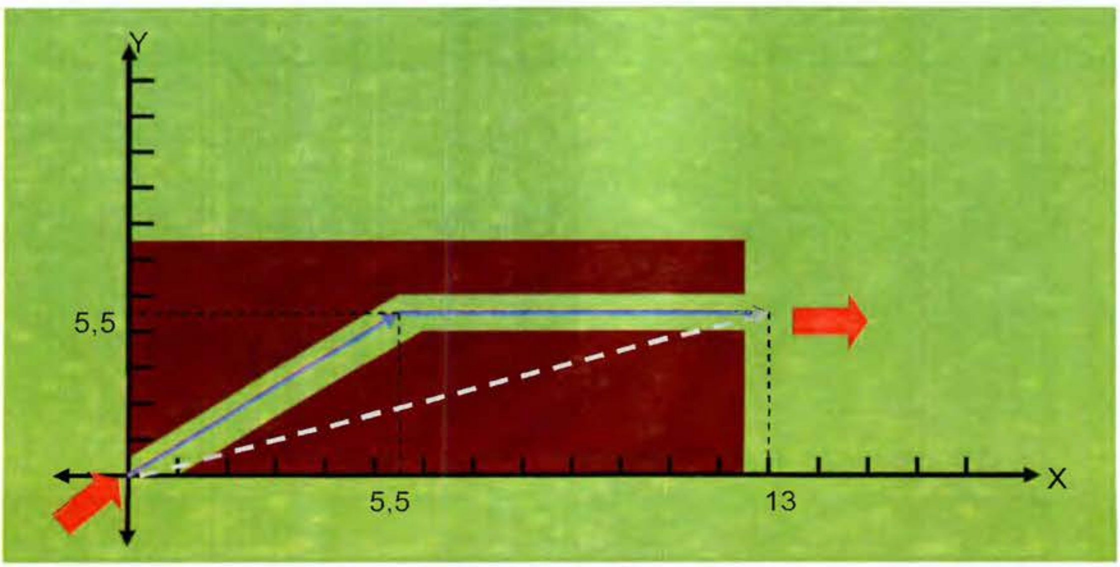
$\vec{n}$ tiene coordenadas $(6,4)$ y $\vec{p}$ tiene coordenadas $(15,-10)$

Ejercicio 8.3

Se presenta a continuación cuatro laberintos en planos coordenados, señale cuales vectores se necesita para recorrer todo el laberinto desde el inicio hasta la salida, además determine cuál fue el desplazamiento total. Solo se puede recorrer por el camino.

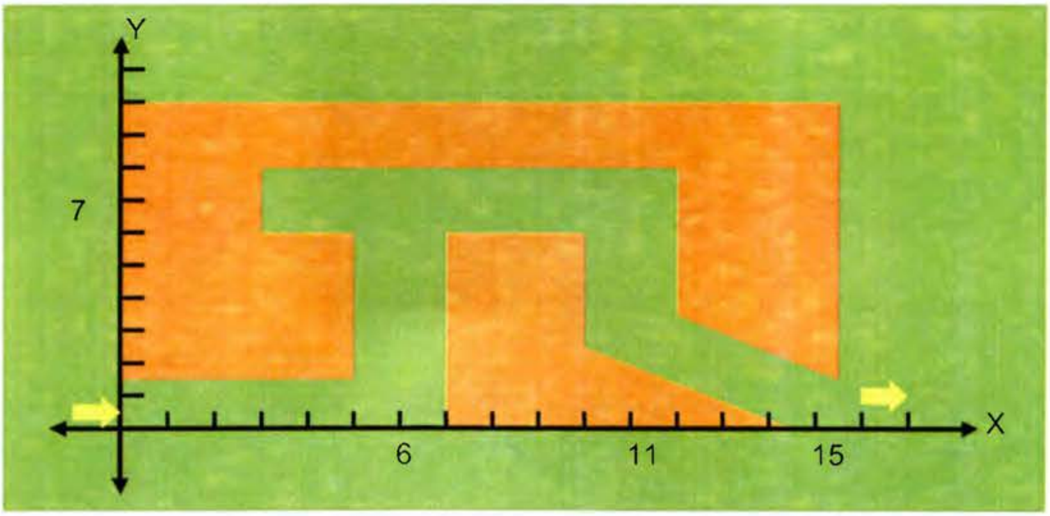
Veamos primero un ejemplo, Miguelito quiere recorrer el laberinto, entonces, él camina desde el origen con la dirección del vector (5,5 , 5,5), y luego camina con la dirección del vector (7,5 , 0), y con esto logra salir, el desplazamiento total es (5,5 , 5,5)+ (7,5 , 0) = (13, 5,5)

Entonces, la distancia total es $\sqrt{13^2+(5,5)^2} = \frac{\sqrt{797}}{2}$

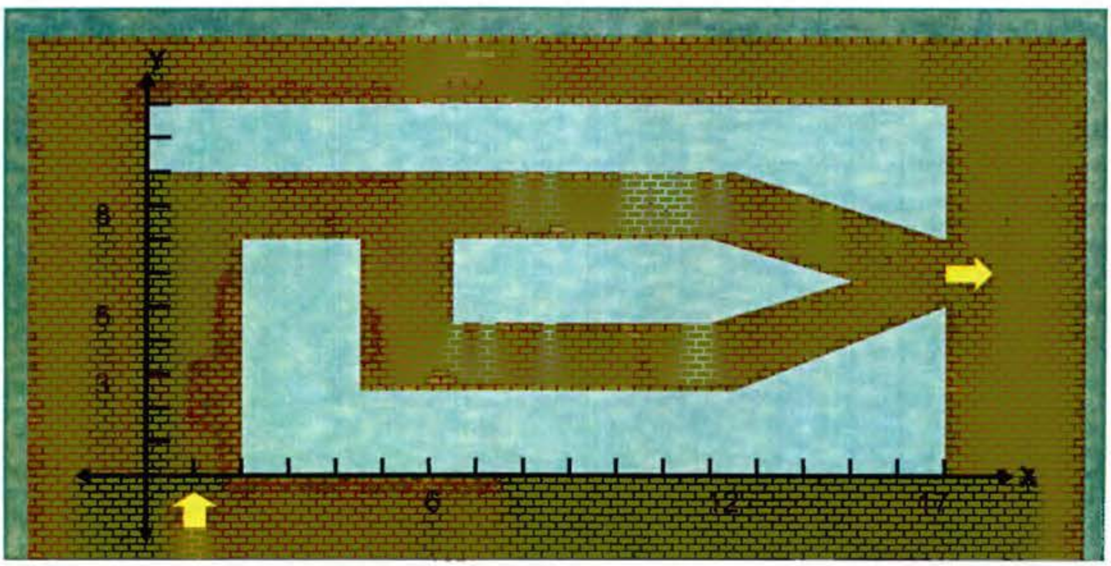


De acuerdo con el ejemplo anterior, complete los caminos a través de los siguientes laberintos, calcule el desplazamiento total, y la longitud del mismo, recuerde que los vectores deben ser colocados de manera que coincidan puntos finales con iniciales, además recuerde que solo puede seguirse el camino señalado.

A.

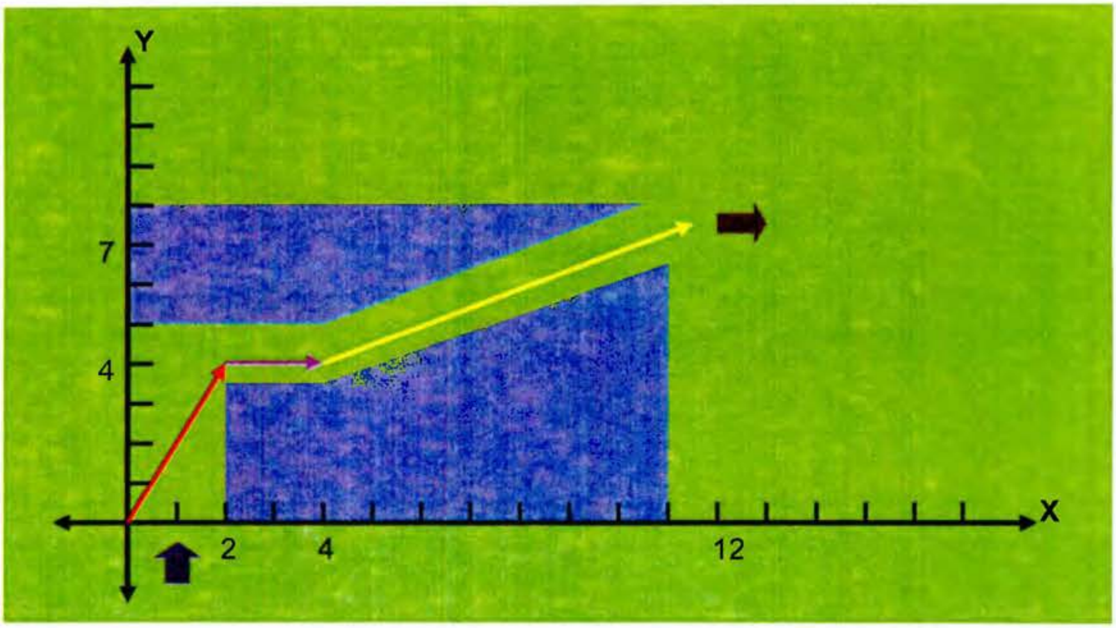


B.



Para hacer más interesante el juego, pongamos la condición de que sólo se puede usar algunos vectores ya escogidos, pero estos, los podemos multiplicar por el número que queramos, para poder hacerlos más cortos o más largos, veamos antes un ejemplo.

En este caso, se supone que tenemos los vectores con coordenadas (1, -2), (1, 2), (-1, 0), (16, 6).



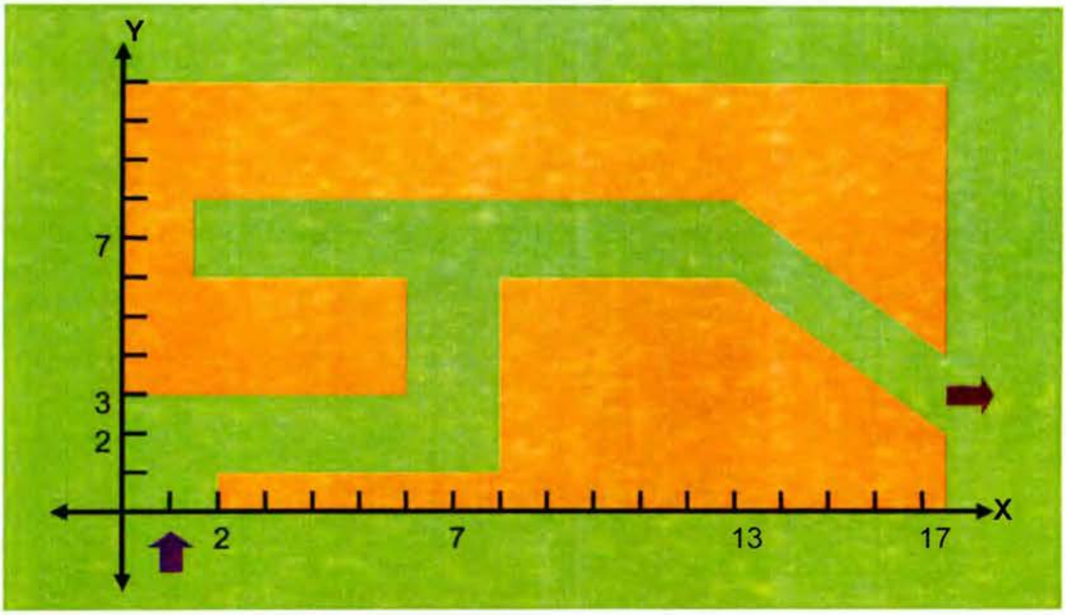
Aquí, para recorrer el laberinto, primero se escoge el vector de coordenadas (1, 2), y se multiplica por 2 para obtener (2, 4) que es el vector representado con la flecha roja, luego, se escoge el (-1, 0), y se multiplica por -2, para obtener el vector (2, 0), que está representado por la flecha rosada, finalmente, se escoge el vector de coordenadas (16, 6), y se multiplica por $\frac{1}{2}$, para obtener (8, 3), que está representado por la flecha amarilla, y con esto ya se recorrió todo el camino hasta la salida. El desplazamiento total es

$$2(1, 2) + (-2)(-1, 0) + \frac{1}{2}(16, 6) = (2, 4) + (2, 0) + (8, 3) = (12,7)$$

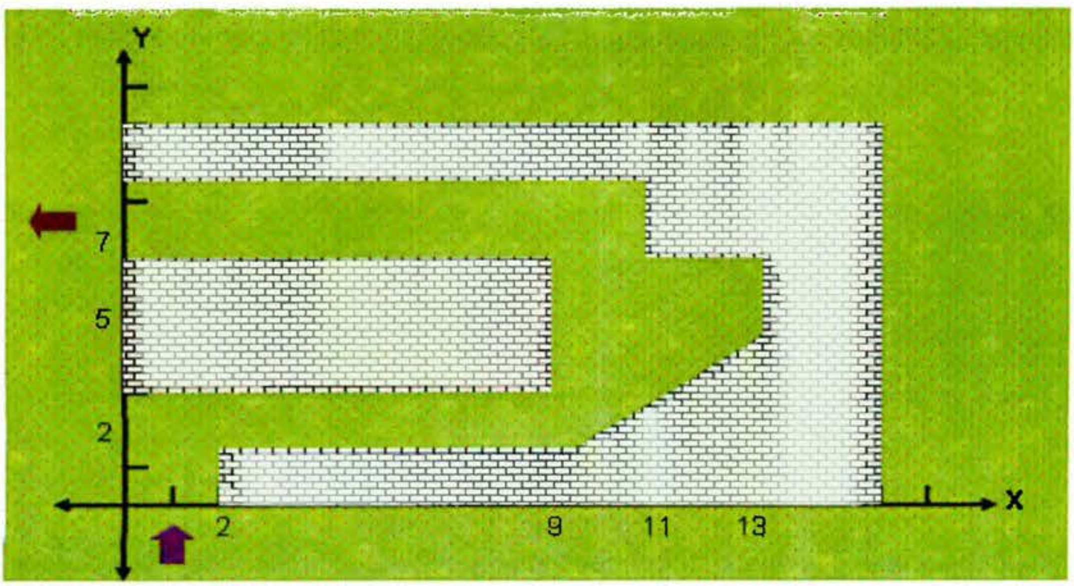
Y la longitud del mismo es $\sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{144 + 49} = \sqrt{193}$

Ahora trata tú los siguientes ejercicios, te deseamos mucha suerte, recuerda que sólo puedes recorrer los caminos, además, sólo puedes utilizar los vectores que se te indican antes, pero puedes multiplicar por el número que tú quieras, siempre que el vector que resulta no se salga del camino.

C. Los posibles vectores a utilizar son: (1,0), (0,-1), (1,-1), (1,1), (1,2)



D. Los posibles vectores a utilizar son: (1, 1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (-1, 1)



4.1.9 Producto punto y vectores perpendiculares

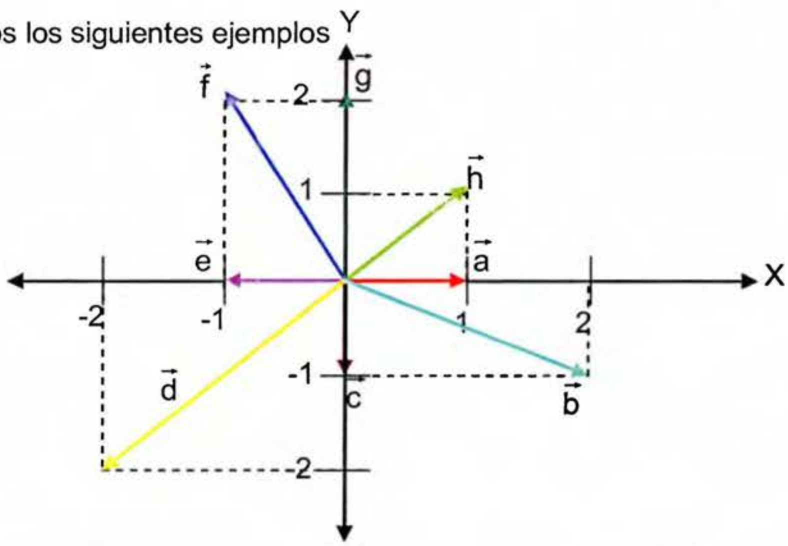
El producto punto es una operación entre vectores que se define de la siguiente manera:

Si $\vec{u}$ tiene coordenadas (a, b) y $\vec{v}$ tiene coordenadas (c, d), entonces el producto punto entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un número real que se obtiene al realizar el siguiente procedimiento:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot c + b \cdot d}$$

Veamos los siguientes ejemplos

1.



$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$	$\vec{f}$	$\vec{g}$	$\vec{h}$
(1,0)	(2,-1)	(0,-1)	(-2,-2)	(-1,0)	(-1,2)	(0,2)	(1,1)

Algunos productos punto entre los vectores son

$\vec{a}\cdot\vec{g}=1\cdot 0+0\cdot 2=0+0=0$	$\vec{h}\cdot\vec{f}=1\cdot -1+1\cdot 2=-1+2=1$	$\vec{a}\cdot\vec{f}=1\cdot -1+0\cdot 2=-1+0=-1$
$\vec{a}\vec{c}=1\cdot 0+0\cdot -1=0+0=0$	$\vec{a}\cdot\vec{h}=1\cdot 1+0\cdot 1=1+0=1$	$\vec{e}\cdot\vec{h}=-1\cdot 1+0\cdot 1=-1+0=-1$
$\vec{e}\vec{g}=-1\cdot 0+0\cdot 2=0+0=0$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 2+0-1=2+0=2$	$\vec{d}\cdot\vec{b}=-2\cdot 2+-2\cdot -1=-4+2=-2$

Observemos que en los casos en donde el producto punto da cero, los ángulos que se forma entre los vectores es de 90 °, por lo que se dice que los vectores son perpendiculares.

Además, en el caso en donde los vectores no son paralelos, si se forma un ángulo agudo, el producto punto da positivo; y si se forma un ángulo obtuso el producto punto da negativo.

En resumen, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no paralelos tenemos

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	Los vectores son perpendiculares
$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$	Los vectores forman un ángulo agudo
$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$	Los vectores forman un ángulo obtuso

Un detalle importante es verificar que los vectores no sean paralelos cuando el producto punto es negativo o positivo. Una forma algebraica de hacerlo es la siguiente:

Ejemplo

1. Determine el producto punto de los vectores si $\vec{u}$ tiene coordenadas (-2,-2) y $\vec{v}$ tiene coordenadas $(1,1)$ y clasifique el ángulo que forman en agudo, recto u obtuso.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \cdot 1 + -2 \cdot 1 = -2 + -2 = -4$$

Como el producto punto dio negativo podemos intuir que forman un ángulo obtuso sin embargo, tenemos que comprobar que los vectores no sean paralelos.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ fueran paralelos pasaría que uno es múltiplo del otro, es decir $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, es decir, que (-2,-2)=k(1,1)=(1k,1k) y esto pasa solamente si 2=1k y 2=1k, es decir que k=2. Entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

Al ser vectores paralelos, no forman ningún ángulo entre ellos, o como se dice también, forman un ángulo nulo o llano.

Nulo Llano

Por tanto, siempre que el producto punto de negativo o positivos tenemos que verificar que los vectores no sean paralelos.

2. Determine el producto punto de los vectores $\vec{u} = (3,\ 2)$ y $\vec{v} = (2,\ -1)$ y clasifique el ángulo que forman en agudo, recto u obtuso.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot -1 = 6 + -2 = 4$$

Como el producto punto dio positivo podemos intuir que forman un ángulo agudo sin embargo, tenemos que comprobar que los vectores no sean paralelos. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ fueran paralelos pasaría que uno es múltiplo del otro, es decir $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, es decir, que (3,2)=k(2,-1)=(2k,-1k) y esto pasa solamente si 3=2k y 2=-1k, es decir que $k = \frac{3}{2}$ y $k = -2$. Como las dos ecuaciones no dan el mismo número "k" se concluye que no son paralelos; y por tanto, dichos vectores forman un ángulo agudo.

Ejercicios 9.1

A. Encuentre el producto punto de los siguientes vectores y determine que tipo de ángulo forma: agudo, recto u obtuso.

- $\vec{a}(0,2)$ y $\vec{b}(-3,0)$
- $\vec{c}(2,3)$ y $\vec{d}(-1,3)$
- $\vec{e}(3,3)$ y $\vec{f}(-5,5)$
- $\vec{g}(-4,4)$ y $\vec{h}(2.5,0)$

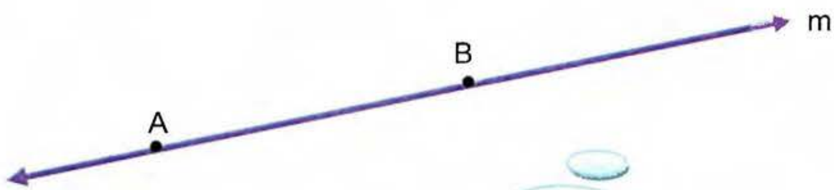
4.2 Geometría para octavo año.

4.2.1 Conceptos básicos de Geometría utilizando vectores.

Recta

Anteriormente vimos que los puntos son elementos del plano representados con pares ordenados (a, b) donde a y b son números reales.

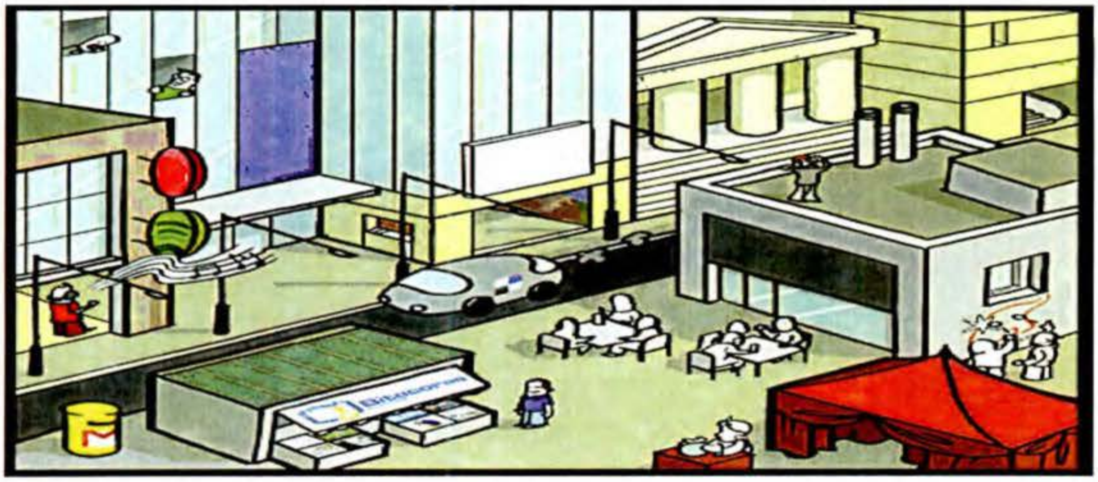
De la escuela sabemos que una recta es un conjunto infinito de puntos y que se representa gráficamente de la siguiente manera



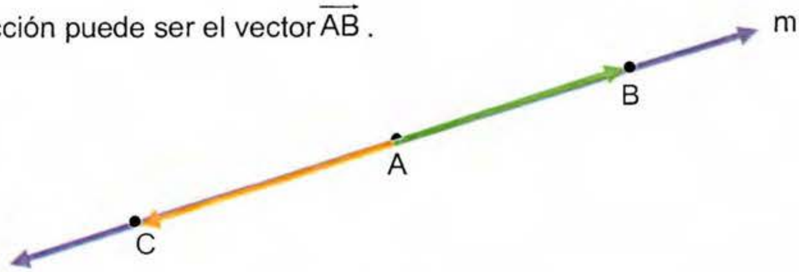
Una recta se puede nombrar de dos formas:

- Con una letra del alfabeto español minúscula. Ejemplo: m, n, l, p, q,...
- Dos letras mayúsculas del alfabeto español, que representan puntos que pertenecen a la recta, con el símbolo $\leftrightarrow$ encima de dichas letras. Ejemplo: $\overleftrightarrow{AB}$

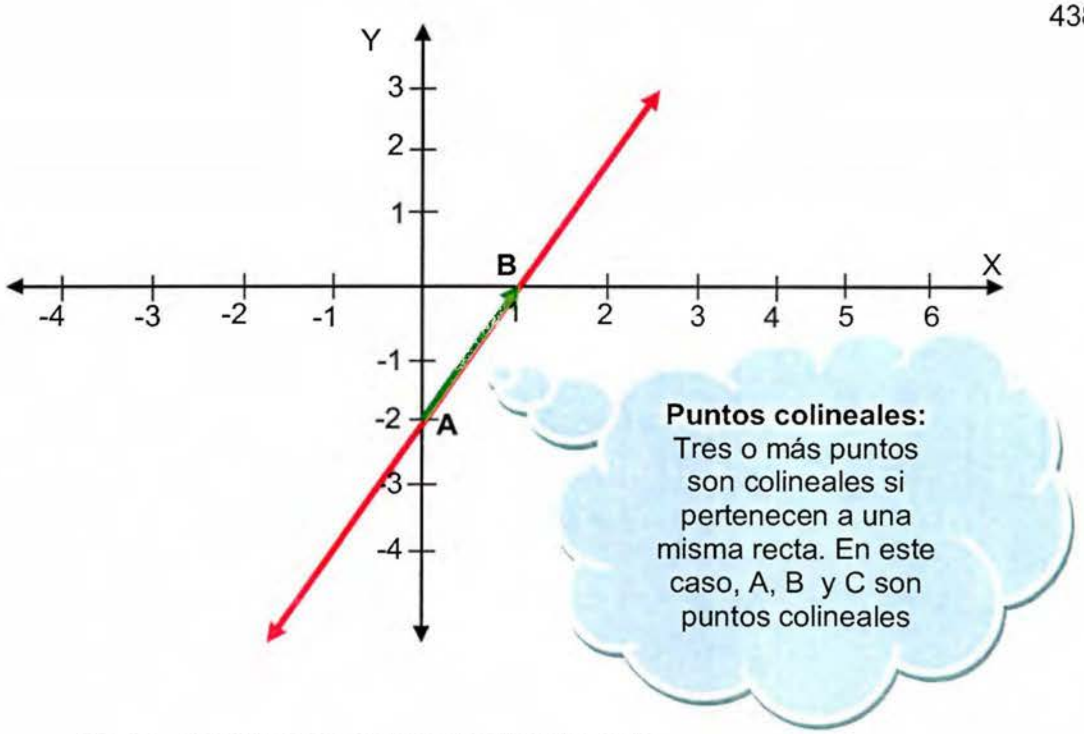
Existen muchos objetos que nos da una idea de recta tales como una regla, la línea del tren, una calle, entre otros. Por ejemplo en el siguiente dibujo podemos determinar algunas rectas, o segmentos de ellas. Subraya por lo menos 7.



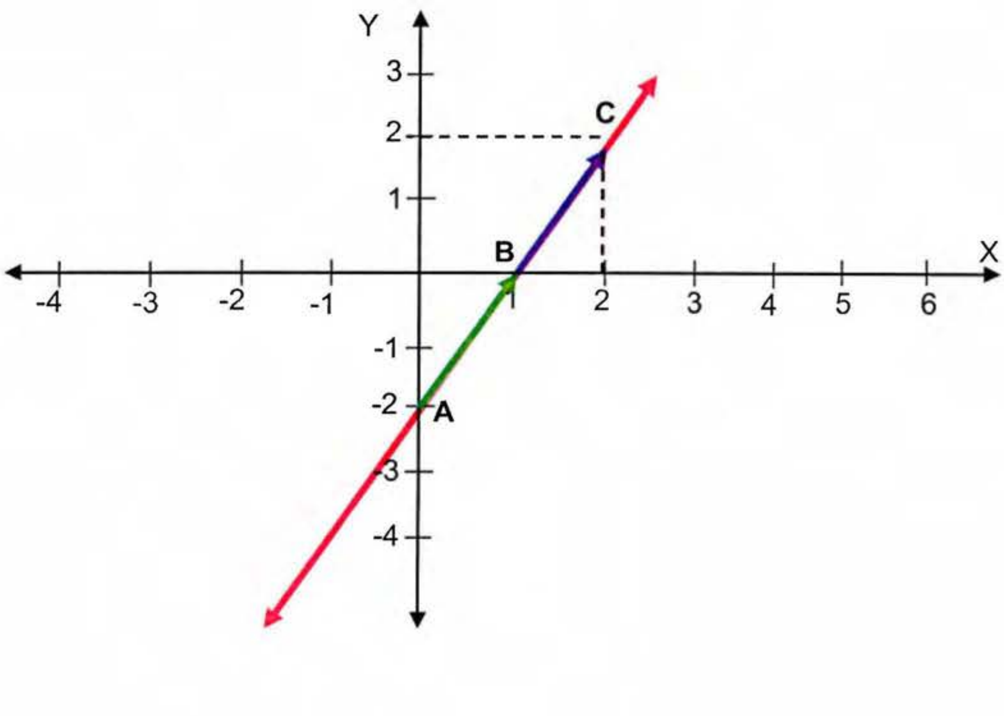
Ahora, si tomamos un vector y lo extendemos indefinidamente hacia ambos lados, obtenemos la idea de recta; es decir, al multiplicar un vector indefinidamente por un número real, tanto positivo como negativo, obtenemos una recta, la cual posee un vector que le da la dirección. En la siguiente recta $\overleftrightarrow{AB}$, un vector que le da la dirección puede ser el vector $\overrightarrow{AB}$.



Mas específicamente, dibujemos una recta en el plano y consideremos el bipunto (A,B) que pertenecen a la recta. Estos dos puntos forman el vector $\overrightarrow{AB}$.



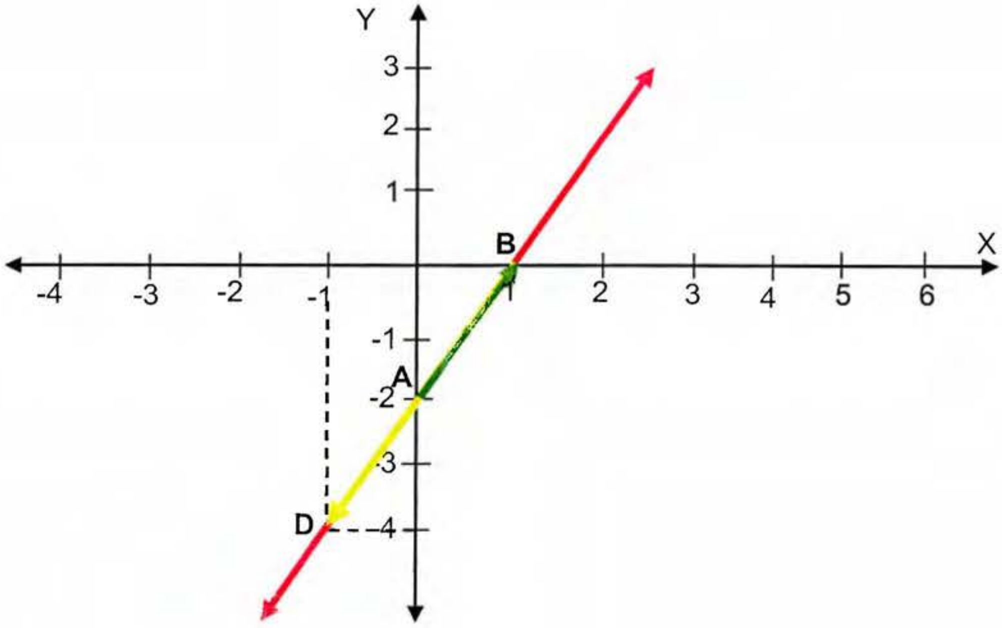
Ahora, consideremos un punto C en la recta.



Tomando en cuenta la figura anterior, encontremos el número real por el cual habría que multiplicar el vector $\overrightarrow{AB}$ para formar el vector $\overrightarrow{AC}$. Tenemos que $\overrightarrow{AB} = B - A$ entonces (1,0)-(0,-2)=(1,2) y $\overrightarrow{AC} = C - A$ entonces (2,2)-(0,-2)=(2,4), de aquí que necesitamos un número real k que haga que $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, es decir, que $(2, 4)=k\cdot(1, 2)=(1\cdot k, 2\cdot k)$, de ahí que 2=k y 4=2k, entonces k=2

$$\boxed{\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AB}}$$

Ahora, tomemos otro punto D en la recta y consideremos el vector $\overrightarrow{AD}$



Encontremos el número por el cual multiplicar $\overrightarrow{AB}$ para formar el vector $\overrightarrow{AD}$ Si $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,2)$ y $\overrightarrow{AD} = D - A = (-1,4)-(0,-2) = (-1,-2)$ entonces tenemos que $\overrightarrow{AD} = k\cdot\overrightarrow{AB}$, es decir que $(-1, -2) = k\cdot(1, 2)=(1\cdot k, 2\cdot k)$, por tanto -1=1k y -2=2k, de ahí que k=-1.

$$\boxed{\overrightarrow{AD}=-1\cdot\overrightarrow{AB}}$$

De lo anterior tenemos que para cada punto X de la recta existe un número real k que al multiplicarlo por el vector $\overrightarrow{AB}$ forma el vector $\overrightarrow{AX}$. Como existen infinitos números reales, van a existir infinitos puntos X que juntos forman una recta. Una recta que contiene los puntos A y B es el conjunto de puntos X que cumplen que $\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, donde k es un número real. Es importante notar que ese número real k es único para cada punto de la recta.

Ahora, de la definición de recta, $\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ donde k es un número real, podemos observar que una recta está determinada por un punto fijo, que le da la ubicación en el plano, en este caso el punto A, y un vector $\overrightarrow{AB}$ que le proporciona la "inclinación o dirección" de la misma. A este vector $\overrightarrow{AB}$ se le va a llama vector director, y A, B van a pertenecer a la recta. El vector director no es único pues también sirve cualquier vector paralelo a este, ya que conservan la misma "inclinación".

Recta es el conjunto de puntos X del plano que cumplen que $\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ donde A, B son dos puntos fijos de la recta, $\overrightarrow{AB}$ es un vector director y k es un número real.

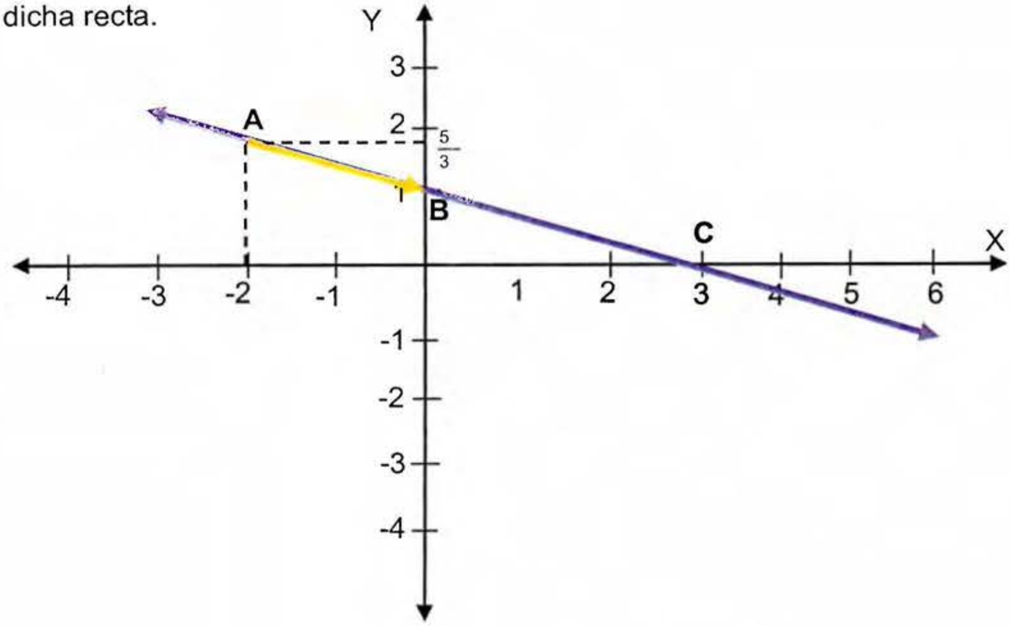
En resumen

"Una recta está determina por un vector director y un punto fijo. El vector director nos da la inclinación de la recta y el punto nos indica la ubicación en el plano de la misma."

Ahora, consideremos el siguiente ejemplo para comprobar que un punto pertenece a una recta.

Ejemplo

1. Considere la siguiente recta $\overrightarrow{AB}$ y comprobemos que el punto C pertenece a dicha recta.



Tomemos A como el punto fijo y $\overline{AB}$ el vector director de dicha recta. Si C pertenece a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tiene que cumplir que $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, con k un único número real.

Es decir $\left(5,\frac{-5}{3}\right) = k \cdot \left(2,\frac{-2}{3}\right) = \left(2k,\frac{-2}{3}k\right)$

Por tanto

$5=2k$	y	$\frac{-5}{3}=\frac{-2}{3}k$
$\frac{5}{2}=k$		$\frac{-5}{3}\div\frac{-2}{3}=k$
		$\frac{5}{2}=k$

Como el número real k es el mismo para ambas partes entonces podemos decir que el punto C pertenece a la recta $\overrightarrow{AB}$.

Si cuando resolvemos las dos ecuaciones obtenemos un número real distinto entonces el punto no pertenece a la recta, ya que el número real tiene que ser único y no puede haber dos.

2. Compruebe si la recta *m* que contiene los puntos A(-1,0) y B(0,3) puede tener un vector director $\vec{v}$ de coordenadas $\left(\frac{-5}{3},-5\right)$.

Solución:

El bipunto (A, B) forman un vector de coordenadas (1,3) que está contenido en la recta. Si $\vec{v}$ fuera un vector director de la recta m pasaría que $\vec{v}$ es paralelo al vector que está contenido en la recta de coordenadas (1,3), es decir, $\left(\frac{-5}{3},-5\right)=k(1,3)=(k,3k)$, con k un número real, entonces $\frac{-5}{3}=k$ y $-5=3k$. Por tanto, $k=\frac{-5}{3}$, es decir, $\vec{v}$ sí es un vector director de m.

3. Determine cuál de los siguientes puntos $P(-5, 10)$, $M\left(\frac{-7}{3}, 2\right)$, $N(2, 4)$ pertenece a la recta *l* que contiene al punto Q(-3,4) y tiene como vector director a $\vec{u}$ de coordenadas (-2,6).

Solución:

Sabemos que para que un punto X pertenezca a la recta *l* se cumple que $\overrightarrow{QX} = k\overrightarrow{AB}$, es decir $\overrightarrow{QX} = k(-2,6)$ entonces, si P, M y N pertenece a *l* entonces debe existir p, m, n números reales que cumplan que $\overrightarrow{QP}=p(2,-6)$, $\overrightarrow{QM}=m(2,-6)$, $\overrightarrow{QN}=n(2,-6)$. De ahí que

$\overrightarrow{QP}=p(2,-6)$	$\overrightarrow{QN}=n(2,-6)$	$\overrightarrow{QM}=m(2,-6)$
$(-2, 6)=p(2, -6)$	$(5, 0)=y(2,-6)$	$\left(\frac{2}{3},-2\right)=m(2, -6)$
$-2=2p$ y $6=-6p$	$5=2y$ y $0=-6y$	$\frac{2}{3}=2m$ y $-2=-6m$
$p=-1$ y $p=-1$	$y=\frac{5}{2}$ y $y=0$	$m=\frac{1}{3}$ y $m=\frac{1}{3}$

Por tanto solo P y M pertenecen a la recta l, y N no pertenece a l.

Ejercicios 1.1

A. Considere los siguientes puntos.

¿Cuántas rectas pueden contener al punto A? ______________________________

¿Cuántas rectas pueden contener a los puntos A y B? ________________________

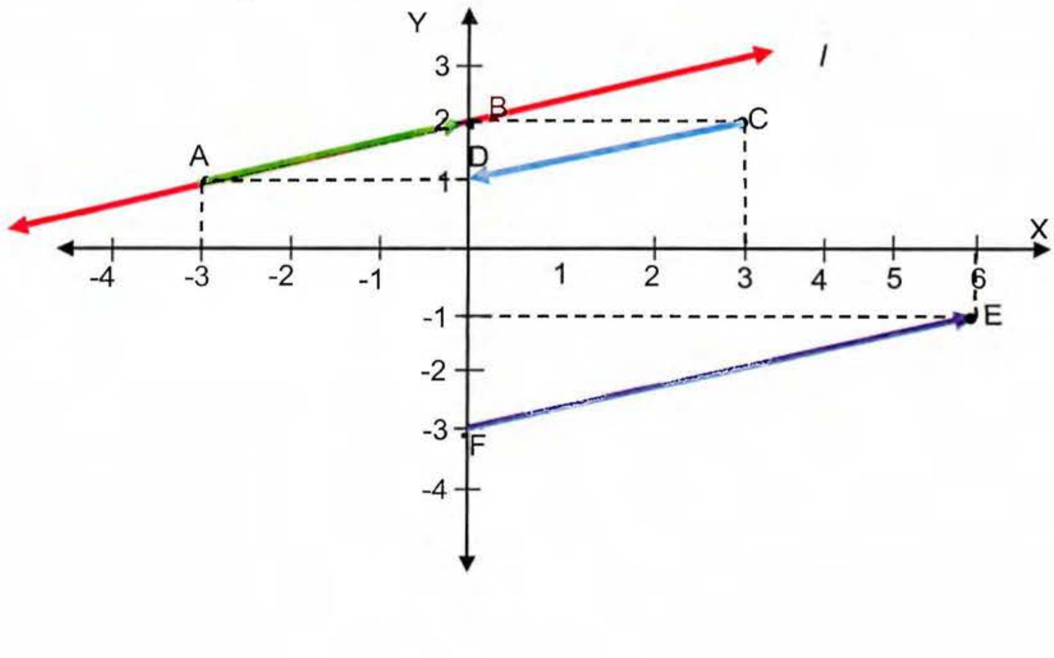
¿Puede existir una recta que contenga los puntos A, B y C? ___________________

B. Determine cuales de los siguiente puntos P(5,-8), $Q\left(\frac{13}{3},\frac{7}{6}\right)$, $R\left(\frac{7}{3},\frac{-14}{3}\right)$

pertenecen a la recta de ecuación $\overline{AX}=k\left(\frac{-2}{3},\frac{-5}{6}\right)$, con A(1,-3).

C. Si A(-1,-5) y B(2,-6) son dos puntos de la recta m, determine si un vector director de dicha recta puede tener coordenadas $(1,\ -11)$

D. Considere el siguiente grafico

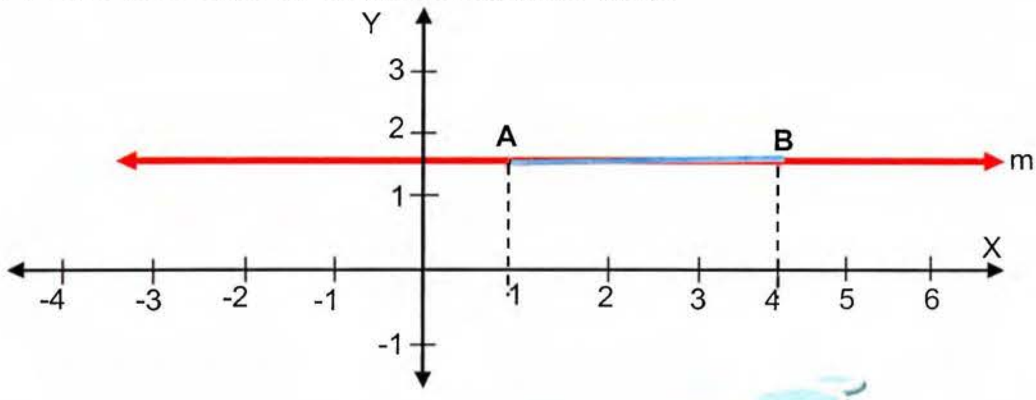


Usando el gráfico anterior, si la recta l se formo de tomar el vector $\overrightarrow{AB}$ y el punto A(-3,1). Compruebe que los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{CD}$ son vectores directores de la recta l.

Subconjuntos de la recta.

Segmento de recta.

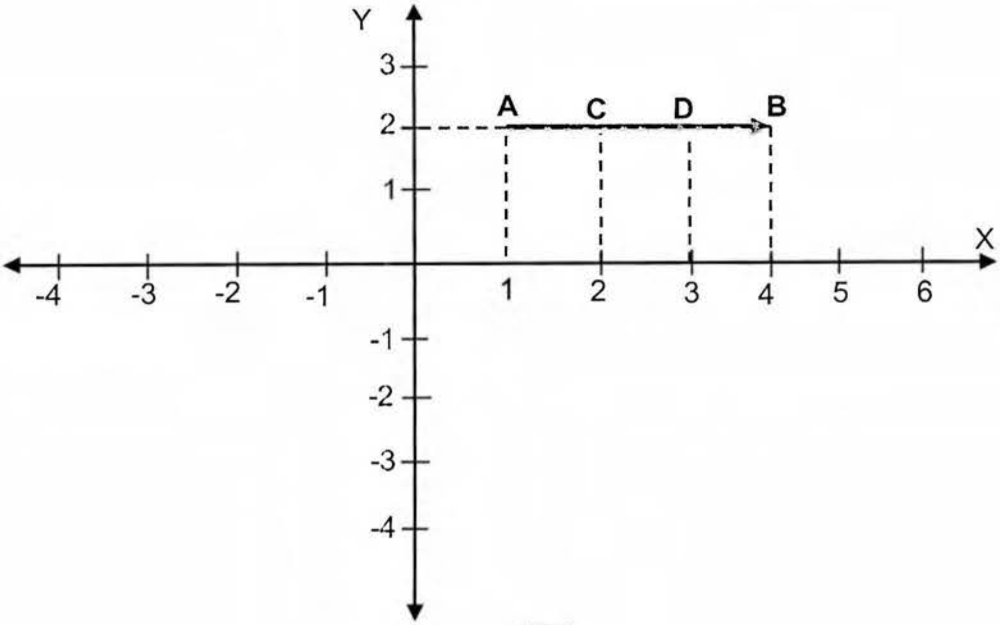
Un segmento de recta es el conjunto de puntos de una recta que están "entre" dos puntos dados. Veamos el siguiente dibujo



Para nombrar un segment usamos los dos puntos extremos y el símbolo $\overline{}$ sobre la letras que representan esos puntos. Ejemplo $\overline{AB}$

En la figura anterior, observamos que el segmento $\overline{AB}$ son todos los puntos de la recta m que están entre A y B. Ahora, definamos segmento utilizando vectores.

Dado dos puntos A y B en el plano, el segmento es el conjunto de puntos de la recta AB que están entre A y B. Así mismo, esos dos puntos determinan el vector $\overrightarrow{AB}$.



Sea C un punto que pertenece a $\overline{AB}$, es decir que esté "entre" A y B. Encontremos el número por el cual hay que multiplicar $\overrightarrow{AB}$ para formar el vector $\overrightarrow{AC}$. Observemos que las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son (3,0) y que las de $\overrightarrow{AC}$ son (1,0). Entonces $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, es decir, $(1,\ 0)=k(3,\ 0)=(3k,\ 0k)$, de ahí que 1=3k y 0=0k, por tanto $k = \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB}}$$

Cuando tenemos una ecuación como
0=0k, cualquier número real k cumple esa igualdad. En estos casos es la otra ecuación la que define el número real k que se necesita.

