

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**ESTUDIO DE MODELOS DE VOLATILIDAD  
ESTOCÁSTICA EN LA VALORACIÓN DE OPCIONES  
EUROPEAS**

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de  
Estudios de Posgrado en Matemática para optar al grado y título de  
Maestría Académica con énfasis en Matemática Aplicada

**MICHAEL SOLÍS CHACÓN**

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2010

A Laura por todo su apoyo incondicional, especialmente en los momentos más difíciles.

A mi madre que me mantuvo fuerte cuando más lo necesitaba.

A mis amigos por todos sus buenos comentarios y críticas constructivas.

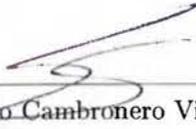
“Esta tesis aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica con énfasis en Matemática Aplicada .”



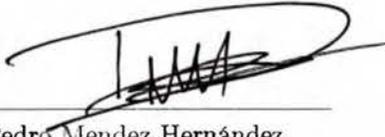
Dr. Javier Trejos Zelaya  
**Representante de la Decana**  
**Sistema de Estudios de Posgrado**



Dr. Alexander Ramirez González  
**Director de Tesis**



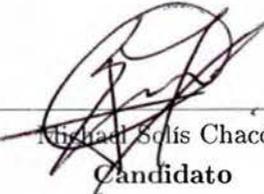
Dr. Santiago Cambronero Villalobos  
**Asesor**



Dr. Pedro Mendez Hernández  
**Asesor**



Dr. Mario Villalobos Arias  
**Director**  
**Programa de Estudios de Posgrado en Matemática**



Michael Solís Chacón  
**Candidato**

# Índice general

Agradecimientos	ii
Hoja de aprobación	iii
Índice general	iv
Resumen	vi
Índice de figuras	viii
Índice de tablas	ix
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Elementos Básicos de Cálculo Estocástico . . . . .	1
1.2. Generadores Infinitesimales . . . . .	2
1.3. Distribución Invariante . . . . .	4
1.4. Matemática Financiera . . . . .	8
1.4.1. Conceptos Básicos . . . . .	8
1.4.2. Opciones Europeas . . . . .	11
1.4.3. Modelo General de Black-Scholes . . . . .	12
1.4.4. Ecuación de Black-Scholes . . . . .	12
<b>2. Modelo de Volatilidad Estocástica</b>	<b>15</b>
2.1. Modelo General . . . . .	16
2.2. Precio Asintótico . . . . .	19
2.3. Expresión para $V_2$ y $V_3$ . . . . .	24
2.3.1. Log Ornstein-Uhlenbeck (LogOU) . . . . .	25
2.3.2. Cox-Ignersoll-Ross (CIR) . . . . .	25

---

2.4. Estimación del Modelo . . . . .	26
<b>3. Implementación</b>	<b>29</b>
3.1. Introducción . . . . .	29
3.2. Valoración por el Método Asintótico . . . . .	30
3.2.1. Análisis de Variograma . . . . .	30
3.2.2. Precio Asintótico . . . . .	32
3.3. Valoración por Simulación Monte Carlo . . . . .	35
3.3.1. Cálculo de Parámetros . . . . .	36
3.3.2. Esquema de la Simulación . . . . .	38
<b>4. Conclusiones</b>	<b>40</b>
<b>A. Valoraciones en cada método</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>50</b>

# Resumen

Para el problema de valoración de una opción europea usualmente se recurre a la fórmula de Black-Scholes (descrita en [3]). Si  $X_t$  denota el precio del activo y  $W_t$  es un movimiento browniano, el modelo de Black-Scholes está definido por  $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$  donde se asume que  $\mu$  (*drift*) y  $\sigma$  (volatilidad) son constantes. Este último supuesto puede ser generalizado asumiendo que la volatilidad sigue un proceso estocástico. De hecho en [5, pág. 416] se encuentra que “hay evidencia de no estacionalidad en la varianza”.

Por otra parte, en [13, 29] se ha mostrado empíricamente que la volatilidad de este modelo no es constante a través del tiempo, si no que se comporta como otro proceso estocástico.

Esta tesis se dividirá en tres partes y se basará principalmente en la metodología propuesta por Fouqué, Papanicolaou, y Sircar en [13], la cual consiste en desarrollar el precio mediante una serie de Taylor pero utilizando la volatilidad como una función de otro proceso, que usualmente es de reversión a la media.

La primera parte introducirá al lector los conceptos básicos de cálculo estocástico así como el concepto de distribución invariante, el cual será la base para desarrollar la metodología propuesta. Así mismo, se hará una pequeña introducción de Matemática Financiera, de modo que se cuente con el vocabulario adecuado para el desarrollo de las siguientes secciones.

En el segundo capítulo se planteará el problema de encontrar el precio de una opción europea, bajo el supuesto de que el subyacente sigue un movimiento browniano geométrico con volatilidad estocástica. Es decir,  $dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t$  donde la particularidad es que  $\sigma_t = f(Y_t)$  es otro proceso estocástico e  $Y_t$  es un proceso de regresión a la media.

Varios enfoques se han dado para resolver este problema, por ejemplo el uso de técnicas de Monte Carlo y ARCH en [10, 20], la aproximación de la función de densidad de la volatilidad en [16] o la inclusión de una aproximación con un proceso ponderado

---

por el tiempo [18]. En [25, 26] se enumeran algunas otras técnicas para enfrentar el problema.