Hagamos lo mismo pero ahora para el punto D. Necesitamos encontrar un número real k que cumpla que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$, es decir, $(2\ 0)=k(3,\ 0)=(3k,\ 0k)$, de ahí que 2=3k y 0=0k, por tanto $k=\frac{2}{3}$.

$$\boxed{\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$$

Y si seguimos buscando números reales k por los cuales multiplicar el vector $\overrightarrow{AB}$ para formar el vector $\overrightarrow{AX}$, donde X es un punto entre A y B, vamos a notar que todos estos números k son mayores que 0 pero menores que 1. Entonces un segmento es el conjuntos de puntos X que cumplen que

$$\boxed{\overrightarrow{AX} = k\,\overrightarrow{AB}\text{ , con } 0 \leq k \leq 1}$$

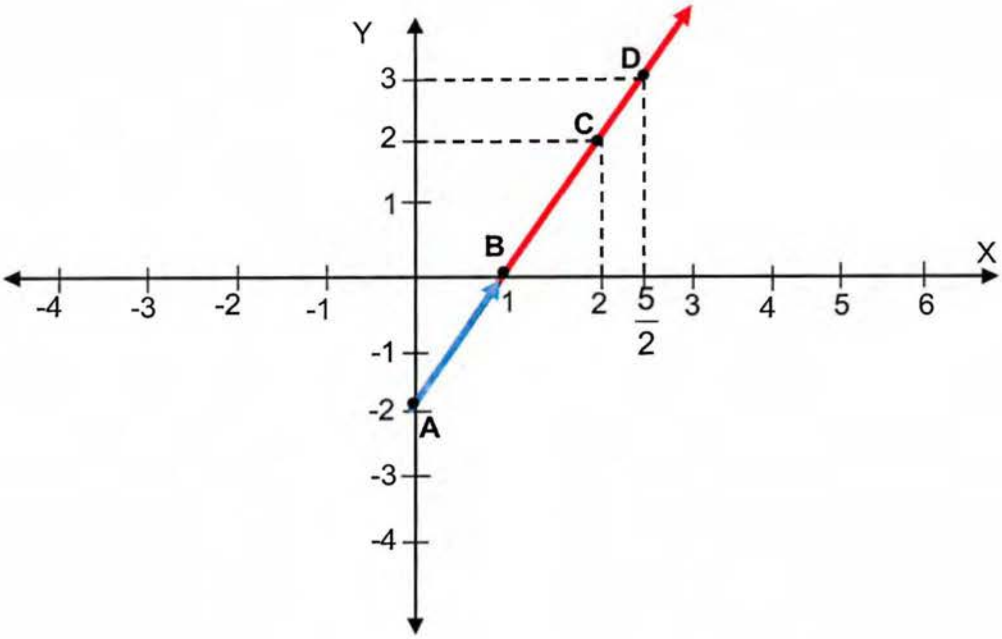
Ejercicio1.2

A. Determine si los puntos P(5,11) , Q(17,9) y $R\left(8,\ \frac{31}{4}\right)$ pertenecen al segmento de ecuación $\overrightarrow{AX}=k(4,1)$, con $0 \leq k \leq 1$ y A(5,7).

B. Si los puntos extremos del segmento $\overline{AB}$ son A(-7,9) y B(5,4). Determine la ecuación de dicho segmento.

Rayo

Es el conjunto de puntos de la recta que tiene "un inicio pero no un final". Se forma a partir de "estirar" un vector en la dirección del mismo, es decir, de multiplicarlo por un número real k positivo o cero. Se denota $\hat{AB}$.



El rayo $\hat{AB}$ lo forman los puntos "x" que cumplen que

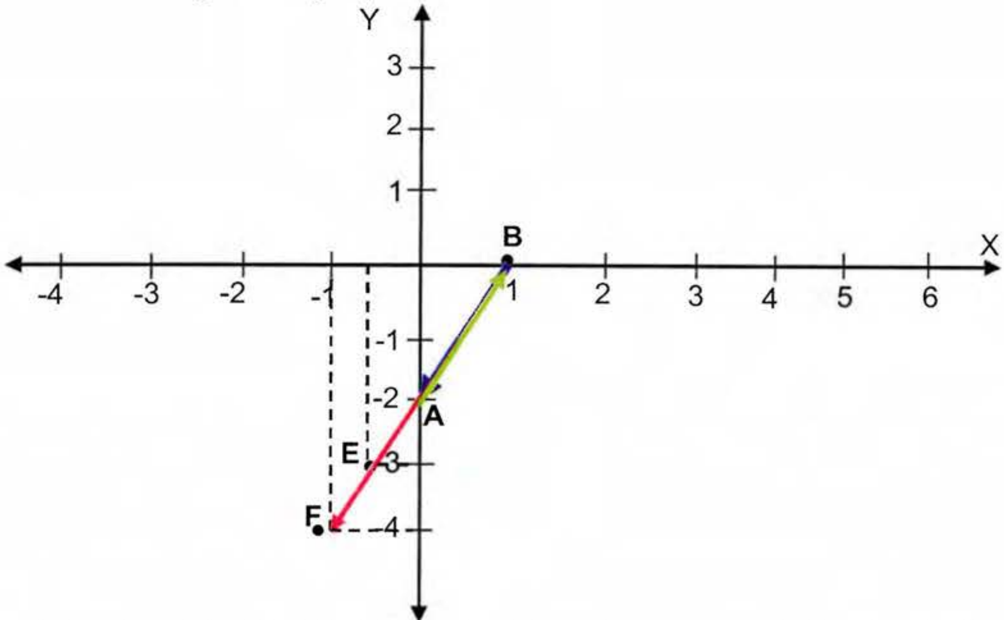
$$\boxed{\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB}\text{, con } 0 \le k}$$

Por ejemplo, en el dibujo anterior el punto C pertenece al rayo $\hat{AB}$ pues $\overrightarrow{AC} = C - A$, y $(2,4) = 2(1,2)$, es decir $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

El punto D también pertenece al rayo $\hat{AB}$ pues $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$. Así mismo, A y B pertenecen al rayo $\hat{AB}$ pues $\overrightarrow{AA} = 0\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB}$

Consideremos ahora el rayo $\hat{BA}$ ¿Será el mismo rayo $\hat{AB}$ que $\hat{BA}$?

Veamos el siguiente ejemplo



Vemos que el punto de origen de este rayo es B mientras que en el otro ejemplo el punto de origen del rayo es A, por tanto

El rayo $\hat{AB}$ es diferente al rayo $\hat{BA}$

Así mismo, realizando el mismo trabajo que en el caso anterior, F y E pertenece al rayo $\hat{BA}$ pues $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$.

Ahora, ¿F pertenece al rayo $\hat{AB}$?

Si F pertenecen al rayo $\hat{AB}$ cumpliría que $\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AB}$, con $k \geq 0$. Como las coordenadas de $\overrightarrow{AF}$ son (-1,-2) y las de $\overrightarrow{AB}$ son (1,2), tenemos que $(-1, -2)=k\cdot(1, 2)=(1k, 2k)$, entonces -1=1k y -2=2k, de lo cual obtenemos que k=-1 pero para pertenecer al rayo k debe ser un número mayor o igual a 0. Por tanto F no pertenece al rayo $\hat{AB}$.

Ejercicio 1.3

Determine si los puntos $P\left(-4,\frac{-2}{3}\right)$, $Q\left(-5,\frac{-7}{3}\right)$ y $R(-8,-14)$ pertenecen al rayo de ecuación $\overrightarrow{AX}=k(-3,-5)$, con $0 \leq k$ y A(-3,1).

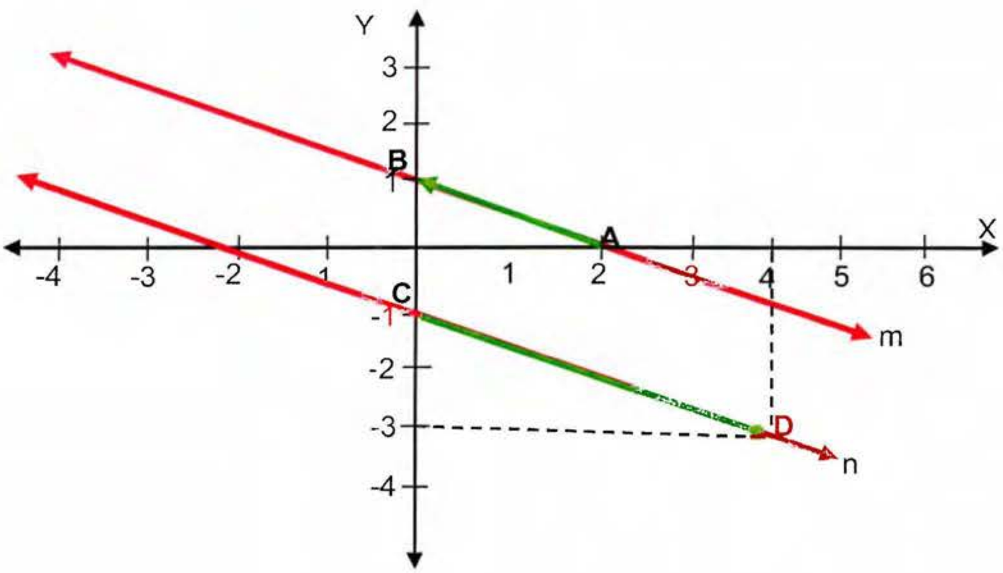
Rectas paralelas y Perpendiculares.

Rectas paralelas

Ejercicio 1.4

En la siguiente figura, subraye con rojo un par de rectas paralelas y con azul un par de rectas perpendiculares.

Sabemos de la escuela que dos rectas son paralelas si nunca se intersecan. Esto pasa solo cuando los vectores directores de cada una de las rectas son paralelos. Veamos el siguiente dibujo



En esta gráfica, la recta *m* y *n* son paralelas, pues sus vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos, es decir, uno es múltiplo de otro, pues $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ ya que $\overrightarrow{AB}$ tiene coordenadas (-2,1) y $\overrightarrow{CD}$ tiene coordenadas (4,-2).

Ejemplos

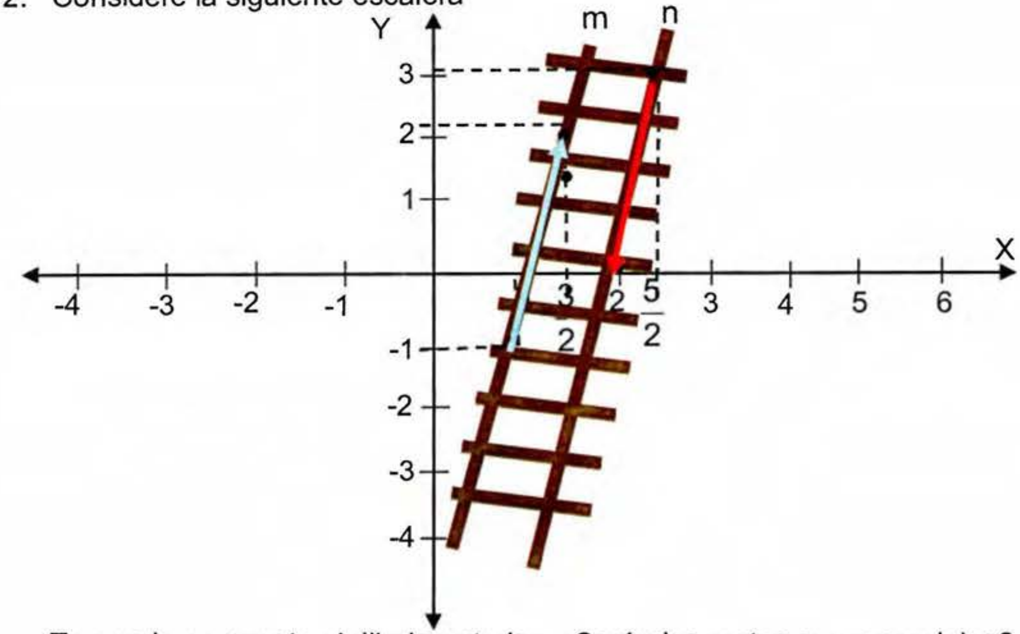
1. Si la recta m tiene como vector director el $\overrightarrow{AB}$ de coordenadas (3,-4) y la recta p tiene como vector director a $\overrightarrow{CD}$ de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$. Determine si las rectas *m* y *p* son paralelas.

Solución:

Para que las rectas *m* y *p* sean paralelas deben cumplir que sus vectores directores sean paralelos, es decir que uno sea múltiplo de otro. Si observamos las coordenadas de los vectores directores (3,-4) y $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, podemos inferir que $\left(\frac{3}{2}, -2\right)=\frac{1}{2}(3, -4)$, por tanto $\overrightarrow{CD}$ es múltiplo de $\overrightarrow{AB}$. Por tanto, las rectas m y p son paralelas.

Para escribir que dos o más rectas son paralelas se utiliza el símbolo //, entonces podemos escribir m // p.

2. Considere la siguiente escalera



Tomando en cuenta el dibujo anterior, ¿Serán las rectas m y n paralelas?

Solución:

Dos puntos que pertenecen a la recta *m* son (1,-1) y $\left(\frac{3}{2},2\right)$, por tanto, un vector director de esta recta es $\left(\frac{1}{2},3\right)$. Así mismo, $(2,\ 0)$y $\left(\frac{5}{2},3\right)$ pertenecen a la recta *n*, entonces $\left(-\frac{1}{2},-3\right)$. De ahí que la recta m // n pues $\left(\frac{1}{2},3\right)=-1\cdot\left(\frac{1}{2},3\right)$.

Ejercicios 1.5

A. Determine si la recta p y la recta q son paralelas tomando en cuenta que los vectores directores de ambas son

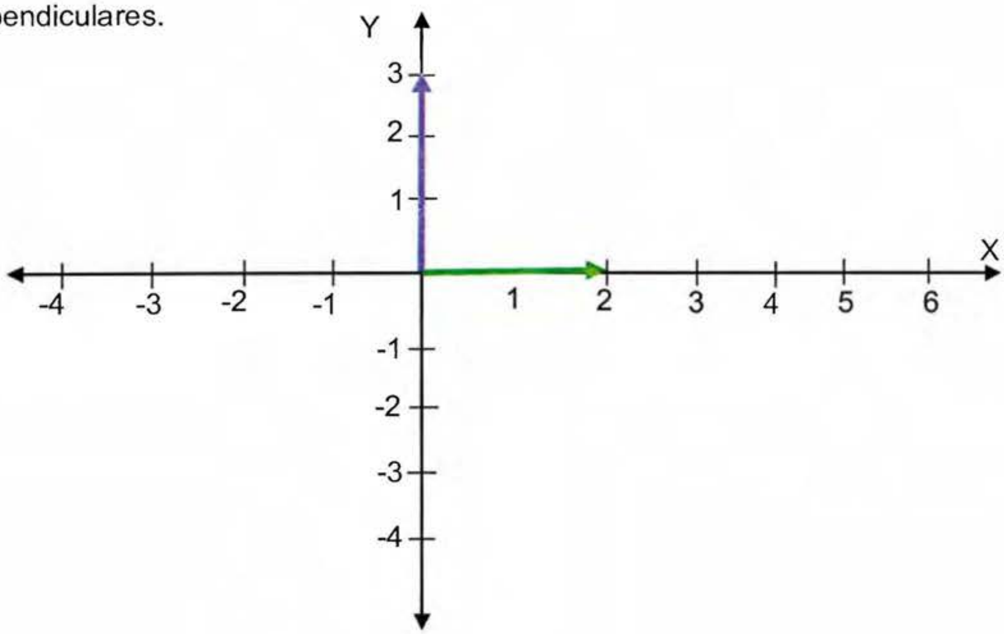
- (-1,5) y (4,-3)
- (2,-8) y (-7,28)
- $\left(\frac{1}{4},\frac{-3}{8}\right)$ y $\left(\frac{-1}{2},\frac{3}{4}\right)$

B. Si la recta *m* tiene como ecuación a $\overrightarrow{AX}=t\bullet(-6,4)$, donde A(-3,4) . Determine si la recta *p* que contiene los puntos $(2,-3)$ y $\left(\frac{7}{2},-4\right)$ es paralela a *m*.

C. Encuentre el número real k que hace que las rectas *t* y *p* sean paralelas cuando sus vectores directores son respectivamente $\left(\frac{-1}{4},\frac{7}{3}\right)$ y $\left(\frac{-3}{8},\frac{7}{2}\right)$.

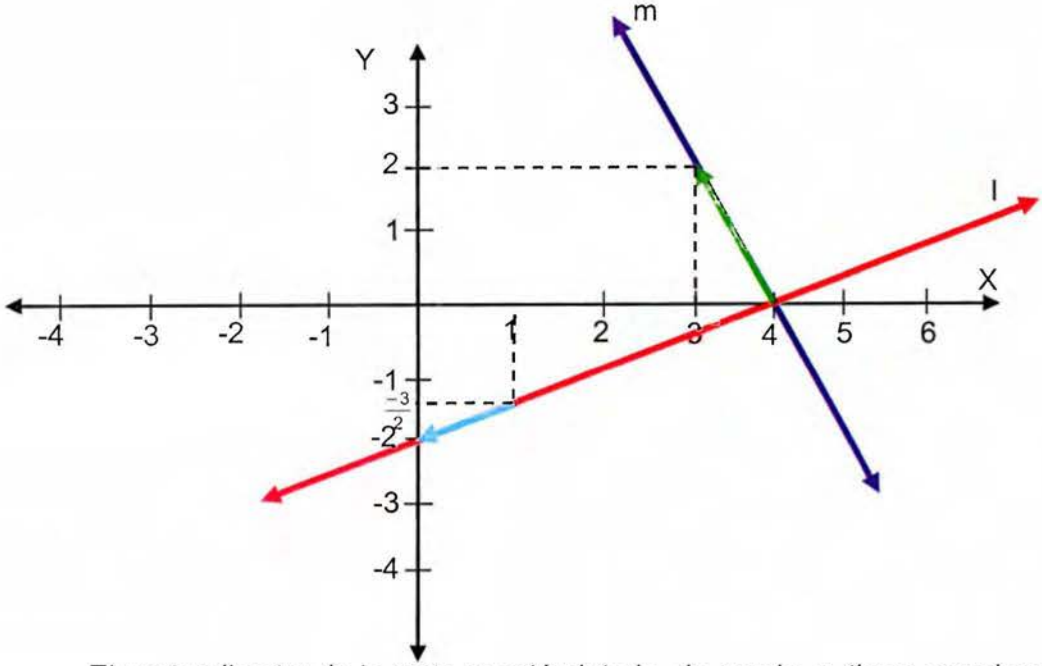
Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si se intersecan formando un ángulo recto, y esto pasa cuando el producto punto de sus vectores directores es cero. Comprobemos con esta definición que los ejes coordenados son rectas perpendiculares.



Un vector director del eje coordenado X es (2,0) y uno del eje coordenado Y es (0,3). Realizando el producto punto de estos dos vectores $(2,0)\bullet(0,3)=2\bullet0+0\bullet3=0$, por tanto, los ejes coordenados de un plano son rectas perpendiculares.

Veamos otro ejemplo. Consideremos la siguiente figura



El vector director de la recta m está pintado de verde y tiene coordenadas (-1,2); el vector director de la recta l está pintado de celeste y tiene coordenadas $\left(-1,\frac{-1}{2}\right)$. Ahora calculemos el producto punto de esos dos vectores

$$(-1,2)\cdot\left(-1,-\frac{1}{2}\right)=-1\cdot-1+2\cdot-\frac{1}{2}=1+-1=0$$

De aquí podemos concluir que la recta l es perpendicular a la recta m. Para decir lo anterior podemos utilizar el símbolo $\perp$ en lugar de la palabra perpendicular. Entonces podemos escribir m $\perp$ l.

Ejemplos

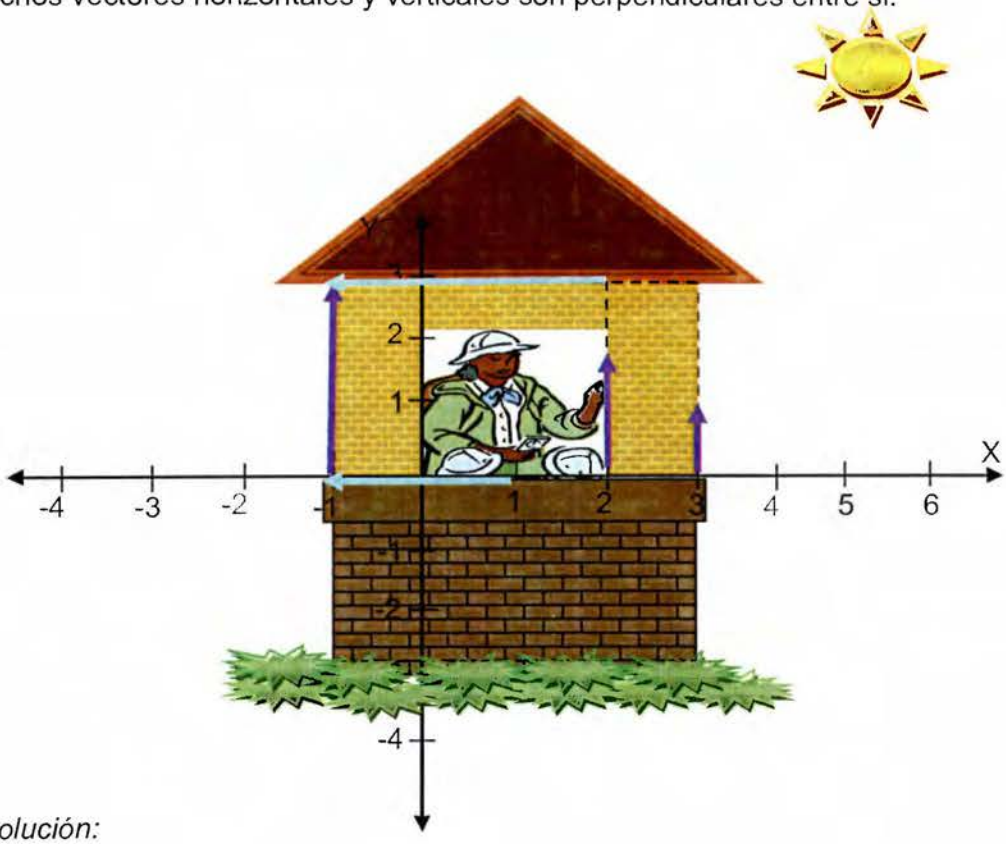
1. Si la recta *m* tiene como vector director el $\overrightarrow{AB}$ de coordenadas (3,-4) y la recta *p* tiene como vector director a $\overrightarrow{CD}$ de coordenadas $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{8}\right)$. Determine si las rectas *m* y *p* son perpendiculares.

Solución:

Para que las rectas m y p sean perpendiculares deben cumplir que el producto punto de sus vectores directores sea cero. Es decir

$$(3,-4)\cdot\left(\frac{3}{2},\frac{9}{8}\right)=3\cdot\frac{3}{2}+-4\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{2}+-\frac{9}{2}=0 \qquad \text{Por tanto, } m \perp p$$

2. Compruebe que los vectores señalados con morado en la casetilla del guarda son paralelos, así como los vectores señalados de celeste. Además, compruebe que dichos vectores horizontales y verticales son perpendiculares entre si.



Solución:

Los vectores verticales de derecha a izquierda tiene como coordenadas (0,1), (0,2), (0, 2,5), y (0,3) y los vectores horizontales de abajo hacia arriba tiene como coordenadas (-2,0) y (-3,0).

Si los vectores verticales fueran paralelos pasaría que $(0, 2)=k(0,1)$, $(0, 2{,}5)=t(0,1)$ y $(0, 3)=h(0,1)$. Claramente, k=2, t=2.5 y h=3. Por tanto, los cuatro vectores verticales son paralelos entre sí.

Ahora, comprobemos que los vectores horizontales son paralelos. Debería darse que $(-3{,}0) = p(-2{,}0)$. De ahí que $p=\frac{3}{2}$. Entonces los vectores horizontales también son paralelos.

Por otro lado, si comprobamos que uno de los vectores verticales es perpendicular a uno de los vectores horizontales, obtenemos que todos estos son perpendiculares entre sí, pues si un vector es perpendicular a otro, es también perpendicular a todos los múltiplos de este.

Entonces, debemos tener que el producto punto entre los vectores (-3,0) y (0,-3) da cero, es decir, $-3\cdot 0+0\cdot 3=0$. Así mismo, si realizo el producto punto del los vectores con coordenadas (0,1), (0,2), (0,2.5) y el vector (-3,0), el resultado es 0.

Ejercicios 1.6

A. Determine si la recta m de ecuación $\overline{AX}=t\cdot(-4, 6)$, donde A(3,-8) y $t \in$ IR es perpendicular a la recta p que tiene como vector director a $\left(2, \frac{4}{3}\right)$.

B. Determine si la recta p y la recta q son perpendiculares tomando en cuenta que los vectores directores de ambas son

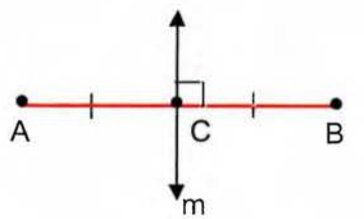
- $(2,-6)$ y $\left(5\ \frac{1}{3}\right)$
- $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ y $(1, 2)$
- $(-5{,}4)$ y $(-10, 25)$

C. Si la recta q contiene a los puntos A(10,2) y B(11,-3) y la recta p contiene los puntos C(-4,3) y D(9,4). Determine si $q \perp p$.

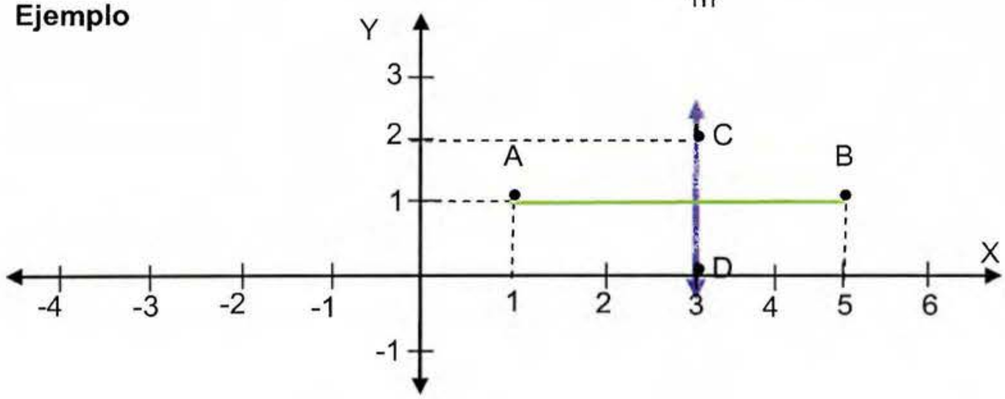
Mediatriz de un segmento.

Es la recta que interseca a un segmento perpendicularmente en su punto medio, es decir, divide al segmento en partes iguales y forma un ángulo de 90º. Si tomamos un vector de dicha recta y un vector de este segmento, podemos verificar que el producto punto entre dichos vectores es cero.

La recta *m* se llama mediatriz del segmento $\overline{AB}$, ya que contiene el punto medio de $\overline{AB}$ y forma un ángulo de 90º.



Ejemplo



Consideremos el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector $\overrightarrow{DC}$, el producto punto entre dichos vectores es

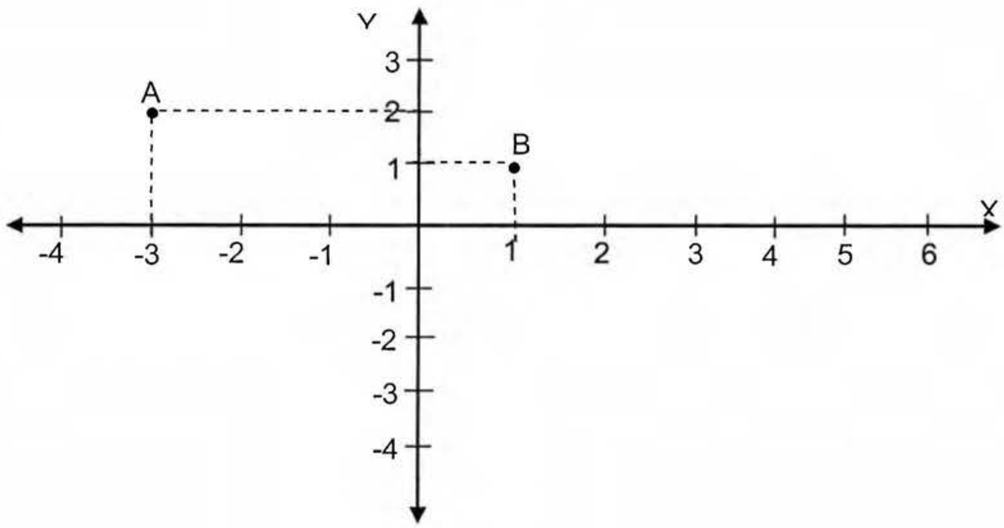
$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{DC} = (4,0) \bullet (0,2) = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0$$

Con esto verificamos que el segmento AB y la recta DC son perpendiculares y además $\overleftrightarrow{DC}$ pasa por el punto medio de $\overline{AB}$, por lo que $\overleftrightarrow{DC}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$

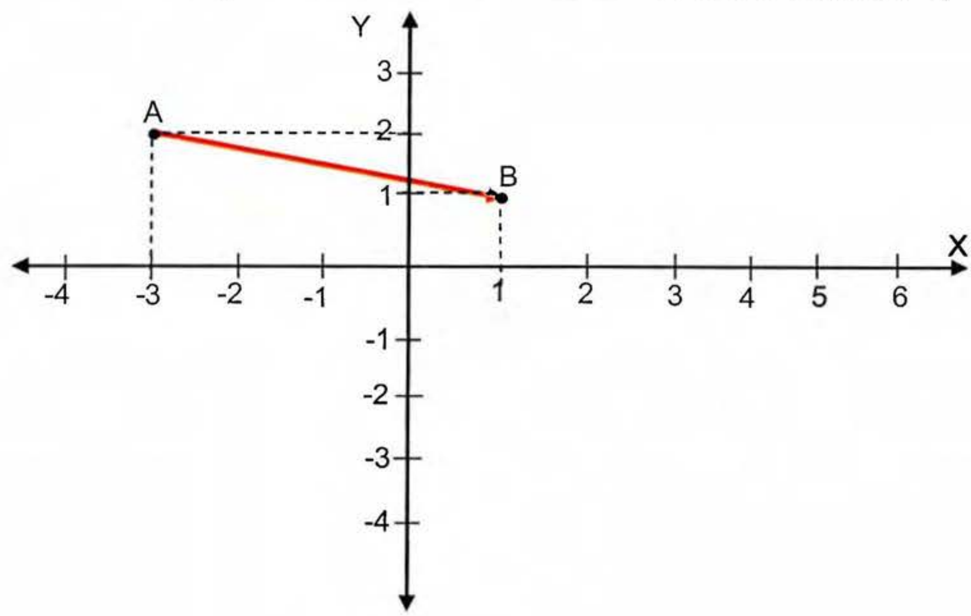
Relaciones entre puntos y rectas.

En el siguiente apartado vamos a establecer algunas relaciones importantes entre los puntos, las rectas y los planos, utilizando los conceptos de vectores estudiados hasta el momento.

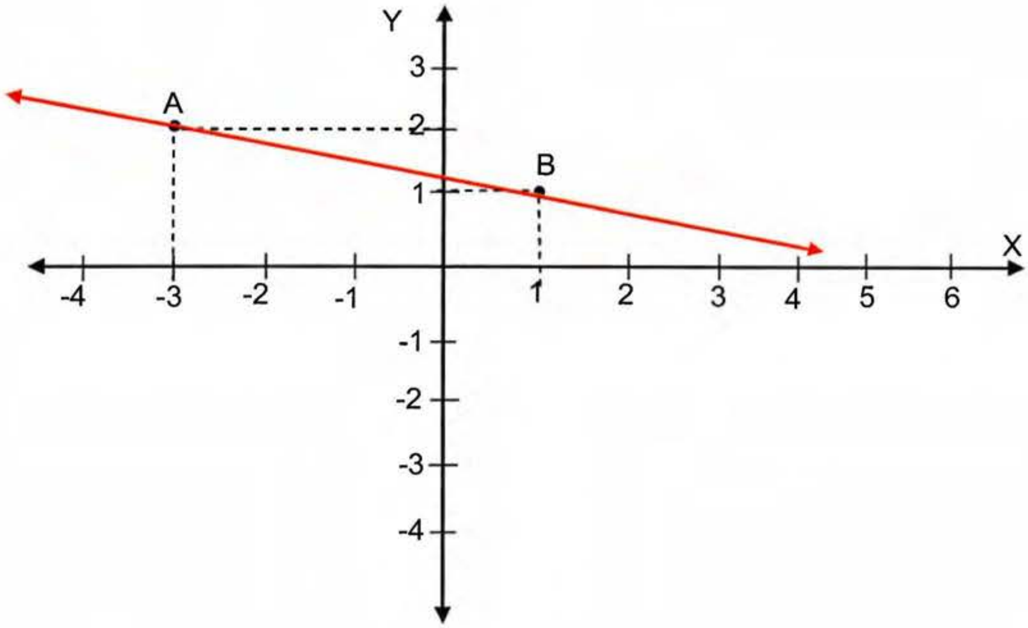
1. Consideremos dos puntos A, B en el plano.



Estos dos puntos determinar el vector $\overrightarrow{AB}$ de coordenadas (4, -1)



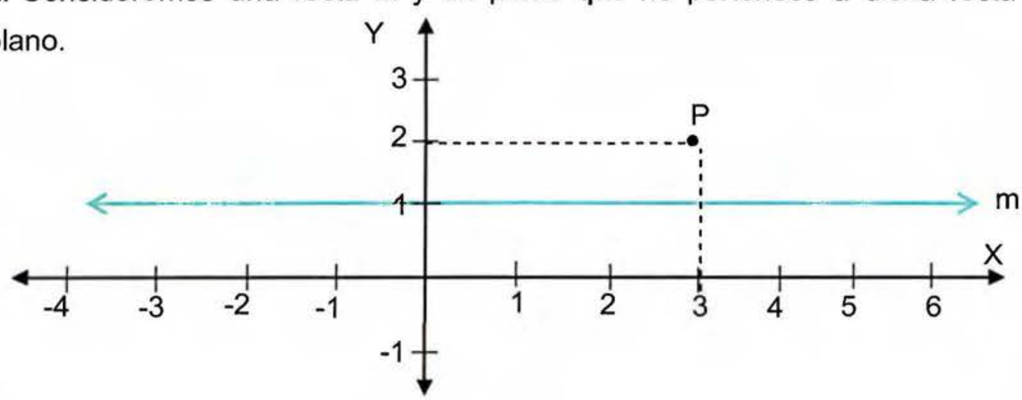
Ahora, si dejamos el punto A fijo y "estiramos" el vector $\overrightarrow{AB}$ en ambas direcciones obtenemos la recta $\overleftrightarrow{AB}$



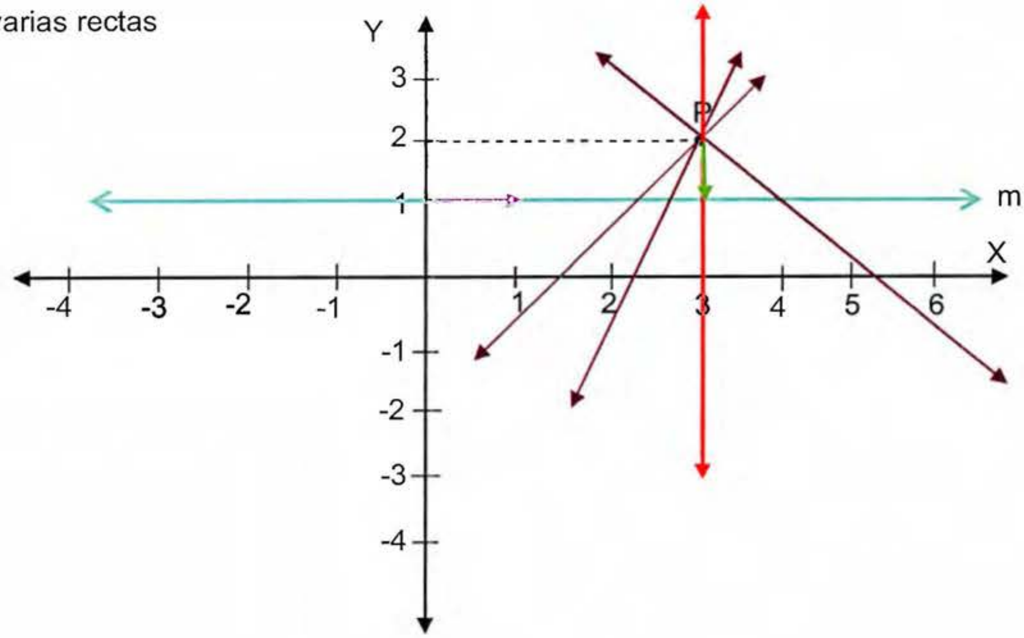
Resumiendo, si tenemos dos puntos en el plano estos determinan un único vector, y este vector junto con un punto fijo va a generar una recta. Entonces podemos decir lo siguiente

> Si tenemos dos puntos en el plano existe una única recta que contiene a dichos puntos

2. Consideremos una recta m y un punto que no pertenece a dicha recta en el plano.



Utilizando el punto P y cualquier otro punto de la recta m se puede trazar varias rectas



En particular estudiemos la recta l (roja) y la recta m. La recta m tiene vector director de coordenadas (1,0) y la recta l tiene vector director de coordenadas (0,1).

Ahora el producto punto entre los vectores directores de las rectas l y m está dado por

$$(1,0)\cdot(0,1)=1\cdot 0+0\cdot 1=0+0=0$$

Por lo tanto las rectas l y m son perpendiculares.

¿Existe otra recta diferente de l que pase por P y que sea perpendicular a m?

Supongamos que existe otra recta n que es perpendicular a la recta m. La recta n pasa por el punto P (3,2) y por un punto Q(a,b) que pertenece a m. El vector director de n es (3-a, 2-1)= (3-a, 1).

Si la recta n y la recta m son perpendiculares entonces el producto punto tiene que dar cero

$$(1,0)\cdot(3-a,1)=0$$
$$1\cdot(3-a)+0=0$$
$$3-a=0$$
$$3=a$$

Entonces, la recta n contiene el punto Q de coordenadas (3,1), sin embargo el punto de coordenadas (3,1) pertenece a la recta l.

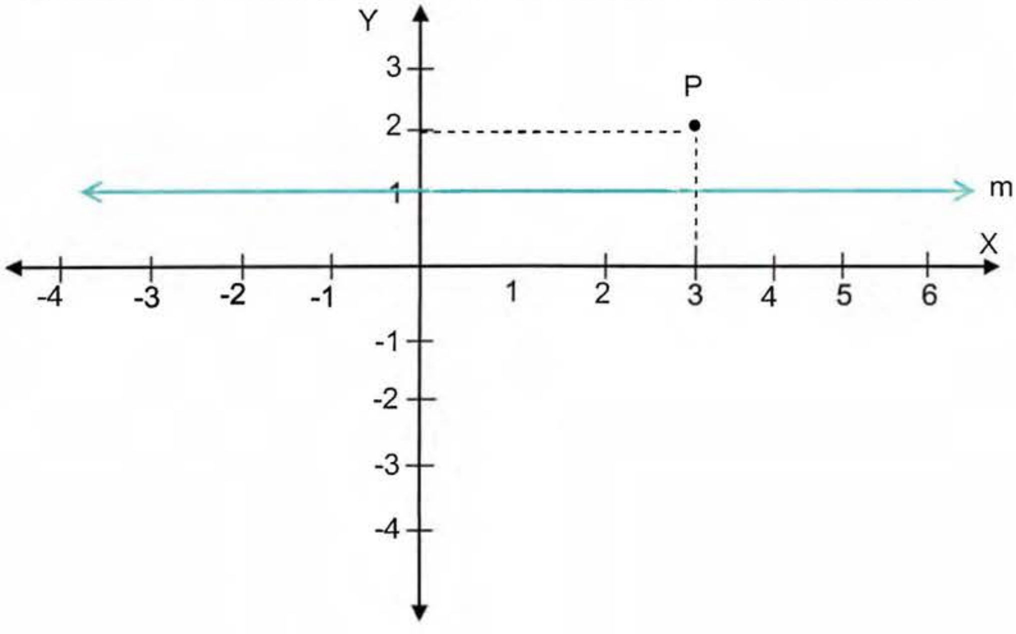
Ahora, ya sabemos que dados dos puntos en el plano existe una única recta que los contiene, por lo tanto la recta l y la recta n tienen que ser la misma.

De aquí

Dado una recta l y un punto P que no pertenece a ella, existe una única recta perpendicular a l que contiene a P.

Ahora, ya sabemos que dada una recta l y un punto P que no pertenece a ella existe una única recta perpendicular a l que contiene a P.

¿Cómo encontramos la ecuación de la recta que es perpendicular a l?

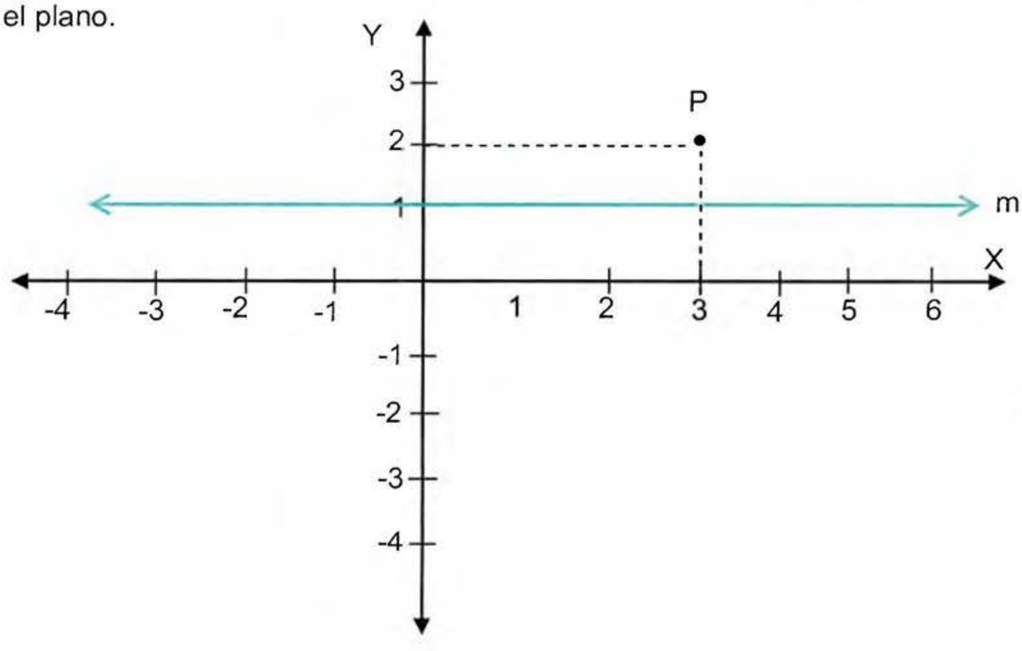


Para determinar la ecuación de una recta perpendicular a la recta *m* necesitamos un punto fijo y el vector director de dicha recta. Tomemos P el punto fijo y hallemos el vector director.

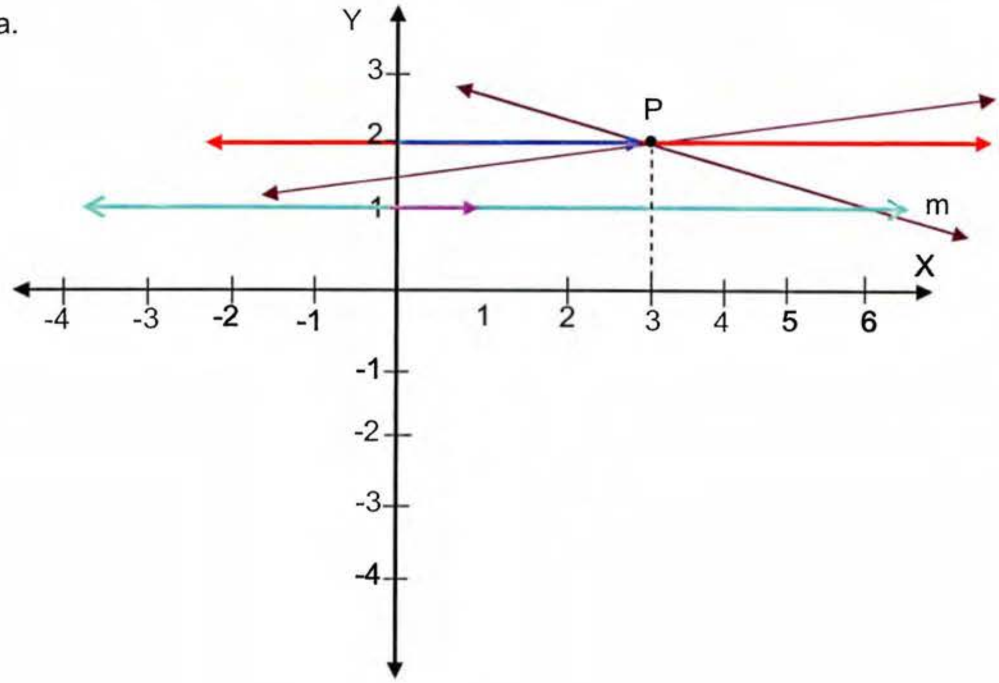
Recordemos que para que las rectas sean perpendiculares debemos verificar que el producto punto de los vectores directores de dichas rectas sea cero, por lo tanto vamos a identificar primero el vector director de la recta m. Como los puntos (0,1) y (3,1) pertenece a la recta *m* entonces un vector director de dicha recta está dado por (3,1)-(0,1)= (3-0,1-1)=(3,0), por lo tanto tiene coordenadas (3,0).

Ahora, un vector perpendicular al vector de coordenadas (3,0) es el vector de coordenadas (0,-3). Entonces tenemos el punto P(3,2) fijo y el vector director de coordenadas (0,-3), por lo que la ecuación de la recta es $\overrightarrow{PK} = k(0,-3)$

3. Consideremos de nuevo la recta m y un punto P que no pertenece a dicha recta en el plano.



Por el punto P se pueden trazar infinitas rectas,como vemos en la siguiente figura.



En particular estudiemos la recta l (roja) y la recta m. Consideremos el vector de coordenadas (1,0) el vector director de la recta m (rosado) y al vector de coordenadas (3,0) el vector director de la recta l (azul). Ahora estos dos vectores directores son paralelos, ya que tenemos

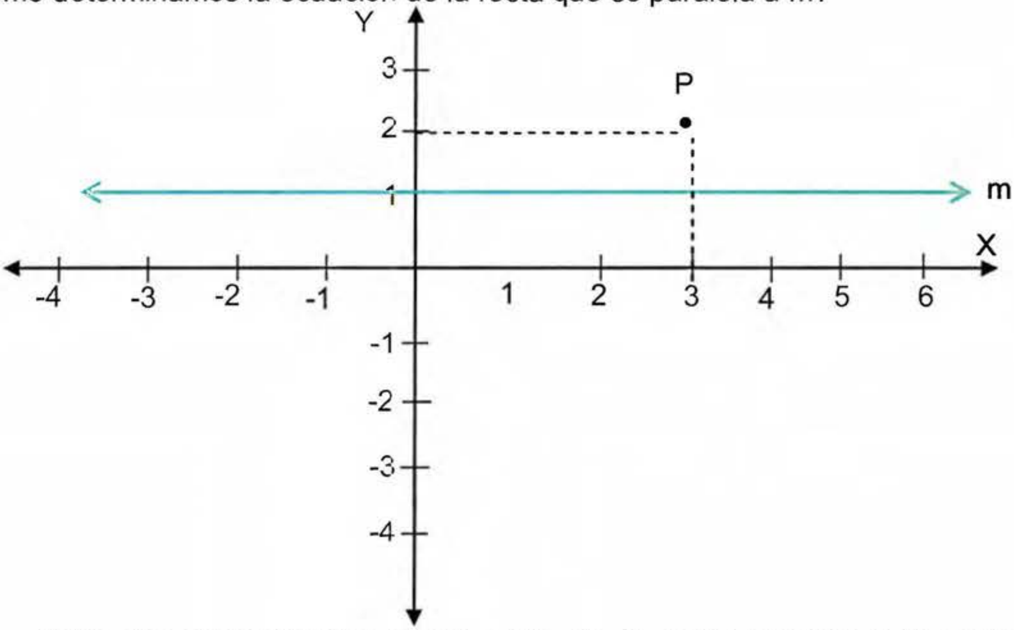
$$(3,0)=3(1,0)$$

Por lo tanto las rectas l y m son paralelas. De aquí si tenemos una recta y un punto que no pertenece a dicha recta existe una recta paralela a la recta dada.

Dado una recta m y un punto P que no pertenece a ella, existe una única recta paralela a *m* que contiene a P.

Ahora, ya sabemos que dada una recta l y un punto P que no pertenece a ella existe una única recta paralela a m que contiene a P.

¿Cómo determinamos la ecuación de la recta que es paralela a m?



Para ello determinemos la ecuación de la recta paralela a la recta m necesitamos un punto fijo y el vector director de dicha recta.

Tomemos P el punto fijo y encontremos el vector director. Recordemos que para que las rectas sean paralelas debemos verificar que los vectores directores sean múltiplos, por lo tanto vamos a identificar primero el vector director de la recta *m*. Como los puntos (0,1) y (3,1) pertenece a la recta m entonces un vector director de la misma está dado por (3,1)-(0,1)= (3-0,1-1)=(3,0), por lo tanto tiene coordenadas (3,0).

Ahora, un vector múltiplo al vector de coordenadas (3,0) que tiene su origen en P tiene que cumplir: $(3,0)=k\overrightarrow{PX}$, tomemos k=2 y obtenemos

$$(3,0)=k\overline{PX}=2(x-3,y-2)=(2x-6,2y-4)$$

$$3=2x_1-6 \qquad\qquad 0=2x_2-4$$

$$\frac{9}{2}=x_1 \qquad \text{y} \qquad 2=x_2$$

Entonces tenemos el punto P(3,2) fijo y el vector director de coordenadas $\left(\frac{9}{2},2\right)$, por lo que la ecuación de la recta es $\overline{PX} = k(\frac{9}{2},2)$.

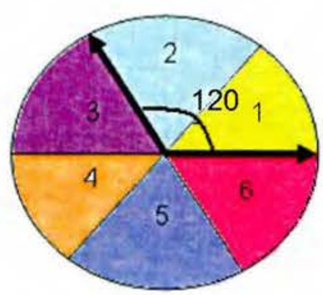
4.2.2 <u>*Transformaciones isométricas.*</u>

En nuestra cotidianidad siempre hemos visto como algunas figuras sufren transformaciones, por ejemplo, hemos visto a un carro **trasladarse** en línea recta de un lugar a otro, o una carrusel **rotar,** o hemos visto figuras que son **simétricas,** es decir en las que se puede trazar un línea recta en la mitad y ambas partes se pueden hacer coincidir una con la otra.

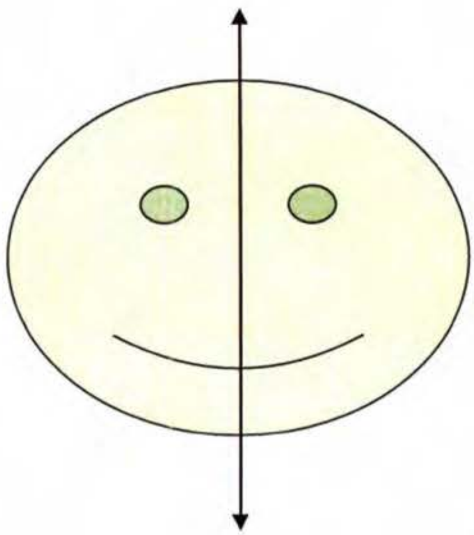
Una transformación transforma una figura en otra figura, con diversas características.

Veamos algunos ejemplos de transformaciones.

El carrito 1 se trasladó y se transformó en el carrito 2

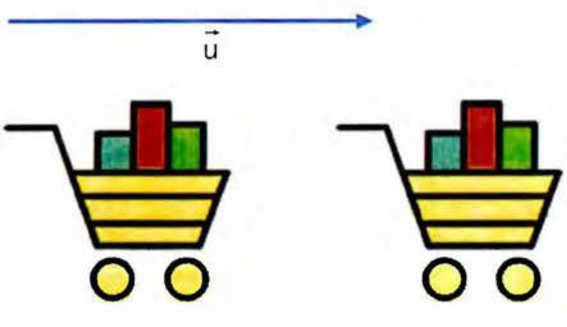


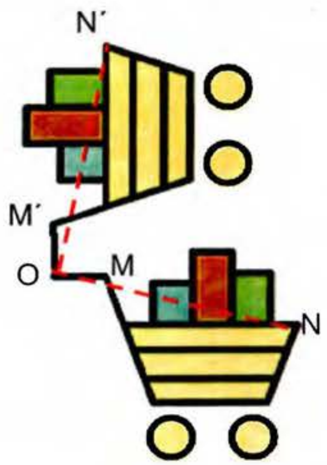
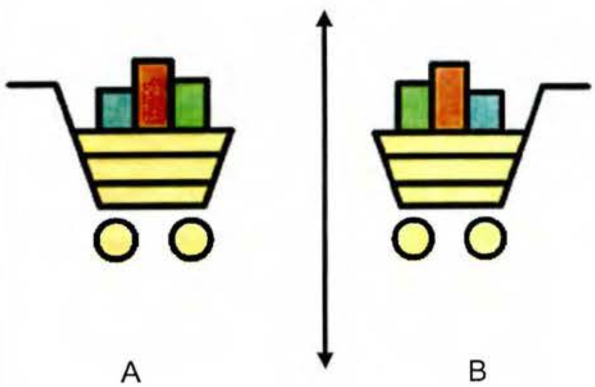
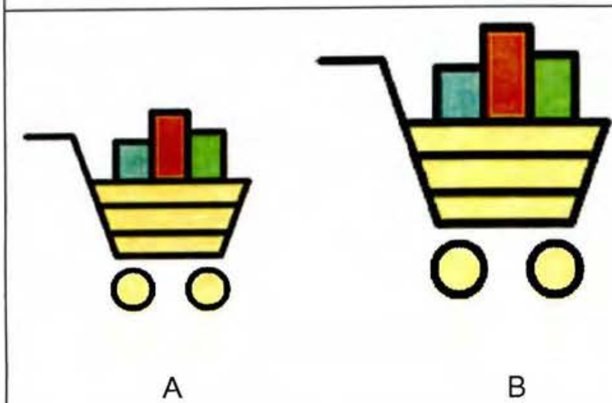
La flecha entre 1 y 2 rotó un ángulo de 120° y quedó colocada entre el 2 y el 3



La cara quedó dividida en dos partes iguales y simétricas

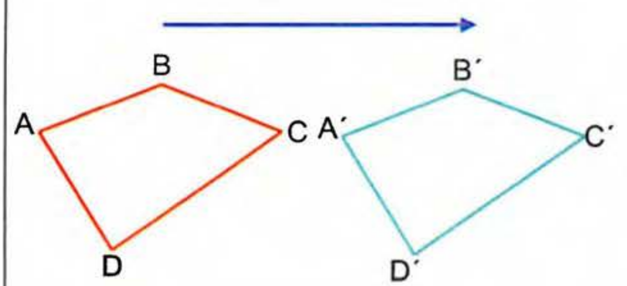
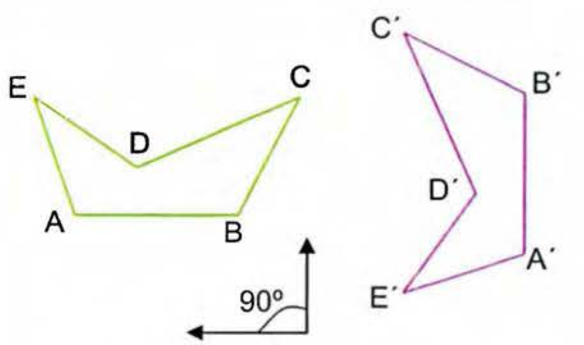
Ahora, observemos las transformaciones que sufrió el carro de supermercado. Preste atención cada figura y conteste lo que se le solicita con la ayuda de su profesor.

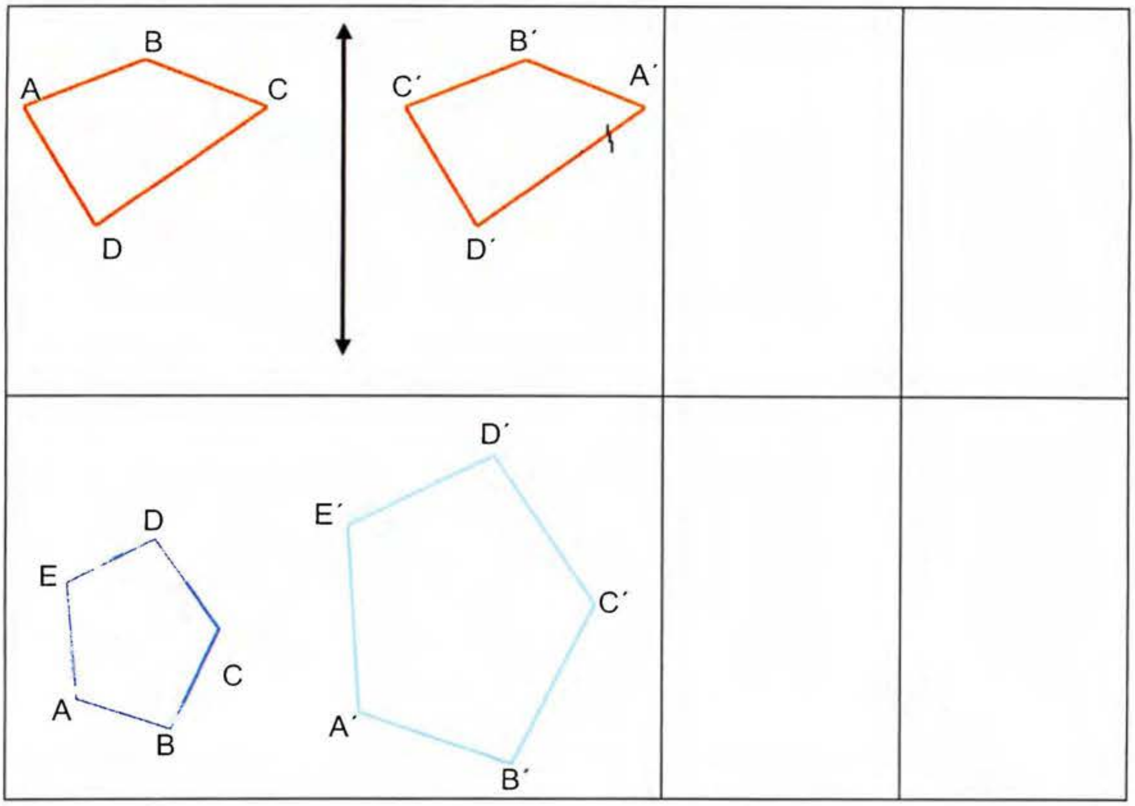
Figura	¿Qué transformación sufrió la figura?	¿Qué cambio ocurrió con el tamaño?
 $\vec{u}$ A B		

 N´ M´ O M N		
 A B		
 A B		

En las figuras anteriores observamos el que carro A se ha transformado en el carro B.

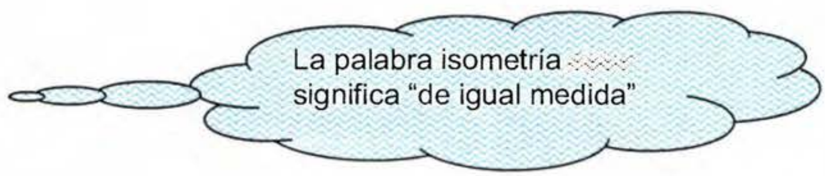
Ahora observemos las transformaciones de las siguientes figuras geométricas.

Figura	¿Qué transformación sufrió la figura?	¿Qué cambio ocurrió con la medida de los lados y de los ángulos de la figura?
		
		



En las 4 figuras anteriores se transforma la figura ABCD o ABCDE en la figura A´B´C´D´ ó A´B´C´D´E´ respectivamente.

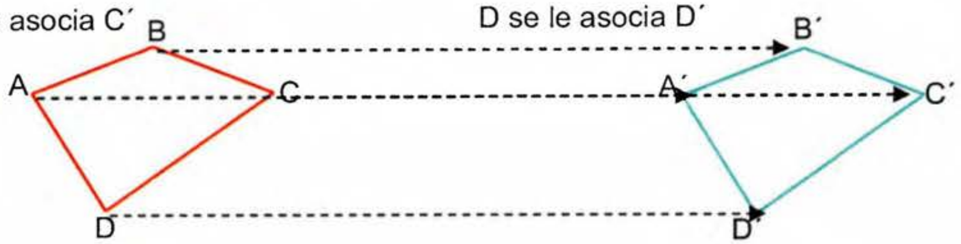
En las tres primeras figuras las medidas de sus lados y de sus ángulos no cambia es la misma. A este tipo de transformaciones se les llama <u>Transformaciones Isométricas.</u> En la cuarta figura la longitud de los lados no es la misma, la figura se hace más grande por lo que no es una transformación isométrica.



Una transformación es una relación que se establece entre un conjunto y él mismo, en donde a cada elemento del conjunto se le asigna un elemento del conjunto. Por ejemplo, utilicemos las figuras anteriores y consideremos al cuadrilátero ABCD y el cuadrilátero A´B´C´D´ .Tenemos que a cada punto de ABCD se le asocia un punto de A´B´C´D´. En este caso el conjunto en el que estamos trabajando es el conjunto de puntos del plano, es decir, que a cada punto del plano se le asocia otro punto del plano.

A se le asocia A´ | B se le asocia B´

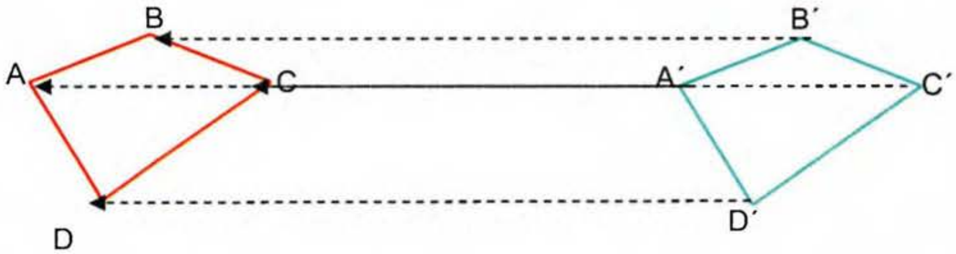
C se le asocia C´ | D se le asocia D´



También podemos decir que

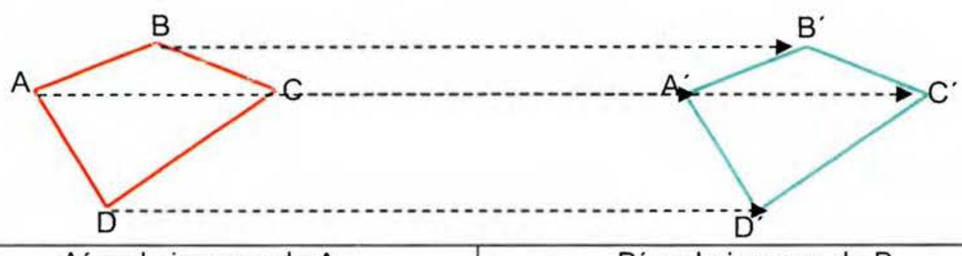
A´ se le asocia A | B´ se le asocia B

C´ se le asocia C | D´ se le asocia D



Además, a los puntos de la figura original se les llama preimágenes y a los puntos de la figura transformada se le llama imágenes, es decir

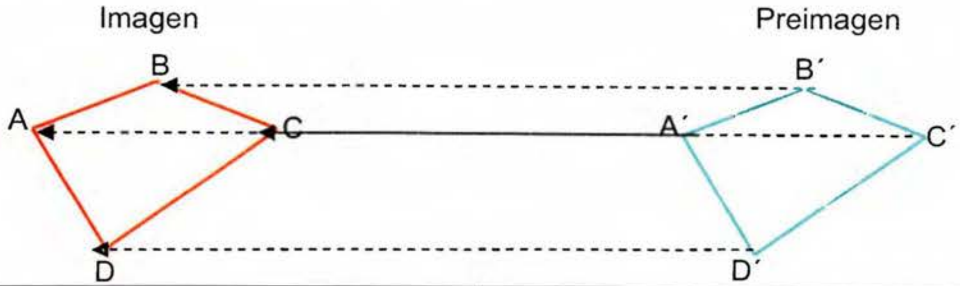
Preimagen | Imagen



A´ es la imagen de A	B´ es la imagen de B
C´ es la imagen de C	D´ es la imagen de D
A es la preimagen de A´	B es la preimagen de B´

C es la preimagen de C´	D es la preimagen de D´

o si se tiene



A´ es la preimagen de A	B´ es la preimagen de B
C´ es la preimagen de C	D´ es la preimagen de D
A es la imagen de A´	B es la imagen de B´
C es la imagen de C´	D es la imagen de D´

Asimismo, podemos asociar lados y ángulos, es decir,

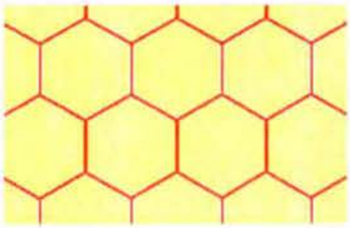
$\overline{AB}$ es la preimagen de $\overline{A'B'}$	$\angle ABC$ es la preimagen de $\angle A'B'C'$
$\overline{BC}$ es la preimagen de $\overline{B'C'}$	$\angle BCD$ es la preimagen de $\angle B'C'D'$
$\overline{A'B'}$ es la imagen de $\overline{AB}$	$\angle A'B'C'$ es la imagen de $\angle ABC$
$\overline{B'C'}$ es la imagen de $\overline{BC}$	$\angle B'C'D'$ es la imagen de $\angle BCD$

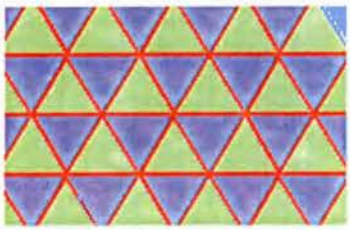
Estudiemos más a fondo cada una de las tres figuras anteriores

Traslación

El profesor de Matemática le asigna una tarea a Carlos para que investigue qué son los teselados, y esto fue lo que Carlos investigó: Los teselados son los diseños de figuras geométricas que por sí mismas o en combinación cubren una superficie plana sin dejar huecos ni superponerse. [31]

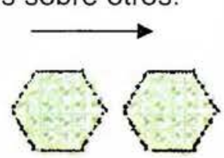
Algunas son:





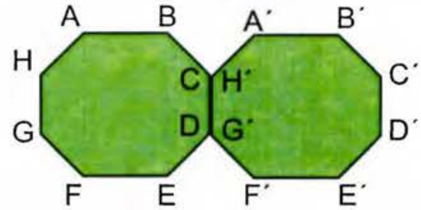
Imagenes tomada de http://elclubdelamatematica.blogspot.com/2010/02/mosaico-o-teselado.html

Hay muchos tipos de teselados y se construyen utilizando diversos métodos, por ejemplo, las dos teselaciones anteriores se obtienen al trasladar el hexágono regular y el triángulo equilátero de manera que no queden huecos y que no queden unos sobre otros.

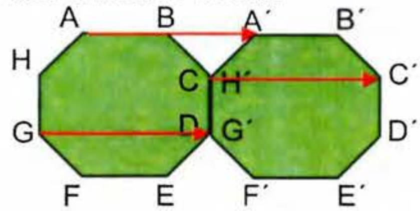


Si le podemos nombre a cada uno de los vértices de cada hexágono podemos observar de la siguiente figura que:

A le corresponde el A´	D le corresponde D´
B le corresponde B´	E le corresponde E´
C le corresponde C´	F le corresponde F´

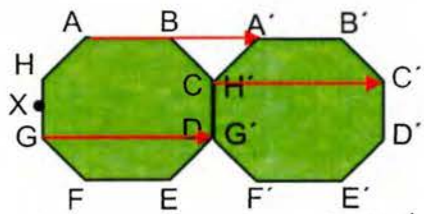


También podemos observar que si trazamos cada uno de los vectores de los puntos correspondientes son el mismo vector.



Es decir, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{HH'}$.

Si tomamos un punto X en el primer hexágono, marque el punto X´ y ¿Podemos decir qué $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'}$?



Ahora, utiliza alguna figura y crea una teselación[1] utilizando traslaciones. Observa la siguiente figura que es ejemplo de esto.

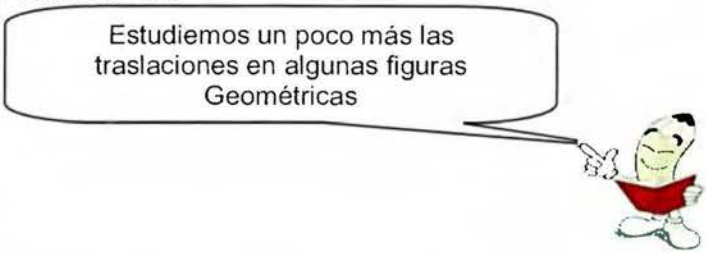
[1] Una teselación es una regularidad o patrón de figuras que cubre o pavimenta completamente una superficie plana que cumple con dos requisitos: que no queden huecos y que no se superpongan las figuras. [31]

Imagen tomada de www.profesorenlínea.cl

Algunos pasos que pueden ayudar para construir diseños de teselaciones son los siguientes:

Escoja un de polígono regular con los que se puede teselar el plano. Los únicos polígonos regulares que cubren completamente una superficie plana son: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono ya que la unión en cada vértice debe sumar 360º para que no queden espacios. [32]

- Recorta una sección del mismo que no tenga intersecciones.
- Pega el segmento recortado del lado opuesto al que fue cortado.
- Repite este proceso cuantas veces quieras.
- Utiliza esta figura como molde para copiarla en una hoja, después trasládala sobre la hoja sin que quede una sobre la otra.
- Decora tus figuras.



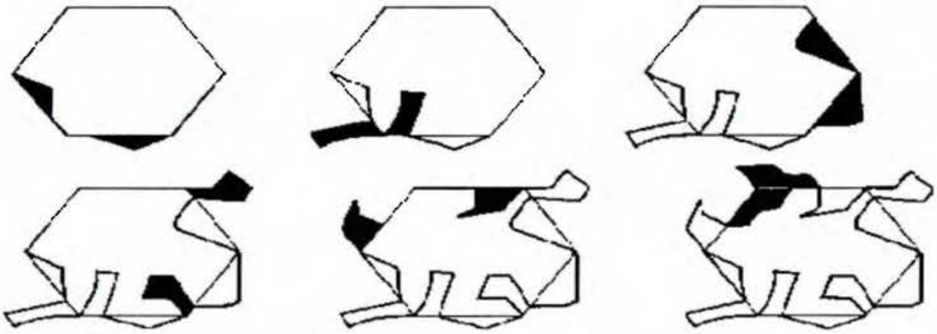


Figura tomada de www.uv.es/buso/escher/index_es.html

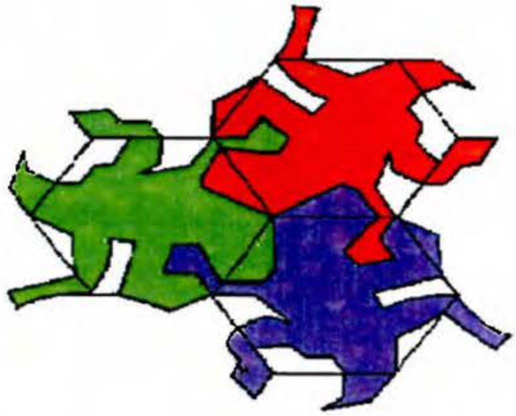
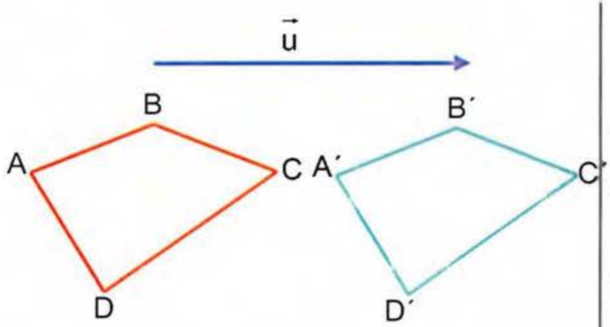


Figura tomada de www.uv.es/buso/escher/index_es.html

Regresemos a los ejemplos que vimos antes con las figuras geométricas

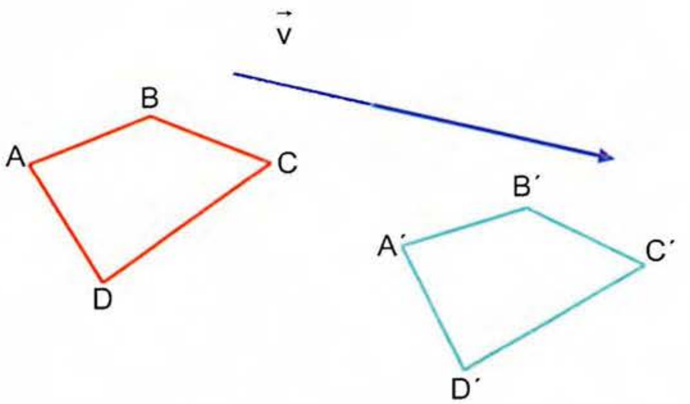


En la figura tenemos el cuadrilátero ABCD, el cuadrilátero transformado A´B´C´D´ y el vector $\vec{u}$.

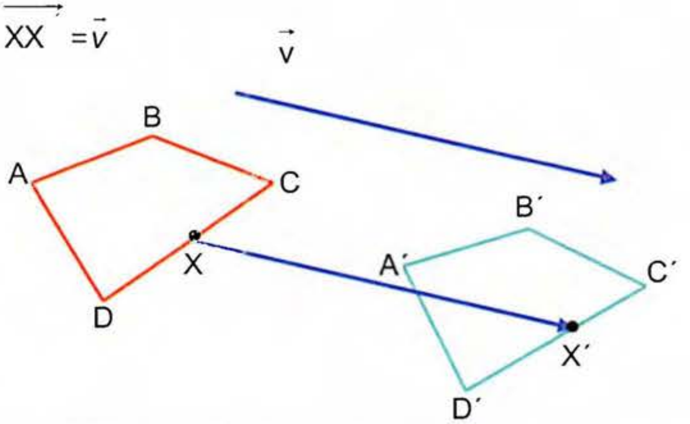
La transformación de ABCD en A´B´C´D´ se le llama una traslación de vector $\vec{u}$.

Recordemos que $\vec{u}$ nos da una magnitud y una dirección que va a caracterizar la traslación.

Si utilizamos la misma figura anterior pero cambiamos el vector $\vec{u}$ por otro vector $\vec{v}$ diferente de $\vec{u}$ obtenemos una traslación diferente, observemos el siguiente dibujo.



Es importante observar que el vector determinado por $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$ $= \vec{v}$, ya que la traslación lo que hace es asociarle todo punto X del cuadrilátero un X´ que cumpla $\overrightarrow{XX'} = \vec{v}$



Una traslación del vector $\vec{v}$ es una transformación isométrica en donde a cada punto X le asocia un punto X´ que cumple que $\overrightarrow{XX'} = \vec{v}$

Ejemplos

1. Tomemos el segmento $\overline{AB}$ en el plano, con A(-2,3) y B(-3,-1) y encontremos la imagen por la traslación de vector $\vec{u}$ =(3,-1).

Solución

A cada punto X del segmento le va a corresponder un punto X´ que cumple que $\overrightarrow{XX'} = \vec{u} = (3,-1)$.

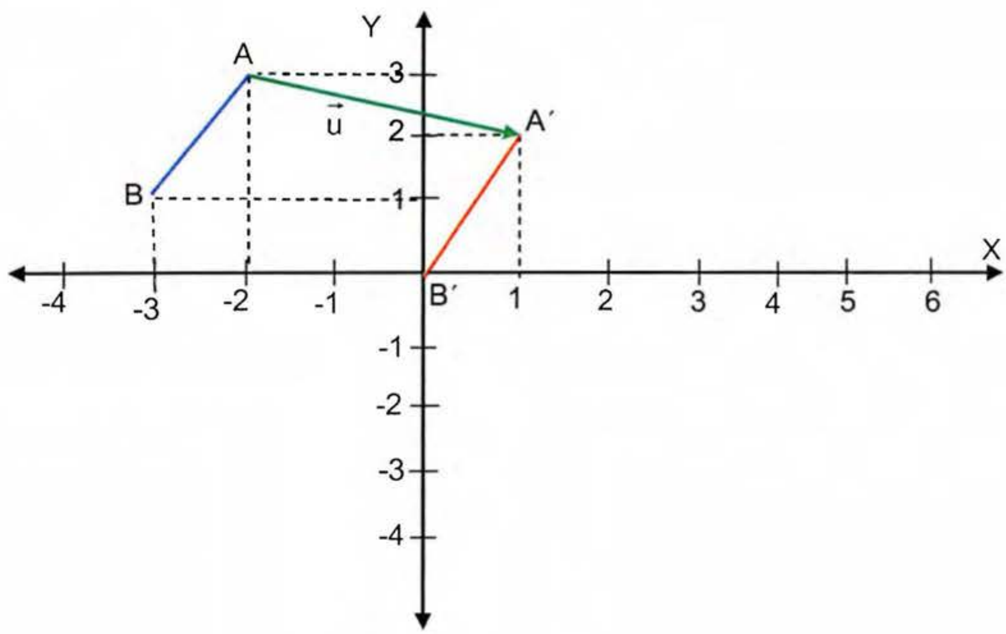
Determinemos primero el punto A´(x,y) que le corresponde a A .

$\overrightarrow{AA'}$=A´-A=(x-(-2),y-3)=(3,-1), de aquí que x+2=3 y y-3=-1

De la primera ecuación tenemos x=3-2=1 . De la segunda ecuación tenemos y=-1+3=2 . Entonces el punto A´ tiene coordenadas (1,2)

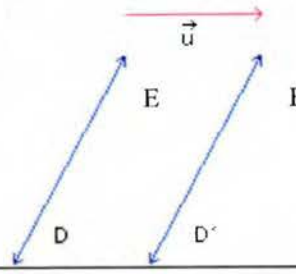
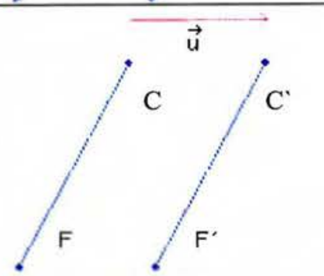
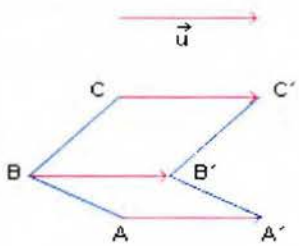
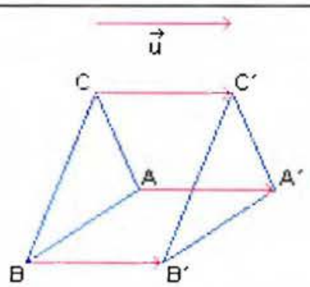
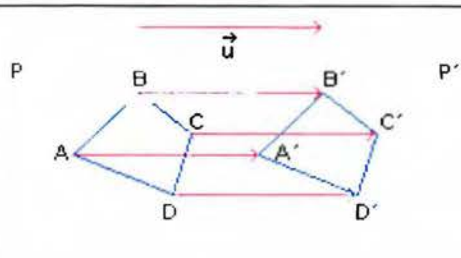
Ahora hagamos el mismo procedimiento para el punto B $\overrightarrow{BB'}$=B´-B=(x-(-3),y-1)=(3,-1) de aquí que x+3=3 y y-1=-1, entonces tenemos x=0 y y=0 , por lo tanto las coordenadas de B son (0,0).

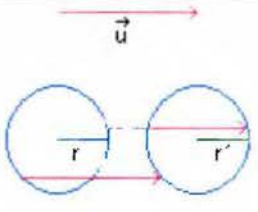
Ahora, el $\overline{AB}$ está formado por infinitos puntos que se encuentran entre A y B. A cada uno de esos puntos X le corresponde X´ que junto con A´y B´ forman el segmento $\overline{A'B'}$ .Observemos el dibujo



De aquí podemos decir que la traslación transforma un segmento en un segmento, y al igual como lo hicimos con el segmento podemos determinar la figura transformada de cualquier figura.

Algunos resultados importantes son los siguientes:

• La figura transformada por una traslación de una recta $\overleftrightarrow{DE}$ en el plano es una recta $\overleftrightarrow{D`E`}$ en el plano paralela a $\overleftrightarrow{DE}$.	
• La figura transformada por una traslación de un segmento $\overline{FC}$ en el plano es un segmento $\overline{F`C`}$ de P paralelo y congruente a $\overline{FC}$.	
• La figura transformada por una traslación de un ángulo $\angle$ABC en el plano es una ángulo $\angle$A´B´C´ en el plano, congruente a $\angle$ABC	
• La figura transformada por una traslación de un ΔABC en el plano es un ΔA´B´C´ en el plano que posee los lados y los ángulos correspondientes congruentes.	
• La figura transformada por una traslación de un polígono en el plano P es un polígono en el plano P´ que posee los lados y ángulos correspondientes congruentes.	

• La figura transformada por una traslación de una circunferencia C de radio r en un plano P es una circunferencia C´ de radio r en el plano P`.	

2. Tomemos dos puntos en el plano M (-3,1) y N(1,-1) y apliquémosle la traslación del vector $\vec{v}$ = (3,2).

Solución:

Si M` es el transformado de M por la traslación de $\vec{v}$ entonces se tiene que cumplir que

$\overrightarrow{MM`} = \vec{v}$ , ahora $\overrightarrow{MM`} = M`-M$=(x,y)-(-3,1)=(x+3,y-1)=(3,2) . De aquí que

x+3=3 y y-1=2 Entonces el punto M` tiene coordenadas (0,3)
x=0 y=3

Trabajando de la misma forma obtenemos que N` = (4,1)

Como el vector $\vec{v}$ tiene coordenadas (3,2) obtenemos que los puntos M´ y N´ tiene coordenadas (0,3) y (4,1) respectivamente. De esta forma encontramos los puntos M´ y N´ que están asociados a M y N respectivamente por la traslación del vector $\vec{v}$ = (3,2).

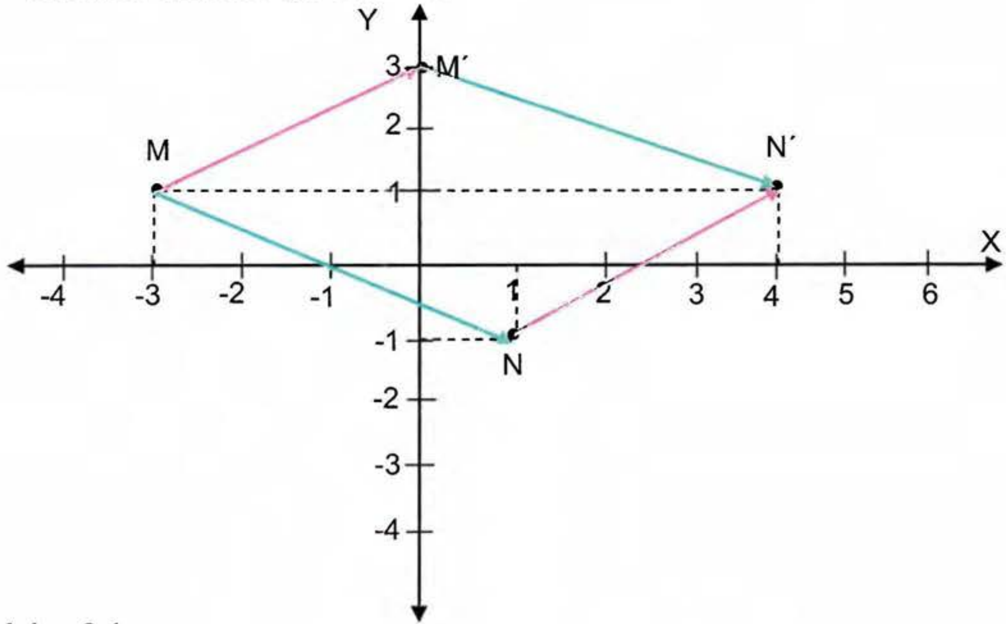
De lo anterior obtenemos que los puntos M´ y N´ que están asociados a M y N respectivamente por la traslación del vector $\vec{v}$ = (3,2).

Ahora estudiemos los vectores determinados por los puntos M y N , y M´y N´

$\overrightarrow{MN}$=N-M=(1,-1)-(-3,1)=(1+3,-1-1)=(4,-2)

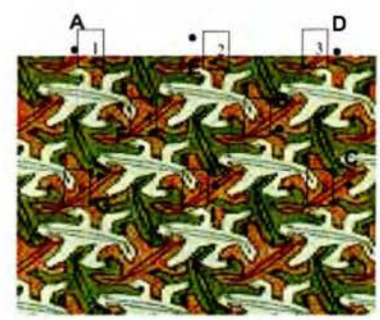
$\overrightarrow{M'N'}$=N´-M´=(4,1)-(0,3)=(4-0,1-3)=(4,-2)

Entonces tenemos que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$



Ejercicios 2.1

De acuerdo con los datos de la siguiente figura complete las siguientes frases



M.C.Escher(1898-1972)

Imagen tomada de http://revistasacitametam.blogspot.com/2007/02/exposicin-de-escher-boletn-3.html

Ejemplos

1. La imagen de 2 por la traslación del vector $\overrightarrow{EG}$ es 6
2. 2 es la imagen de 6 por la traslación del vector $\overrightarrow{EG}$
3. La imagen de 1 por la traslación $\overrightarrow{AB}$ es _____
4. La imagen de 4 por la traslación $\overrightarrow{FL}$ es _____
5. 3 es la imagen de 4 por la traslación del vector _____

6. 8 es la imagen de 2 por la traslación del vector _____

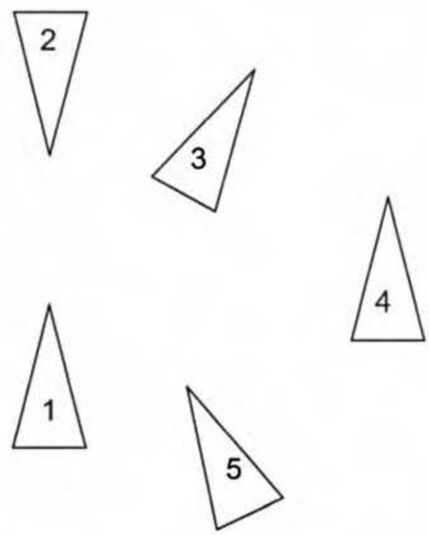
7. Halle la imagen por la traslación del vector $\vec{u}=(2,3)$ del punto A(1,3).

8. Determine la imagen por la traslación del vector $\vec{u}=(2,-3)$ del punto A(1,3).

9. En una traslación del vector $\vec{v}$, el puntos A(3,-2) se transforma en el punto A´(3,4). Encuentre el transformado del punto B (-2,4).

10. Encuentre la figura transformada de un triángulo de vértices A(0,0), B(5,7) y C(8,4) por una traslación del vector $\vec{v}=(3,-3)$.

11. Los triángulos 2, 3, 4 y 5 se han obtenido a partir del triángulo 1. ¿Cuál de ellos corresponde a la traslación del triángulo 1?



Simetría Axial.

Carlos dijo que había diferentes métodos para crear teselaciones. Otro método consiste en utilizar la simetría. El siguiente diseño es una muestra de ello.

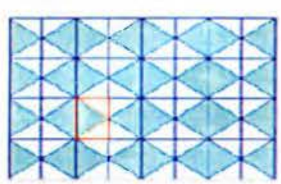


Imagen tomada de http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teselaciones.htm

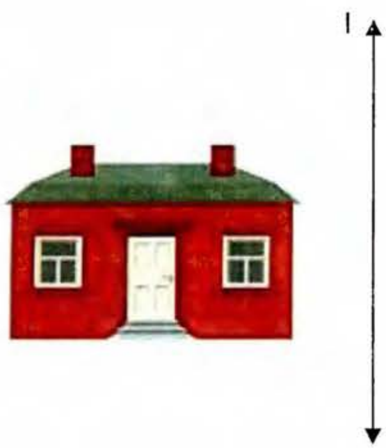
Panal de abejas

Imagen tomada de http://ismaelriveramollmatematicas.blogspot.com/

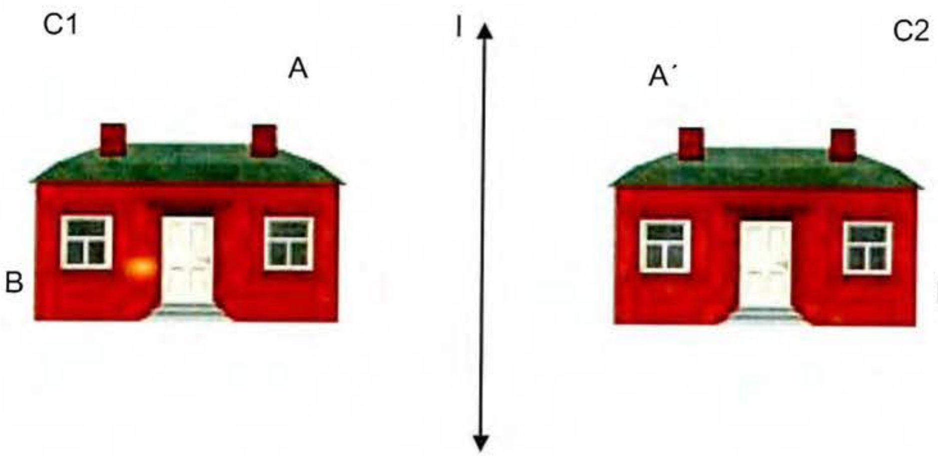
A Carmen la gusta dibujar y utiliza diversas técnicas para realizar sus trabajos. Siga las instrucciones para lograr un trabajo como el realizado por ella.

1. Calca la siguiente figura en una hoja blanca.
2. Doble el papel por la recta l hacia afuera (la casita debe de quedar visible).
3. Calca la casita con lápiz.
4. Pinta las dos casas a su gusto y agrega los objetos que deseas.

C1



Vamos a estudiar lo que obtuviste, que es algo similar a esto.



Son dos casas C1 y C2 son "iguales", y cada una está a la misma distancia de la recta l.

Al punto A le corresponde el punto A´ y al punto B le corresponde el punto B´.

Con una regla trace los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, y conteste las siguientes preguntas.

1. ¿ $\overline{AA'}$ y la recta l se intersecan perpendicularmente?

____

2. ¿Y la recta l se intersecan perpendicularmente?

____

3. Asignémosles el nombre de C y D los puntos de intersección de $\overline{AA'}$ con l y de $\overline{BB'}$ con l respectivamente. ¿cuánto mide $\overline{AC}$ y $\overline{CA'}$?

____

4. ¿Cuánto mide $\overline{BD}$ y $\overline{DB'}$?

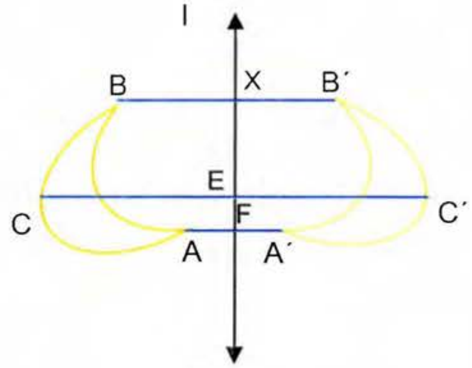
Cuando al doblar una hoja por una recta una figura queda sobre la otra se dice que las figuras son simétricas con respecto a la recta l. En el ejemplo anterior C2 es simétrico a C1 y C1 es simétrico a C2

Estudiemos otros ejemplos.

1. En esta imagen tenemos la figura que contiene los puntos A, B y C; la recta l y la figura que contiene los puntos A´, B´ y C´.

Solución

Utilizando regla tracemos los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$



Ahora, con la regla y un transportador verifiquemos lo siguiente

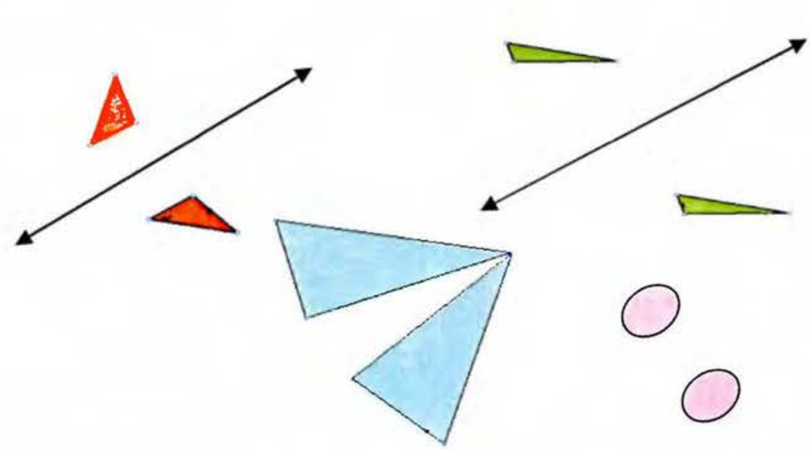
- $\overline{AA'} \perp l$
- $\overline{BB'} \perp l$
- $\overline{CC'} \perp l$
- D es el punto medio de $\overline{BB'}$
- E es el punto medio de $\overline{CC'}$
- F es el punto medio de $\overline{AA'}$

El punto medio de un segmento $\overline{BB'}$ es el punto X que cumple que d(B,X)=d(X,B´)

A este tipo de transformación se le llama **Simetría axial**.

Ejercicios 2.2

Establezca cual de las siguientes figuras presenta simetría axial.