Esta tesis se centrará en utilizar un desarrollo de Taylor para aproximar asintóticamente el precio buscado. Esta aproximación se enfocará desde dos puntos de vista; el primero será explicitar la función  $f(y)$  para dos casos particulares: los modelos de Ornstein-Uhlenbeck ( $f(y) = e^y$ ) y Cox-Ignersoll-Ross ( $f(y) = \sqrt{y}$ ); en los cuales las fórmulas de valoración quedarán como expresiones no triviales de los parámetros de cada modelo. En un segundo enfoque, se demostrará que esta aproximación puede ser calculada independientemente de la función  $f(y)$ , es decir, es posible generar una estimación del precio solamente con los datos de mercado.

Finalmente, en el capítulo 3, se pretende implementar ambos enfoques en un programa MatLab para un activo particular (el índice S&P 500, a través del fondo SPY). Se estimará el precio usando la fórmula de valoración propuesta por [13] y en otra instancia se generará una aproximación por simulación Monte Carlo para el modelo de Ornstein-Uhlenbeck, para posteriormente comparar los dos resultados y comprobar la precisión de la aproximación empleada.

# Índice de figuras

3.1. Ajuste del variograma con la función $2\nu_j^2 (1 - e^{-j\alpha\Delta t}) + 2c^2$ . Aquí se tiene que $c = 1.0950$ , $\nu_j = 0.53032$ y $\alpha = 0.0039546$ . . . . .	32
3.2. El histograma representa cuántas opciones están al porcentaje indicado de liquidez ó moneyness. . . . .	34
3.3. Ajuste de la función $I = a [\log (\frac{K}{x}) / T] + b$ con respecto a la volatilidad implicada. Para el caso de SPY se obtiene que $a = -0.095081$ y $b = 0.16355$ . . . . .	35
3.4. Superficie de volatilidad implicada calculada para diferentes plazos y strikes utilizando los datos del Cuadro 3.1. . . . .	36
4.1. Precio de Black Scholes para un call europeo, estimado para diferentes plazos y strikes. . . . .	41
4.2. Corrección del modelo de Black Scholes para un call europeo estimado para diferentes plazos y strikes. El ajuste se calculó utilizando la fórmula (2.34) y los parámetros del Cuadro 3.1. . . . .	41
4.3. Comparación de los precios reales versus los precios estimados por cada modelo. . . . .	42
4.4. Comparación de los precios por el método asintótico versus los precios estimados por los modelos de simulación. . . . .	43

# Índice de cuadros

3.1. Parámetros estimados para el modelos asintótico. Todos están anualizados tomando como un año 252 días hábiles. . . . .	34
3.2. Parámetros utilizados para las simulaciones por metodología. En este caso $\alpha = 0.99695$ se mantiene invariante para todos las simulaciones. . . . .	38
4.1. Sumas de errores al cuadrado con respecto a los datos reales ordenadas de menor a mayor. . . . .	42
4.2. Sumas de errores al cuadrado con respecto al precio asintótico ordenadas de menor a mayor. . . . .	43
4.3. Tiempo computacional calculado en Matlab para 64 bits utilizando un procesador Intel Core 2 Duo (T5800). . . . .	44

# Capítulo 1

## Preeliminarios

En este primer acercamiento se plasmarán resultados importantes que serán clave en el desarrollo general del tema; en tanto estos buscan sentar las bases para los cálculos que se deben realizar a lo largo de la investigación, y que, ayudándose con la teoría desarrollada en estos apartados asegurarán la comprensión del modelo.

### 1.1. Elementos Básicos de Cálculo Estocástico

Para los conceptos a desarrollar asuma un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  satisfaciendo las condiciones usuales de continuidad por la derecha y completitud.

**Definición 1.1.** Sea  $W_t$  un movimiento browniano estándar en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Un proceso de Itô 1-dimensional es un proceso estocástico en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s, \quad (1.1)$$

donde  $u(s, \omega)$  es adaptado y localmente integrable para todo  $t \geq 0$ , es decir que  $\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty$  para todo  $t \geq 0$  casi siempre; y  $v(s, \omega)$  es adaptado y medible con  $\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty$  para todo  $t \geq 0$  casi siempre.

Esta ecuación se puede escribir también en forma diferencial como

$$dX_t = u_t dt + v_t dW_t.$$

Ahora suponga que  $g(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^{1,2}$  (continua-

mente diferenciable en la primera entrada y dos veces continuamente diferenciable en la segunda). Se está interesado en calcular  $dg(X_t)$ , pero surge un inconveniente ya que en (1.1) el movimiento browniano  $W_t$  no es ni siquiera derivable. Afortunadamente, se le puede dar sentido usando el cálculo estocástico y la fórmula de Itô será la herramienta para calcularlo.

**Teorema 1.2.** *Sea*

$$dX_t = u_t dt + v_t dW_t$$

*un proceso de Itô 1-dimensional. Sea  $g(t, X_t)$  un función  $C^{1,2}$  tal que  $g(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces el proceso  $g(t, X_t)$  es un proceso de Itô que está dado por*

$$dg(t, X_t) = \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial x^2} dX_t \cdot dX_t \quad (1.2)$$

*donde  $dW_t \cdot dW_t = dt$ ,  $dW_t \cdot dt = dt \cdot dW_t = dt \cdot dt = 0$ .*

La prueba de este teorema se puede encontrar en [19, 22].