Ejemplo

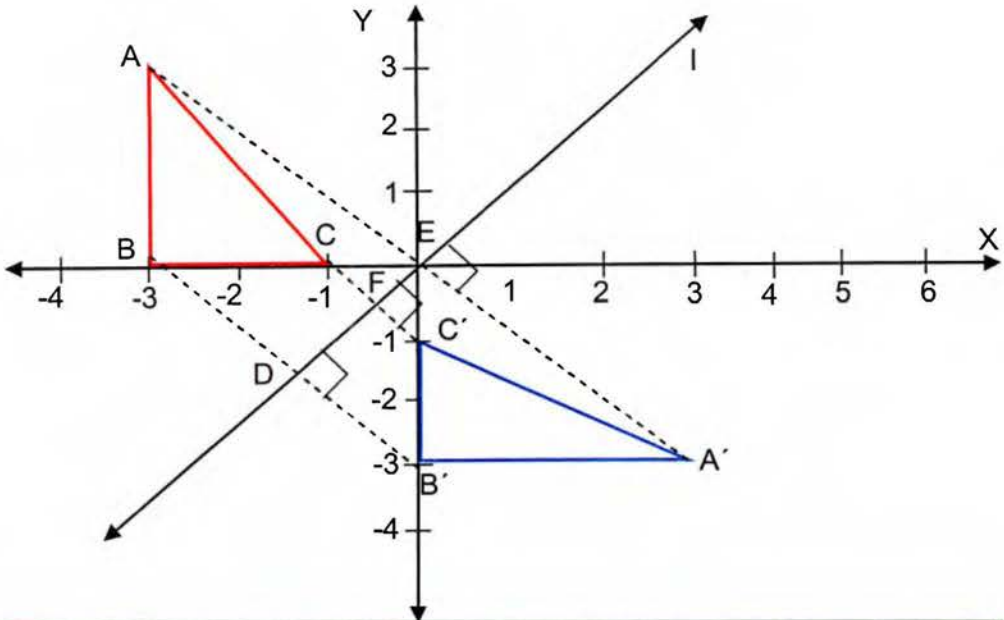
Veamos la siguiente figura en el plano. Tenemos el ΔABC y su transformado $\Delta A'B'C'$ con respecto a la recta l.

Si tomamos esta figura y doblamos sobre la recta l podemos observar que el punto A coincide con el punto A´, el punto B con el B´ y el punto C con C´.

Haciendo lo mismo que con el ejemplo anterior tenemos que:

- $\overline{AA'} \perp l$
- $\overline{BB'} \perp l$
- $\overline{CC'} \perp l$
- D es el punto medio de $\overline{BB'}$
- E es el punto medio de $\overline{CC'}$
- F es el punto medio de $\overline{AA'}$

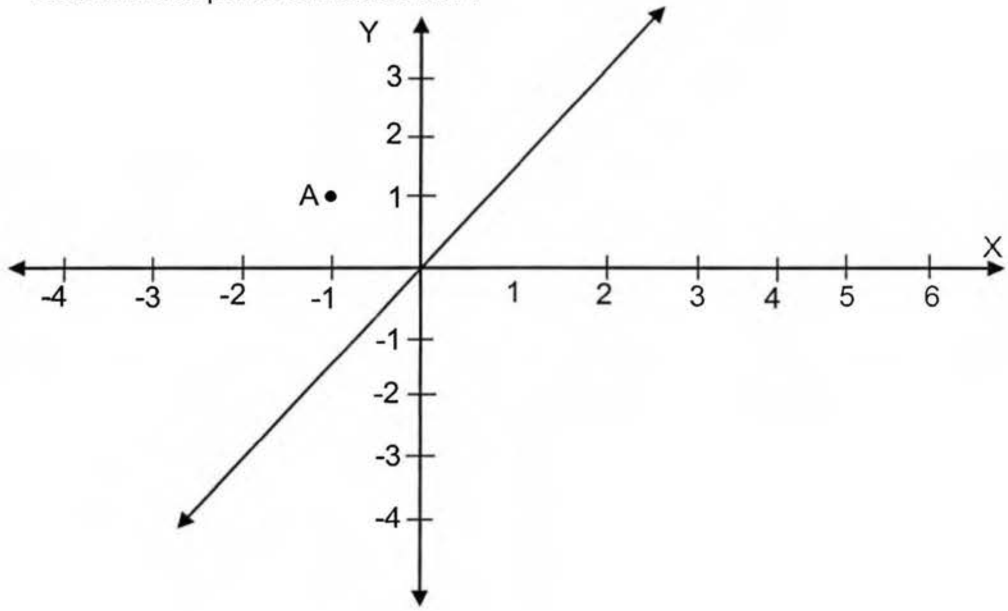
La palabra axial significa perteneciente o relativo a un eje. A la recta l se le llama eje de simetría



La simetria axial es una transformación isométrica que hace que a cada punto X le corresponda un punto X´ que cumple $\overline{XX'}$ es perpendicular a l y se intersecan en el punto medio de $\overline{XX'}$.

Construcción de figuras simétricas.

Determine el punto simétrico de A



Solución:

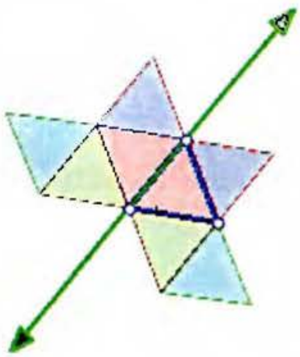
Pasos

1- Trace el segmento perpendicular que va desde A hasta el eje de simetría, marque el punto P y determine la longitud de dicho segmento.

2- Extienda el segmento $\overline{AP}$ hasta el punto A´ de tal forma que la medida de $\overline{AP}$ sea igual a la medida de $\overline{PA`}$

3- Listo, ya encontraste el punto A´ simétrico de A.

Ahora sí, crea tu propia teselación utilizando simetrías y decórala a tu gusto. Aquí te presentamos una idea



Propiedades de las simetrías.

En un mismo plano se tienen las siguientes propiedades

- La figura simétrica de una recta D en es una recta D´ (Figura 1).
- La figura simétrica de un segmento es un segmento congruente (Figura 2).
- La figura simétrica de un $\angle$ABC es un ángulo $\angle$A´B´C´ congruente (Figura 3).
- La figura simétrica de un triángulo es un triángulo que posee los lados y ángulos correspondientes congruentes (Figura 4).
- La figura simétrica de un polígono es un polígono que posee los lados y ángulos correspondientes congruentes (Figura 5).
- La figura simétrica de un círculo es un círculo de mismo radio (Figura 6).

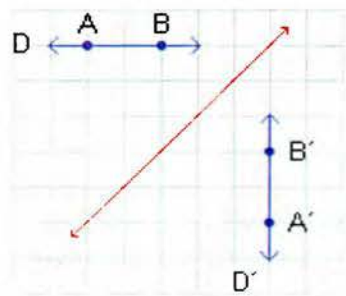


Figura 1

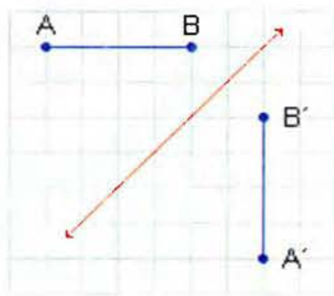


Figura 2

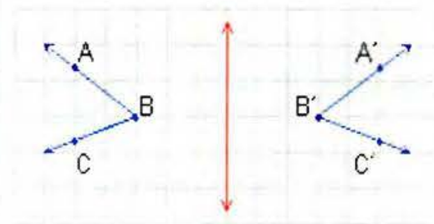


Figura 3

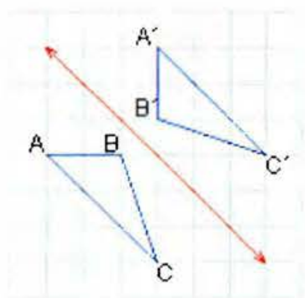


Figura 4

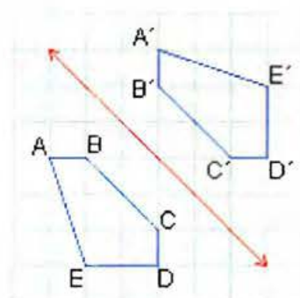


Figura 5

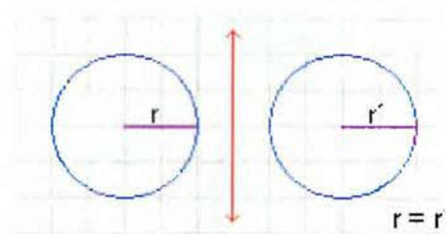
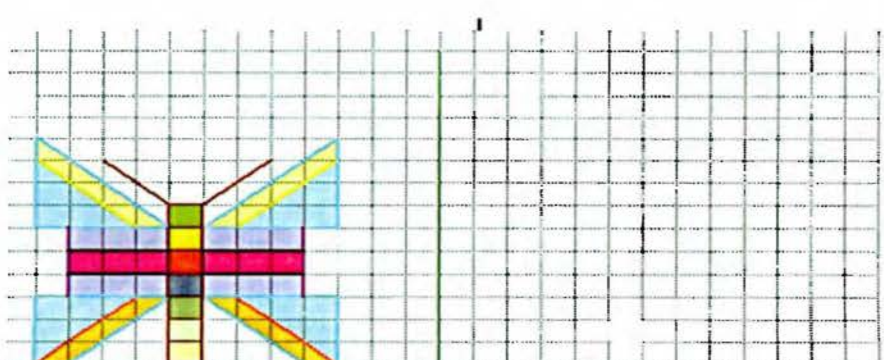
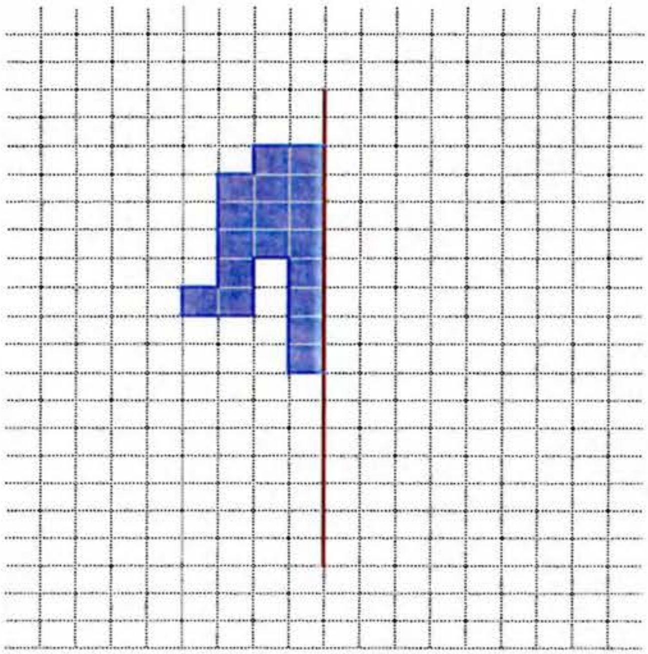


Figura 6

Ejercicios 2.3

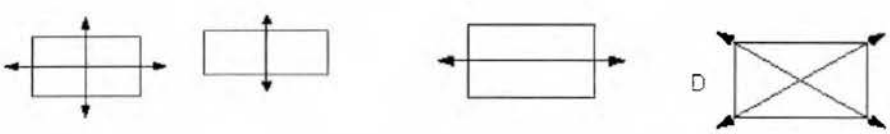
A. Dibuje la figura simétrica con respecto al eje l





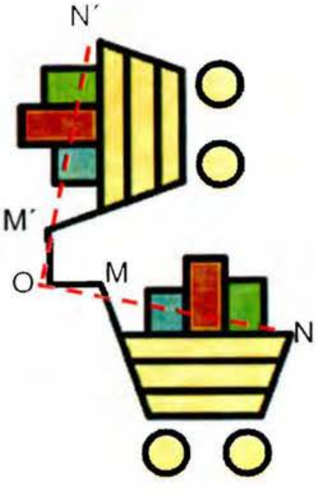
B. Identifica en cuál de los casos se presenta simetría axial.

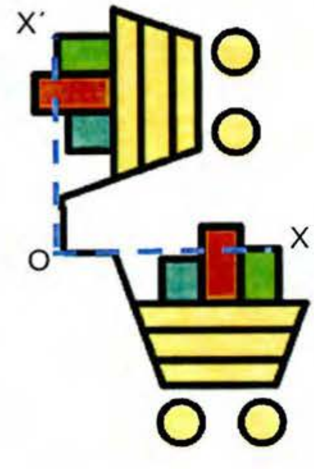
a) b) c) d)



Rotación.

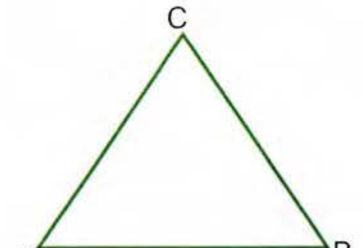
La rotación es una transformación isométrica que gira los puntos de acuerdo con un ángulo θ y un punto fijo. En el **Ejemplo** inicial del carrito de supermercado tenemos que el punto O es el punto fijo y el resto de los puntos rotan con un ángulo de 90° en la dirección contraria a las manecillas del reloj, por **Ejemplo**, observemos el punto M y el M´, y el N y N´. Si es necesario, utiliza el transportador para medir el ángulo.



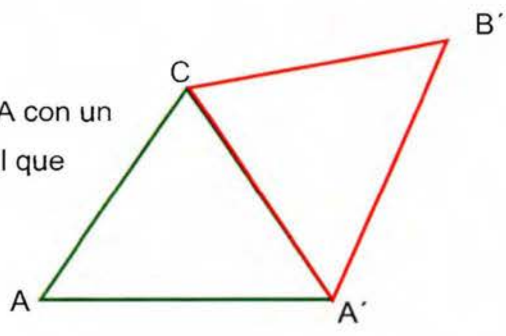


De esta forma podemos verificar que para cada punto "X" de la figura, el ángulo que se forma entre $\overline{OX}$ y $\overline{OX'}$ es de 90°. Estudiemos más ejemplos

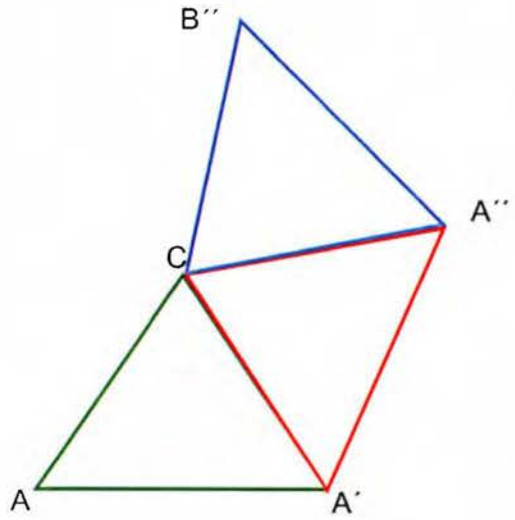
1. Utilicemos un triángulo ABC equilátero, tomemos el punto C como el punto fijo y rotemos con un ángulo de 60 grados en la dirección contraria a las manecillas del reloj



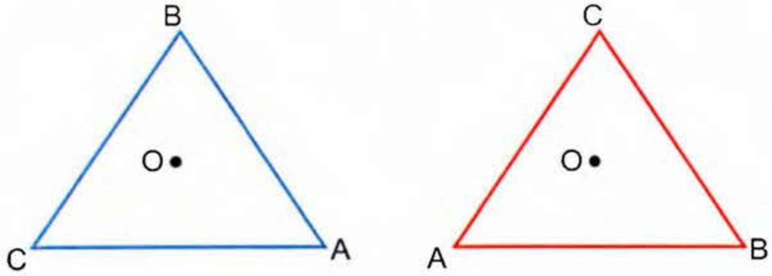
Como dejamos el punto C fijo, al rotar A con un ángulo de 60° caemos en el punto B, al que ahora le vamos a llamar A´



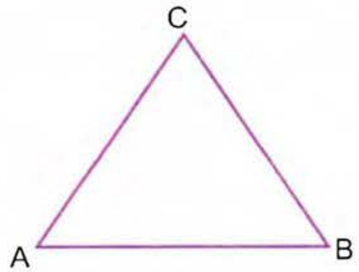
De esta forma podemos seguir rotando la figura y crear nuestro diseños



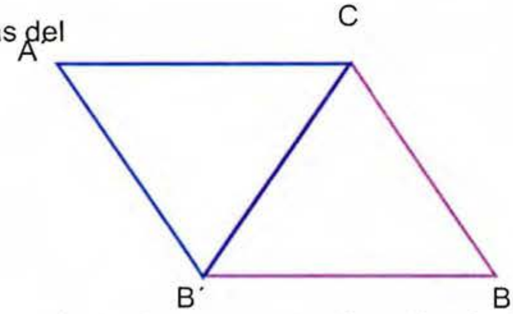
También podemos rotar el triángulo con respecto al punto O que es el centro del triángulo y con un ángulo de 120º. Entonces se tiene que A pasa al lugar de B, B pasa al lugar de C y C al lugar de A.



2. Las rotaciones anteriores se realizaron en la dirección contraria a las manecillas del reloj, pero también podemos rotar en la dirección de las manecillas del reloj.

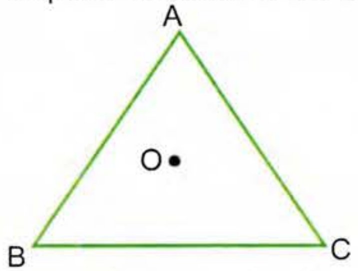


Como dejamos el punto C fijo, al rotar B con un ángulo de 60° en dirección de la manecillas del reloj, caemos en el punto A, al que ahora le vamos a llamar B´

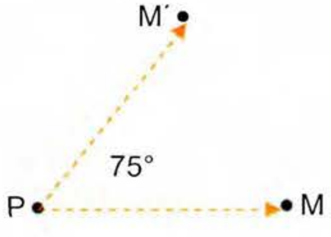


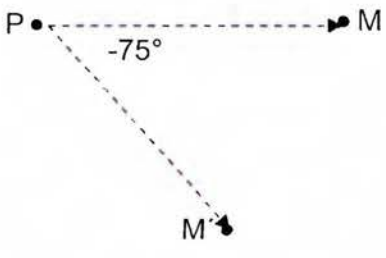
De esta forma podemos seguir rotando la figura en la dirección de las manecillas del reloj.

Si la rotación es con respecto al centro O del triángulo entonces tenemos lo siguiente:



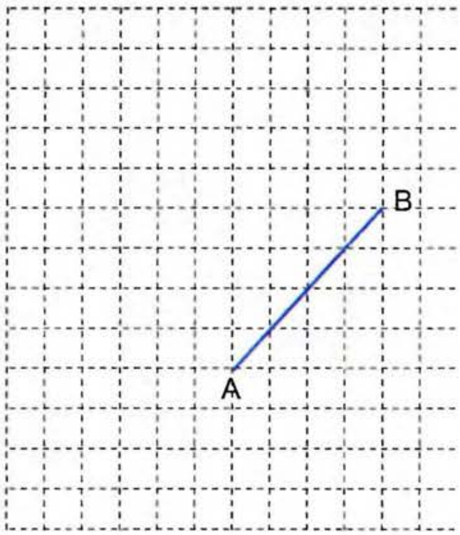
Como hemos visto, las rotaciones pueden ir en dos direcciones, en contra de las manecillas del reloj o en la dirección de las manecillas del reloj. Para evitar estar especificando la dirección de la rotación, se acordó establecer signo positivo o negativo al ángulo de la rotación. Si es en contra de las manecillas del reloj el signo del ángulo es positivo, y si va en la dirección de las manecillas del reloj, entonces el signo del ángulo es negativo. De esta forma, si tenemos un punto P fijo, y rotamos un punto M con un ángulo de 75° obtenemos la figura de la izquierda, y si lo rotamos con un ángulo de -75° obtenemos el ángulo de la derecha.





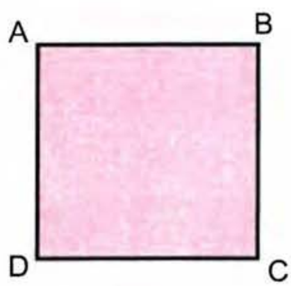
Ejercicio 2.4

A. Rota el segmento $\overline{AB}$ con un ángulo de 60° y con el punto A como punto fijo.

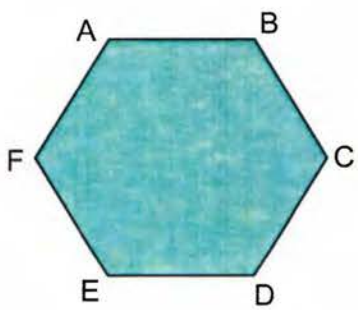


B. Rota las siguientes figuras de acuerdo con los datos que se le dan

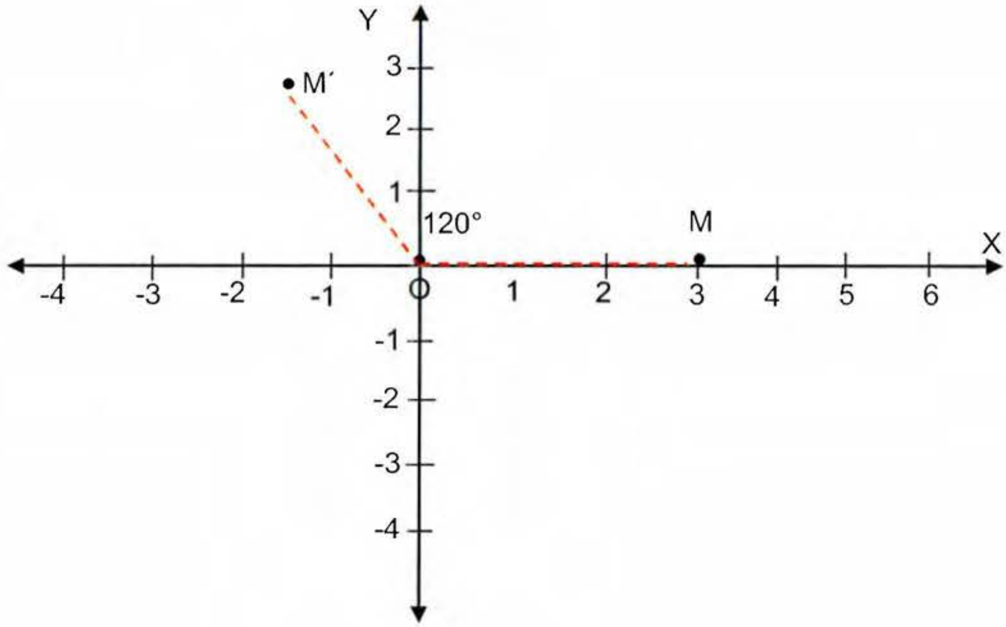
- Un cuadrado ABCD en donde el punto fijo sea B y el ángulo -90°



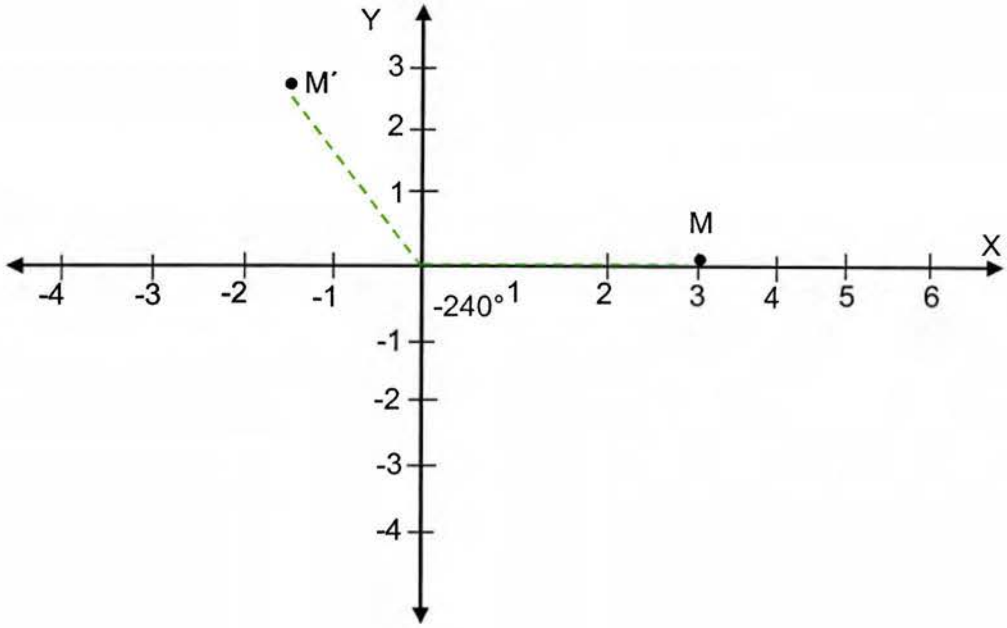
- Un hexágono ABCDEF en donde el punto fijo sea B y un ángulo de 60°



Utilicemos el punto O (0,0) como el punto fijo de las rotaciones en el plano, y sea M un punto en el eje "X" de coordenadas (3,0). La imagen de M bajo la rotación r_1 de un ángulo de 120° es el punto M´ que se muestra en la figura.

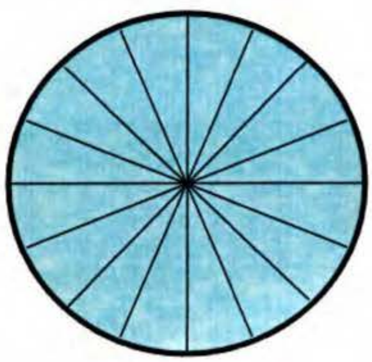


Ahora, si rotamos el punto M con un ángulo de -240° (r_2) obtenemos que la imagen de M es M´, es decir, es el mismo punto que en la rotación anterior, por lo que obtenemos la siguiente figura.

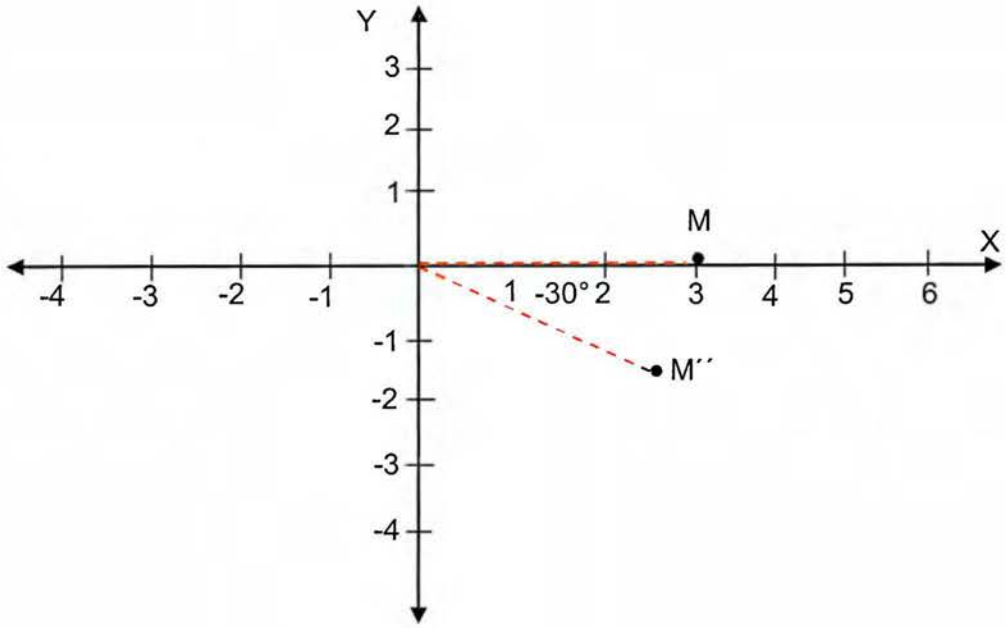


Las rotaciones r_1 y r_2 son iguales, ya que para todo punto M en el plano, le hace corresponder el mismo punto M´ como imagen.

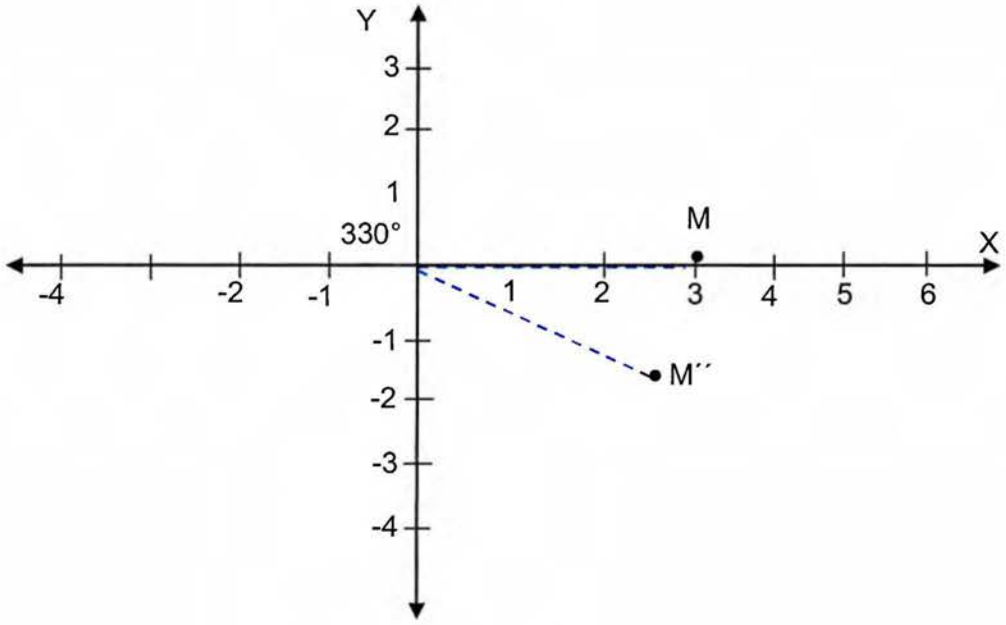
Antes de ver otros ejemplos como el anterior, recordemos que la unidad de medida de los ángulos son los grados y que la circunferencia posee 360°.



Ahora, consideremos una rotación r_3 con un ángulo de -30°, y consideremos de nuevo el punto M, entonces obtenemos la imagen M´´ como se muestra en la figura



Luego, si consideramos una rotación r_4 con un ángulo de 330°, obtenemos que la imagen de M es M´´, por lo que se puede concluir que las rotaciones r_3 y r_4 son la misma. Observemos la figura.



Ahora, analicemos las rotaciones r_1, r_2 , r_3 y r_4.

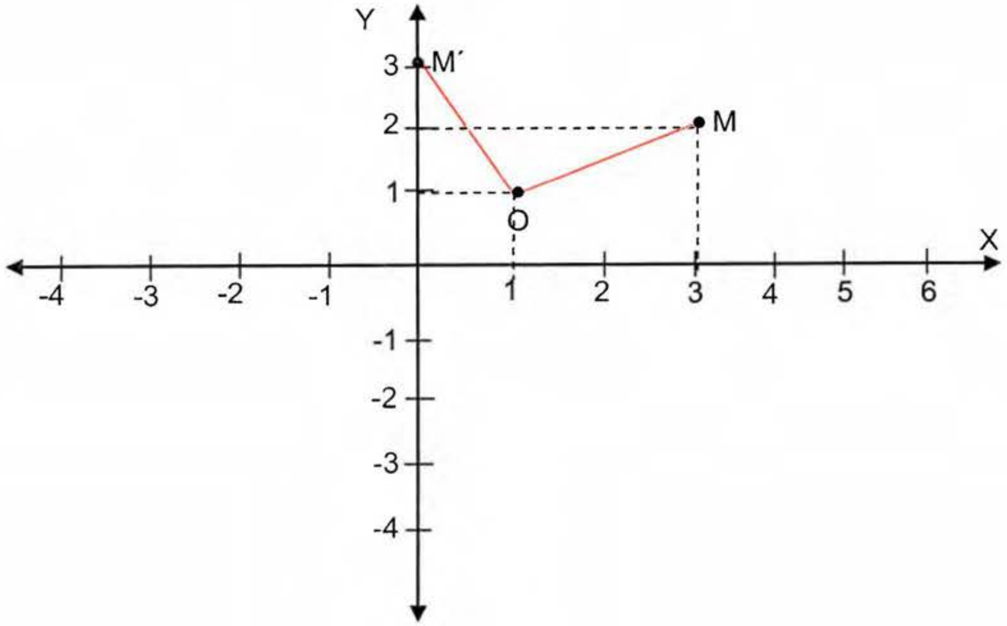
Rotación	Ángulo	
r_1	120°	
r_2	-240°	$r_1 = r_2$ (1)
r_3	-30°	
r_4	330°	$r_3=r_4$ (2)

Observemos que las rotaciones que son iguales (1) y (2) tienen un ángulo α que cumple que $-180 \leq \alpha \leq 180$ y otro ángulo β que cumple que $\beta<-180$ ó $\beta>180$. Ahora, como es lo mismo la rotación r_1 y la r_2 (igualmente con r_3 y r_4), entonces vamos a trabajar solo con la rotación r_1 (o r_3 respectivamente), es decir, vamos a trabajar solo con las rotaciones que tiene un ángulo α que cumple que $-180 \leq \alpha \leq 180$.

En resumen

La rotación es una transformación isométrica que gira los puntos de acuerdo con un ángulo θ que cumple que $-180 \leq \theta \leq 180$ y un punto fijo.

En el plano, podemos utilizar cualquier punto como el punto fijo de una rotación. Tomemos O en el plano con coordenadas (1,1) y al punto M (4,2) y encontremos la imagen de M por la rotación de centro O y ángulo 90°. Debemos utilizar regla y transportador.

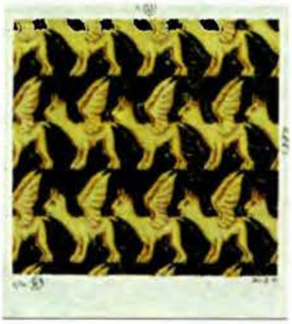


Ahora, ya conocemos las traslaciones, las simetrías y las rotaciones, y al inicio se habló un poco sobre las teselaciones. Lee con atención la siguiente información sobre Maurits Cornelis Escher y resuelve los siguientes ejercicios.

MAURITS CORNELIS ESCHER (1898-1972)

"Nació un 17 de Junio de 1898 en Leeuwarden, Holanda y ya desde pequeño se intuían sus especiales dotes para el arte. Comenzó los estudios de Arquitectura pero acabó especializándose en técnicas gráficas y trabajo sobre madera en la Escuela de Arquitectura y Diseño Ornamental de la ciudad de Haarlem donde tuvo como profesor a S. Jesserum de Mesquita.

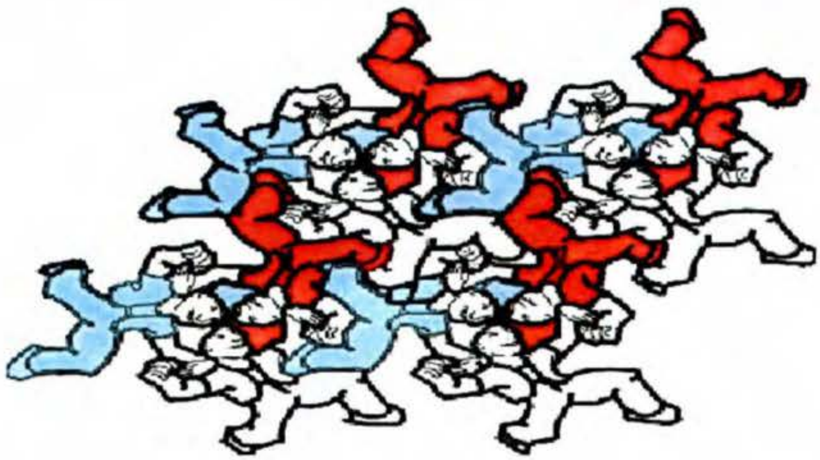
Escher viajó por diversos países de Europa, sobre todo por Italia donde acabó estableciéndose durante 10 años en la ciudad de Roma (1924-1934). Además de Italia conoció el Sur de Francia y España. Precisamente en este último país, encontró una de sus mayores fuentes de inspiración: la Alhambra. Los precisos e intrincados detalles ornamentales fueron la viva imagen de los esquemas geométricos que tanto le entusiasmaban. Se puede decir que a raíz de *su visita a la* Alhambra y a la mezquita de Córdoba la obra de Escher, que se había basado en la representación de paisajes hasta entonces, varió su rumbo hacia los dibujos matemáticos que tan famoso lo han hecho." [11]




M.C.Escher(1898-1972)

Ejercicio 2.5

¿Qué tipos de transformaciones isométricas (rotaciones, traslaciones o simetrías) aparecen en la teselación dada en el siguiente fragmento del cuadro *duendes* de Escher?



M.C.Escher(1898-1972)

Encontramos **rotaciones**, donde el centro de rotación se encuentra en el punto donde se juntan los sombreros de los duendes, y tenemos otro centro de *rotación*, donde se juntan los talones de los zapatos. También encontramos

traslaciones, por **Ejemplo**, en la parte inferior del dibujo sobresalen dos duendes, uno va a dar al siguiente por medio de una traslación horizontal, (y por ende, el primer grupo de duendes en el siguiente). Tenemos resultados análogos con los otros duendes que sobresalen en las orillas.

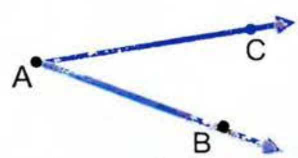
4.2.3 Ángulos y arcos.

En la escuela aprendimos que un ángulo es la unión de dos rayos en su punto de origen. Los ángulos son utilizados en muchos aspectos de la vida diaria, por ejemplo, en la medicina se utiliza un instrumento llamado goniómetro que se utiliza para medir los ángulos de movilidad de las articulaciones.

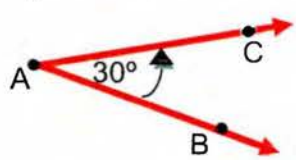
Goniómetro

De esta forma, en muchos otros contextos, los ángulos son de gran utilidad, te invitamos a investigar sobre ello.

Ahora, volvamos al concepto de ángulo que conocemos. En la siguiente figura tenemos el rayo $\widehat{OC}$ y el rayo $\widehat{AB}$. Al punto A se le llama vértice del ángulo y a los rayos se le llama lados del ángulo.



Se le denomina medida del ángulo a los grados que hay entre los lados del ángulo, por ejemplo, en la figura anterior tenemos que la medida del ángulo es de 30°.



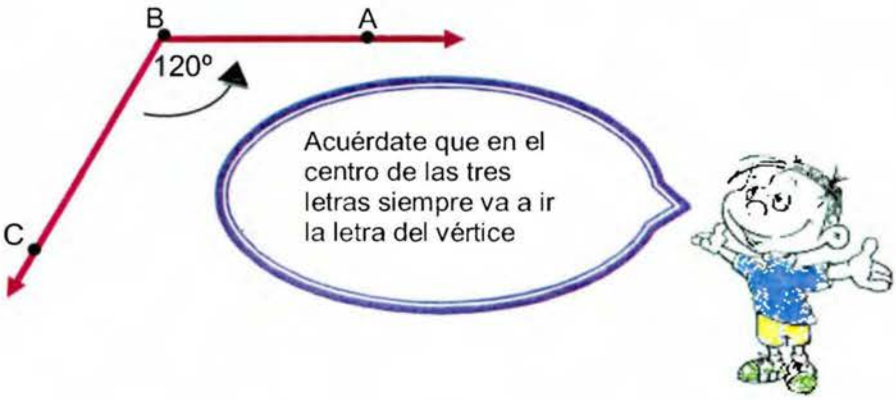
Posteriormente estudiaremos otra unidad de medida para los ángulos.

En este ejemplo, el rayo $\hat{AB}$ se rotó 30º, para formar el rayo $\hat{AC}$ y la unión de estos dos rayos en el punto A forma el ángulo $\angle BAC$.

Para nombrar un ángulo se puede utilizar dos formas:

1. Con tres letras mayúsculas que representan tres puntos: un punto de cada rayo y el punto del vértice en el centro de las tres letras.

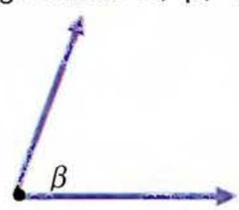
Ejemplo: $\angle ABC$ o $\angle CBA$



Se puede nombrar como ángulo $\angle ABC$ o $\angle CBA$ pero ambos representan el mismo ángulo.

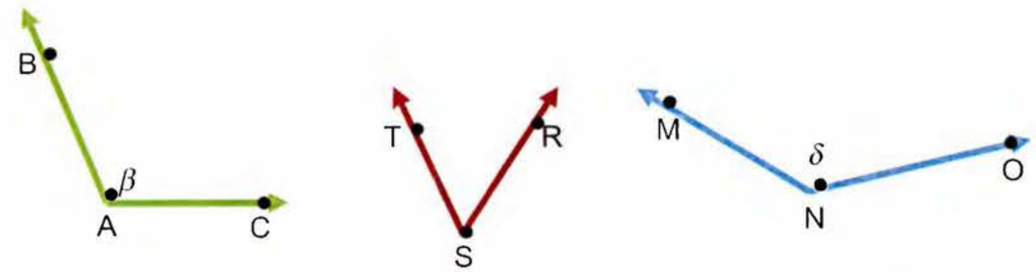
2. Con una letra griega del alfabeto griego como: α, β, θ, ρ entre otras, y el símbolo "$\angle$"

Ejemplo: $\angle\beta$



Ejercicio 3.1

A continuación se le presentan una serie de ángulos, escriba al menos dos formas de denotar el ángulo.

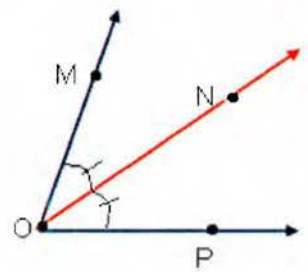


______________________ ______________________ ______________________

______________________ ______________________ ______________________

Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es un rayo que divide al ángulo en dos ángulos congruentes. En la siguiente figura, el rayo $\hat{ON}$ es bisectriz del $\angle MOP$, por lo que se puede decir:



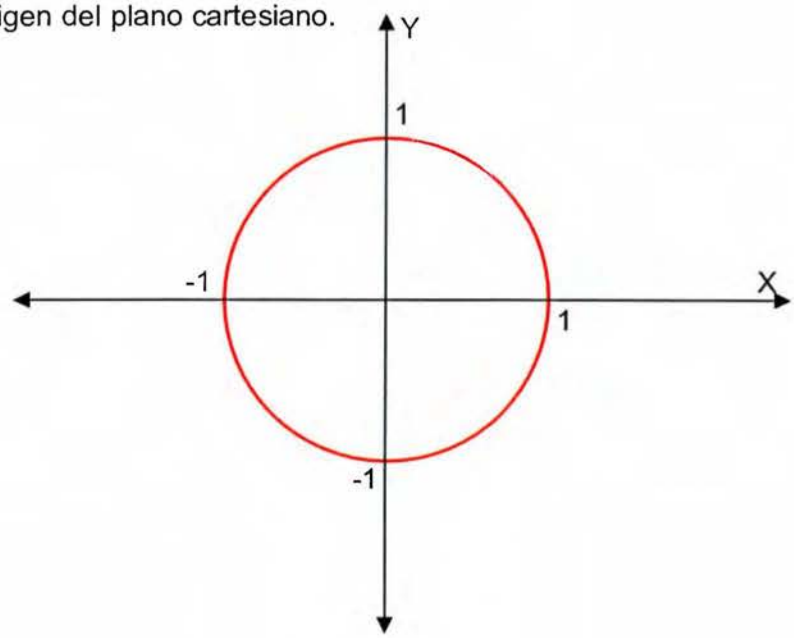
$\angle MON \cong \angle NOP$

Ángulos en el plano cartesiano.

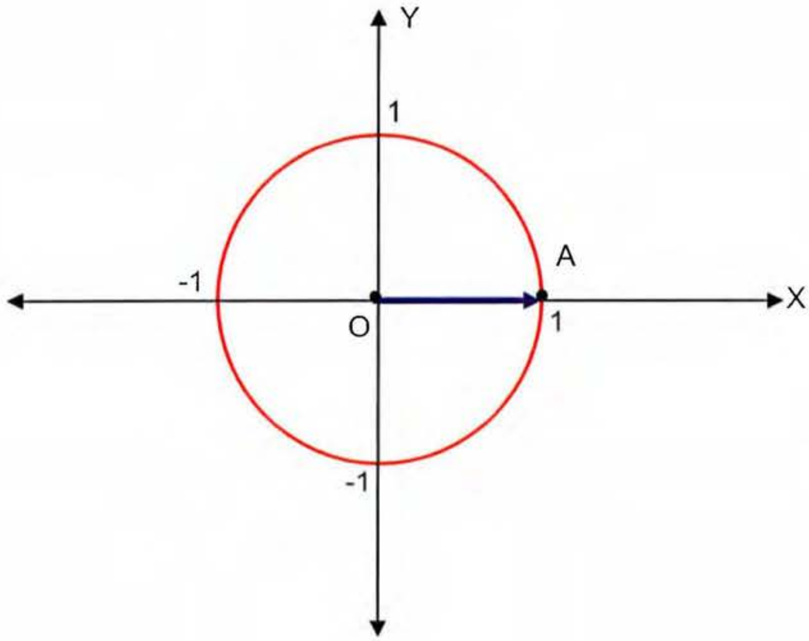
Anteriormente estudiamos las rotaciones, en donde vimos que si tenemos una figura S, la podemos rotar con un ángulo $\alpha\,(-180 \le \alpha \le 180)$, a partir de un punto fijo y obtenemos S´ la imagen de S. Vamos a estudiar algunas rotaciones en el plano cartesiano con la utilización de una circunferencia con centro en el origen y un radio de 1 unidad.

Analiza y realiza los siguientes pasos en tu cuaderno, y luego compara con la respuesta del documento.

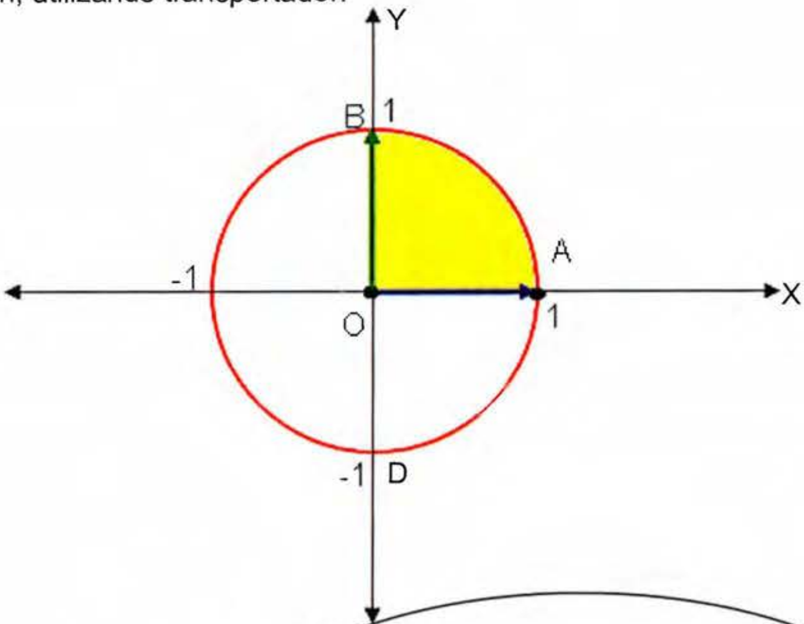
1. En un plano cartesiano, dibuja una circunferencia de radio 1 unidad y con centro en el origen del plano cartesiano.