**Definición 1.3.** *Sea  $\mu$  una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Si  $X_t$  es un proceso adaptado en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y  $P[X_0 \in \Gamma] = \mu(\Gamma)$ ,  $\forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , entonces se dice que  $\mathbb{E}^\mu \{X_t\}$  es la esperanza de  $X_t$  con distribución inicial  $\mu$ .*

En caso de que  $\mu$  asigne medida uno a un único punto  $\{x\}$ , se denotará  $\mathbb{E}^x \{X_t\}$  como la esperanza de  $X_t$  con valor inicial  $x$ . Esta última tiene la propiedad de  $\mathbb{E}^x \{X_0\} = X_0$ . Usando esta última notación, la definición se podría reescribir como

$$\mathbb{E}^\mu \{X_t\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}^x \{X_t\} d\mu(x).$$

## 1.2. Generadores Infinitesimales

Considere un proceso de Itô de la siguiente manera

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$

Sea  $g(x)$  una función de clase  $C^2$  con derivadas acotadas. Defina el operador  $\mathcal{L}$  actuando en  $g$  de acuerdo con

$$\mathcal{L}g(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)g''(x) + \mu(x)g'(x). \quad (1.3)$$

Aplicando la fórmula de Itô (1.2) a la función  $g$  y expresándola en términos de  $\mathcal{L}$ , se obtiene,

$$dg(X_t) = \mathcal{L}g(X_t)dt + g'(X_t)\sigma(X_t)dW_t,$$

lo cual muestra que

$$M_t = g(X_t) - \int_0^t \mathcal{L}g(X_s)ds$$

define una martingala local. Si  $X_0 = x$  y dado que  $M_t$  es una martingala, se tiene que

$$\mathbb{E}^x \{g(X_t)\} = g(x) + \mathbb{E}^x \left\{ \int_0^t \mathcal{L}g(s, X_s)ds \right\}.$$

Usando las hipótesis de (1.2) se podrá establecer una igualdad bastante útil en la Sección 1.3.

**Lema 1.4.** *Asuma que  $(X_t)$  es un proceso de Itô como en la Definición 1.1. Considere el operador definido en (1.3) con  $g(x)$  una función de clase  $C^2$  con derivadas acotadas. Entonces para  $t_1 < t$  se tiene que*

$$\mathbb{E}^x \{g(X_t)\} - \mathbb{E}^x \{g(X_{t_1})\} = \int_{t_1}^t \mathbb{E}^x \{\mathcal{L}g(X_s)\} ds.$$

*Demostración.* Considere el proceso  $g(X_t) - g(X_{t_1})$  definido en el intervalo  $[t_1, t]$ . Ahora aplicando la fórmula de Itô a este proceso se obtiene que,

$$\begin{aligned} g(X_t) - g(X_{t_1}) &= \int_{t_1}^t g'(X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_{t_1}^t g''(X_s)dX_s \\ &= \int_{t_1}^t g'(X_s)\mu(X_s) + \frac{1}{2}g''(X_s)\sigma(X_t)ds + \int_{t_1}^t g''(X_s)\sigma^2(X_s)dW_s \\ &= \int_{t_1}^t \mathcal{L}g(X_s)ds + \int_{t_1}^t g''(X_s)\sigma(X_t)dW_s, \end{aligned}$$

dado que  $g''(X_s)\sigma(X_t)$  es cuadrado integrable porque  $g''$  es acotada y  $\int_0^t \sigma^2(X_s)ds$  es finita, se tiene por [22] que el segundo sumando es una integral estocástica con

$$\mathbb{E}^x \left\{ \int_{t_1}^t g''(X_s)\sigma(X_t)dW_s \right\} = 0.$$

por lo tanto, tomando esperanza en ambos lados se obtiene que

$$\mathbb{E}^x \{g(X_t) - g(X_{t_1})\} = \mathbb{E}^x \left\{ \int_{t_1}^t \mathcal{L}g(X_s) ds \right\}.$$

Ahora, basta probar que  $\mathcal{L}g(X_s)$  es integrable para poder usar el teorema de Fubini-Tonelli (ver [12]). Es decir, se debe probar que  $\int_0^\infty |\mathcal{L}g(X_s)| ds < \infty$ . Como  $g'(x)$  y  $g''(x)$  están acotadas superiormente por una constante  $M$  entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\mathcal{L}g(X_s)| ds &\leq \int_0^\infty |\sigma^2(X_s)g''(X_s)| + |\mu(X_s)g'(X_s)| ds \\ &\leq M \left[ \int_0^\infty \sigma^2(X_s) ds + \int_0^\infty |\mu(X_s)| ds \right], \end{aligned}$$

usando las hipótesis de (1.1) se concluye que  $\mathcal{L}g(X_s)$  es integrable. Por lo tanto se tiene que,

$$\mathbb{E}^x \{g(X_t)\} - \mathbb{E}^x \{g(X_{t_1})\} = \int_{t_1}^t \mathbb{E}^x \{\mathcal{L}g(X_s)\} ds.$$

□

Note que si se aplica el lema anterior con  $t_1 = 0$ , asumiendo que  $X_0$  es determinístico y tomando derivadas en ambos lados, se puede caracterizar el operador (1.3) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}^x \{g(X_t)\} |_{t=0} &= \mathbb{E}^x \{\mathcal{L}g(X_t)\} |_{t=0} \\ &= \mathbb{E}^x \{\mathcal{L}g(X_0)\} \\ &= \mathcal{L}g(X_0). \end{aligned}$$

Al operador  $\mathcal{L}$  se le conoce como generador infinitesimal del proceso  $(X_t)$ .

### 1.3. Distribución Invariante

El objetivo es encontrar la distribución inicial para  $Y_0$  tal que, para todo  $t > 0$ ,  $Y_t$  tenga la misma distribución.

**Definición 1.5.** La distribución invariante de  $Y_0$  es tal que

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}^\mu \{g(Y_t)\} = \frac{d}{dt} \mathbb{E}^\mu \{\mathbb{E}^x \{g(Y_t) | Y_0\}\} = 0 \quad (1.4)$$

donde  $g$  es una función de clase  $C^2$  con derivadas acotadas.

Esta distribución también es nombrada estado de equilibrio del proceso  $Y_t$ .

La condición (1.4) es equivalente a encontrar una distribución  $\mu$  tal que para todo  $t_1 < t$  se cumpla,

$$\mathbb{E}^\mu \{g(Y_t)\} = \mathbb{E}^\mu \{g(Y_{t_1})\}. \quad (1.5)$$

Usando el Lema 1.4 se puede observar que,

$$0 = \mathbb{E}^\mu \{g(Y_t)\} - \mathbb{E}^\mu \{g(Y_{t_1})\} = \int_{t_1}^t \mathbb{E}^\mu \{\mathcal{L}g(Y_s)\} ds,$$

que derivando esta expresión con respecto a  $t$  genera

$$0 = \frac{d}{dt} \mathbb{E}^\mu \{g(Y_t)\} = \mathbb{E}^\mu \{\mathcal{L}g(Y_t)\}$$

y por la condición de invarianza  $\mathbb{E}^\mu \{\mathcal{L}g(Y_t)\} = \mathbb{E}^\mu \{\mathcal{L}g(Y_0)\}$ , basta con resolver

$$\mathbb{E}^\mu \{\mathcal{L}g(Y_0)\} = 0. \quad (1.6)$$

Ahora bien, más adelante en este estudio se va a considerar el proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU)  $Y_t$  con media distinta de cero, el cual es la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta dV_t, \quad (1.7)$$

donde  $V_t$  es un movimiento browniano estándar. Para resolver esta ecuación considere la función  $f(t, Y_t) = Y_t e^{\alpha t}$ , y asuma conocido el valor inicial  $Y_0 = y_0$ . Aplicando el lema de Itô a esta función se tiene que

$$\begin{aligned} d(Y_t e^{\alpha t}) &= \alpha Y_t e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} dY_t \\ &= \alpha Y_t e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} (\alpha(m - Y_t)dt + \beta dV_t) \\ &= \alpha m e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} \beta dV_t, \end{aligned}$$

integrando de 0 a  $t$  se obtiene

$$Y_t e^{\alpha t} = y_0 + \int_0^t \alpha m e^{\alpha s} ds + \int_0^t e^{\alpha s} \beta dV_s.$$

Resolviendo la integral y despejando para  $Y_t$  se encuentra la solución de la ecuación

$$Y_t = m + (y - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dV_s,$$

es decir  $Y_t$  es  $\mathcal{N}\left(m + (y_0 - m)e^{-\alpha t}, \frac{\beta^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right)$ . Además, note que si  $t$  es suficientemente grande se alcanza el estado de equilibrio, lo cual genera una distribución  $\mathcal{N}\left(m, \frac{\beta^2}{2\alpha}\right)$  que no depende de  $y_0$ . que llamaremos de ahora en adelante  $\Phi(y)$ .

Se demostrará, utilizando generadores infinitesimales, que  $\Phi(y)$  efectivamente es la distribución invariante de  $Y_t$  y que cumple las condiciones de la ecuación (1.5), es decir,  $\mathbb{E}^\mu \{g(Y_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi(y)dy$ .

Utilizando (1.3) en el proceso OU se obtiene

$$\mathcal{L} = \alpha(m - y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

El objetivo es encontrar la distribución de  $Y_0$  tal que se cumpla que, para toda  $g$  continuamente diferenciable y acotada, la siguiente ecuación sea válida,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y)\mathcal{L}g(y)dy = 0.$$

Sin embargo, esta tesis se limitará a buscar funciones  $\Phi(y)$  con las propiedades  $\Phi(y), \Phi'(y)$  y  $\Phi(y)y \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow \pm\infty$ . Esto último es suficiente debido a que la teoría estándar indica que este proceso es ergódico, por lo que tiene una única distribución invariante.

Para encontrar  $\Phi(y)$ , se necesita introducir el operador  $\mathcal{L}^*$  (el operador adjunto de  $\mathcal{L}$ ) tal que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y)\mathcal{L}g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathcal{L}^*\Phi(y)dy = 0. \quad (1.8)$$

**Lema 1.6.** Si se define el operador  $\mathcal{L} = \alpha(m - y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , entonces el operador adjunto  $\mathcal{L}^*$  que cumple (1.8) está definido por

$$\mathcal{L}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial y}((m - y)\cdot) + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

con  $\mathcal{L}^*\Phi$  definido para funciones con las siguientes condiciones:  $\Phi, \Phi'$  e  $y\Phi \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow \pm\infty$ . Además que  $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi(y)dy = 0$  para  $g \in C^1$  acotada con derivadas acotadas.