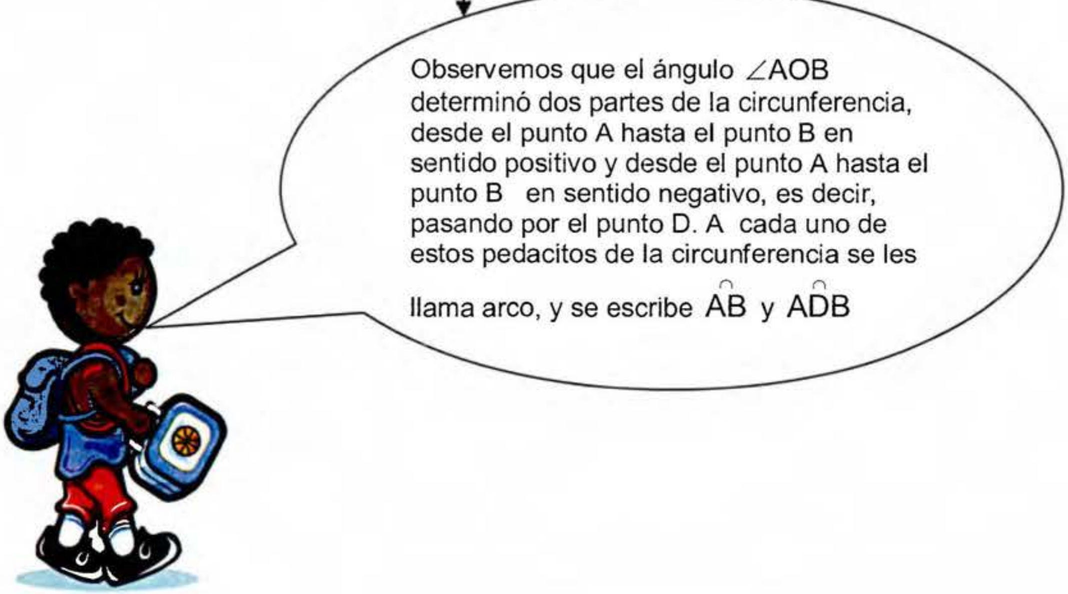


2. Marca el rayo que contiene a los puntos O (0,0) y a A (1,0)



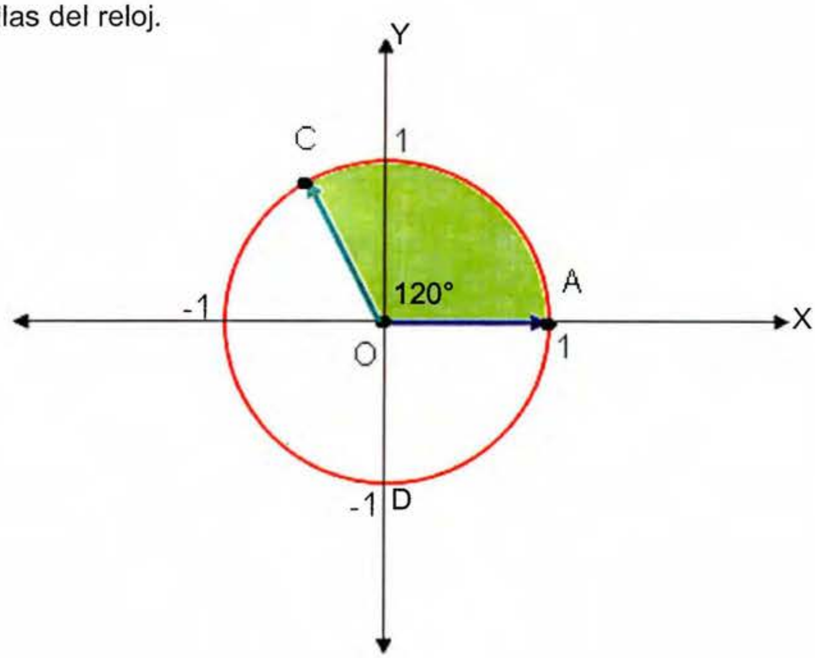
3. Encuentre la transformada del rayo $\widehat{OA}$, bajo un rotación de 90° desde su punto de origen, utilizando transportador.





La imagen del rayo $\widehat{OA}$ es el rayo $\widehat{OB}$ y juntos forman el ángulo $\angle AOB$ cuya medida es de 90°. Dicho ángulo determina el arco $\overset{\frown}{AB}$, cuya longitud mide igual al ángulo que lo determinó.

4. Rota el rayo $\widehat{OA}$ con un ángulo de 120°, en la dirección contraria a las manecillas del reloj.



La rotación del rayo $\widehat{OA}$ con un ángulo de 120° determina dos arcos en la circunferencia, el arco $\overset{\frown}{AC}$ y el arco $\overset{\frown}{ADC}$. El arco $\overset{\frown}{AC}$ mide 120°, y el arco $\overset{\frown}{ADC}$ mide $-240°$. Al arco $\overset{\frown}{AC}$ le llamamos **arco menor**, y al $\overset{\frown}{ADC}$ **arco mayor**.

Los **arcos menores** pertenecen al intervalo]-180, 180[, los **arcos mayores** pertenecen al intervalo $]-\infty$ -180[U $]180,+\infty[$. Si un arco mide 180° se le llama **semicircunferencia**, ya que constituye la mitad de la circunferencia; y si mide 0° se le llama **arco nulo**.

Todo arco mayor tiene un arco menor que le corresponde y que determina la medida del ángulo de la rotación. Por ejemplo, si tenemos un arco mayor de 200°, entonces para determinar el arco menor le restamos a 360° la longitud del arco mayor, es decir 360° - 200° = 160°.

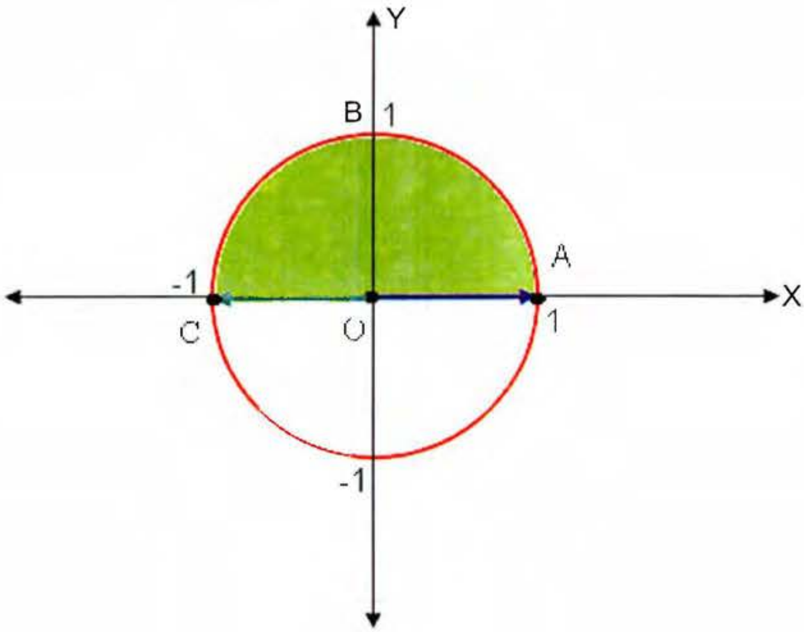
Entonces la longitud del arco menor es de 160° que corresponde al ángulo de la rotación.

Recordemos que una rotación con un ángulo de 160° es la misma que una con un ángulo de -200°, por lo que se había acordado trabajar solo con rotaciones en donde el ángulo estuviese entre -180° y 180°.

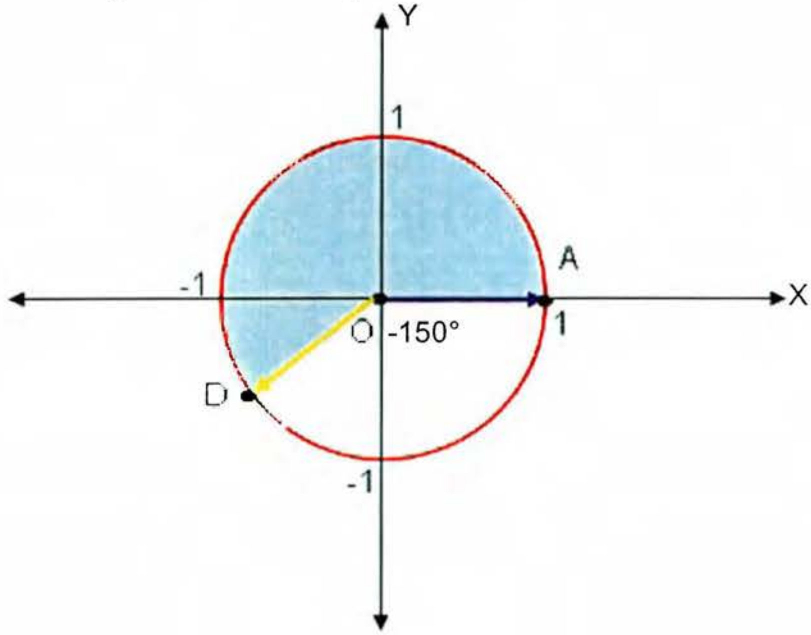
De esta forma, vamos a trabajar con ángulos cuyas medidas estén entre -180° y 180°, sin embargo esto no limita el estudio de los arcos.

Estudiemos más ejemplos

5. Al arco $\overset{\frown}{AC}$ se le llama semicircunferencia, y su medida es de 180°, ya que constituye la mitad de la circunferencia.

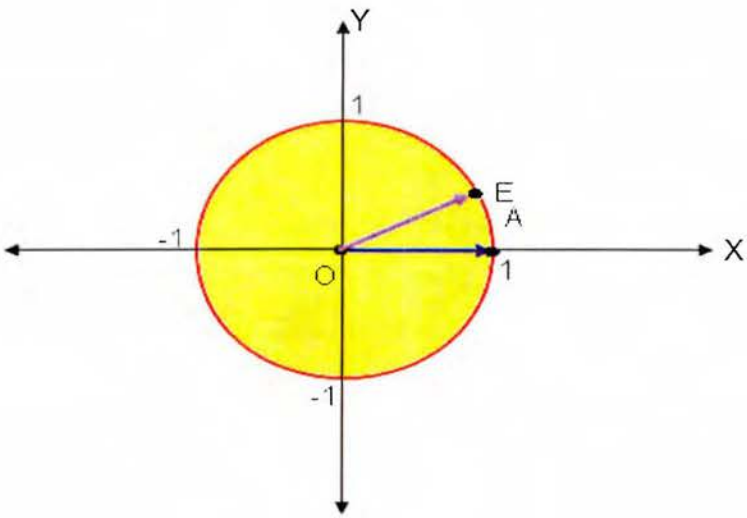


6. Rota el rayo $\hat{OA}$ con un ángulo de -150°.

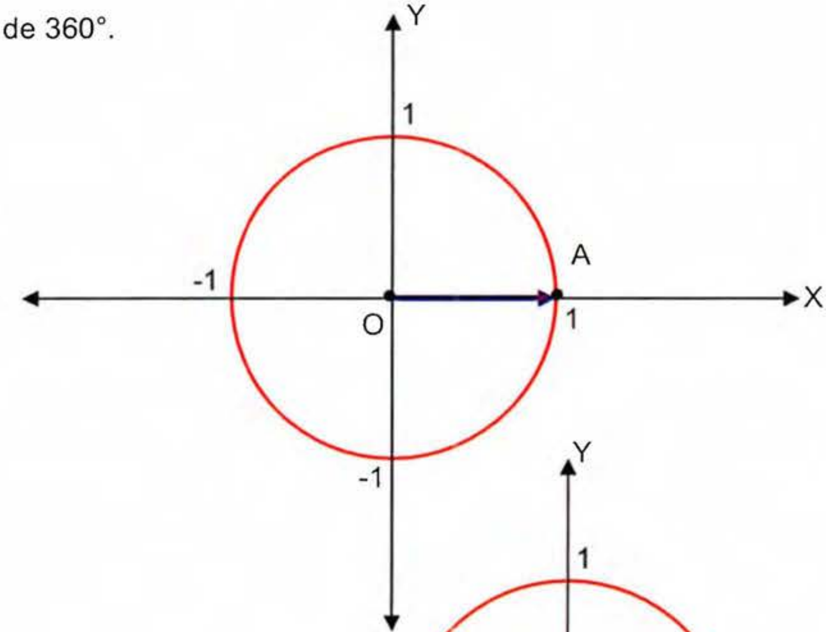


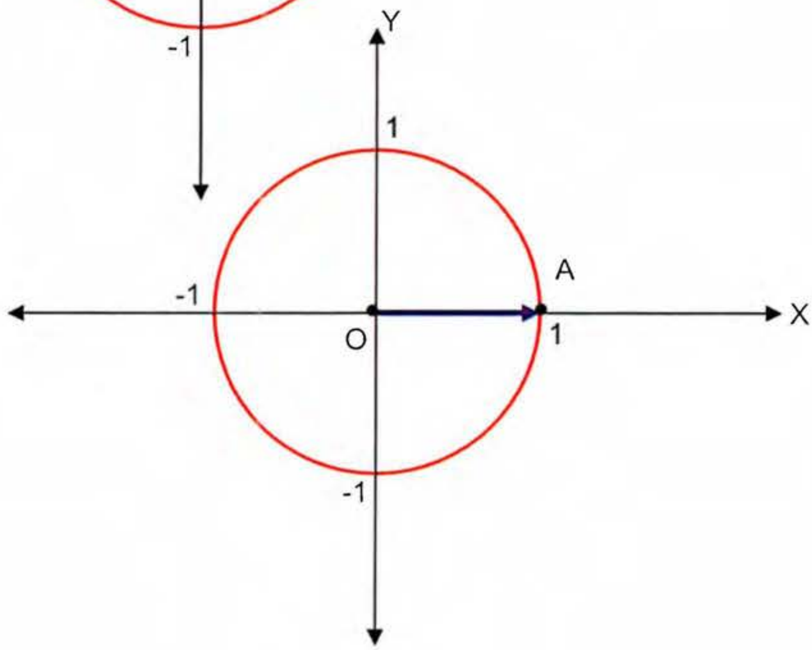
A partir de la rotación del rayo $\hat{OA}$ con un ángulo de -150° se puede determinar el arco menor con una medida de -150° y el arco mayor un una longitud de 210°.

7. Si queremos construir un arco de 400°, entonces podemos observar que 400° = 360° + 40°, por lo que tenemos que dar una vuelva completa de 360° y 40° más.

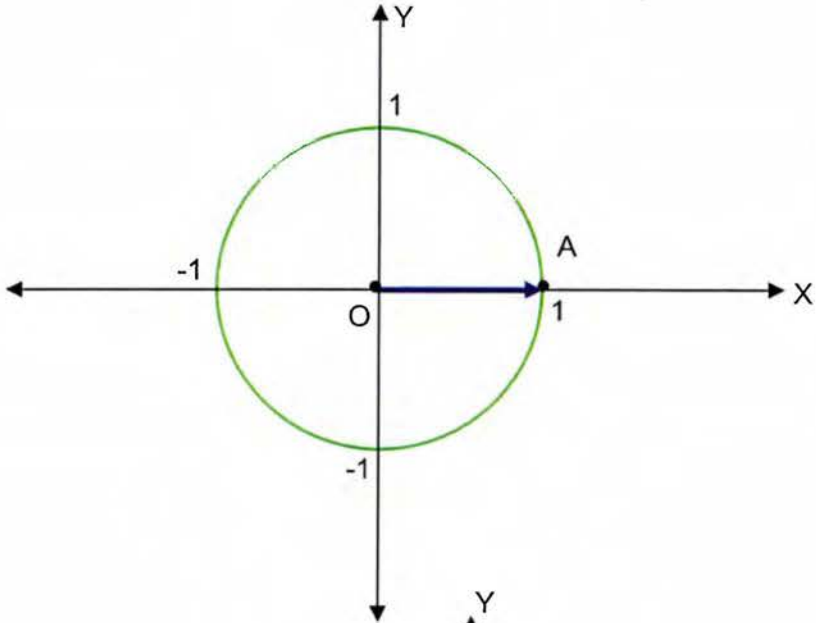


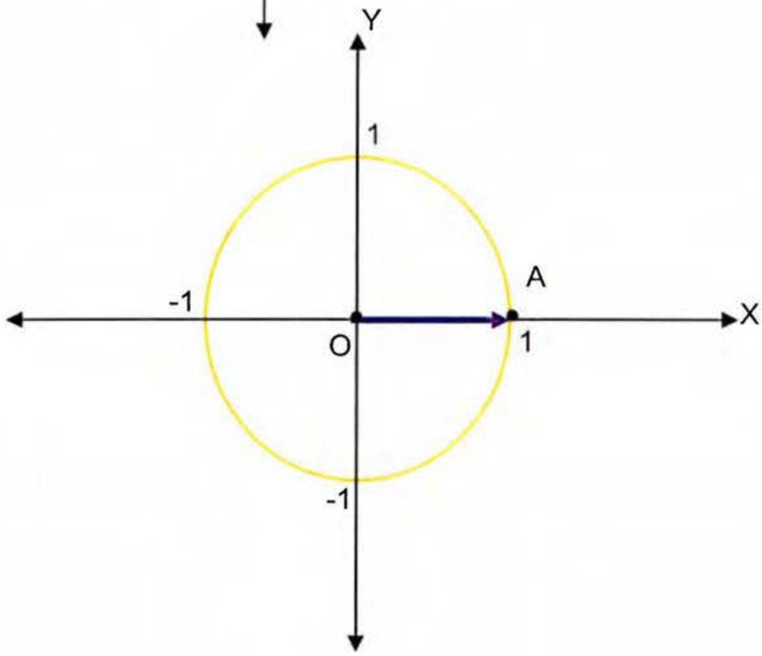
8. Ahora, dibuja en cada uno de los siguientes planos, un arco de 270° y un arco de 360°.



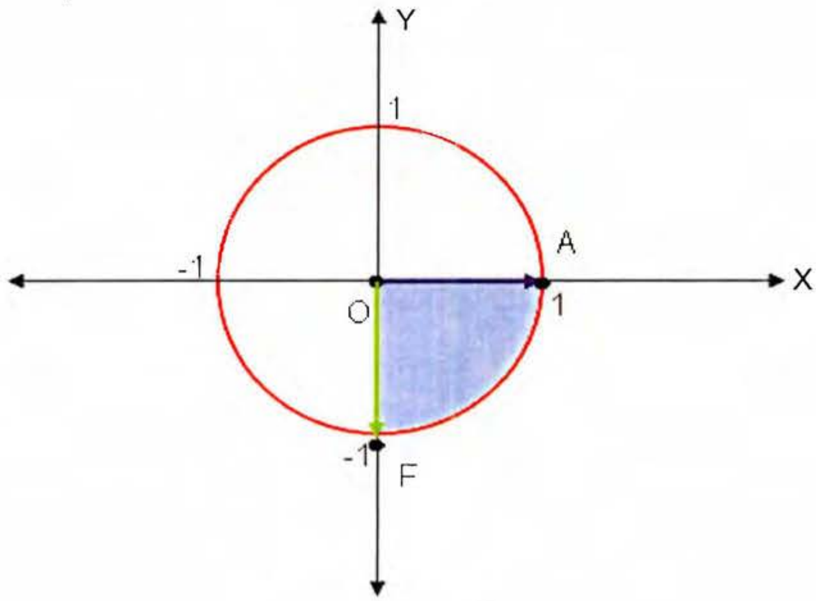


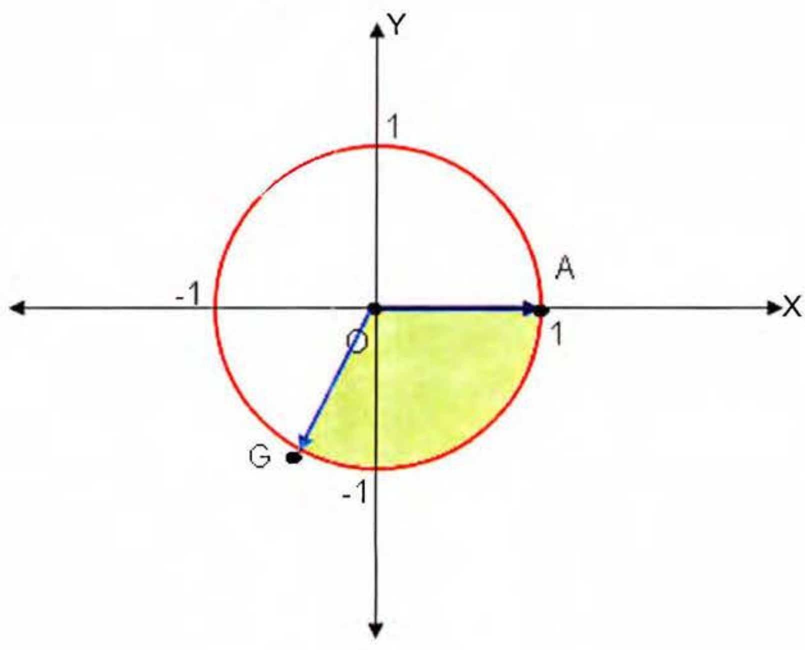
9. Dibuja arcos de 180° y de -230° rotando el rayo $\hat{OA}$



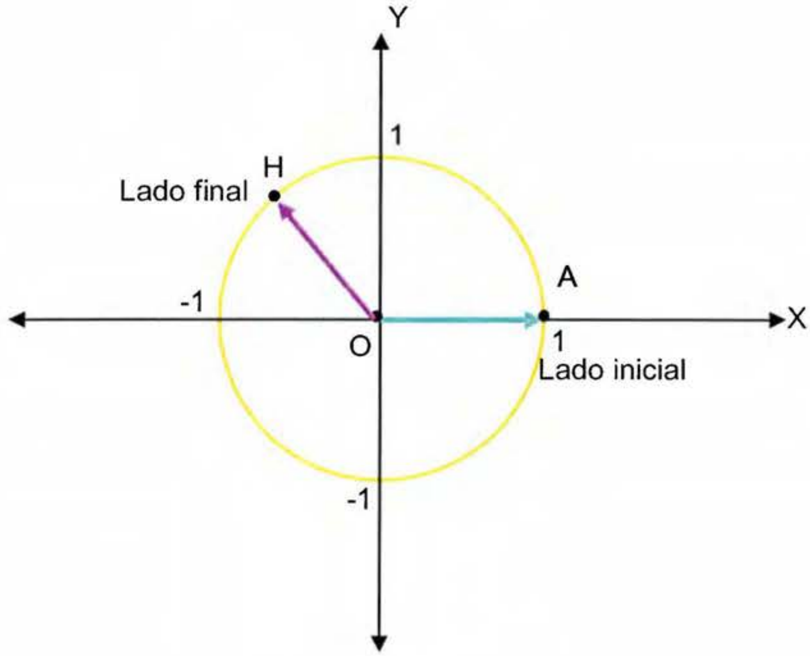


10. Determina la longitud de cada uno de los siguientes arcos utilizando el transportador

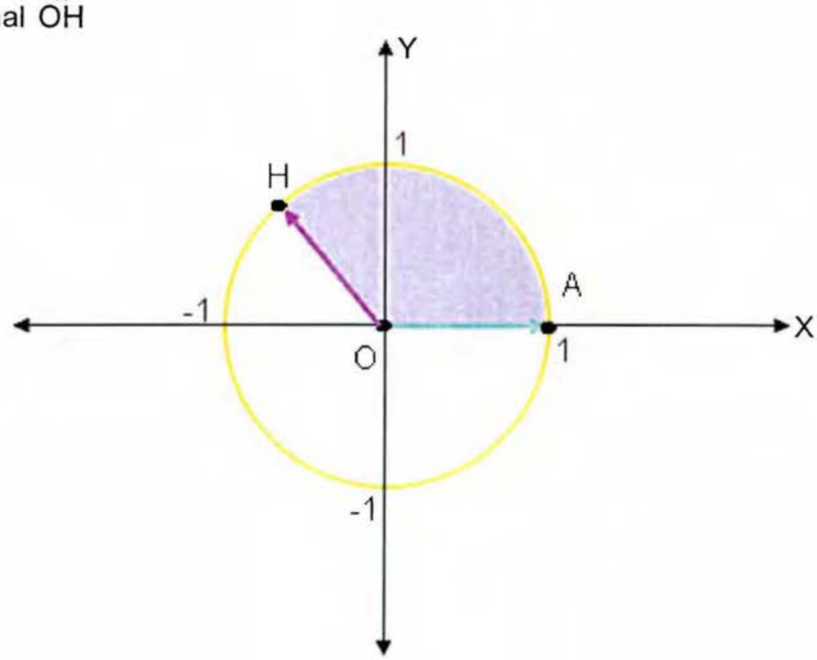


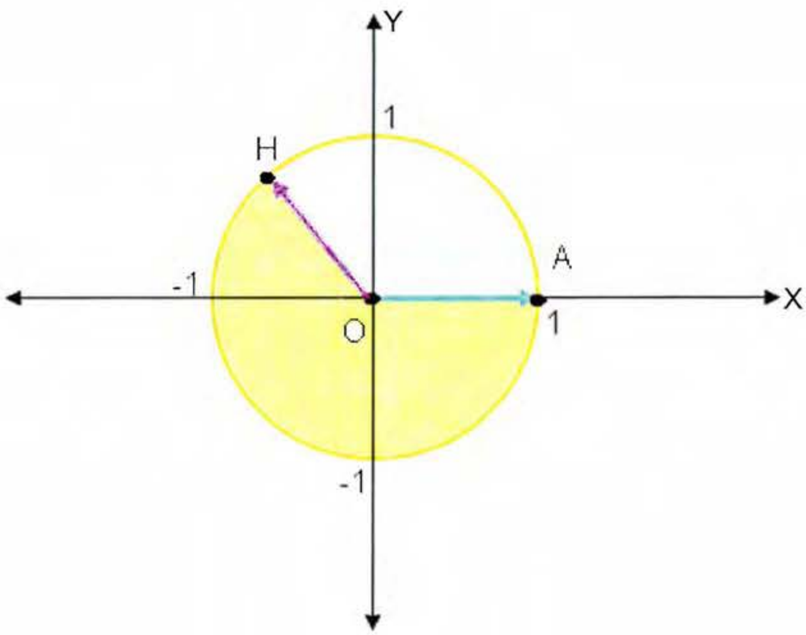


Si analizamos cada uno de los ejemplos anteriores, podemos observar que todos los arcos se formaron de la rotación del rayo $\hat{OA}$ y su imagen, al rayo $\hat{OA}$ se le llama lado inicial, y al rayo imagen se le llama rayo final. El lado inicial siempre contiene los puntos (0,0) y (1,0).



Además, observemos en el dibujo anterior, que si no señalamos el arco, puede haber confusiones, ya que se determinan dos arcos con el lado inicial $\hat{OA}$ y el lado final $\hat{OH}$





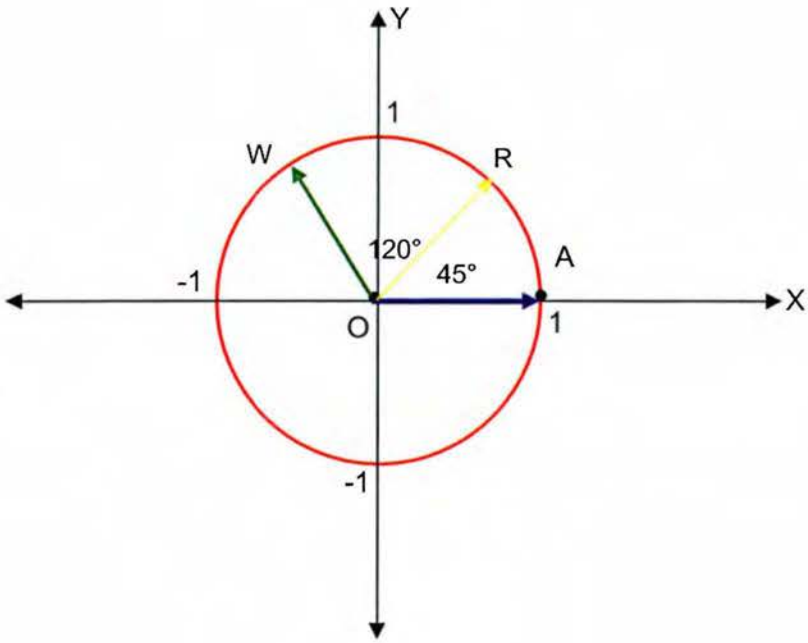
Un ángulo en el plano o en la circunferencia de radio 1 no necesariamente se forma con el lado inicial $\hat{OA}$, puede estar formado por cualquier vector del plano. Sin embargo una característica que si van a cumplir los ángulo es que sus medidas van a pertenecer al intervalo de]-180°, 180°[.

Observemos los siguientes ejemplos

1. Consideremos un arco de 45° y un arco de 120° como muestra la siguiente figura

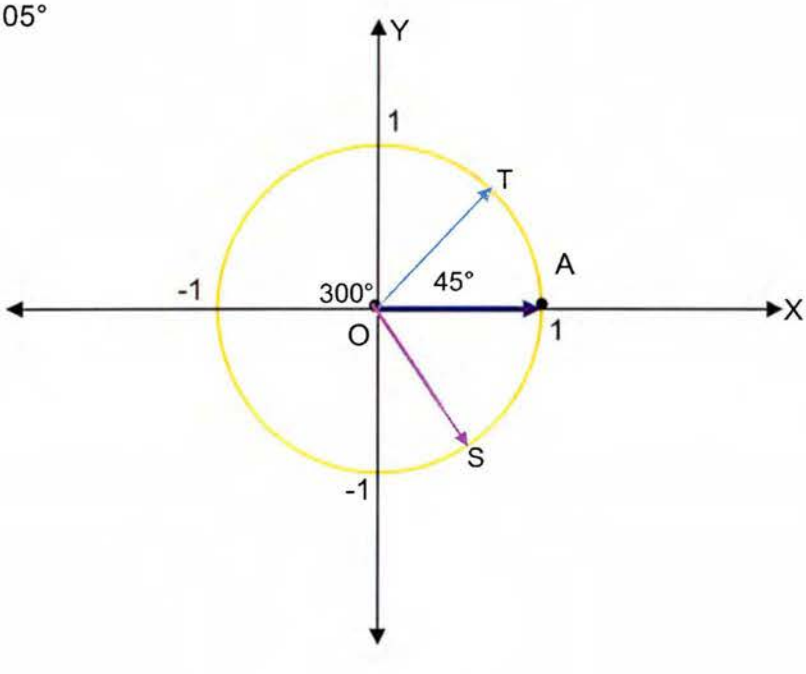
La medida de el ángulo formado por los rayos $\hat{OR}$ y $\hat{OW}$
tiene una medida de 75°. Esta medida se obtiene de restar 120°
menos 45°

120º - 45º = 75º



2. Consideremos un arco de 45° y otro de 300°

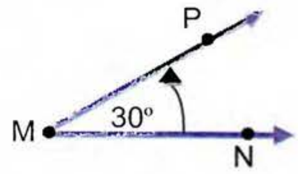
La medida del ángulo formado por formado por los rayos $\hat{OT}$ y $\hat{OS}$ es de 105°. Esta medida se obtiene de la siguiente forma: 300°- 45°=255°, pero 255° es la longitud del arco mayor, la longitud del arco menor se obtiene de la resta de 360° - 255° = 105°



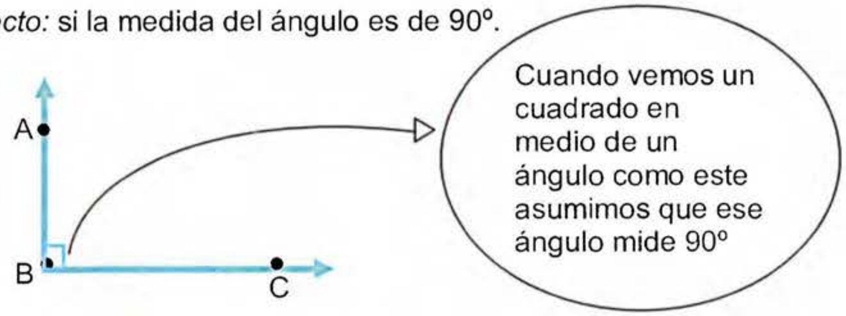
Clasificación de ángulos según su medida

1. *Ángulo Agudo:* si la medida del ángulo es mayor que 0º pero menor que 90º

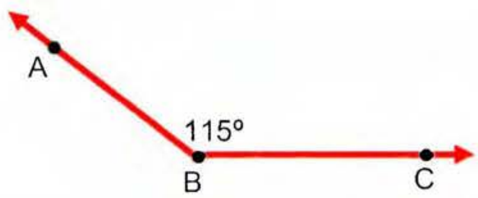
Ejemplo: $\angle$PMN



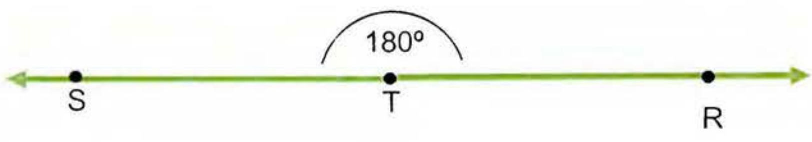
2. *Ángulo Recto:* si la medida del ángulo es de 90º.



3. *Ángulo Obtuso:* si la medida del ángulo es mayor que 90º pero menor que 180º



4. *Ángulo Llano:* si la medida del ángulo es de 180º.

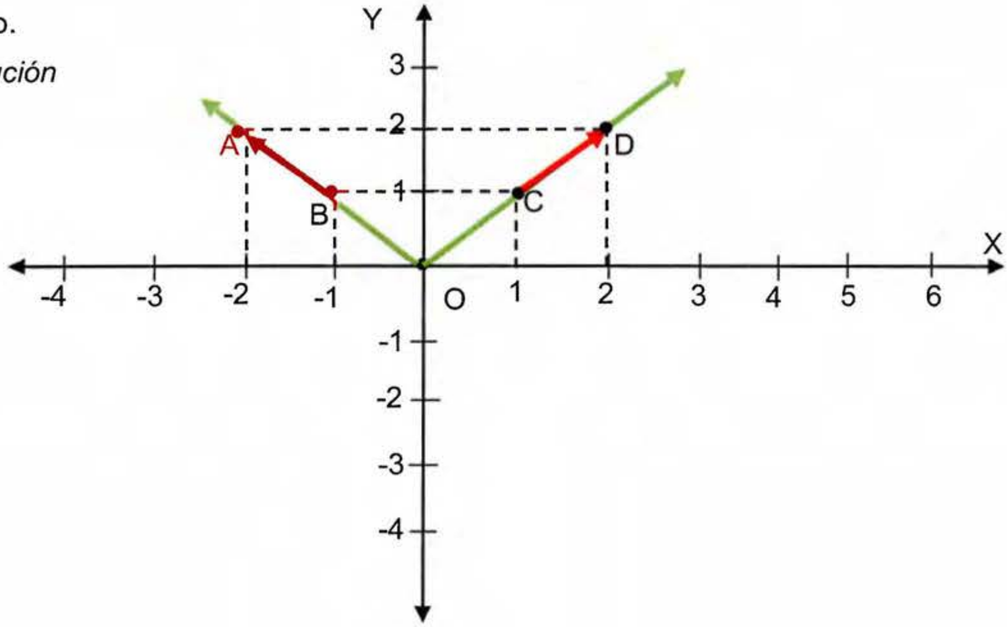


Una forma factible para determinar si un ángulo es agudo, recto u obtuso teniendo dos vectores, cada uno de distinto rayo del ángulo, es determinando el producto punto de estos vectores, si es positivo, el ángulo es agudo, si es negativo el ángulo es obtuso y si el resultado es cero, el ángulo es recto.

Ejemplos

1. Si A(-2,2), B(-1,1), C(1,1) y D(2,2). Determine si el ángulo $\angle$AOD es un ángulo recto.

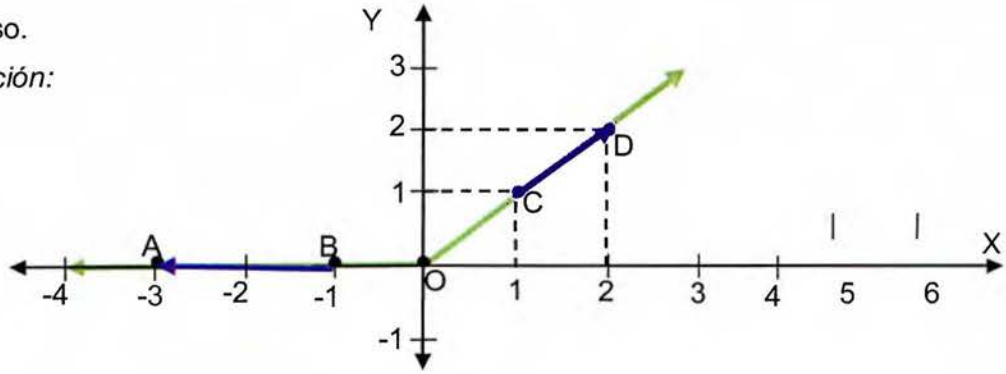
Solución



Un vector que pertenezca al rayo $\hat{OA}$ es el $\overrightarrow{BA}$ y uno que pertenezca al rayo $\hat{OD}$ es $\overrightarrow{CD}$. Como $\overrightarrow{BA} = A - B = (\text{-}2,2) - (\text{-}1,2) = (\text{-}1,1)$. Así mismo, $\overrightarrow{CD} = D - C = (2,2) - (1,1) = (1,1)$, entonces $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CD} = (\text{-}1,1) \bullet (1,1) = \text{-}1 \bullet 1 + 1 \bullet 1 = 0$, por tanto, el $\angle$AOD es un ángulo recto.

2. Si A(-3,0), B(-1,1), C(1,1) y D(2,2). Determine si el ángulo $\angle$AOD es un ángulo obtuso.

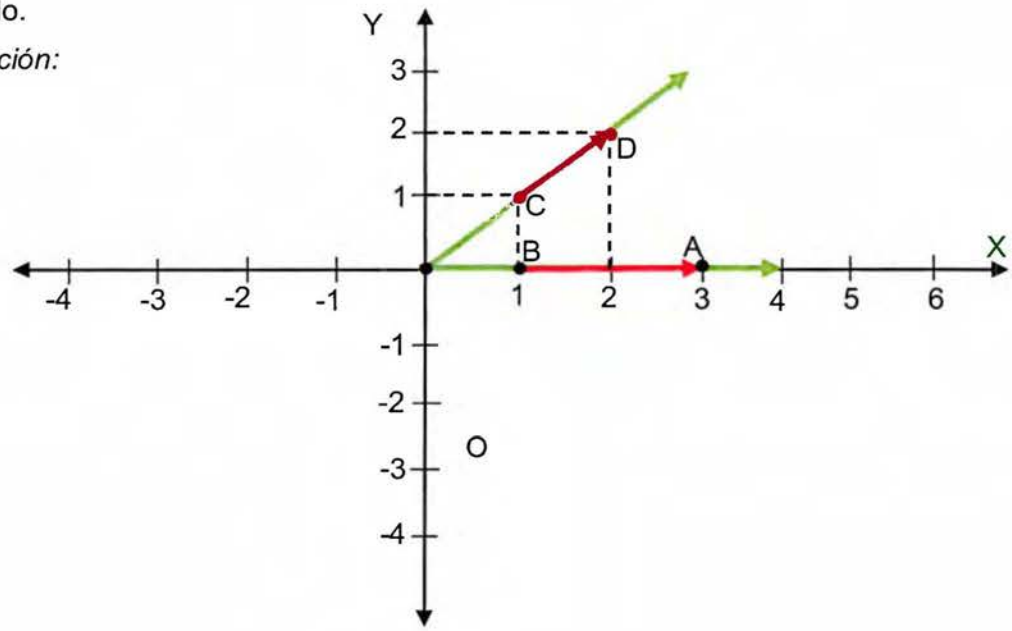
Solución:



Un vector que pertenezca al rayo $\hat{OA}$ es el $\overrightarrow{BA}$ y uno que pertenezca al rayo $\hat{OD}$ es $\overrightarrow{CD}$. Como $\overrightarrow{BA} = A - B = (-3,0) - (-1,0) = (-2,0)$. Así mismo, $\overrightarrow{CD} = D - C = (2,2) - (1,1) = (1,1)$, entonces $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CD} = (-3,0) \bullet (1,1) = -3 \bullet 1 + 0 \bullet 1 = -3$, por tanto, el $\angle AOD$ es un ángulo obtuso.

3. Si A(3,0), B(1,0), C(1,1) y D(2,2). Determine si el ángulo $\angle AOD$ es un ángulo agudo.

Solución:



Un vector que pertenezca al rayo $\hat{OA}$ es el vector $\overrightarrow{BA}$ y uno que pertenezca al rayo $\hat{OD}$ es $\overrightarrow{CD}$. Como $\overrightarrow{BA} = A - B = (3,0) - (1,0) = (2,0)$. Así mismo, $\overrightarrow{CD} = D - C = (2,2) - (1,1) = (1,1)$, entonces $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CD} = (2,0) \bullet (1,1) = 2 \bullet 1 + 0 \bullet 1 = 2$, por tanto, el $\angle AOD$ es un ángulo agudo.

Ejercicio 3.2

A. Clasifique los siguientes ángulos según su medida.

$m\angle\beta = 135°$ ____________________

$m\angle\delta = 47°$ ____________________

$m\angle\alpha = 0°$ ____________________

$m\angle\varepsilon = 55°$ ____________________

$m\angle\pi = 180°$ ____________________

$m\angle\mu = 90°$ ____________________

$m\angle\rho = 18°$ ____________________

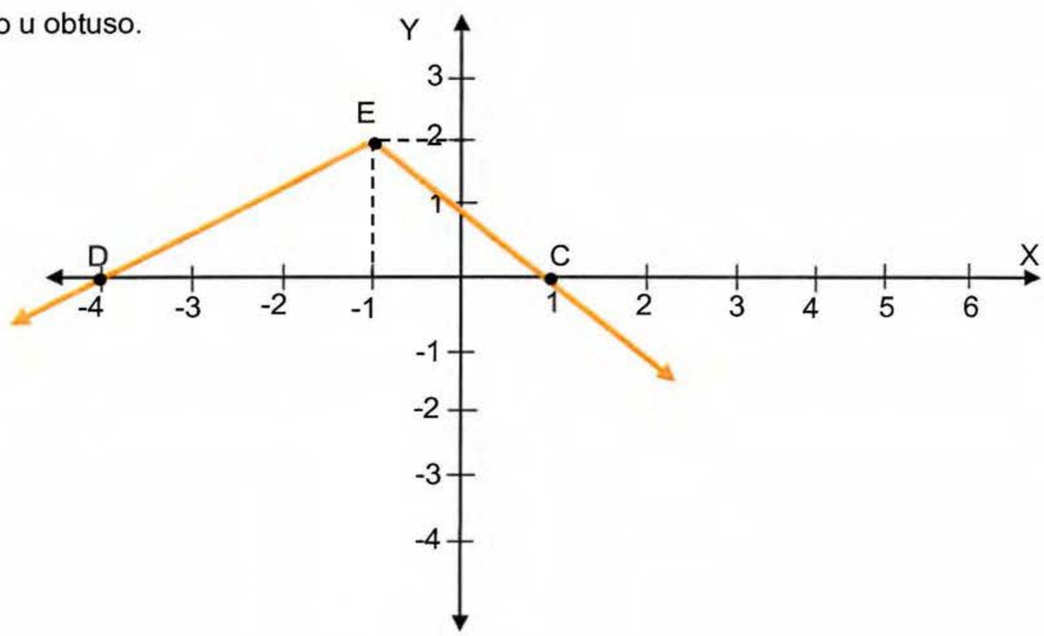
B. Clasifique el ángulo $\angle ABC$ en agudo, recto u obtuso si:

a) A(2,3), B(5,4) y C(6,-1)

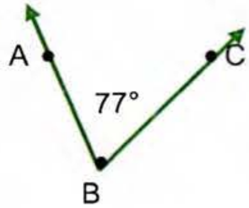
b) A(-18,0), B (-1,7) y C(-2,0)

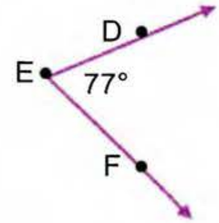
c) A(-3,1), B(-5,4) y C(-2,6)

C. Tomando en cuenta el siguiente gráfico, determine si el ángulo $\angle DEC$ es agudo, recto u obtuso.

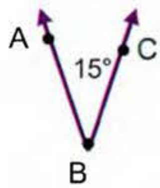


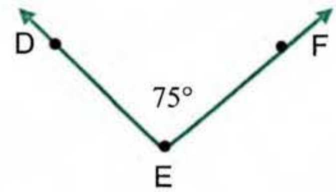
Ángulos congruentes: dos o más ángulos son congruentes si tienen la misma medida. **Ejemplo**: si $m\angle ABC = 77°$ y $m\angle DEF = 77°$, entonces $m\angle ABC$ y $m\angle DEF$ son congruentes.





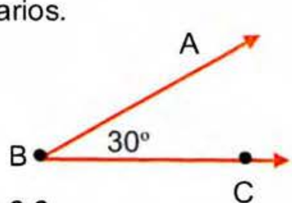
Ángulos complementarios: Son ángulos cuya suma de sus medidas es de 90º. **Ejemplo** si $m\angle ABC$ =15º y $m\angle DEF$ =75º, entonces $m\angle ABC$ y $m\angle DEF$ son complementarios.

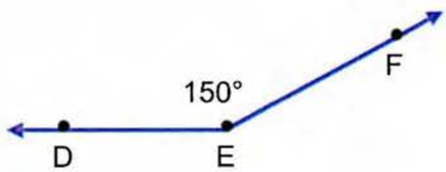




15°+75°=90°

Ángulos suplementarios: Son ángulos cuya suma de sus medidas es de 180º. **Ejemplo** si $m\angle ABC$ =30º y $m\angle DEF$ =150º, entonces $m\angle ABC$ y $m\angle DEF$ son suplementarios.





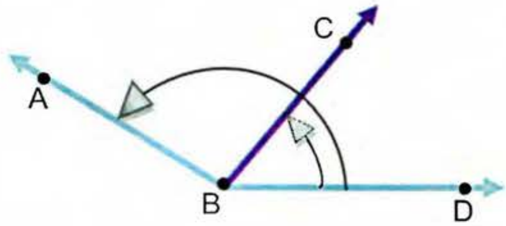
Ejercicios 3.3

Complete la siguiente tabla determinando el suplemento y el complemento del ángulo $\angle\varphi$.

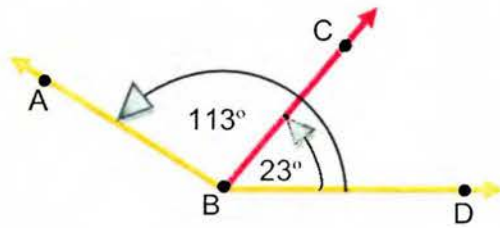
$m\angle\varphi$	Suplemento del $\angle\varphi$	Complemento del $\angle\varphi$
37 º		
	115º	
	91º	
		46º

Clasificación de ángulos según su posición.