*Demostración.* Desarrollando  $\mathcal{L}$  y aplicando la fórmula de integración por partes se

obtiene que,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \mathcal{L}g(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \left\{ \alpha(m-y) \frac{\partial g(y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} \right\} dy \\ &= \alpha m \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \frac{\partial g(y)}{\partial y} dy - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) y \frac{\partial g(y)}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} dy.\end{aligned}$$

Se van a desarrollar los tres sumandos usando integración por partes,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \frac{\partial g(y)}{\partial y} dy &= g(y) \Phi(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y} dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) y \frac{\partial g(y)}{\partial y} dy &= yg(y) \Phi(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \Phi(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} yg(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} dy &= \frac{\partial g(y)}{\partial y} \Phi(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} - g(y) \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{\partial^2 \Phi(y)}{\partial y^2} dy\end{aligned}$$

y utilizando las condiciones impuestas se obtiene que el operador auto-adjunto es,

$$\mathcal{L}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial y} ((m-y) \cdot) + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.9)$$

Ahora como (1.8) se cumple para cualquier  $g$  derivable y acotada, entonces  $\Phi(y)$  debe cumplir que

$$\mathcal{L}^* \Phi = \frac{1}{2} \beta^2 \Phi'' - \alpha((m-y)\Phi)' = 0. \quad (1.10)$$

□

Ahora, integrando la ecuación (1.10) y usando las condiciones anteriores se obtiene que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \beta^2 \Phi'' - \alpha((m-y)\Phi)' &= 0 \\ \frac{1}{2} \beta^2 \Phi'' &= \alpha((m-y)\Phi)' \\ \frac{1}{2} \beta^2 \Phi' &= \alpha(m-y)\Phi + C_1 \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} \beta^2 \Phi' &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \alpha(m-y)\Phi + C_1 \\ 0 &= C_1.\end{aligned}$$

Basta resolver la ecuación de primer orden  $\frac{1}{2} \beta^2 \Phi' = \alpha(m-y)\Phi$ , la cual es de variables

separables. Denótese  $\nu^2 = \beta^2/2\alpha$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\beta^2\Phi' &= \alpha(m-y)\Phi \\ \int \frac{1}{\Phi} d\Phi &= \int \frac{2\alpha}{\beta^2}(m-y)dy \\ \ln \Phi &= \frac{1}{\nu^2}my - \frac{1}{\nu^2}\frac{y^2}{2} + C_2 \\ \Phi &= \tilde{C}_2 \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right).\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación diferencial con la restricción de  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y)dy = 1$  se obtiene que la constante  $\tilde{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}}$ , es decir la solución sería

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right) \quad (1.11)$$

donde

$$\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}. \quad (1.12)$$

*Notación 1.7.* Se denotará con  $\langle \cdot \rangle$  a la esperanza sobre la distribución invariante del proceso  $Y_t$ , es decir,

$$\langle g \rangle = \mathbb{E}^\mu \{g(Y_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi(y)dy \quad (1.13)$$

## 1.4. Matemática Financiera

Para el desarrollo del modelo de Black-Scholes, se requiere ahondar en algunas definiciones de corte financiero que serán parte vital en la temática abordada, en tanto estas facilitarán al lector la comprensión del modelo, así como sentarán las bases necesarias para un desarrollo máximo y correcto del mismo.

### 1.4.1. Conceptos Básicos

**Definición 1.8.** Un derivado o reclamo contingente, es un contrato financiero cuyo valor a la fecha de vencimiento  $T$  (o madurez) está determinado exactamente por el precio del activo financiero subyacente ( $X_t$ ) hasta el tiempo  $T$  (específicamente en el intervalo  $[0, T]$ ). En otras palabras, este consiste de

- i. una tasa de pago  $p = \{p_t: 0 \leq t \leq T\}$ , y

- ii. un pago final  $h(X_T)$  en el vencimiento  $T$ .

Considere  $d + 1$  activos  $S_0, \dots, S_d$  los cuales pueden representar el precio de acciones, bonos u opciones. Se asume que  $S = (S_0, \dots, S_d)$  es una semi-martingala adaptada, continua y estrictamente positiva en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)^1$ . Además, que  $S_0$  es un activo libre de riesgo (puede pensarse como una cuenta en el banco), la cual está dada por  $S_0(t) = e^{r(t)}$  con un  $r(t)$  un proceso determinístico y  $r(0) = 0$ .

Se denotará  $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \dots, \varphi_d(t))$ ,<sup>2</sup> como una estrategia de mercado. Los  $\varphi_i(t)$  representan el número de acciones del activo  $i$  que se poseen en el tiempo  $t^-$  y que serán usados en el tiempo  $t$ .

**Definición 1.9.**

- i. Al proceso  $\Pi_\varphi(t)$  se le conoce como proceso de riqueza de la estrategia  $\varphi$ .
- ii. El proceso de ganancia  $G_\varphi(t)$  se define como

$$G_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(u) dS(u) = \sum_{i=0}^d \int_0^t \varphi_i(u) dS_i(u).$$

- iii. Una estrategia  $\varphi$  es llamada auto-financiada si el proceso de riqueza  $\Pi_\varphi(t)$  satisface

$$\Pi_\varphi(t) = \Pi_\varphi(0) + G_\varphi(t), \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

*Observación 1.10.* Note como la última condición es equivalente a

$$d\Pi_\varphi(t) = \sum_{i=0}^d \varphi_i(t) dS_i(t). \quad (1.14)$$

Es decir, un portafolio se dice autofinanciado si todo cambio en el valor del portafolio es igual a una ganancia o pérdida de igual magnitud debido a cambios en los precios de  $S$ .