1. *Ángulos adyacentes:* dos ángulos son adyacentes si tienen el mismo vértice y un lado en común. En el siguiente **Ejemplo**, los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CBD$ comparten el vértice B y el lado $\overrightarrow{BC}$, por tanto son adyacentes



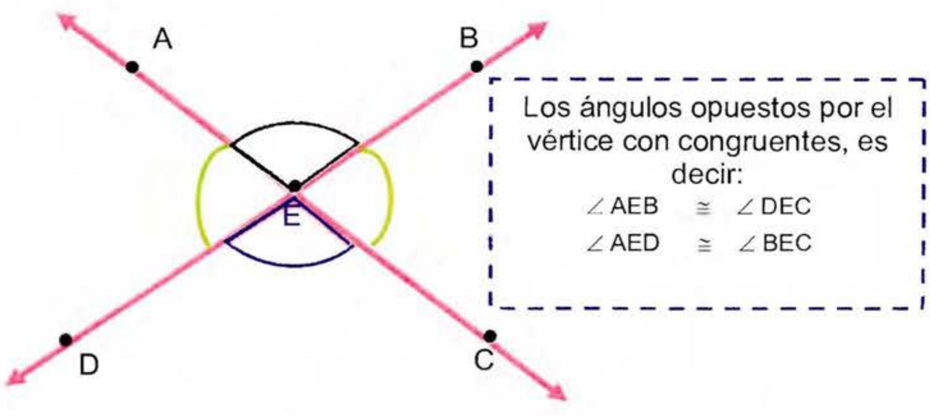
Ejemplo



En este caso los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son adyacentes

2. *Ángulos opuestos por el vértice:* Son dos ángulos que comparten el mismo vértice y cuyos lados forman dos rectas que se intersecan en dicho vértice.

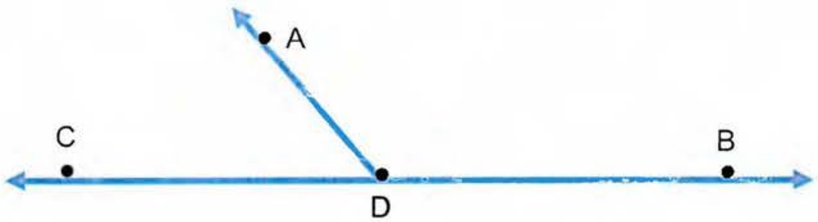
Las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{DB}$ se intersecan en el punto E y forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice que son: $\angle AEB$ y $\angle DEC$; $\angle AED$ y $\angle BEC$



Note que el ángulo $\angle DEC$ no es más que la rotación del ángulo $\angle AEB$ sobre el punto E, donde la transformada de B es D y la transformada de A es C.

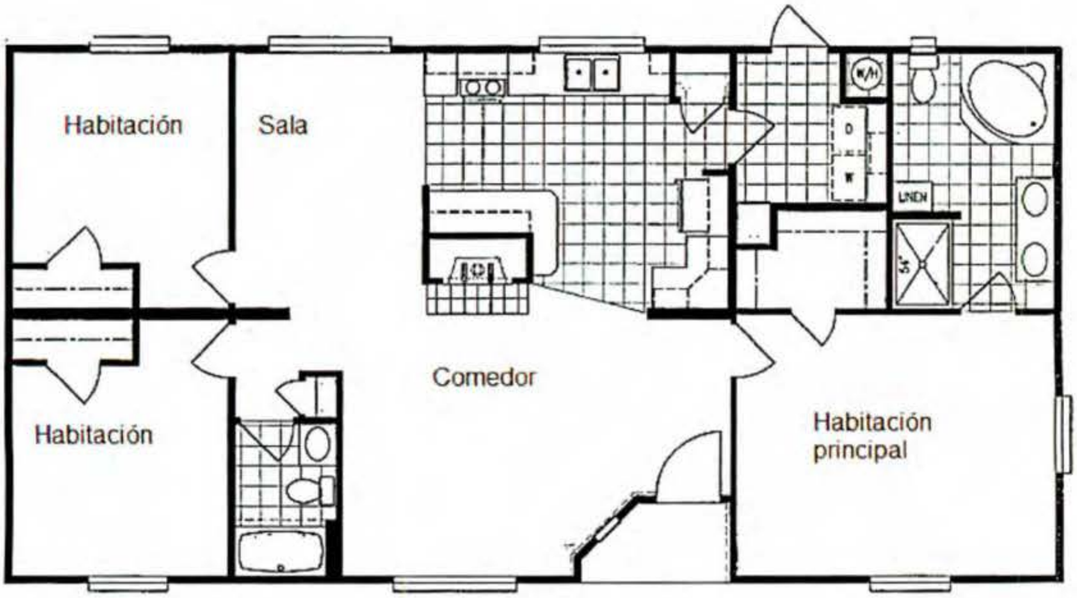
3. *Par lineal:* Son dos ángulos que cumplen con las características de ser adyacentes y suplementarios al mismo tiempo; es decir, que tiene el vértice y un lado común y que la suma de sus medidas es 180°.

Ejemplo: $\angle BDA$ y $\angle ADC$ forman un par lineal, ya que son adyacentes y suplementarios a la vez.



Ejercicios 3.4

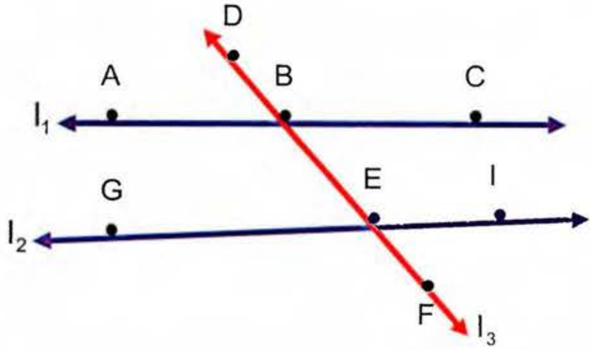
En la siguiente figura se muestra un plano de una casa, determine un par de ángulos adyacentes, un par de ángulos opuestos por el vértice y un par lineal.



4.2.4 Ángulos entre dos rectas y una transversal.

Si tenemos dos rectas l_1 y l_2 que son intersecadas por una tercera recta l_3 como se muestra en la siguiente figura, quedan determinados ocho ángulos que son los siguientes:

$\angle ABD$
$\angle DBC$
$\angle ABE$
$\angle EBC$
$\angle GEB$
$\angle BEI$
$\angle GEF$
$\angle IEF$



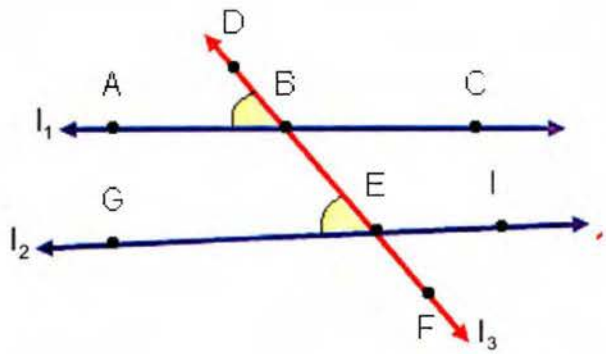
De acuerdo con el lugar en donde estén ubicados, estos ángulos se clasifican en:

Correspondientes.

Son dos ángulos, uno se encuentra en la parte interna limitada por las dos rectas y el otro en la parte externa; y ambos en el mismo lado definido por la transversal.

Ejemplo

$\angle ABD$ y $\angle GEB$
$\angle DBC$ y $\angle BEI$
$\angle ABE$ y $\angle GEF$
$\angle EBC$ y $\angle FEI$



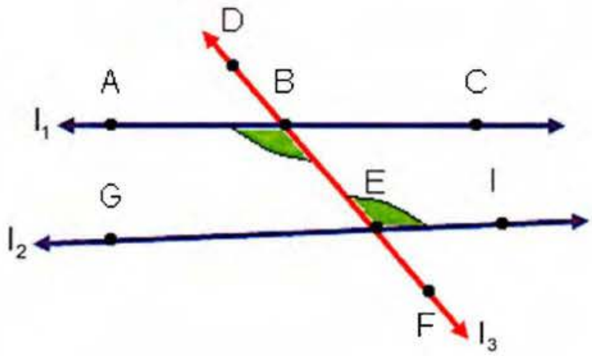
Ángulos alternos internos.

Son dos ángulos que se encuentran en la parte interna limitada por las dos rectas y en distintos lados definidos por la recta transversal

Ejemplo

∠ABE y ∠BEI

∠CBE y ∠GEB



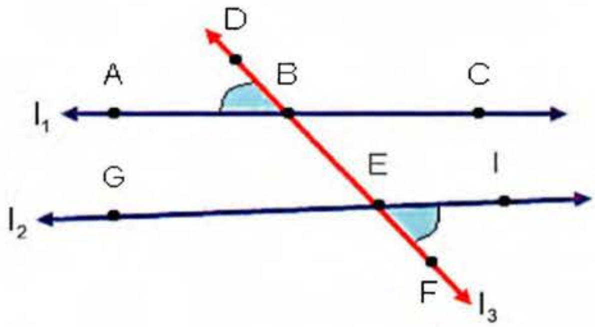
Ángulos alternos externos.

Son dos ángulos que se encuentran en la parte externa limitada por las dos rectas y en distintos lados definidos por la recta transversal

Ejemplo

∠ABD y ∠IEF

∠DBC y ∠GEF



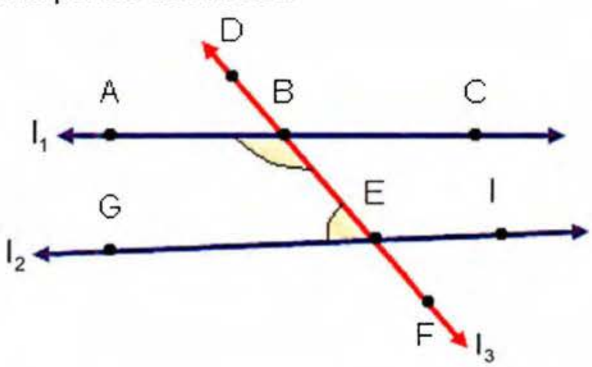
Conjugados internos.

Son dos ángulos que se encuentran en al mismo lado de la recta transversal y en la región interior limitada por las dos rectas.

Ejemplo

∠ABE y ∠BEG

∠CBE y ∠BEI



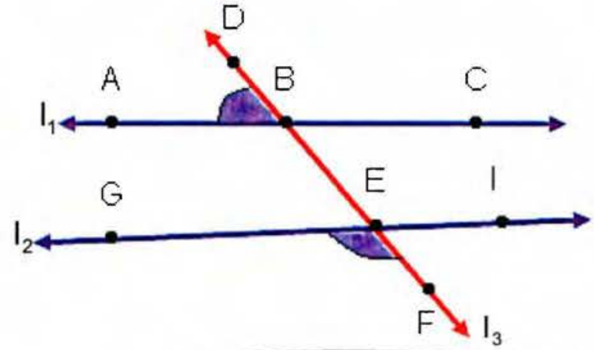
Conjugados externos.

Son dos ángulos que se encuentran en el mismo lado de recta transversal y en la región exterior limitada por las dos rectas.

Ejemplo

$\angle ABD$ y $\angle GEF$

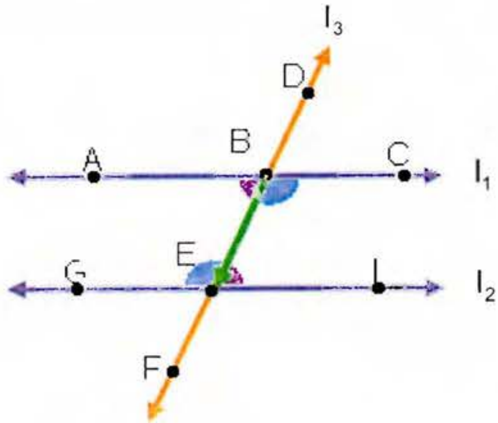
$\angle DBC$ y $\angle IEF$



Sí, las rectas l_1 y l_2 si pueden ser paralelas. Estudiemos ahora que pasa con los ángulos si las rectas l_1 y l_2 son paralelas y son intersecadas por una recta transversal l_3.

1. Los ángulos alternos internos son congruentes: Estos ángulos pueden verse como la traslación y luego la rotación de un ángulo. Por **Ejemplo**, si tomamos el $\angle ABE$ y lo trasladamos con respecto al vector $\overrightarrow{BE}$ y luego lo rotamos en un ángulo de 180º sobre el punto B se puede hacer coincidir con el $\angle BEI$. Ahora, como estamos aplicando dos transformaciones isométricas, podemos concluir que los ángulos $\angle ABE$ y $\angle BEI$ son congruentes.

$\angle ABE \cong \angle BEI$, $\angle GEB \cong \angle CBE$.

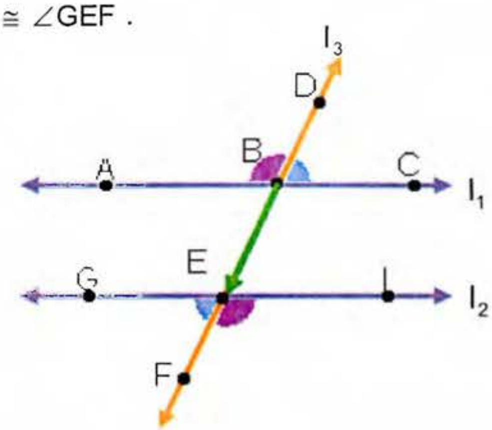


Si $l_1 // l_2$ los ángulos alternos internos son congruentes

2. Los ángulos alternos externos son congruentes: Estos pueden verse como la traslación y luego rotación un ángulo, al igual que los alternos internos. Por ejemplo, si tomamos el ángulo $\angle ABD$ y lo trasladamos con respecto al vector $\overrightarrow{BE}$ y luego rotamos con un ángulo de 180º sobre el punto B, podemos hacer coincidir el ángulo $\angle ABD$ con el $\angle IEF$.

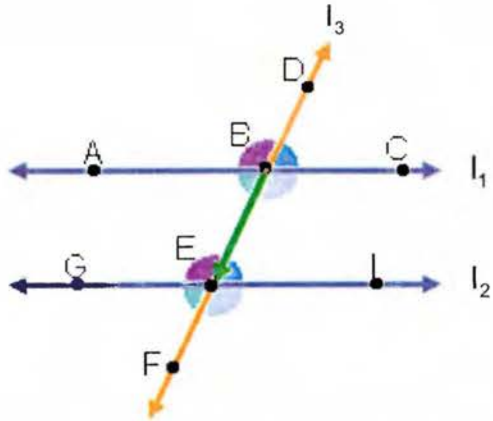
Al igual que los ángulos alternos internos, los ángulos alternos externos son congruentes, pues se obtienen de aplicar transformaciones isométricas. Es decir,

$\angle ABD \cong \angle IEF$, $\angle DBC \cong \angle GEF$.



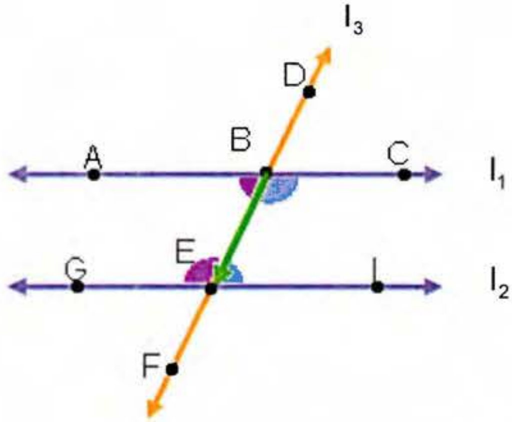
Si $l_1 // l_2$ los ángulos alternos externo son congruentes

3. Los ángulos correspondientes son congruentes: Pueden verse como la traslación de un ángulo. Por **Ejemplo**, el ángulo $\angle BEG$ nace de la traslación del ángulo $\angle DBA$ por el vector $\overline{BE}$, así mismo, si $\angle DBA$, $\angle ABE$ y $\angle CBE$ se trasladan por el vector $\overrightarrow{BE}$ se obtiene respectivamente, $\angle BEI$, $\angle GEF$ y $\angle IEF$.



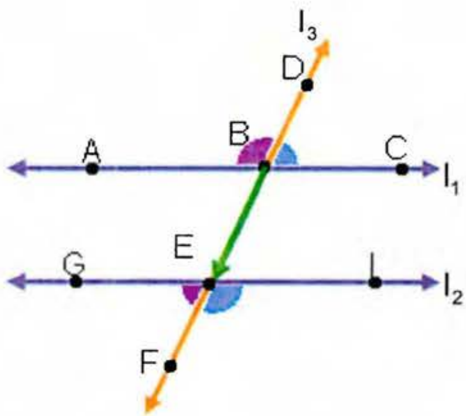
Si $l_1 // l_2$ los ángulos correspondientes son congruentes

4. Los ángulos conjugados internos son suplementarios: Este tipo de ángulos son suplementarios es decir, $m\angle ABE + m\angle GEB = 180°$ y $m\angle CBE + m\angle BEI = 180°$, pues como $\angle ABE$ y $\angle CBE$ son correspondientes respectivamente con $\angle GEF$ y $\angle IEF$ y como estos últimos son suplementarios con $\angle GEB$ y $\angle BEI$ respectivamente, entonces $\angle ABE$ y $\angle GEB$ son suplementarios al igual que $\angle CBE$ y $\angle BEI$.



Si $l_1 // l_2$ los ángulos conjugados internos son suplementarios

5. Los ángulos conjugados externos son suplementarios: Este tipo de ángulos son suplementarios es decir, $m\angle ABC + m\angle GEF = 180°$ y $m\angle DBC + m\angle FEI = 180°$, pues al igual que los ángulos conjugados internos, $\angle ABC$ y $\angle DBC$ son correspondientes, respectivamente, con $\angle GEB$ y $\angle IEB$; y como estos últimos son suplementarios con $\angle GEF$ y $\angle FEI$ respectivamente, entonces $\angle ABC$ y $\angle GEF$ son suplementarios al igual que $\angle DBC$ y $\angle FEI$.



Si $l_1 // l_2$ los ángulos conjugado externos son suplementarios.

En resumen tenemos

3. Si dos rectas paralelas son intersecadas por una transversal entonces se cumple que:

• Los ángulos alternos internos son congruentes.	• Los ángulos alternos externos son congruentes.
• Los ángulos correspondientes son congruentes	
• Los ángulos conjugados internos son suplementarios.	• Los ángulos conjugados externos son suplementarios.

Además

4. Si dos rectas son intersecadas por una secante y forma un par de ángulos alternos internos (o externos) congruentes, entonces las rectas son paralelas.

5. Si dos rectas son intersecadas por una secante y forma un par de ángulos correspondientes congruentes, entonces las rectas son paralelas.

6. Si dos rectas son intersecadas por una secante y forma un par de ángulos conjugados internos (o externos) suplementarios, entonces las rectas son paralelas.

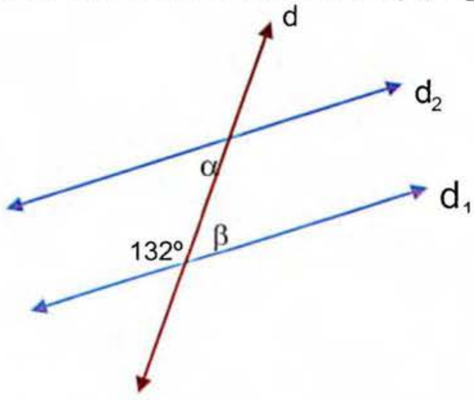
Ejemplos

1. Dos rectas d_1 y d_2 son intersecadas por una recta d. Utilizando los datos de la siguiente figura, determine en cada caso si las rectas d_1 y d_2 son paralelas.

a) $m\angle\alpha = 48°$

b) $m\angle\alpha = 47°$

Solución:

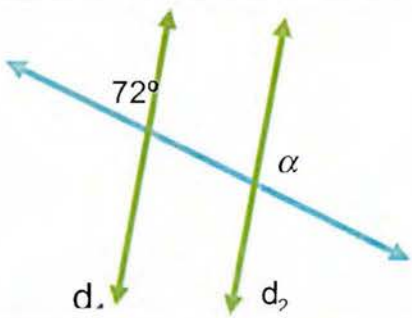
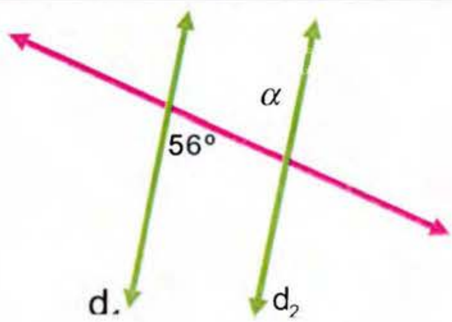
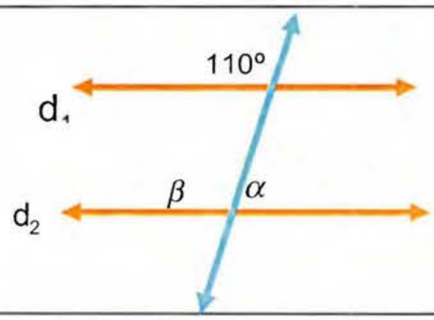


a) La $m\angle\beta = 180° - 132° = 48°$ por formar un par lineal con el ángulos que mide 132°

$\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son alternos internos, entonces si $m\angle\alpha = 48°$ y $m\angle\beta = 48°$ entonces $\angle\alpha \cong \angle\beta$ por lo que podemos decir que las rectas d_1 y d_2 son paralelas.

b) En este caso tenemos que $m\angle\alpha = 47°$ y $m\angle\beta = 48°$, entonces $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ no son congruentes, por lo que las rectas d_1 y d_2 no son paralelas.

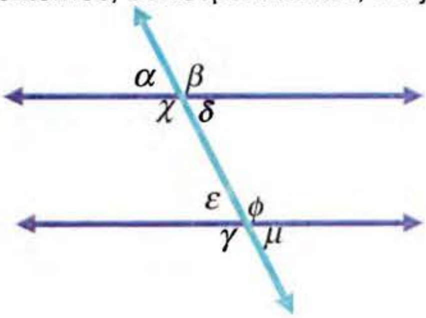
2. Determine la medida del ángulo $\angle\alpha$ en cada caso, en donde las rectas d_1 // d_2

	En este caso , el ángulo de medida 72° y el $\angle\alpha$ son conjugados externos, por tanto, son suplementarios, entonces $m,\angle\alpha = 108°$
	En este caso, la $m\angle\alpha = 56°$ pues dichos ángulos son alternos internos, por tanto son congruentes.
	Para averiguar $m\angle\alpha$ vamos a primero averiguar el correspondiente a 110°. Llamemos a este "β". Entonces $m\angle\beta = 110°$, pues los correspondientes son congruentes.

	Y como $m\angle\alpha$ y $m\angle\beta$ forman un par lineal, entonces $m\angle\alpha + m\angle\beta = 180°$, por tanto, $m\angle\alpha = 70°$

Ejercicio 4.1.

A. En la siguiente figura, determine un par de ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes, conjugados internos y conjugados externos.



Alternos internos _________ y ______________

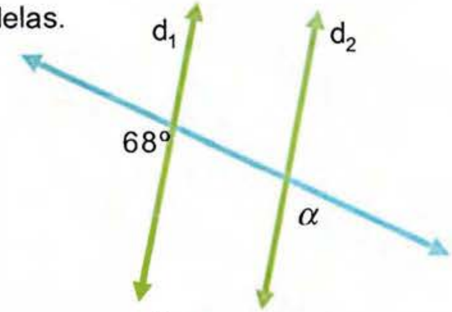
Alternos externos _________ y ______________

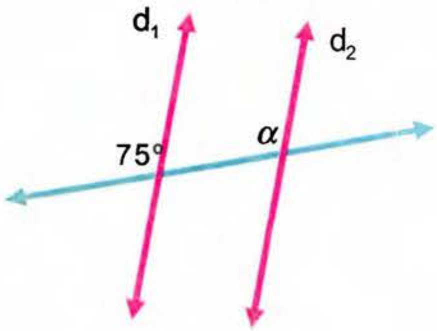
Correspondientes _________ y ______________

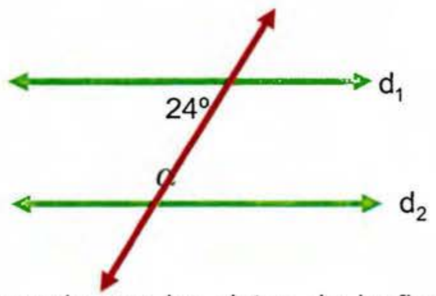
Conjugados internos _______ y ____________

Correspondientes_________ y ____________

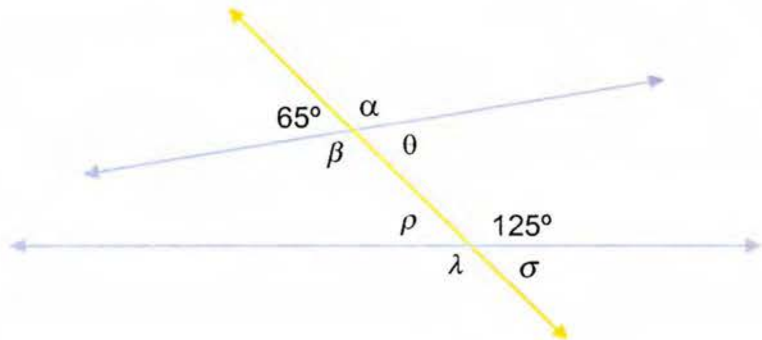
B. Determine la medida del ángulo $\angle\alpha$ en cada caso. Las rectas d_1 y d_2 son paralelas.



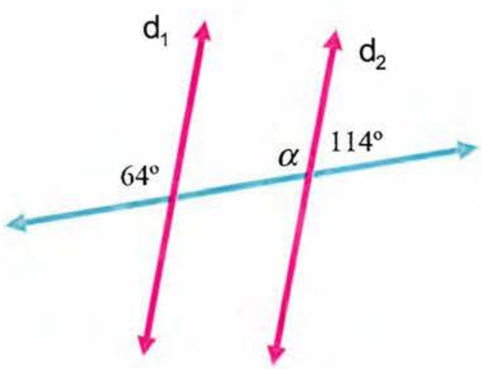


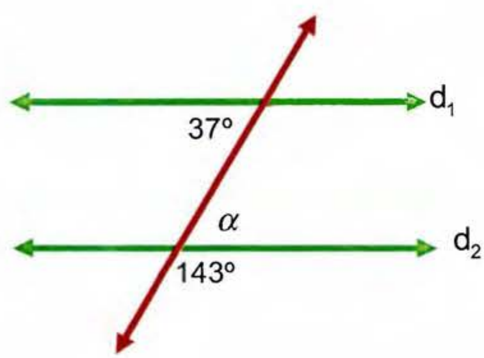


C. De acuerdo con los datos de la figura, determine la medida de los ángulos α, β, θ, ρ, λ, σ.



D. De acuerdo con los datos de cada una de las siguientes figuras, determine la medida del ángulo α y establezca si las rectas d_1 y d_2 son paralelas o no.





4.2.5 Triángulos.

Si prestamos atención a nuestro entorno nos damos cuenta de que las figuras geométricas están presentes en muchos objetos.

En este momento nos concentraremos en el caso de los triángulos y estudiaremos sus propiedades, basándonos en los conocimientos adquiridos sobre vectores.

Observa las siguientes figuras y marca los triángulos que identificas en cada una. Luego contesta las preguntas.

1. Explique con sus palabras qué es un triángulo.

   ____

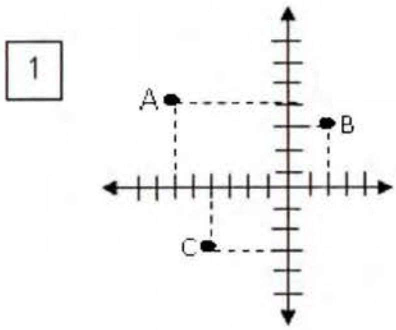
2. Describa objetos que observe a su alrededor en donde se utilicen triángulos.

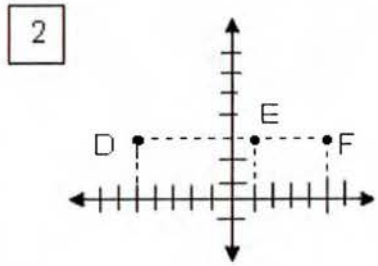
   ____

   ____

   ____

Ahora, dibuje un triángulo en cada uno de los siguientes planos utilizando los puntos dados.





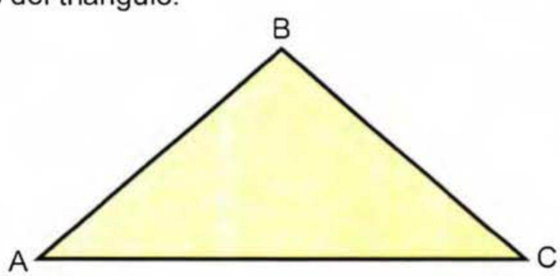
¿Qué pasó en el segundo plano?

¿Qué propiedad tienen los puntos D, E y F que no permite construir un triángulo?

Si tenemos tres puntos NO colineales en el plano, la unión de los segmentos definidos por ellos es un triángulo. Los tres puntos se llaman vértices y los segmentos, lados del triángulo.

En la siguiente figura los puntos A, B y C se llaman vértices del triángulo

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, y $\overline{AC}$ son los lados del triángulo.



El triángulo formado por los puntos A, B y C se denota ΔABC.

Además de los vértices y los lados del triángulo también podemos identificar ángulos. Vamos estudiar los ángulos internos y los ángulos externos. Los ángulos internos o externos de un triángulo siempre van a ser positivos, es decir, que van a pertenecer al intervalo]0,180[.

Ángulos internos.

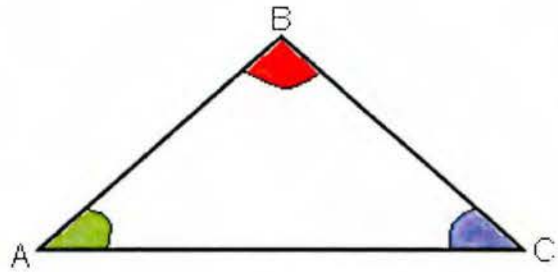
Cada par de lados del triángulo forma un ángulo interno. En un triángulo existen tres. En la siguiente figura se muestra cada uno de dichos ángulos.

Tenemos:

$\angle A$ formado por $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$

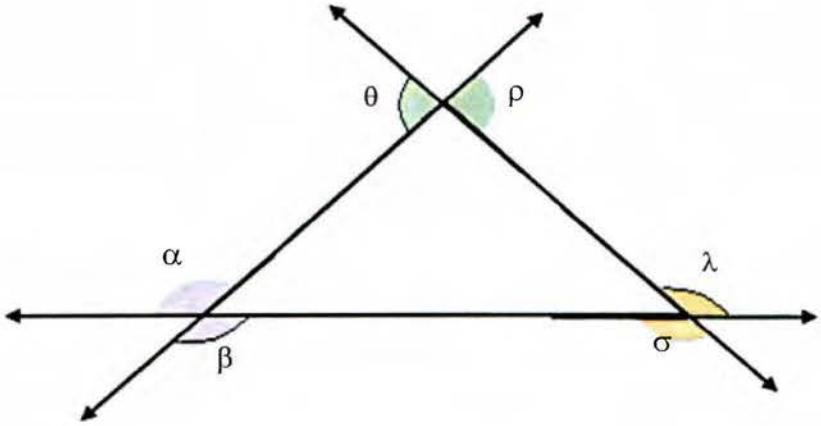
$\angle B$ formado por $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$

$\angle C$ formado por $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CA}$



Ángulos externos.

Para identificar los ángulos externos debemos extender cada uno de los lados del triángulo como se muestra en la siguiente figura:

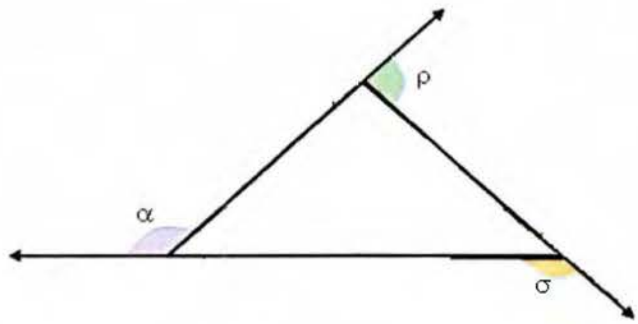


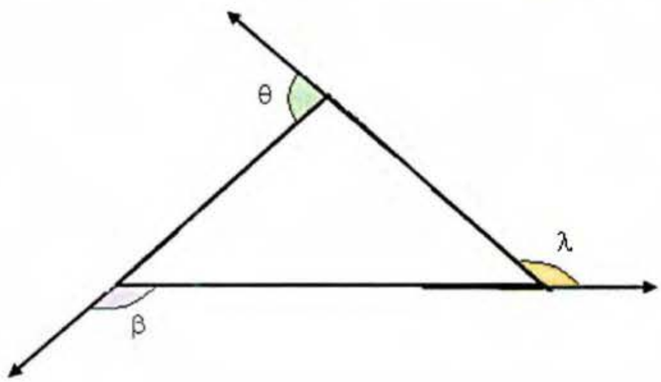
Los ángulos externos son los que están pintados de verde, morado y anaranjado. Observemos que se forman con un lado del triángulo y con la extensión de otro lado del triangulo.

Tenemos seis ángulos externos que son:

$$\angle\theta \ ,\angle\rho$$
$$\angle\alpha \ ,\angle\beta$$
$$\angle\lambda \ ,\angle\sigma$$

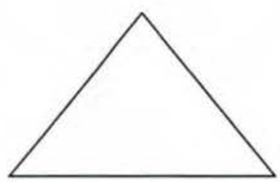
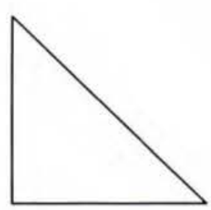
Además tenemos que $\angle\theta$ y$\angle\rho$, $\angle\alpha$ y $\angle\beta$, $\angle\lambda$ y$\angle\sigma$ son opuestos por el vértice por lo que son congruentes. Entonces vamos a decir que todo triángulo tiene 3 ángulos externos que pueden ser $\angle\alpha \ ,\angle\rho \ y \ \angle\sigma$ ó $\angle\beta \ ,\angle\theta \ y \ \angle\lambda$



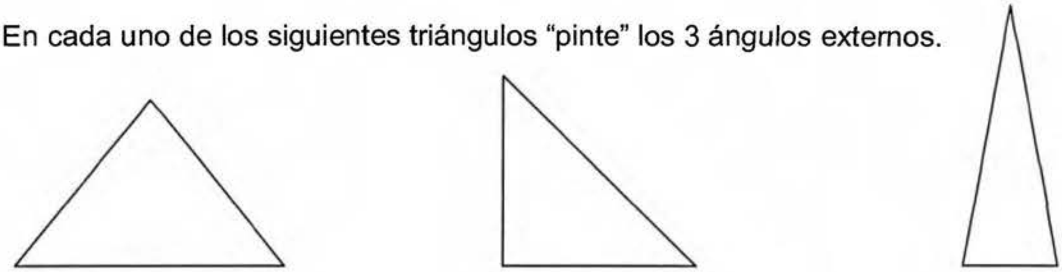


Ejercicios 5.1

A. En cada uno de los siguientes triángulos "pinte" los ángulos internos.

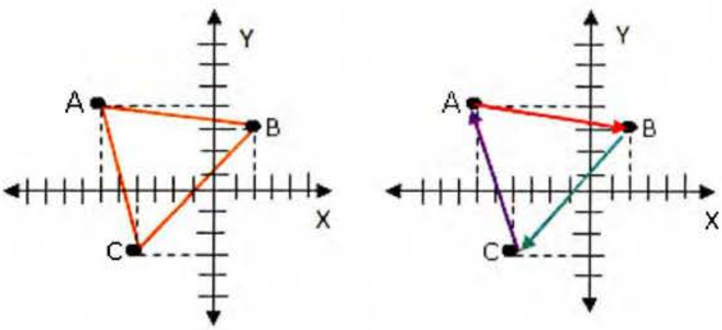




B. En cada uno de los siguientes triángulos “pinte” los 3 ángulos externos.



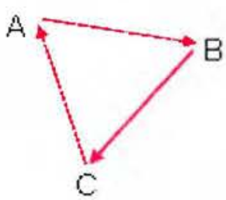
Triángulos y vectores.

Estudiemos el triángulo ΔABC del ejemplo anterior ahora utilizando vectores. Considerando los puntos A y B tenemos el vector $\overrightarrow{AB}$; con B y C el vector $\overrightarrow{BC}$ y con C y A el vector $\overrightarrow{CA}$.



También podemos ir en la dirección contraria.

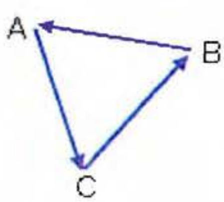
En cualquier triángulo quedan determinados tres vectores y sus tres vectores opuestos,



$\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CA}$



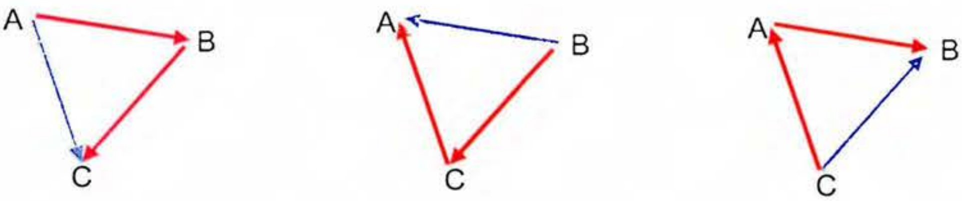
$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

$-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$

$-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}$

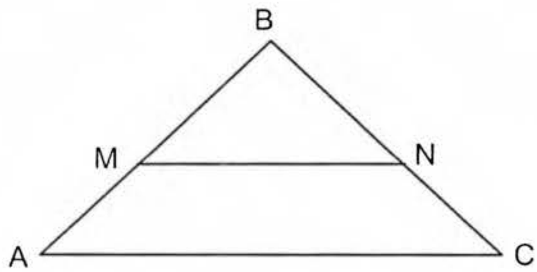
También podemos ver lo siguiente:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$



Ejemplo.

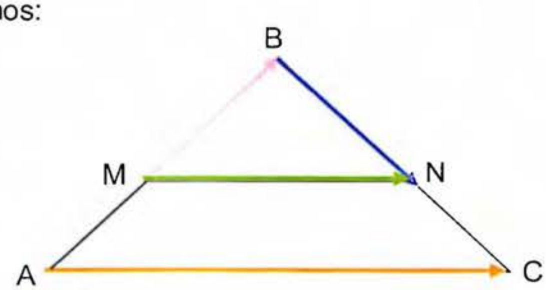
1. Demuestre que el segmento formado por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de su longitud.



Solución:

Llamemos M y N a los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, entonces tenemos:

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, y $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



Ahora, utilizando la fórmula de Chasles para sumar vectores tenemos

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

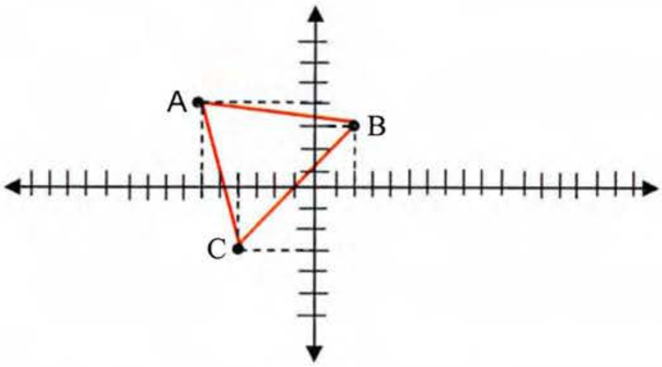
Entonces tenemos: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Luego, $\overline{MN}$ mide la mitad de $\overline{AC}$ y además $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$ son paralelos, ya que $\overrightarrow{MN}$ es múltiplo de $\overrightarrow{AC}$.

2. En el triángulo de la figura adjunta encuentre la longitud de $\overline{AB}$

Solución:

El punto A tiene coordenadas (-6,4) y el punto B (2,3)



Utilizando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos tenemos:

$$d(A,B) = \sqrt{(2--6)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$$

Ejercicio 5.2

Encuentre la longitud de cada uno de los lados de un triángulo de vértices A(1,3), B(-2,1) y C(0,-4), y luego determine el perímetro.

Desigualdad triangular.

Materiales

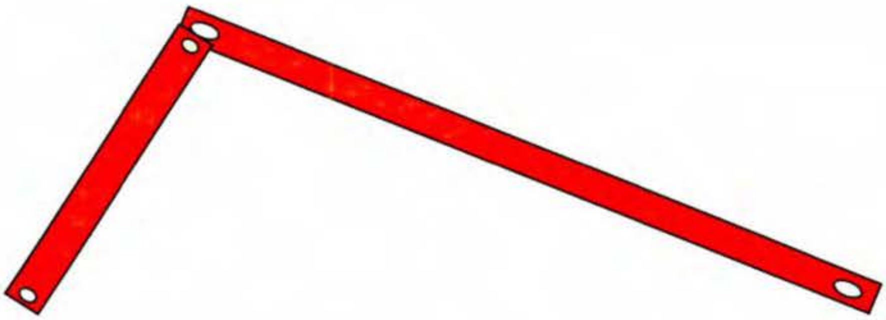
- Papel construcción.
- Pines.

Instrucciones:

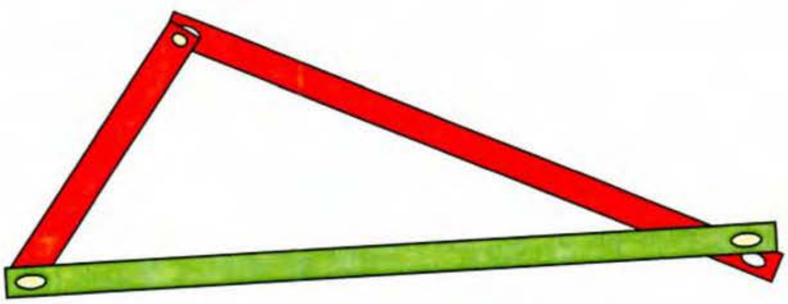
- Construya tiras de 2 cm de ancho cada una, en papel construcción y con las siguientes indicaciones:
- Dos tiras de color rojo de 4 cm y 8 cm de largo.
- Cuatro tiras de color verde de 5 cm, 8 cm, 12 cm y 13 cm.

- Haga orificios en los extremos de cada tira como se muestra en la figura

- Una de un extremo las dos tiras de color rojo utilizando el pin.



- Construya diferentes triángulos utilizando las dos tiras rojas y una tira verde. Luego complete la tabla de abajo.



Medidas	Sí o No/ se puede construir un triángulo
4, 8 y 5	
4, 8 y 8	
4,8 y 12	
4, 8 y 13	

¿Puede formar triángulos con tres medidas cualesquiera?

¿En qué casos se puede formar triángulos? y ¿cuándo no se puede?

¿Qué condición deben cumplir las medidas de los segmentos?

Para construir un triángulo, las medidas deben cumplir una condición llamada DESIGUALDAD TRIANGULAR, que dice que la suma de las medidas de dos lados de un triángulo debe ser mayor que la medida del otro lado del triángulo

Ejercicio 5.3

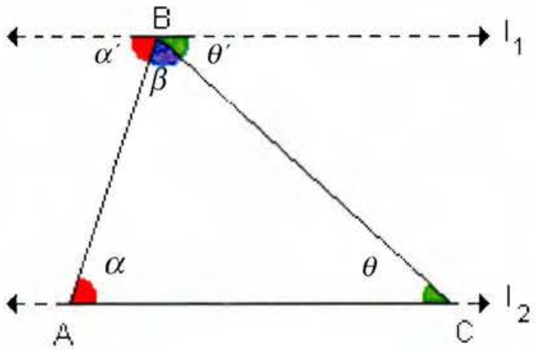
Identifique con cuáles de las siguientes tres medidas, dadas en centímetros, se puede construir un triángulo.

A. 1, 2 y 5
B. 2, 3 y 5
C. 3, 4 y 5
D. 11, 12 y 13
E. $4\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ y $4\sqrt{3}$

Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

Realice los siguientes pasos

- Dibuje un triángulo en un papel y pinte los ángulos internos.
- Recorte los ángulos internos.
- Coloque los ángulos como muestra la figura.



¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos de un triángulo?

Observemos también que si l_1 y l_2 son paralelas entonces $\angle\alpha \cong \angle\alpha'$ por ser ángulos alternos internos, también $\angle\theta \cong \angle\theta'$ por la misma razón.

De acuerdo con los datos del dibujo podemos decir que

$$m\angle\alpha' + m\angle\beta + m\angle\theta' = m\angle\alpha + m\angle\beta + m\angle\theta = 180^\circ$$

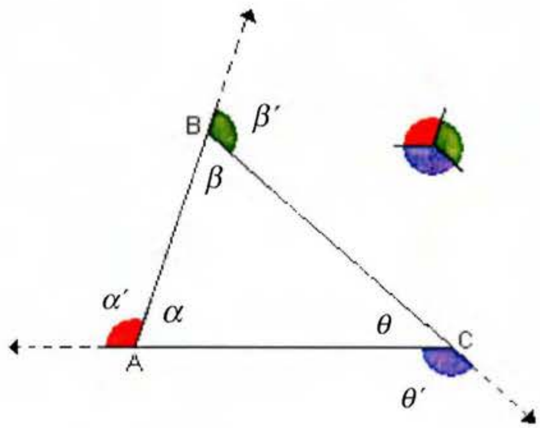
Entonces podemos decir que:

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°

Suma de las medidas los ángulos externos de un triángulo.

Ahora trabajemos de igual forma pero con los ángulos externos del triángulo.

- Dibuje un triángulo en un papel y pinte los ángulos externos.
- Recorte los ángulos internos.
- Coloque los ángulos como muestra la figura.



¿Cuánto suman las medidas de los ángulos externos de un triángulo?