<sup>1</sup>Una proceso  $X_t$  se dice semi-martingala si se puede descomponer como

$$X_t = X_0 + N_t + A_t,$$

con  $N$  una martingala local y  $A$  es un proceso de variación acotada.

<sup>2</sup>Aquí  $\varphi(t)$  se asumirá predecible y localmente acotada. Además, se requiere que  $\int_0^T \mathbb{E} \{ \varphi_0(t) \} dt < \infty$  y  $\sum_{i=0}^d \int_0^T \mathbb{E} \{ \varphi_i^2(t) \} dt < \infty$  para la existencia de  $\int_0^t \varphi(u) dS(u)$ .

**Definición 1.11.** Una estrategia de mercado auto-financiada  $\varphi$  es llamada una oportunidad de arbitraje si el proceso de riqueza  $\Pi_\varphi(t)$  satisface lo siguiente

$$\Pi_\varphi(0) = 0, \quad \mathbb{P}(\Pi_\varphi(T) \geq 0) = 1, \quad \mathbb{P}(\Pi_\varphi(T) > 0) > 0.$$

Una oportunidad de arbitraje es esencialmente equivalente a la posibilidad de hacer una cantidad positiva de dinero sin tomar ningún riesgo. Se puede interpretar una posibilidad de arbitraje como una valoración incorrecta de un activo en el mercado. La herramienta principal para investigar las oportunidades de arbitraje es el concepto de medida equivalente de martingala

**Definición 1.12.** Se dice que una medida  $\mathbb{Q}$  definida en  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una medida equivalente de martingala si

- i.  $\mathbb{Q}$  es equivalente a  $\mathbb{P}$ .<sup>3</sup>
- ii. el proceso descontado  $e^{-r(t)}S$  es una martingala.

Ahora lo importante aquí es que si el conjunto de medidas equivalente de martingalas no es vacío, entonces no existe oportunidades de arbitraje, i.e., no existe  $\varphi$  que cumpla la definición 1.11. Una demostración rigurosa de esta afirmación se puede observar en [3].

Otro concepto muy importante para la valoración del modelo de Black-Scholes es el de mercado completo. Denote como  $\mathbb{P}^*$  a la medida equivalente de martingala la cual no posee oportunidades de arbitraje.

**Definición 1.13.**

- i. Un reclamo contingente  $X$  es llamado alcanzable si existe al menos una estrategia de mercado tal que

$$\Pi_\varphi(T) = X.$$

Se llama a esta estrategia  $\varphi$  una estrategia replicante para  $X$ .

- ii. El mercado financiero se dice completo si cualquier reclamo contingente es alcanzable.

La clave en la valoración de activos se centra en encontrar la medida equivalente  $\mathbb{P}^*$  y como se demuestra en [3] es posible encontrar un método para valorar un reclamo contingente alcanzable.

<sup>3</sup>Esto significa que  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q} \gg \mathbb{P}$ .

**Teorema 1.14.** *El precio de arbitraje de cualquier reclamo alcanzable está dado por la fórmula de valoración*

$$\Pi_\varphi(t) = e^{r(t)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left\{ X e^{-r(t)} | \mathcal{F}_t \right\}.$$

Es posible demostrar también que si se tienen dos estrategias  $\varphi, \psi$  libres de arbitraje entonces  $\Pi_\varphi(t) = \Pi_\psi(t)$ .

Finalmente, la forma de caracterizar mercados completos se centra en encontrar una única medida martingala  $\mathbb{P}^*$ , es decir que cada reclamo contingente que satisface  $X e^{-r(t)} \in L^1(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$  es alcanzable.

### 1.4.2. Opciones Europeas

En esta tesis los únicos reclamos contingentes que se estudiarán serán las opciones Europeas. Las opciones Americanas y las llamadas “Exóticas” se omitirán en este trabajo, si el lector está interesado puede leer acerca de estas en [3, 13]. En el caso de las opciones Europeas se tiene que según la Definición 1.8 se tiene que  $p = 0$  para todo  $0 \leq t \leq T$ .

Una *opción Europea call* es un contrato que da al portador el derecho, pero no la obligación, de comprar una unidad del activo subyacente a un precio de ejercicio predeterminado  $K$  a la madurez  $T$ . Si  $X_T$  es el precio del subyacente en el tiempo  $T$ , entonces el valor del contrato a la madurez es

$$h(X_T) = (X_T - K)^+ = \begin{cases} X_T - K & \text{si } X_T > K \\ 0 & \text{si } X_T \leq K. \end{cases}$$

En el primer caso el portador ejecutará la opción haciendo una ganancia de  $X_T - K$  comprando el activo en  $K$  y vendiéndolo inmediatamente en el mercado a  $X_T$ . En el otro caso, la opción no es ejecutada, ya que el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio.

Similarmente, una *opción Europea put* es un contrato que da al portador el derecho, pero no la obligación, de vender una unidad del activo a un precio de ejercicio  $K$  a la fecha de madurez  $T$ . El pago es

$$h(X_T) = (K - X_T)^+ = \begin{cases} K - X_T & \text{si } X_T < K \\ 0 & \text{si } X_T \geq K. \end{cases}$$

En el primer caso, si se compra el activo con el precio de mercado y se ejercer la opción daría una ganancia de  $K - X_T$ ; en el segundo caso, la opción no es ejercitada.

### 1.4.3. Modelo General de Black-Scholes

En este modelo se asume que existe un activo libre de riesgo con precio  $\beta_t$  en el momento  $t$ , descrito por la ecuación diferencial

$$d\beta_t = r\beta_t dt \quad (1.15)$$

donde  $r$  es la tasa instantánea de interés. Si  $\beta_0 = 1$  entonces  $\beta_t = e^{rt}$  para  $t \geq 0$ . El precio  $X_t$  del activo riesgoso está determinado mediante la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad (1.16)$$

donde  $\mu$  es llamado el desplazamiento,  $\sigma$  es la una volatilidad constante y  $(W_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar.

Para resolver esta ecuación se aplica la fórmula de Itô a la función  $g(x) = \ln x$ , es decir,

$$\begin{aligned} d \ln X_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} dX_t dX_t \\ &= \frac{1}{X_t} (\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t) - \frac{1}{2X_t^2} \sigma^2 X_t^2 dt \\ &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

El precio del activo esta dado explícitamente por

$$\begin{aligned} \ln X_t &= \ln X_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \\ X_t &= X_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right). \end{aligned}$$

### 1.4.4. Ecuación de Black-Scholes

Para derivar la solución de la ecuación (1.16) se debe crear un portafolio con una posición corta en una opción y un cierto número de acciones de algún activo, de modo que el riesgo queda eliminado del portafolio. Al valor actual de la opción se denotará  $P(X_t)$  y el número de acciones que se tienen al tiempo  $t$  es  $\Delta_t$ . Esto nos da el siguiente portafolio.

$$\Pi = P(X_t) - \Delta_X X_t.$$

Se necesita hacer este portafolio libre de riesgo. Además, se debe derivar  $\Pi$  y se resolverá para el valor de  $\Delta_t$  que elimina el factor  $dW_t$ . Para esto se utilizará la condición de autofinanciamiento

$$d\Pi = dP(X_t) - \Delta_t dX_t. \quad (1.17)$$

Ahora, utilizando que  $dX_t$  se puede escribir como en (1.16) y la fórmula de Itô (1.2) con la función  $P(X_t)$ , se obtiene que

$$d\Pi = \left( \frac{\partial P(X_t)}{\partial t} + \frac{\partial P(X_t)}{\partial x} \mu X_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(X_t)}{\partial x^2} \sigma^2 X^2 \right) dt \quad (1.18)$$

$$+ \frac{\partial P(X_t)}{\partial x} \sigma X_t dW_t - \Delta_t (\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t)$$

$$= \left( -\Delta_t \mu X_t + \frac{\partial P(X_t)}{\partial t} + \frac{\partial P(X_t)}{\partial x} \mu X_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(X_t)}{\partial x^2} \sigma^2 X^2 \right) dt \quad (1.19)$$

$$+ \left( \frac{\partial P(X_t)}{\partial x} \sigma X_t - \Delta_t \sigma X_t \right) dW_t.$$

La intención es encontrar el valor de  $\Delta_t$  que elimina el factor que contiene  $dW_t$  en  $d\Pi$ , se debe tomar  $\Delta_t = \frac{\partial P(X_t)}{\partial X}$ . A esta cantidad se le llama, comúnmente, cobertura delta (*delta hedging*), la cual elimina el riesgo de cambios lineales en  $X_t$ .

Si se sustituye el valor de  $\Delta_t$  en  $d\Pi$  se obtiene

$$d\Pi = \left( \frac{\partial P(X_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(X_t)}{\partial x^2} \sigma^2 X^2 \right) dt. \quad (1.20)$$

Ahora, dado que el portafolio está libre de riesgo y bajo el supuesto de no arbitraje este debe crecer a la tasa libre de riesgo  $r$ , i.e.

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left( P(X_t) - \frac{\partial P(X_t)}{\partial x} X_t \right) dt. \quad (1.21)$$

Igualando (1.20) y (2.4) y simplificando se obtiene la ecuación diferencial de Black-Scholes.

$$\frac{\partial P(X_t)}{\partial t} + r X_t \frac{\partial P(X_t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 P(X_t)}{\partial x^2} = r P(X_t). \quad (1.22)$$

Por ejemplo, en el caso que se quiera valorar un call europeo se debe imponer la condición final  $h(x) = (x - K)^+$ . El precio de Black-Scholes para los call europeos se denotará  $C_{BS}(t, x)$ . Para este caso, se puede encontrar una fórmula cerrada para el

precio,

$$C_{BS}(t, x) = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (1.23)$$

donde,

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

y

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy .$$

## Capítulo 2

# Modelo de Volatilidad Estocástica

Para modelos de volatilidad estocástica, se asume que la volatilidad sigue cierto proceso estocástico, ya sea continuo o discreto. Esto introduce nuevas fuentes de aleatoriedad al modelo de valoración del activo. Debido a esto, y según [4] se dice que empíricamente el modelo no es completo y no es libre de riesgo, ya que el número de fuentes de aleatoriedad es mayor que el número de activos subyacentes. Por este motivo, es necesario desarrollar fórmulas diferentes a la valoración clásica de activos.

Sea  $M$  el número de subyacentes presentes en el modelo y sea  $R$  la cantidad de fuentes de aleatoriedad. Es importante recalcar que completitud y ausencia de arbitraje funcionan de manera opuesta. Note que cada subyacente agregado (sin aumentar  $R$ ) nos dará la posibilidad de generar un portafolio arbitraje, por eso se debe tener que  $M$  es menor o igual que  $R$ .

Por otro lado, cada nuevo subyacente agregado al modelo dará la posibilidad de replicar un contrato dado, por esto se requiere que  $M$  sea mayor o igual que  $R$ . Para obtener un modelo libre de riesgo y completo es necesario que  $M = R$ .