Estudiemos esto un poco más a fondo

Sabemos que

$$\left.\begin{array}{l} m\angle\alpha + m\angle\alpha' = 180° \\ m\angle\beta + m\angle\beta' = 180° \\ m\angle\theta + m\angle\theta' = 180° \end{array}\right\} \quad \text{ya que forman un par lineal.}$$

De lo anterior podemos también deducir

$m\angle\alpha' = 180° - m\angle\alpha$

$m\angle\beta' = 180° - m\angle\beta$

$m\angle\theta' = 180° - m\angle\theta$

Ahora sumemos las medidas de los ángulos externos del triángulo

$$m\angle\alpha' + m\angle\beta' + m\angle\theta' = 180 - m\angle\alpha + 180 - m\angle\beta + 180 - m\angle\theta =$$
$$540 - (m\angle\alpha + m\angle\beta + m\angle\theta) = 540 - 180 = 360^\circ$$

La suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es 360°

Ejemplos

1. Determine la medida del ángulo θ

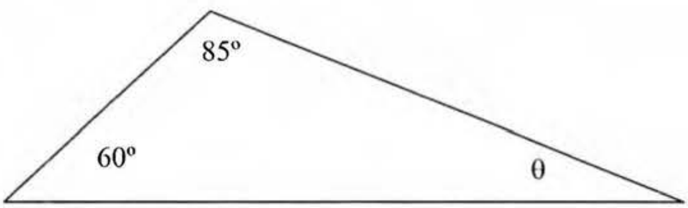
Solución:

$m\angle\theta + 60^o + 85^o = 180^o$

$m\angle\theta + 145^o = 180^o$

$m\angle\theta = 180^o - 145^o$

$m\angle\theta = 35^o$



2. Consideremos un triángulo ΔABC en donde se cumple que $m\angle B = 2m\angle A$ y $m\angle C = 5m\angle A$. Determine las medidas de los ángulos A, B y C del triángulo.

Solución:

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, por lo que

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^o$.

$m\angle A + 2m\angle A + 5m\angle A = 180^o$

$8m\angle A = 180^o$

$m\angle A = \frac{180^o}{8} = 22{,}5^o$

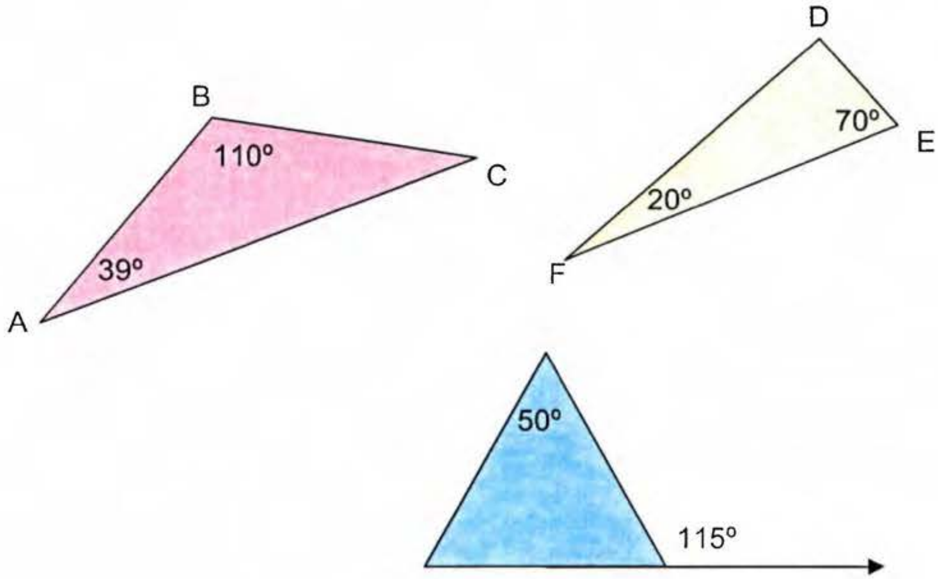
Ahora, como $m\angle B = 2m\angle A$ y $m\angle C = 5m\angle A$ entonces

$m\angle B = 2 \cdot 22{,}5 = 45^o$

$m\angle C = 5 \cdot 22{,}5 = 112{,}5^o$

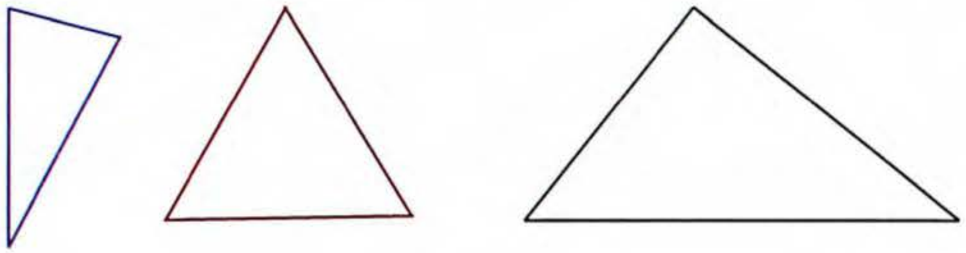
Ejercicios 5.4

Determine la medida de los ángulos que faltan en cada triángulo.

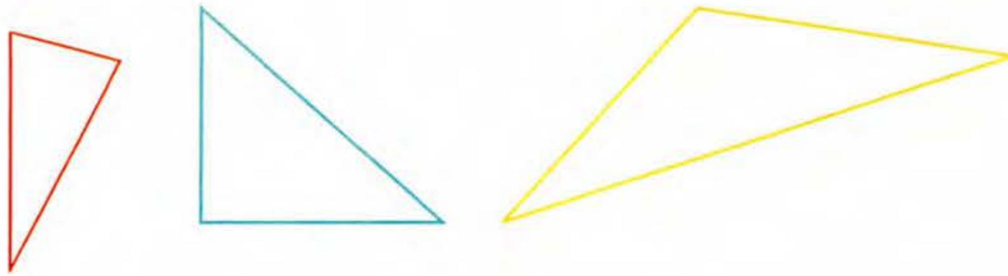


Clasificación de los triángulos.

Utiliza regla para establecer las medidas de los lados de cada uno de estos triángulos



Ahora utiliza un transportador para medir cada uno de los ángulos internos de cada triángulo



Los triángulos se pueden clasificar de acuerdo con la medida de sus lados o según la medida de sus ángulos.

Clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus lados.

1. *Triángulos isósceles*: Tienen al menos dos lados de igual medida.

La definición anterior nos dice que un triángulo que tenga dos lados congruentes (es decir, con la misma medida) y otro no congruente a los demás, es un triángulo isósceles, pero también, un triángulo que tenga todos los lados congruentes es isósceles, puesto que cumple con la definición de tener al menos dos lados de igual medida.

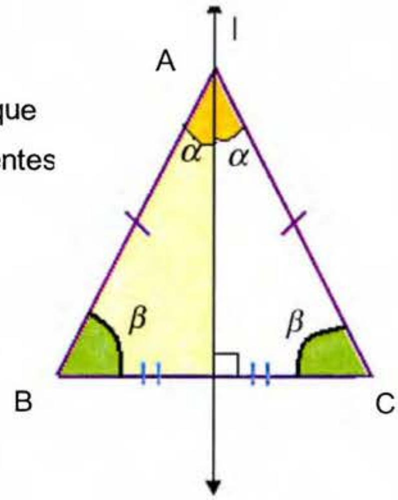
Cuando se tiene un triángulo con dos lados congruentes y otro de distinta medida, a este último lado se le suele llamar base, mientras que si se trata de un triángulo donde todos los lados son congruentes, cualquiera de ellos puede ser llamado de dicha forma.

Base del triángulo isósceles

Todo triángulo isósceles tiene un eje de simetría que pasa por el punto medio de la base y el vértice opuesto a dicha base.

El eje de simetría l es:

- la mediatriz de la base
- la bisectriz del ángulo opuesto a la base, por lo que los ángulos pintados de anaranjado con congruentes



El eje de simetría del triángulo isósceles determina 2 triángulos, cada uno tiene un ángulo recto y un ángulo de medida α .

Como la suma de las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces los ángulos pintados de verde deben ser congruentes.

De aquí que los ángulos de la base de todo triángulo isósceles son congruentes.

Observemos que dichos ángulos son opuestos a los lados congruentes del triángulo.

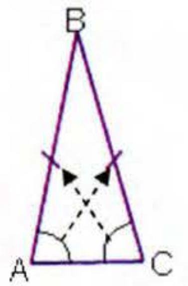
Ahora, utilice el transportador para medir cada uno de los ángulos internos de un triángulo isósceles y verificar la propiedad anterior.

En un triángulo isósceles: Los ángulos opuestos a los dos lados congruentes miden igual.

Es decir, en el triángulo ΔABC los lados congruentes son $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. $\overline{AC}$ es el lado desigual.

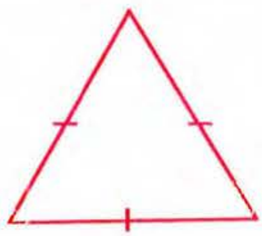
El $\angle C$ se opone a $\overline{AB}$ y $\angle A$ se le opone a $\overline{BC}$.

Como $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle A \cong \angle C$



> En un triángulo:
> Ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes.

2. *Triángulo equilátero*: Tiene los tres lados de igual medida



Como se observó antes, al tener el triángulo equilátero los tres lados de la misma medida, cumple también la definición de triángulo isósceles, es decir, tiene al menos dos lados congruentes, entonces:

> Todo triángulo equilátero es isósceles, pero no todo triángulo isósceles es equilátero.

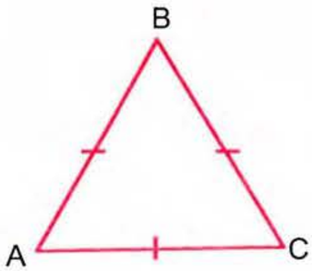
Utilice el transportador y mida cada ángulo interno del triángulo equilátero de arriba, el que aparece pintado de rosado.

¿Cuánto mide cada ángulo interno?

Como es un triángulo equilátero todos los lados miden igual entonces todos los ángulos miden igual, y cada uno mide 60°. Verifiquemos esto:

Supongamos que la medida de cada uno de los ángulos mide x °, es decir que $m\angle A = x°,\ m\angle B = x°,\ y\ m\angle C = x°$.

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° entonces:



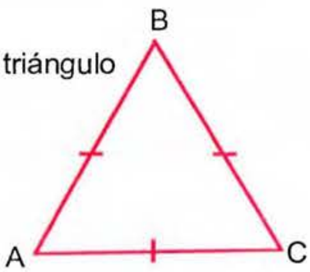
Cada ángulo interno de un triángulo equilátero mide 60°

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = x° + x° + x° = 180°$$
$$3x° = 180$$
$$x° = \frac{180°}{3}$$
$$x° = 60°$$

Ahora,

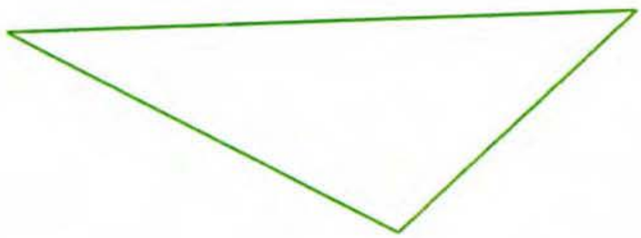
¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero?

Dibuje los ejes de simetría en el siguiente triángulo



Observe que los ejes de simetría son las mediatrices de cada lado del triángulo equilátero.

3. *Triángulos escaleno:* Tiene los tres lados de diferente medida

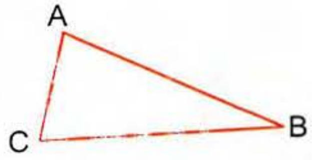


Como tiene los tres lados de diferente medida entonces cada uno de los ángulos internos tiene diferente medida. Verificar esto con regla y transportador en el triángulo anterior.

¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo escaleno?

Clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos.

1. *Triángulo acutángulo*: Los tres ángulos internos son agudos



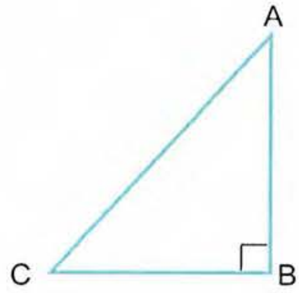
Para verificar si los ángulos internos son agudos sin utilizar el transportador, se puede calcular el producto punto de cada par de vectores que determinan el triángulo, y debe dar un número mayor que cero, es decir

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} > 0$$
$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} > 0$$
$$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} > 0$$

¿Todo triángulo equilátero es acutángulo? Justifique su respuesta.

2. *Triángulo rectángulo*: Tiene un ángulo interno recto. Para verificar que un triángulo es rectángulo, podemos utilizar el producto punto entre los vectores determinados por su vértice.

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$$



$$\begin{array}{rl} & m\angle C + m\angle A + m\angle B = 180^\circ \\ \text{Recordemos que} & m\angle C + m\angle A + 90^\circ = 180^\circ \\ & m\angle C + m\angle A = 90^\circ \end{array}$$

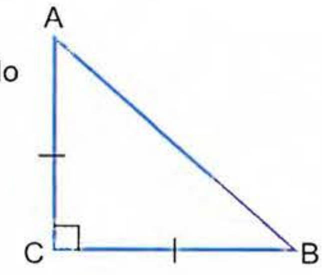
De esto podemos decir que todo triángulo rectángulo tiene dos ángulos agudos que son complementarios.

¿Un triángulo rectángulo puede ser isósceles?

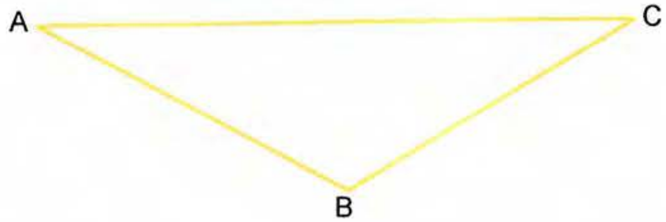
¿Cuánto mide cada ángulo agudo de un triángulo rectángulo isósceles?

Solución:

Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios y además $\angle A \cong \angle B$ entonces cada ángulo agudo debe medir 45°.



3. *Triángulo obtusángulo*: Tiene un ángulo interno obtuso.



Para verificar si el ángulo interno es obtuso, el producto punto debe dar un número menor que 0, es decir

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} < 0$$

Un resultado muy importante y que se puede verificar en cada uno de los triángulos de arriba es

> A un lado mayor de un triángulo se le opone un ángulo mayor y a un lado menor se le opone un ángulo menor

Ejemplo

Demostrar que los puntos A(2,7), B(2,-6) y C(5,-6) son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución:

Si los puntos A, B y C son los vértices de un triángulo rectángulo, entonces hay dos vectores que son perpendiculares, es decir, que su producto punto da cero.

Con los tres puntos podemos determinar tres vectores que son:

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\ \text{y}\ \overrightarrow{CA}$$

Trabajemos con $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y calculemos el producto punto

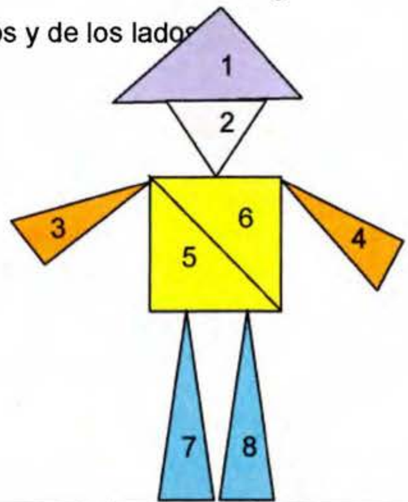
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = (0,-13) \bullet (3,0) = 0 \cdot 3 + -13 \cdot 0 = 0$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares.

De aquí que los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo, y el vértice B es en donde se forma el ángulo de 90º.

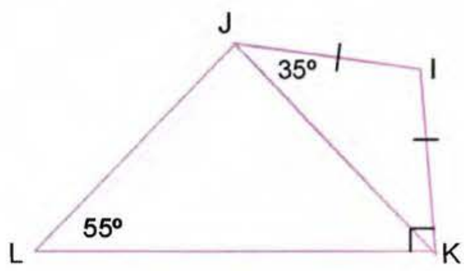
Ejercicios 5.5

A. Utilizando regla y compás, clasifique cada uno de los triángulos del dibujo de acuerdo con la medida de los ángulos y de los lados.



Triángulo	Acutáng.	Rectáng.	Obtusáng.	Isósceles	Equilátero	Escaleno
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

B. *De acuerdo* con los datos de la figura, demuestre que JL=JK



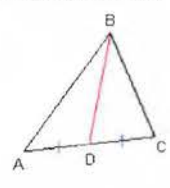
C. Demostrar que los puntos A(4,14), B(4,-12) y C(10,-12) son los vértices de un triángulo rectángulo.

D. Verifique que el triángulo de vértices A(0,0), B(4,0) y $C(2, 2\sqrt{2})$ es equilátero.

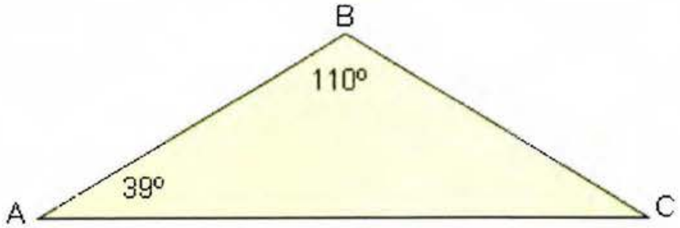
E. Calcular las longitudes de las medianas de un triángulo de vértices A(3,4), B(-1,1), y C(0,-3).

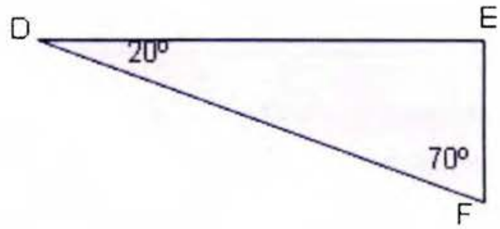
La mediana es el segmento cuyos extremos son el punto medio de un lado de un triángulo y el vértice opuesto a dicho lado.

En la figura, D es el punto medio del segmento $\overline{AC}$. El segmento $\overline{BD}$ es una mediana del Δ ABC.

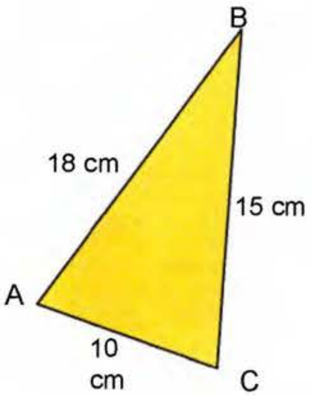


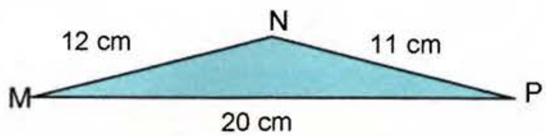
F. En cada uno de los siguientes triángulos determine cuál es el lado mayor y el lado menor.





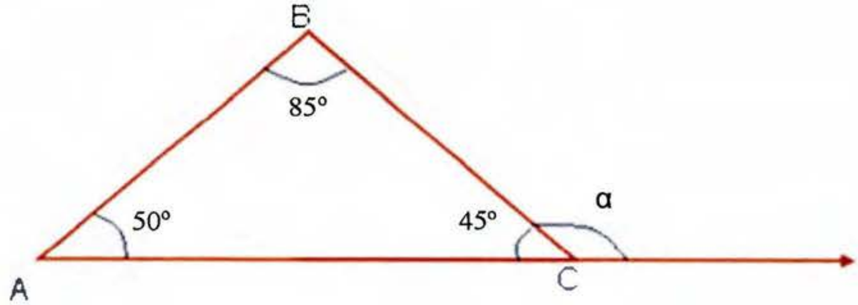
G. En cada uno de los siguientes triángulos determine cuál es el ángulo mayor





Teorema del ángulo externo.

Observemos el $\triangle ABC$



Cada uno de sus ángulos internos mide 50°, 85° y 45°. El ángulo de medida α es un ángulo externo.

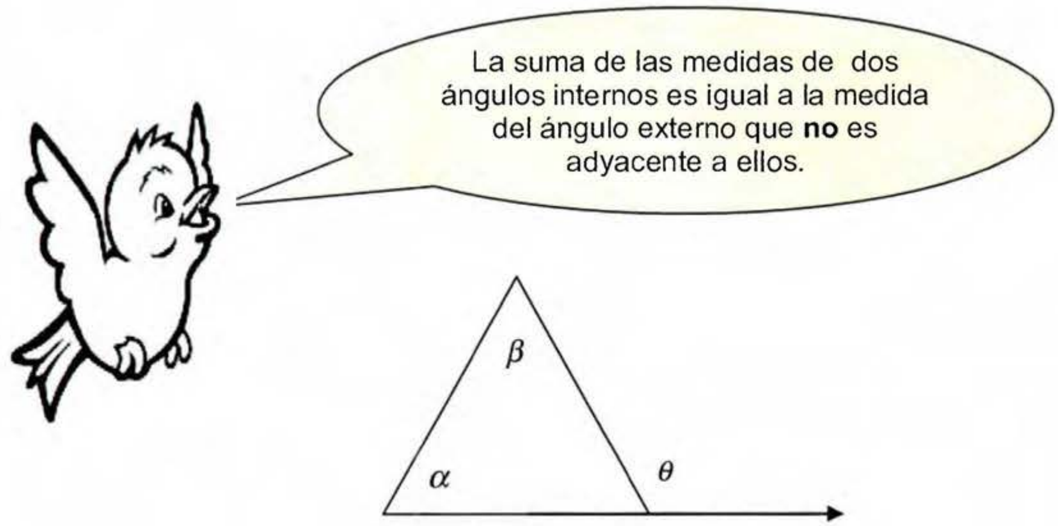
¿Cuánto mide el $\angle\alpha$?

El $\angle\alpha$ y el ángulo de 45° forman un par lineal por lo que se tiene que

$$m\angle\alpha + 45° = 180°$$
$$m\angle\alpha = 180° - 45°$$
$$m\angle\alpha = 135°$$

Ahora, sume las medidas de los dos ángulos internos del triángulo que NO son adyacentes al ángulo externo α .

Tenemos: 50°+85°=135°

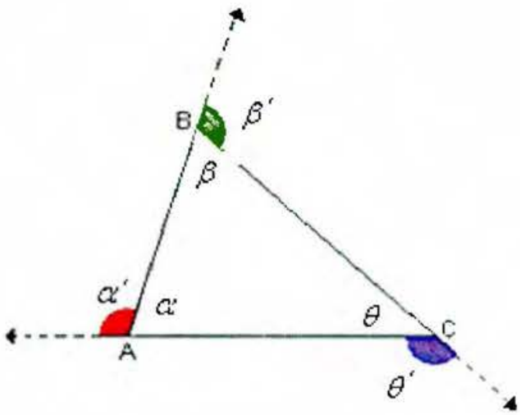


Dibuje otros triángulos con sus ángulos externos y verifique este teorema

$m\angle\theta' = m\angle\alpha + m\angle\beta$

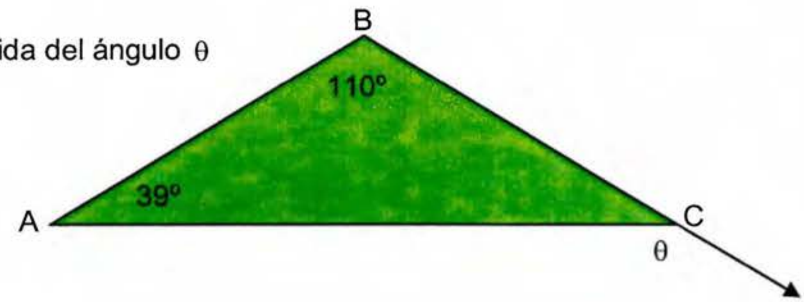
$m\angle\alpha' = m\angle\theta + m\angle\beta$

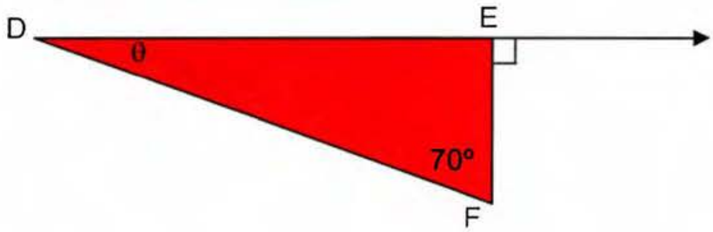
$m\angle\beta' = m\angle\alpha + m\angle\theta$



Ejercicios 5.6

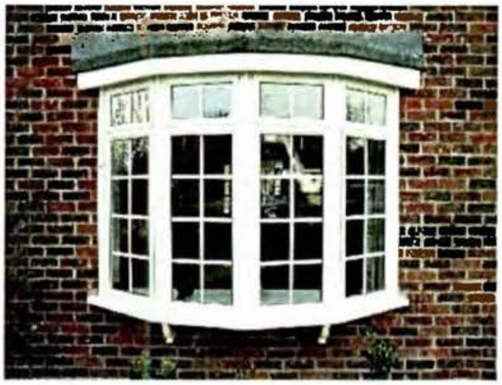
Determine la medida del ángulo θ





4.2.6 Cuadriláteros.

Algunas de las figuras geométricas más importantes son los cuadriláteros, principalmente por su utilidad en la vida diaria. Podemos encontrar cuadrados, rectángulos, rombos, y otros cuadriláteros menos conocidos. Por ejemplo, observemos un instante este par de imágenes:

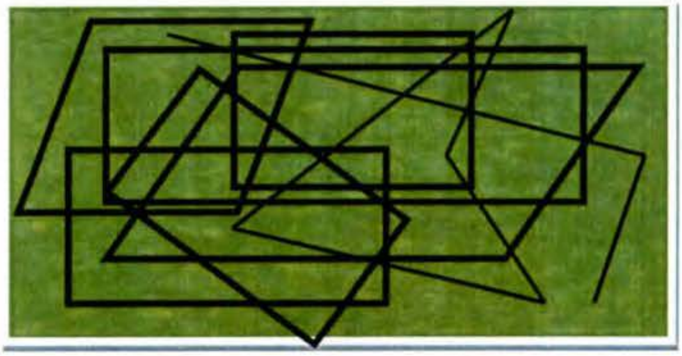


En esta aparecen rectángulos en los ladrillos, en los vidrios, y en los marcos de las ventanas.

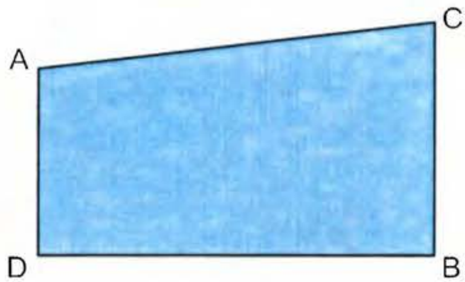
En esta aparece gran cantidad de rectángulos y cuadrados por todas partes, de hecho la estructura de esta construcción está formada por cuadriláteros y por triángulos.

Los cuadriláteros no son solo cuadrados o rectángulos, sino que existen de muchas formas. Un cuadrilátero es una figura geométrica **plana**, que está formada por cuatro puntos llamados vértices, y por los segmentos determinados por estos cuatro puntos.

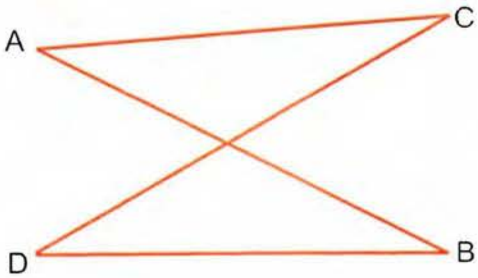
En la siguiente figura aparecen muchos cuadriláteros, observe con atención a ver cuántos encuentra.



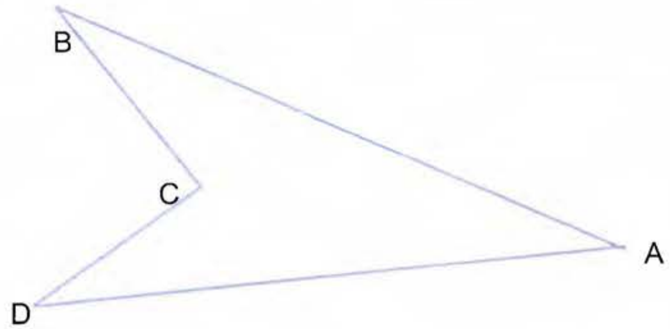
Un cuadrilátero está determinado por sus vértices, pues si tenemos estos puntos, ya sabemos exactamente cuáles son los lados del cuadrilátero. Por ejemplo, si A,B,C,D, son los vértices de un cuadrilátero tal y como se muestra en la siguiente figura, fácilmente identificamos los lados.



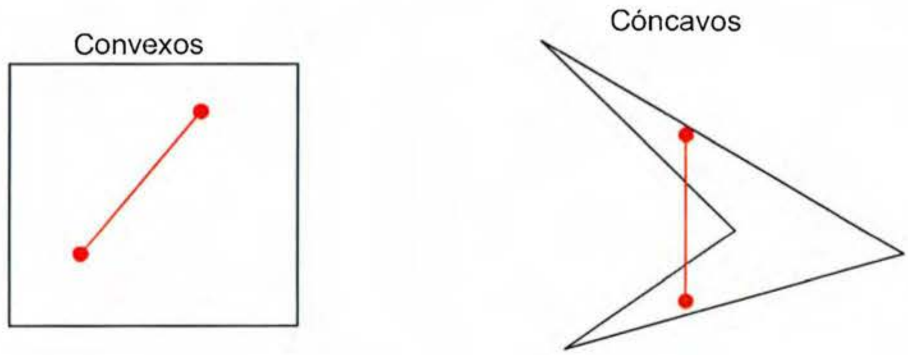
Sin embargo, es importante seguir el orden en el que se nombran los vértices del cuadrilátero, porque con estos mismos puntos se puede obtener otras figuras, por ejemplo la siguiente:



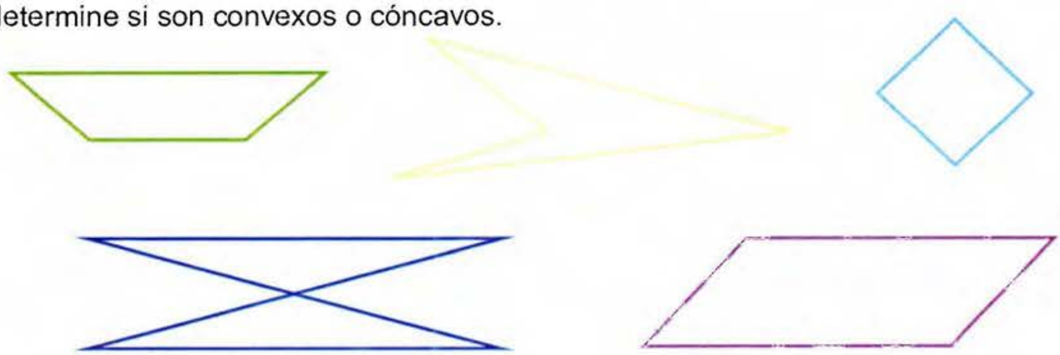
En nuestro caso, solo vamos a estudiar las figuras del primer tipo, a éstas les llamaremos **cuadriláteros**, y la propiedad que los caracteriza es que los lados del cuadrilátero (es decir los segmentos cuyos extremos son los vértices del cuadrilátero) no se pueden intersecar en puntos distintos de los vértices. Esto no sucede con la segunda figura, pero también se pueden obtener otras como las siguientes que también son cuadriláteros.



A los cuadriláteros como el anterior se les llama cóncavos, mientras que a los primeros se les llama convexos, la propiedad que los diferencia es que si escogemos dos puntos dentro del cuadrilátero el segmento que los contiene está todo dentro del cuadrilátero.

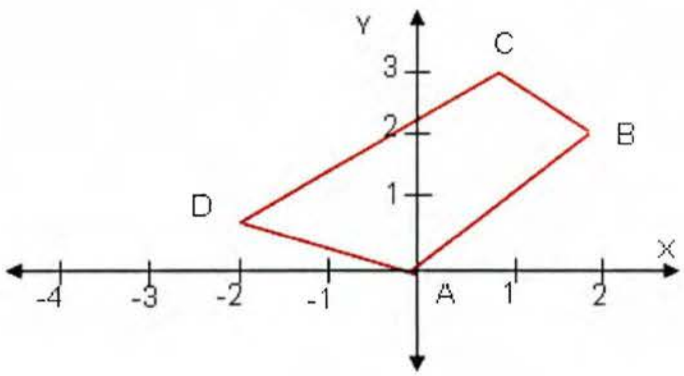


Observe las siguientes figuras e indique cuáles son cuadriláteros. Además determine si son convexos o cóncavos.



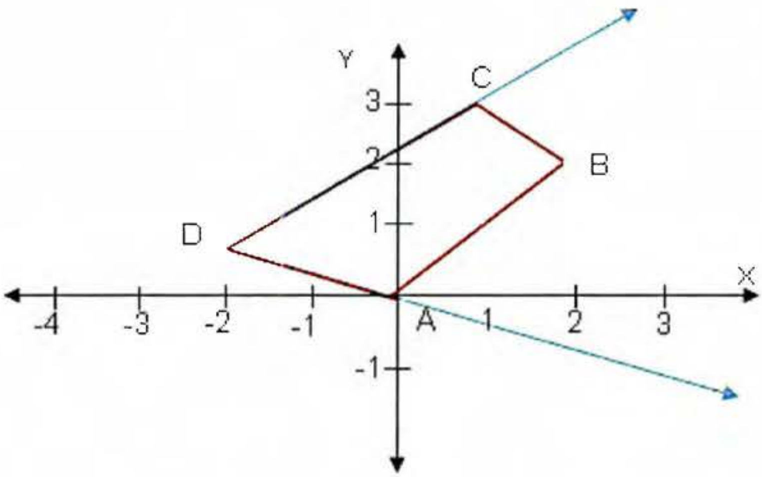
También, al igual que antes, podemos poner coordenadas al plano, y entonces estudiar los cuadriláteros a partir de los sistemas de coordenadas y con ayuda de los vectores y las transformaciones.

Por ejemplo, si tenemos los puntos $A(0, 0), B(2, 2), C(1, 3), D(-2, 1)$, entonces el cuadrilátero $\square ABCD$, se puede graficar en el plano coordenado de la siguiente forma:



Una vez hecho el dibujo, se puede comprobar que sí es un cuadrilátero. Con ayuda de las coordenadas y los vectores, vamos a conocer un poco más acerca de las propiedades de los cuadriláteros y podemos además clasificarlos de acuerdo con estas propiedades como veremos más adelante. Pero primero conoceremos algunas cuestiones básicas de ellos.

Como un cuadrilátero tiene cuatro vértices, se forman cuatro ángulos que se llaman ángulos internos del cuadrilátero, en la siguiente figura se muestra el ángulo $\angle CDA$ del cuadrilátero del ejemplo anterior. Dibuje los otros tres.



Sabiendo las coordenadas de los vértices del cuadrilátero, se puede calcular el **perímetro** del cuadrilátero, que es la suma de las longitudes de los lados, solamente hay que calcular las longitudes de cada lado, y luego sumarlas.

Por ejemplo, para el cuadrilátero $\square ABCD$, tenemos el perímetro P: $P = AB + BC + CD + DA$, es decir, se calcula las normas de los vectores asociados a los lados, y luego se suman.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,2) - (0,0) = (2,2)$ y entonces $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (1,3) - (2,2) = (-1,1)$ y entonces $BC = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (-2,1) - (1,3) = (-3,-2)$ y entonces $CD = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

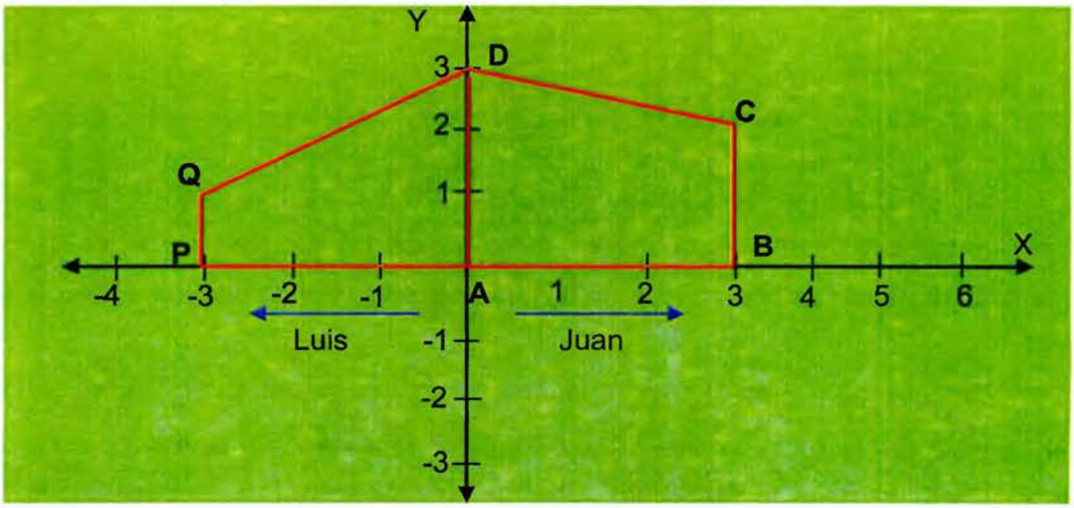
$\overrightarrow{DA} = A - D = (0,0) - (-2,1) = (2,-1)$ y entonces $DA = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$P = \sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{13} + \sqrt{5}$.

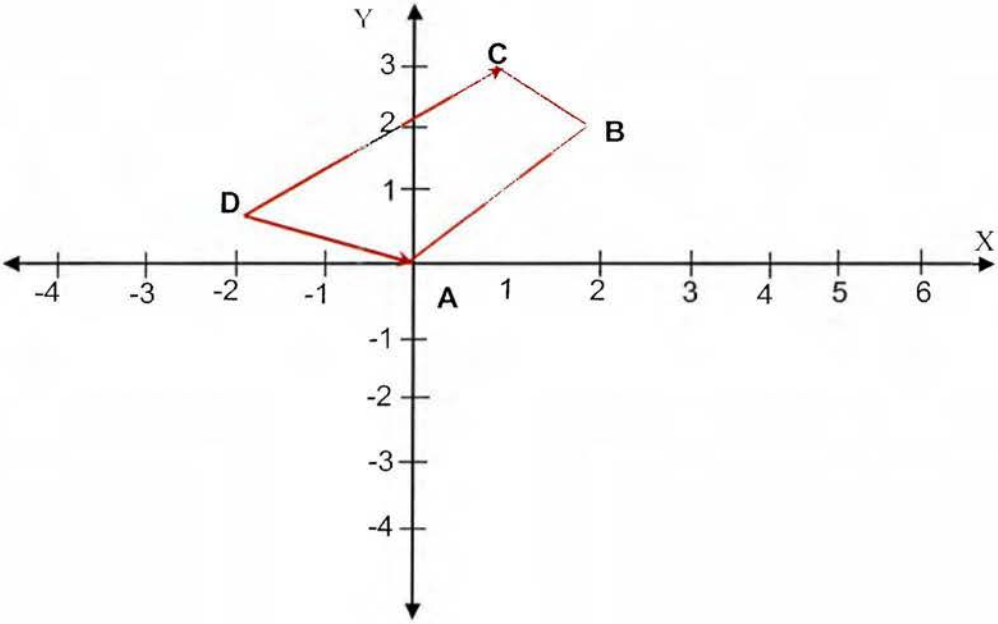
Ejercicios 6.1

A. Calcular el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(0,0), B(1,1), C(0,2), D(-1,1)$.

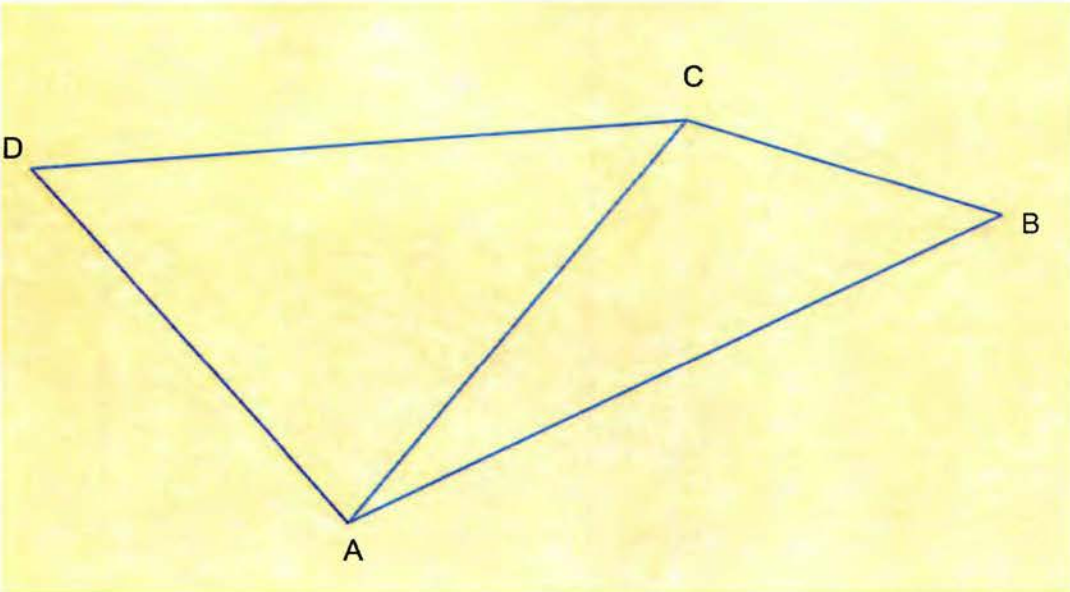
B. Juan y Luis van a caminar en la mañana. En su barrio las cuadras están un poco torcidas, no tienen exactamente la forma de cuadrados, sino en general de cuadriláteros, Juan da 5 vueltas siguiendo los puntos A,B,C,D mientras que Luis da cuatro vueltas siguiendo los puntos A,P,Q,D, como se muestra en la siguiente figura. Entonces, ¿quién camina más?



También podemos saber si los ángulos de un cuadrilátero son agudos, rectos u obtusos, usando la fórmula del producto punto, por **Ejemplo** en el cuadrilátero anterior, para saber si el ángulo $\angle CDA$ es agudo, recto u obtuso se calculan los vectores asociados a los lados, es decir $\overrightarrow{DC} = C - D = (3,2) - (0,3) = (3,-1)$ y $\overrightarrow{DA} = A - D = (0,0) - (0,3) = (0,-3)$, luego se calcula el producto punto $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 9$, es decir, el ángulo es agudo.



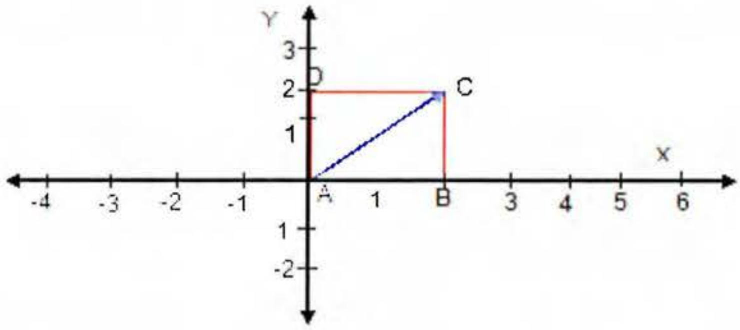
Otra propiedad importante es que todo cuadrilátero se puede partir en dos triángulos, de manera que podemos aprovechar ciertas propiedades de éstos, por ejemplo, como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°.



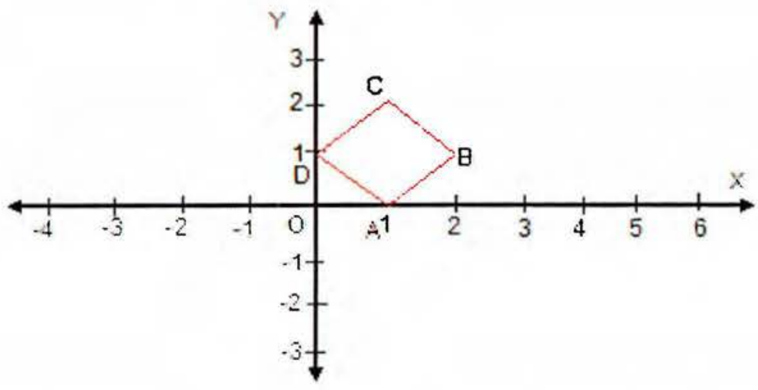
En la figura anterior se *"partió"* el cuadrilátero □ABCD en los triángulos Δ ABC y ΔACD . Esto nos permite calcular el área de un cuadrilátero cualquiera usando la fórmula para el área de un triángulo, pero vamos a ver formas más fáciles de hacerlo con algunos cuadriláteros muy particulares.

En el dibujo anterior, al segmento $\overline{AC}$ se le llama **diagonal** del cuadrilátero. $\overline{DB}$ también es una diagonal, y se puede comprobar que cada cuadrilátero tiene dos diagonales. Dibuje las diagonales del siguiente cuadrilátero:

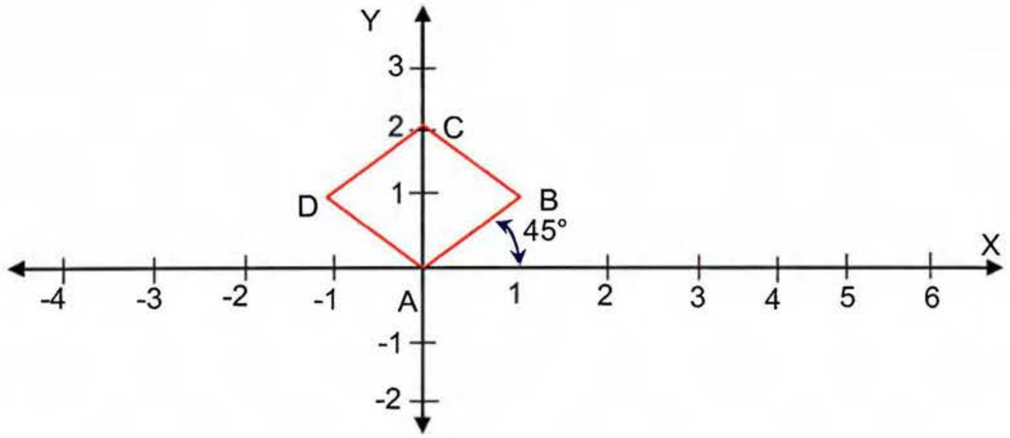
Además, si utilizamos un sistema de coordenadas podemos calcular el vector asociado a las diagonales de un cuadrilátero, por ejemplo, para el cuadrilátero cuyos vértices son $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$, el vector asociado a la diagonal es $\overrightarrow{AC} = (2,2)$, en este caso también puede ser $\overrightarrow{CA} = (-2,-2)$.



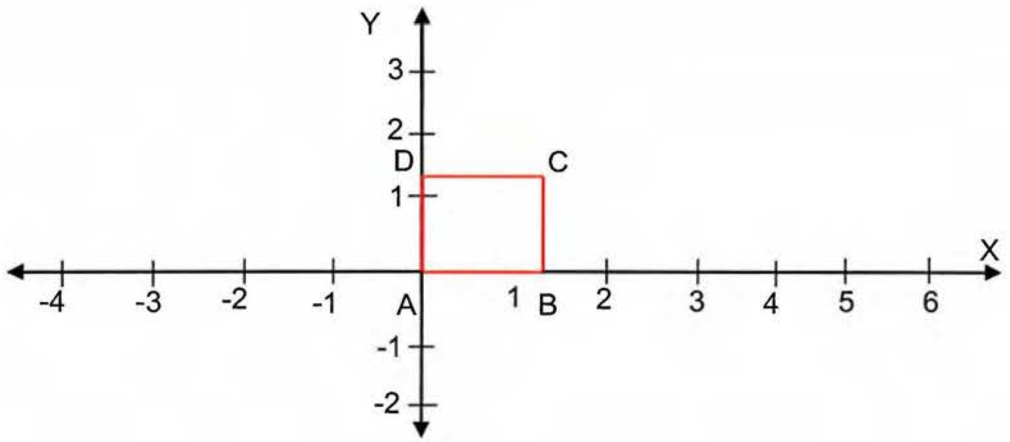
También podemos aprovechar las transformaciones para simplificar los cálculos, por ejemplo, supongamos que queremos calcular el **área** de un cuadrilátero cuyos vértices son $A(1,0), B(2,1), C(1,2), D(0,1)$, si hacemos el dibujo, al principio queda complicado, sin embargo, haciendo una rotación y una traslación, se obtiene la nueva figura, que como sabemos por las propiedades de las transformaciones isométricas tiene la misma área.



En este caso, primero se hace la traslación de vector $-\overrightarrow{OA}$, es decir, se traslada el punto A al origen, y entonces se obtiene el nuevo cuadrilátero □ABCD con vértices $A(0,0), B(1,1), C(0,2), D(-1,1)$.



Luego, haciendo una rotación de 45° contra el reloj se obtiene el cuadrilátero □ABCD con nuevos vértices $A(0,0)$, $B(\sqrt{2},0)$, $C(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $D(0,\sqrt{2})$.

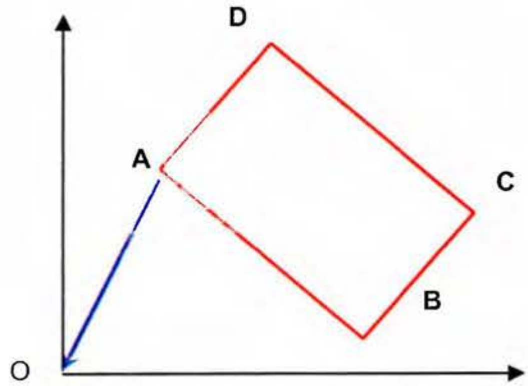


Finalmente, se observa que el cuadrilátero es un cuadrado de lado $\sqrt{2}$, y entonces el área es igual a $l \cdot l = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, donde "l" denota el lado del cuadrado.

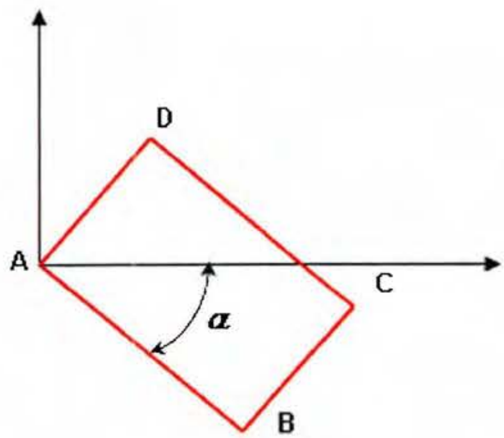
Esta idea se puede hacer en general, y es por esto que se puede suponer siempre que uno de los vértices del cuadrilátero es A$(0,0)$, y otro está en el eje positivo X.

Por ejemplo, si queremos comprobar que en un rectángulo las diagonales miden los mismo, dibujamos de una vez el rectángulo como se ve en la siguiente figura, porque cualquier otro podemos trasladarlo y girar para que se vea como el de la última figura.

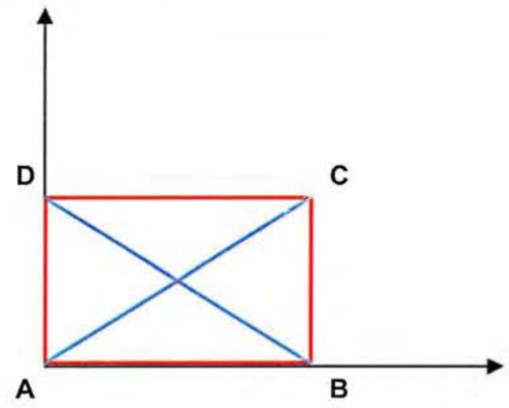
Traslación de vector $-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ **.**



Rotación de ángulo α **y centro** A$(0,0)$.



Rectángulo de vértices $A(0,0), B(b,0), C(b,a); D(0,a)$.



Ahora, utilizando la fórmula de las distancias entre dos puntos obtenemos la distancia de A a C y de B a D que son:

$$d(D,B) = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d(C,A) = \sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Entonces $d(D,B) = d(C,A)$, es decir, las diagonales miden lo mismo.

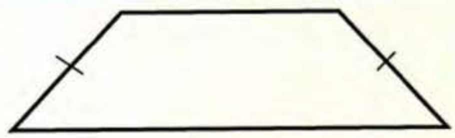
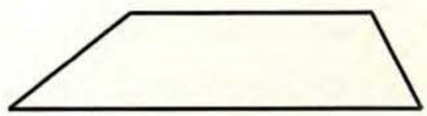
Las diagonales de un rectángulo son congruentes

Clasificación de los cuadriláteros.

Los cuadriláteros se pueden clasificar de acuerdo con sus lados, y de acuerdo con sus ángulos. Veamos a continuación la tabla de clasificación.

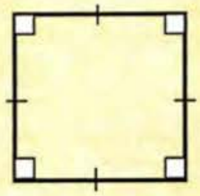
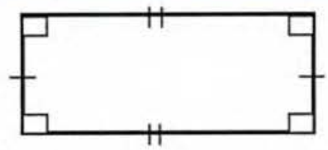
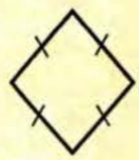
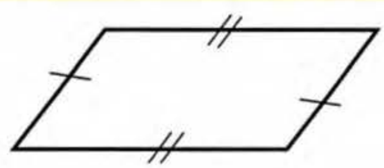
Paralelogramos.	**No paralelogramos.**
Son aquellos en los cuales los dos pares de lados opuestos son paralelos.	Son aquellos en los cuales al menos un par de lados opuestos **NO** es paralelo.

Entre los **no paralelogramos** tenemos los siguientes:

Trapecio: Es el que tiene dos lados opuestos paralelos, pero los otros dos NO.	
Trapecio isósceles: tiene los ángulos de la base de igual medida.	
Trapecio rectángulo: tiene un ángulo recto.	
Trapecio escaleno: tiene todos los lados de diferente medida.	

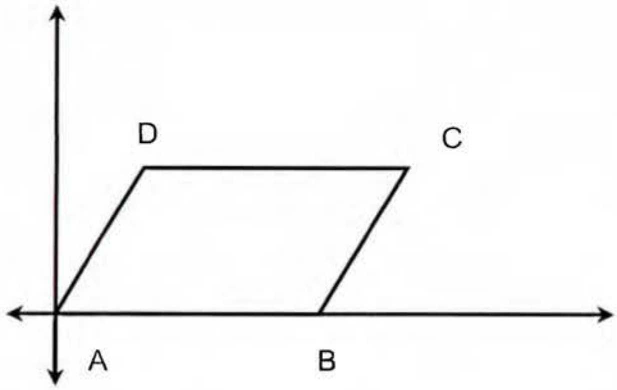
El **trapezoide** es el que no tiene lados paralelos.

Los **paralelogramos** se pueden clasificar de la siguiente manera:

Cuadrado: tiene todos los lados de igual medida, y los ángulos de igual medida.	
Rectángulo: tiene todos los ángulos de igual medida.	
Rombo: tiene todos los lados de igual medida.	
Romboide: tiene los lados opuestos y los ángulos opuestos congruentes.	

Una vez más, con ayuda de los vectores y las transformaciones podemos conocer muchas propiedades de los cuadriláteros.

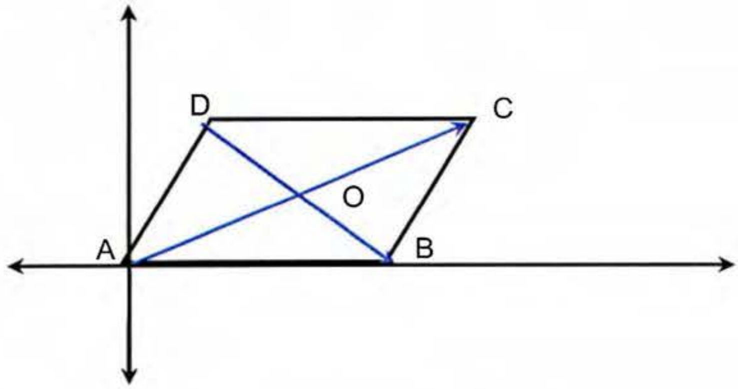
Por ejemplo, la siguiente relación nos va a ser de mucha utilidad para comprobar si un cuadrilátero es o no un paralelogramo, dice que si $\square ABCD$ es un paralelogramo entonces se cumple que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; y también, si esto se cumple, entonces los puntos son los vértices de un paralelogramo. Esto significa que en un paralelogramo los lados opuestos tienen el mismo vector asociado.



Con esto se ha verificado también que en un paralelogramo los lados opuestos tienen la misma medida.

Si □ABCD es un paralelogramo entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, y si se cumple que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, entonces □ABCD es un paralelogramo.

Veamos otro ejemplo, supongamos que queremos comprobar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, es decir, se intersecan en el punto medio. Entonces dibujamos un paralelogramo *cualquiera* y calculamos los vectores asociados a los lados y las diagonales del mismo, veamos:



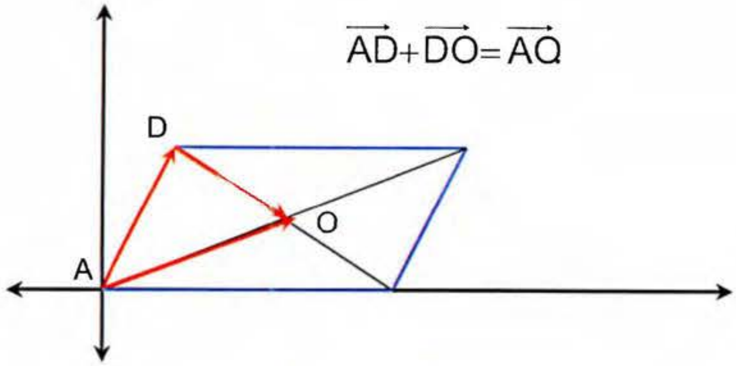
Por el ejercicio anterior, sabemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, también es cierto que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ en este caso. Los vértices son $A(0,0), B(b,0), D(a,c)$, donde se supone que a,b,c, son números reales positivos, para saber quién debe ser D sumamos los vectores, y entonces $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ $= (b,0) + (a,c) = (b+a,c)$ de donde podemos concluir que $C(b+a,c)$.

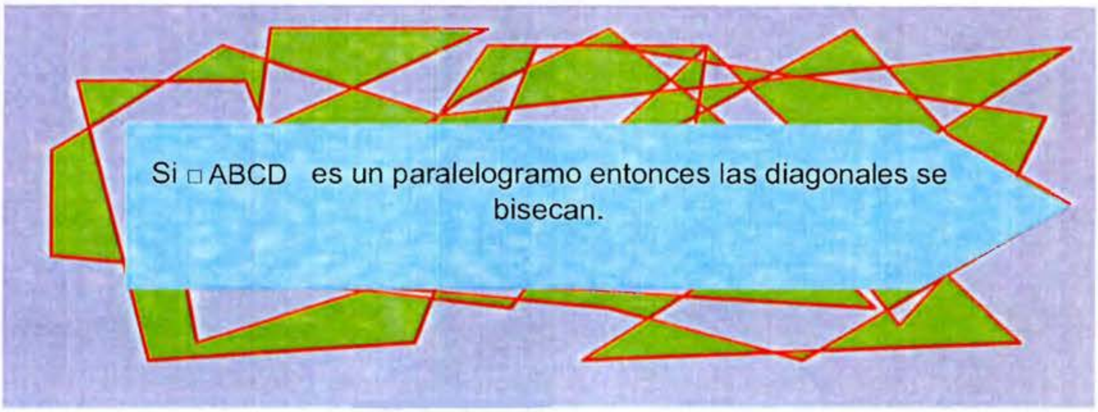
Luego, si obtenemos las coordenadas de los vectores correspondientes se obtiene:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (b,0)$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (a,c)$, $\overrightarrow{AC} = (b+a,c)$, $\overrightarrow{DB} = (b-a,-c)$

Entonces, si llamamos O al punto medio de $\overrightarrow{AC}$, sabemos que $O = \frac{1}{2}(b+a,c)$, además, el punto medio de $\overrightarrow{BD}$ es $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} =$ $(a,c) + \frac{1}{2}(b-a,-c) = \frac{1}{2}(a+b,c)$.

Entonces, como ambos puntos medios son iguales, se concluye que las diagonales se intersecan en ese punto, a la mitad.





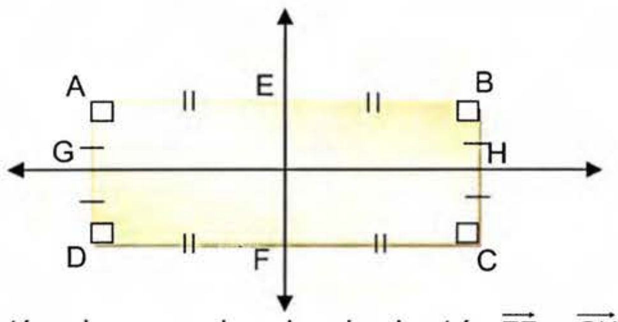
En resumen

Paralelogramos
Características
1. Lados opuestos congruentes. **2. Ángulos opuestos congruentes.** **3. Ángulos consecutivos suplementarios.** **4. Las diagonales se bisecan mutuamente.**

Además de las características comunes de los paralelogramos, cada uno tiene sus características particulares. Estudiemos cada una de ellas:

Rectángulo.

- Sus ángulos son congruentes y por tanto, cada uno mide 90º
- Sus diagonales son congruentes, tal y como lo habíamos demostrado anteriormente
- Sus ejes de simetría son las mediatrices de los lados, tal y como se aprecia en el siguiente dibujo

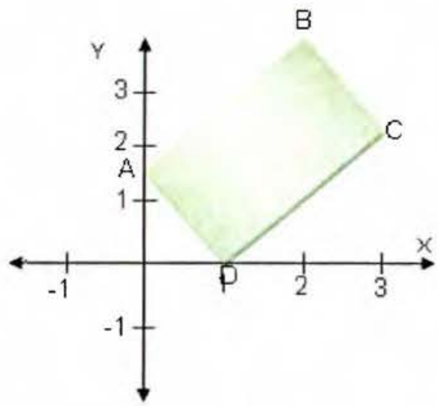


En este caso, el rectángulo posee dos ejes de simetría $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{GH}$, que son las mediatrices de los lados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.

- Además, si se traslada el vector $\overrightarrow{AB}$ mediante el vector $\overrightarrow{AD}$ se obtiene $\overrightarrow{DC}$; así mismo, si se traslada el vector $\overrightarrow{AD}$ por el vector $\overrightarrow{AB}$ se obtiene $\overrightarrow{BC}$.

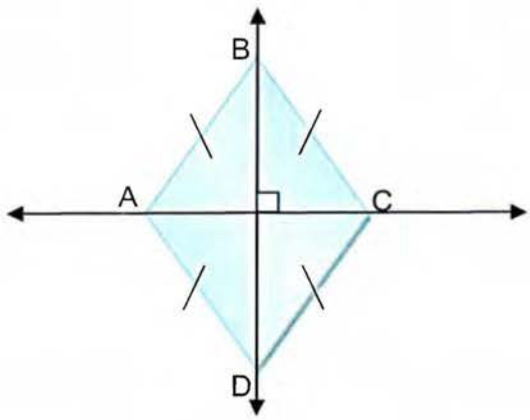
Ejercicio 6.2

Determine si que los puntos $A(0,\sqrt{3})$, B(2,4), $C(3,4-\sqrt{3})$ y D(1,0) forman un rectángulo



Rombo.

- Sus lados son congruentes
- Sus diagonales son ejes de simetría de la figura, biseca los ángulos internos y las mismas se bisecan perpendicularmente (La verificación de este último resultado se deja como ejercicio).

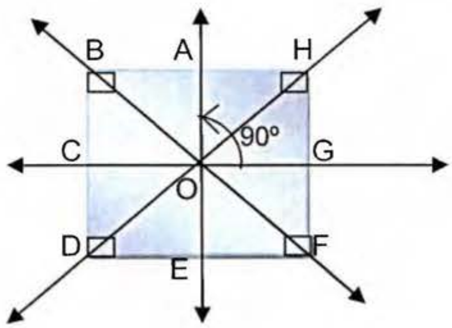


$\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son ejes de simetría del rombo □ABCD.

Cuadrado.

Cumple las mismas características del rectángulo y del rombo, es decir:

- Sus lados y ángulos son congruentes
- Sus diagonales bisecan los ángulos internos.
- Las diagonales se bisecan perpendicularmente.
- Sus ejes de simetría axial son las mediatrices de los lados.
- Se puede hacer una rotación de centro O, de 90° o -90° y obtener el mismo cuadrado.



Romboide.

Es un paralelogramo que no cumple condiciones adicionales. No es un cuadrado, ni un rectángulo, ni un rombo.

En resumen, tenemos:

Paralelogramo	Características
Cuadrado	- Sus lados son congruentes - Sus ángulos son congruentes, por tanto, cada uno mide 90º - Sus diagonales se bisecan perpendicularmente y son congruentes.
Rectángulo	- Sus ángulos son congruentes y por tanto, cada uno mide 90º - Sus diagonales son congruentes
Rombo	- Sus lados son congruentes - Sus diagonales bisecan los ángulos internos, además de que se bisecan perpendicularmente.
Romboide	Es un paralelogramo que no cumple condiciones adicionales. No es un cuadrado, ni un rectángulo, ni un rombo.

Los no paralelogramos no poseen características comunes como los paralelogramos pero si cada uno tiene propiedades particulares. Veamos:

Trapecio	
Rectángulo	-Posee dos ángulos rectos
Isósceles	-Los lados no paralelos son congruentes -Los ángulos de las bases son congruentes
Escaleno	-No posee característica adicional, solo cumple con la definición de trapecio de tener un par de lados paralelos.

El trapezoide no posee lados paralelos.

Ejercicios 6.3

A. Comprobar que los puntos A,B,C,D, son los vértices de un paralelogramo si se cumple que $A-B+C-D=\vec{0}$. Y viceversa, comprobar que $A-B+C-D=\vec{0}$ si los puntos A,B,C,D, son los vértices de un paralelogramo.

B. Comprobar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

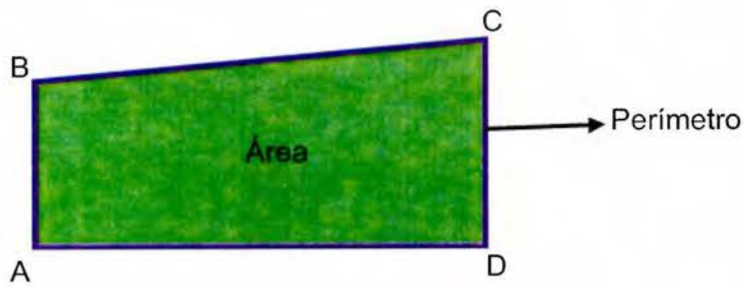
C. Si $A(0,0), B(3,0), C(3,3), D(0,4)$, son los vértices de un cuadrilátero, determinar qué tipo de cuadrilátero es y calcular su perímetro.

D. Si $A(0,0), B(3,4), C(-1,3)$, hallar un punto D para que $\square ABCD$ sea un paralelogramo.

Áreas y perímetros de triángulos y cuadriláteros.

Desde la escuela hemos trabajado con el área y perímetro de los cuadriláteros.

Consideremos la siguiente figura:



El área es la superficie dentro de la figura y el perímetro es la suma las longitudes de todos los lados. En la imagen anterior, el área está marcada con verde y el perímetro con morado.

Trabajemos primero con los triángulos. La fórmula que sabemos desde la escuela para calcular el área del triángulo es $A = \frac{b \bullet h}{2}$, donde b=base y h= altura sobre el lado.

Sin embargo, desde el siglo 10 a.C, se planteó el problema de encontrar el área de un triángulo conociendo solamente la medida de sus lados. Para ello se utiliza la llamada "fórmula de Herón", que fue inicialmente publicada por éste matemático (10 a.C. - 70 d.C.). Sin embargo, se cree que fue Pitágoras (582 a.C. - 507 a.C.) el cual creó la fórmula.

El resultado establece que el área de un triángulo cuyas medidas de sus lados son a, b y c se puede calcular así:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ donde } s = \frac{a+b+c}{2}$$

A "s" se le llama semiperímetro

Ejemplo

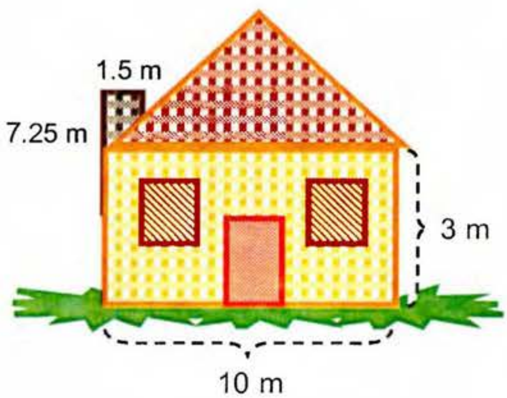
Determine el área de un triángulo cuyos lados miden 6 cm, 6cm y 7cm.

Primero encontremos el semiperímetro: $s = \frac{6+6+7}{2} = \frac{19}{2}$ cm

Ahora, el área es $\sqrt{\frac{19}{2}\left(\frac{19}{2}-6\right)\left(\frac{19}{2}-6\right)\left(\frac{19}{2}-7\right)} = \sqrt{\frac{19}{2}\bullet\frac{7}{2}\bullet\frac{7}{2}\bullet\frac{5}{2}} = \frac{7}{4}\sqrt{95}\ \text{cm}^2$

Ejemplo

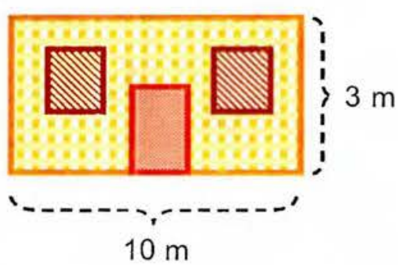
Determine el área de toda la siguiente casa tomando en cuenta que el techo es un triángulo equilátero de 8m de lado.



Solución:

Para determinar el área de toda la casa vamos a averiguar el área de cada una de las partes de la casa. Así, el área total de la figura va a ser la suma de cada una de las áreas de las partes.

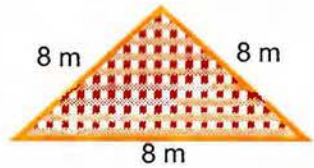
Vamos primero a averiguar el área del rectángulo que forma la casa.



$A = b \bullet h = 10 \bullet 3 = 30\ \text{m}^2$

Ahora, averigüemos el área del triángulo equilátero que forma el techo. Como sabemos que todos los lados miden 8 m podemos aplicar la fórmula de Herón.

$$s=\frac{8+8+8}{2}=\frac{24}{2}=12$$

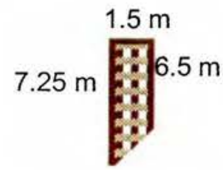


Por tanto el área del techo es

$$A=\sqrt{12(12-8)(12-8)(12-8)}=\sqrt{12\bullet 4\bullet 4\bullet 4}=16\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Por último, determinemos la medida de la chimenea de la casa. Si observamos bien la figura, es un trapecio rectángulo donde la base mayor mide 7.25 m, la base menor 6.5m y la altura 1.5 m. Por ello, el área de dicha figura es

$$A=\frac{(7.25+6.5)\bullet 1.5}{2}=10.3125\ \text{m}^2$$

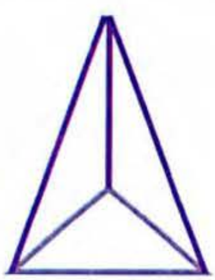


Entonces el área total de la figura es:

$$A=30+16\sqrt{3}+10.31=40.31+16\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Ejemplo

Determine el área total de la siguiente pirámide triangular, si tanto su base como sus caras son triángulos equiláteros de 6 cm de lado.



Solución:

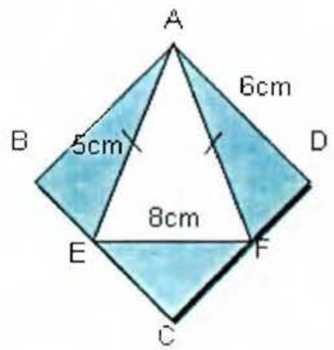
Primero determinemos el área de uno de los triángulos usando la fórmula de Herón. Como los tres lados miden 6 cm se tiene que $s=\frac{6+6+6}{2}=\frac{18}{2}=9$.

Entonces $A=\sqrt{9(9-6)(9-6)(9-6)}=\sqrt{9\bullet 3\bullet 3\bullet 3}=9\sqrt{3}$

Como en total en la figura hay 4 triángulos con la misma medida de lados, entonces el área total de la figura es $A=4\bullet 9\sqrt{3}=36\sqrt{3}\ m^2$

Ejemplo

Determine el área sombreada de la siguiente figura tomando en cuenta que □ABCD es un cuadrado.



Solución:

Para determinar esa área sombreada vamos a averiguar el área del cuadrado y a toda esta área restarle el área del triángulo ΔAEF, así obtenemos el área de estos triángulos sombreados.

El área del cuadrado es de 36 cm^2, pues cada lado de éste mide 6cm y la fórmula para el área del cuadrado es $A=l\bullet l=6\bullet 6=36$ cm^2.

Podemos obtener el área del ΔAEF por medio de la fórmula de Herón:

$$s=\frac{5+5+8}{2}=9$$

$$A=\sqrt{9(9-5)(9-5)(9-8)}=\sqrt{9\bullet 4\bullet 4\bullet 1}=12\,\text{cm}^2$$

Por tanto el área sombreada es igual a A=36-12=24cm^2.

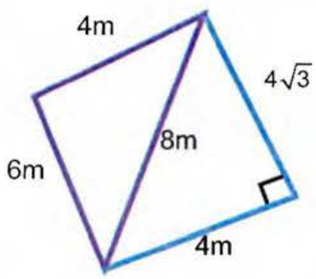
Ejercicios 6.4

A. Determine el área de un triángulo cuyos lados miden

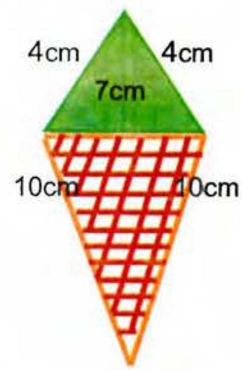
A) 7m, 12m, 13m
B) 12m, 6m, 10m
C) 3m, 4m, 5m
D) 5m, 5m, 5m

B. Encuentre el área total de las siguientes figuras

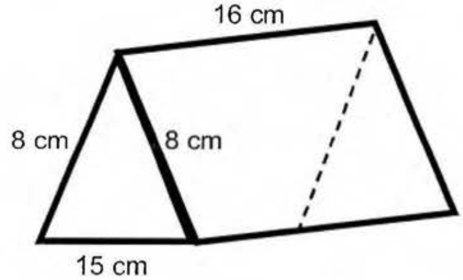
a)



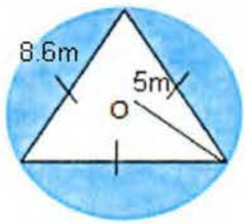
b)



C. Determine el área total de la siguiente figura.



D. Determine la siguiente área sombreada.



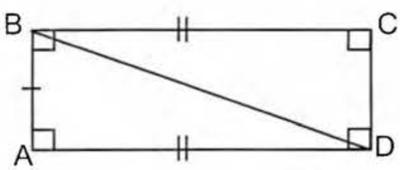
O: centro del círculo

Área de Cuadriláteros.

A continuación vamos a deducir las fórmulas del área de cada uno de los paralelogramos.

Para ello, vamos a partir de la fórmula para averiguar el área del triángulo: $A = \frac{b \bullet h}{2}$, b = base y h = altura.

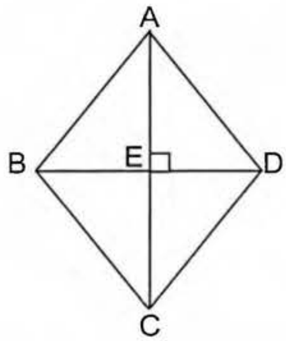
Observe la siguiente figura:



Como el rectángulo se puede partir en dos triángulos, podemos afirmar que el área del rectángulo es igual a la suma de las áreas de cada uno de los triángulos, es decir, Área del rectángulo = Área del ΔBAD + Área del ΔBCD = $\frac{b \bullet h}{2} + \frac{b \bullet h}{2} = b \bullet h$, de ahí que la fórmula para el área del rectángulo sea $A = b \bullet h$.

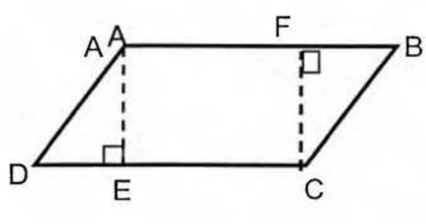
Como todo cuadrado es un rectángulo entonces, la fórmula para el área del cuadrado es la misma que la del rectángulo, ahora como en un cuadrado la base y la altura es la misma, entonces, el área del cuadrado es $A = l \bullet l$.

Para determinar el área del rombo, vamos a dividir la figura en dos triángulos, tal y como se muestra a continuación:



El área del rombo es igual a la suma de las área del ΔABC **y** ΔADC, es decir: Área del rombo= Área del ΔABC + Área del ΔADC $= \frac{AC \bullet BE}{2} + \frac{AC \bullet ED}{2} = \frac{AC \bullet BE + AC \bullet ED}{2} = \frac{AC(BE + ED)}{2}$, donde $\overline{AC}$ **y** $\overline{BD}$ son las diagonales del rombo, por tanto, la fórmula para averiguar el área del rombo es $A = \frac{D \bullet d}{2}$, donde "D" simboliza la diagonal mayor y "d" la diagonal menor del rombo.

Ahora, considere el siguiente romboide, al cual se le trazaron dos alturas



El área del romboide es igual a la suma del área de los triángulos ΔAED y ΔFCB más el área del rectángulo $\square AECF$, por tanto, Área del rombo= Área del ΔAED + Área del $\square AECF$ + Área del ΔFCB

$$\frac{DE \bullet AE}{2} + EC \bullet AE + \frac{FB \bullet FC}{2} =$$

Como $\overline{DE} = \overline{FB}$ y $\overline{AE} = \overline{FC}$, entonces el área del ΔAED es igual que el área del ΔFCB, entonces

Área del rombo= Área del ΔAED + Área del $\square AECF$ + Área del ΔFCB

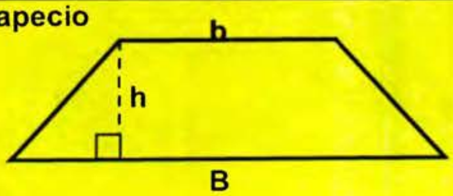
$$\frac{\overline{DE} \bullet \overline{AE}}{2} + \overline{EC} \bullet \overline{AE} + \frac{\overline{FB} \bullet \overline{FC}}{2} = 2\left(\frac{\overline{DE} \bullet \overline{AE}}{2}\right) + \overline{EC} \bullet \overline{AE} =$$

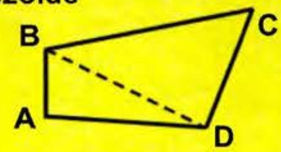
$$\overline{DE} \bullet \overline{AE} + \overline{EC} \bullet \overline{AE} = \overline{AE} \bullet \left(\overline{DE} + \overline{EC}\right) = \overline{AE} \bullet \overline{DC}$$

Donde $\overline{AE}$ es la altura del romboide y $\overline{DC}$ es una base. De ahí que la fórmula para determinar el área del romboide es $A = b \bullet h$.

Por último, para determinar el área de un trapecio se hace muy parecido a la del rombo dividiendo la figura en triángulos y un rectángulo. La misma se deja como ejercicio más adelante.

En resumen, las fórmulas para el área de un cuadrilátero son:

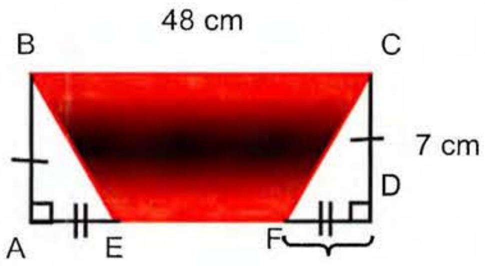
No paralelogramo	**Área**
Trapecio 	$A = \frac{(B + b) \bullet h}{2}$ B= Base mayor b= base menor h= altura

Trapezoide 	Para el área de un trapezoide no hay fórmula establecida. Una posibilidad es partir el trapezoide en dos triángulos y averiguar el área de cada uno de los triángulos y sumarlos. En este caso, el **área del trapezoide ABCD = Área del** ΔABD **+ el Área del** ΔBDC

Paralelogramo	Área
Cuadrado: 	$A = l \bullet l$ l= lado
Rectángulo: 	$A = b \bullet h$ b= base h= altura
Rombo: 	$A = \frac{D \bullet d}{2}$ D= diagonal mayor d= diagonal menor
Romboide: 	$A = b \bullet h$ b= base h= altura

Ejemplo

1. Determine el área de la región sombreada en la siguiente figura:



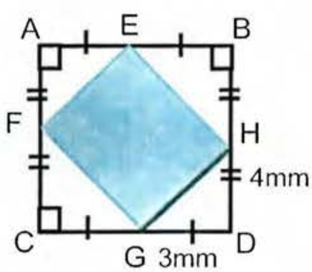
Solución:

Si observamos bien, esa área sombreada es un trapecio isósceles, cuya base mayor mide 48 cm y la altura mide 7cm. Ahora, como el lado $\overline{AE}$ es de la misma medida que $\overline{FD}$ y cada uno de ellos mide 12 cm entonces $\overline{EF}$ mide 24cm. Por tanto, el área de esa figura sombreada es de

$$A = \frac{(48+24)\bullet 7}{2} = \frac{72\bullet 7}{2} = 252 \text{ cm}.$$

Ejemplo

Determine el área sombreada de la siguiente figura



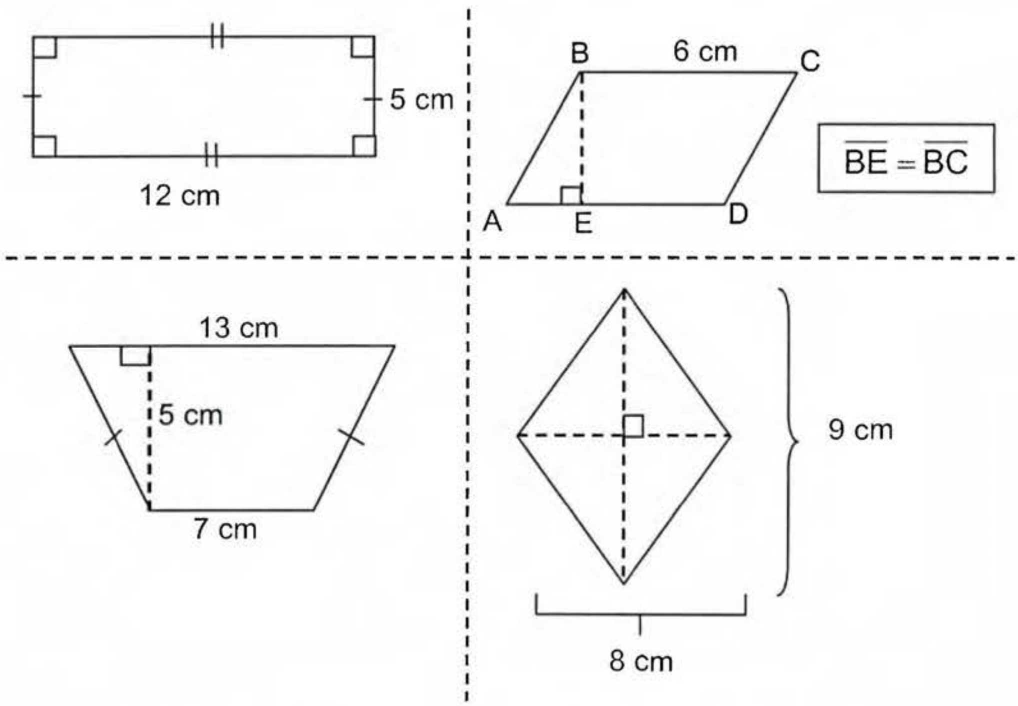
Para este caso, vamos a determinar el área de todo el rectángulo □ABCD y a este le vamos a restar las áreas de cada uno de los triángulos que se forman en las esquinas. Noten que estos cuatro triángulos tienen la misma área pues van a tener la misma base y la misma altura. Es decir, el $A_{HDG} = \frac{3\bullet 4}{2}$ =6 mm. Como son 4 triángulos con la misma medida, entonces el área total de todos los triáng*ulos es de* 24mm.

La base del rectángulo □ABDC es 6mm y la altura de 8mm, entonces el área de dicho rectángulo es de 48 mm.

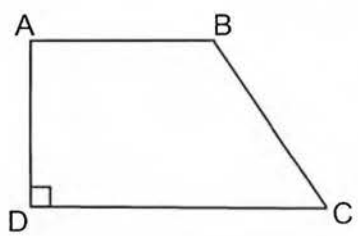
Por tanto, el $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \bullet A_{HDG} = 48 - 24 = 24$ mm

Ejercicios 6.5

A. Determine el área de cada uno de los siguientes cuadriláteros.



B. Deduzca, utilizando el siguiente trapecio rectángulo, que la fórmula para el área de dicha figura es $A = \dfrac{(B + b) \bullet h}{2}$



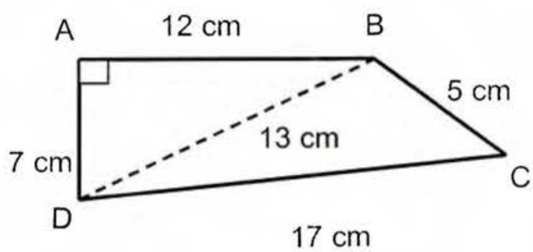
C. Conteste la siguiente pregunta: ¿Se puede determinar el área de un cuadrado usando la fórmula $A = \dfrac{d \bullet d}{2}$, donde d representa la diagonal del cuadrado? Justifique su respuesta.

D. Determine el área de un cuadrado cuyo perímetro es de 20 cm

E. Determine el área de un rectángulo cuyo perímetro es de 35 cm y una de sus bases mide 10 cm

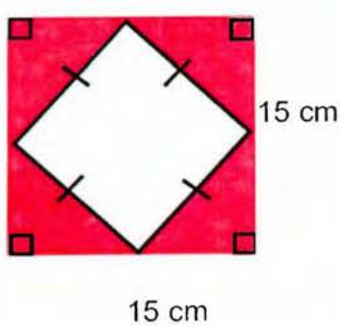
F. Determine el área de un cuadrado sabiendo que su diagonal mide 8 cm

G. Determine el área del siguiente trapezoide □ $ABCD$

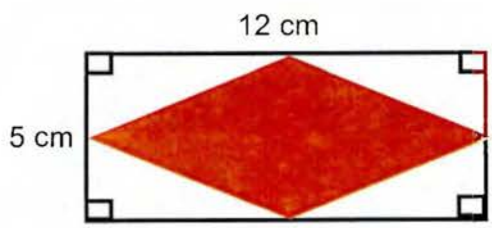


H. Determine el área de las siguientes figuras

a)



b)



Capítulo V

Conclusiones, limitaciones y recomendaciones

El trabajo elaborado propone cambiar el enfoque con el que tradicionalmente se ha estudiado la geometría en la Educación General Básica, dando al álgebra una mayor importancia en el desarrollo de los contenidos.

Se ha realizado pues, una transposición didáctica a pequeña escala, tomando como referencia los contenidos de la geometría afín y adaptándolos a la educación secundaria, para lo cual es necesario la introducción de nuevas nociones (como las de bipunto y vector) y un cambio en el abordaje, no sólo de la geometría, sino también del álgebra, de los números reales y la trigonometría.

Lo anterior se refleja en un programa completo para los niveles de sétimo, octavo y noveno año, y algunos materiales de apoyo para el alumno, que han sido confeccionados con el fin de que profesores de matemática y autoridades del Ministerio de Educación Pública puedan analizarlos y discutir sus ventajas y limitaciones.

La preferencia por este enfoque se debe a las siguientes razones:

- El álgebra adquiere un gran valor como herramienta, y no como un fin en sí mismo, y permite la vinculación de la geometría con las demás áreas de la Matemática.
- Algunas demostraciones de teoremas resultan más sencillas con este enfoque, y su realización en el aula permite a los estudiantes no sólo convencerse de la veracidad de los resultados, sino también involucrarse poco a poco con el razonamiento formal.

- El estudio de la Matemática con el enfoque propuesto puede ser aprovechado en otras ciencias, como por ejemplo la Física, y constituye un antecedente para los temas que se estudiarán en el cuarto ciclo de Educación Diversificada.

Sin embargo, se reconocen también algunas limitaciones de la puesta en práctica de esta propuesta:

- La gran diferencia que existe entre el enfoque del modelo de enseñanza actual y el propuesto en este trabajo.
- La necesidad de brindar capacitación a los docentes de secundaria para poner en práctica este modelo.
- La escasez de material que desarrolle el tema apropiadamente para el nivel de Educación General Básica.
- La necesidad de llevar a cabo observaciones, experimentaciones y diagnósticos previos para hacer efectiva la propuesta.

Finalmente, se señalan algunas recomendaciones:

- Para futuras investigaciones por parte de las Universidades:

- Desarrollar trabajos en la línea de la experimentación con grupos de tercer ciclo, y analizar los resultados obtenidos, con el fin de rescatar aspectos importantes que permitan mejorar la propuesta. En la presente investigación esto fue imposible por falta de tiempo, y por carecer de la disponibilidad de algunos docentes de educación secundaria.
- Confeccionar un programa para los niveles de décimo y undécimo, con el mismo enfoque de esta propuesta, y que incluya materiales para el alumno.

- De ser puesta en práctica la propuesta, se sugiere preparar un equipo de docentes que se encargue de:

- Concretar los detalles del programa del Tercer Ciclo.
- *Elaborar* material para los docentes y alumnos.
- Llevar a cabo experimentaciones y análisis de resultados.

Bibliografía

[1] Antibi, A (2004) Qu'entend-on par recherche en didactique? Lemme, Toulouse, France.

[2] Antibi, A. Barra,R. (2002) Mathématiques Terminal. Nathan, Paris.

[3] Antibi A, Brousseau G. Vers l'ingénierie de la dé-transposition. Les Dossiers des sciences de l'éducation ISSN 1296-2104. 2002, n° 8 (130 p.) [Document : 13 p.] (14 ref.), pp. 45-57 [13 page(s) (article)]. Accesado el 18 de junio de 2008 en http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=14466372.

[4] Artigue. M (1995) El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En P.Gómez (Ed) (1995) CEI- México.

[5] Artzy, R (1965) Linear Geometry, Addison-Wesley Massachusetts, USA.

[6] Balacheff (1982) Preuve et démonstration en mathématiques au college Recherches en Didactique des Mathématiques vol 4.3 pp 293-324.

[7] Brousseau G. (1997) Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques. Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic. Mathematics Education Library.

[8] Chevallard, Yves. (1997) La transposición didáctica. Editorial Aique. Buenos Aires. Argentina.

[9] Dieudonné, J (1974) ¿Debemos enseñar las matemáticas modernas? La Enseñanza de las Matemáticas Modernas Jesús Hernández (compilador) Alianza Editorial, Madrid.

[10] Douady A. (1999) Géométrie dans les espaces de paramètres. Une méthod de géométrisation, Repères. pp 71-90. París.

[11] Freudenthal, H (1967). Ibidem.

[12] Girard, G, Thiercé, C. (1969). Geometrie, 2^{e} act. Aleph0, Hachette, Paris.

[13] Girard, G, Thiercé, C. (1969) Geometrie Terminale CE. Aleph0, Hachette, Paris.

[14] Jiménez, L (2008) Geometría Afín, Una propuesta. Tesis de Maestría, Universidad de Costa Rica.

[15] Kline, M (1994) El Pensamiento matemático de la antigüedad a nuestro días. Alianza Universitaria, Madrid.

[16] Kuzniak, Alain (1994). Las estrategias utilizadas para formar a los maestros de primer grado en matemáticas. En: La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años: herramientas para la formación de profesores en Francia. De la comisión permanente de los IREM para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria (COPIRELEM). París: ARPEME.

[17] Kuzniak, Alain (2003). La enseñanza de la geometría en la formación inicial. En: la enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años: herramientas para la formación de profesores en Francia. París: ARPEME.

[18] Kuzniak, Alain (2005). Paradigmas et espaces de travail géométriques. Orléans-Tours: IFUM. France.

[19] MEd-France (2004). Programme des Mathématiques .Ministère de L'Education General France.

[20] Ministerio de Educación Pública (CR) (2007). Informe Nacional, Resultados de las pruebas de la Educación Formal. Bachillerato, Segunda Parte.

[21] Ministerio de Educación Pública (CR) (2001). Programas de Estudio. Educación General Básica.

[22] Ministerio de Educación de Chile. (2007). Programas de Estudio. Accesado el 15 de junio de 2007 en http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?GUID=a229972f-c977-4ace-bffb-251258de2674&ID=107532

[23] Murillo, M et al (2004) La transposición Didáctica. Tesis de Licenciatura, Universidad de Costa Rica.

[24] Pichaud. Jöelle, Revuz, A (1972). Mathématique Classe Terminal, Nathan Editeurs. Paris.

[25] Revuz, A (1971) Ibidem.

[26] Sandoval. A.M (2008). Simetrías en la Escuela Primaria. Examen de Candidatura. Maestría en Matemáticas Educativas. Universidad de Costa Rica.

[27] Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

[28] Tall D., Gray E. et al. (2001). Symbols and Bifurcation Between Procedural and Conceptual Thinking, Revue canadienne de l'ensegnement des sciences, des mathématiques et des technologies vol 1 No 1 pp 81-104.

[29] Tuller, A (1967). A Modern Introduction to Geometries, Van Nostrand, New York, USA.

[30] UNESCO (1973). Capítulo 3 de nuevas tendencias de la enseñanza de la Matemática. Tomado de La enseñanza de las matemáticas modernas de Jesús Hernández. 1983 pp 298-317.

Direcciones de internet

[31] Matemáticas(2008), tomado de http://matematicasamd.blogspot.com/2008/10/reflexion.html el día 5 de junio 2009

[32] El club de la matematica(2009), tomado de http://elclubdelamatematica.blogspot.com/2010/02/mosaico-o-teselado.html el día 5 de junio 2009

[33] Teselaciones (2009), tomado de http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/teselacionesplano/escher.html el 8 de junio del 2009

[34] Lo que hicieron los matemática (2009), tomado de *pbl.mercadal.googlepages.com/Losquehicieronlamatemtica.doc el 17 de julio del 2009*

[35] Imágenes. http://www.google.co.cr/imghp?hl=es&tab=wi. 5 de agosto del 2009.

[36] Pitágoras. www.wikipedia.org. Tomado 10 de agosto de 2009.

[37] Imagen tomada de http://www.parquediversiones.com/mapa_atracciones.htm. 25 se setiembre de 2009.