No es posible enunciar o probar un resultado específico aquí, pero la siguiente regla o “meta-teorema”, expuesta en [4], es bastante útil. Sin embargo, es posible para ciertos casos enunciar y probar un teorema preciso. En esta tesis no se estudiarán esos casos.

**Meta-Teorema 2.1.** *Denote  $M$  el número de subyacentes negociados en el modelo excluyendo el activo libre de riesgo, y sea  $R$  el número de fuentes de aleatoriedad. Generalmente se tienen estas relaciones:*

- i. El modelo es libre de riesgo si y sólo si  $M \leq R$ .*
- ii. El modelo es completo si y sólo si  $M \geq R$ .*

iii. El modelo es completo y libre de riesgo si y sólo si  $M = R$ .

## 2.1. Modelo General

Se usará un modelo asumiendo que la volatilidad es una función de un proceso Ornstein-Uhlenbeck  $Y_t$  definido en (1.7)

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t \\ \sigma_t &= f(Y_t) \\ dY_t &= \alpha(m - Y_t)dt + \beta dV_t \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde

$$dV_t = \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t, \quad (2.2)$$

con  $Z_t$  y  $W_t$  movimientos brownianos independientes.

El modelo dado por (2.1) posee un activo  $X_t$  y dos fuentes de incertidumbre  $W_t$  y  $Z_t$ . Ahora, se desea crear un portafolio libre de riesgo, y siguiendo el meta-teorema 2.1, los derivados no pueden ser completamente cubiertos con sólo el activo subyacente.

Dado que la volatilidad es un proceso de  $\hat{I}to$ , es posible encontrar fórmulas de valoración para los derivados europeos de la forma  $P(T, X_t, Y_t)$  por argumentos de no arbitraje, del mismo modo que en el caso de Black-Scholes. La función  $P(t, x, y)$  satisface una ecuación en derivadas parciales en dos dimensiones  $(x, y)$ ; el precio del derivado  $x$  depende del valor del proceso  $y$ , el cual no es directamente observable.

Sea  $P(t, x, y)$  el precio de una opción europea con expiración  $T_1$  y pago  $h(X_{T_1})$  tal como se definió en la sección 1.4.2. Para cubrir correctamente este portafolio se necesita otra opción Europea de precio  $G(t, x, y)$  con el mismo pago  $h$  pero con un tiempo de madurez mayor  $T_2 > T_1 \geq t$ .

El portafolio libre de riesgo  $\Pi$  se puede formar teniendo una posición larga de la opción con precio  $P$  y posiciones cortas de  $\Delta_X$  del subyacente  $X$  y de  $\Delta_G$  de  $G$ . El balance total es,

$$\Pi = P - \Delta_X X - \Delta_G G. \quad (2.3)$$

Además, el portafolio debe ser auto-financiado (1.14), de este modo

$$d\Pi = dP - \Delta_X dX - \Delta_G dG. \quad (2.4)$$

Aplicando la fórmula de Itô (1.2) a (2.4) se obtiene que

$$d\Pi = \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{M}_1 P \right) dt + \frac{\partial P}{\partial x} dX + \frac{\partial P}{\partial y} dY - \Delta_X dX - \Delta_G \left\{ \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \mathcal{M}_1 G \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} dX + \frac{\partial G}{\partial y} dY \right\}$$

donde

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{2} f(y)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \beta x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

y donde  $P$  y  $G$  y sus derivadas están evaluadas en  $(t, X, Y)$ . Agrupando los términos que contienen  $dX$  y  $dY$  se obtiene

$$d\Pi = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} - \Delta_X \right) dX + \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \Delta_G \frac{\partial G}{\partial y} \right) dY + \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{M}_1 P \right) - \Delta_G \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \mathcal{M}_1 G \right) \right] dt. \quad (2.5)$$

El portafolio es libre de riesgo si se eliminan los coeficientes enfrente de las fuentes de aleatoriedad  $dX$  y  $dY$ , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} - \Delta_X &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} - \Delta_G \frac{\partial G}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema para  $\Delta_X$  y  $\Delta_G$  se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta_G &= \frac{\partial P}{\partial y} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)^{-1} \\ \Delta_X &= \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora, cuando se utilizan las definiciones de  $\Delta_X$  y  $\Delta_G$  en (2.5) el riesgo es eliminado. Bajo la hipótesis de no arbitraje este portafolio debe rendir igual que el activo libre de riesgo  $d\Pi = r\Pi dt$  (1.15), por lo tanto (2.5) quedaría de la siguiente manera,

$$\left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^{-1} \mathcal{M}_2 P = \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)^{-1} \mathcal{M}_2 G \quad (2.6)$$

donde

$$\mathcal{M}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1 + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right).$$

El lado izquierdo de (2.6) depende sólo de  $P$  pero no de  $G$  y una situación similar ocurre con el lado derecho. Por lo tanto, ambos lados deben ser iguales a una función  $k(t, x, y)$  que no depende ni de  $P$  ni de  $G$ . Para mayor conveniencia, esta función se puede escribir de la siguiente manera,

$$k(t, x, y) = \alpha(m - y) - \beta\Lambda(t, x, y) \quad (2.7)$$

donde

$$\Lambda(t, x, y) = \rho \frac{(\mu - r)}{f(y)} + \gamma(t, x, y) \sqrt{1 - \rho^2}, \quad (2.8)$$

por razones que serán detalladas más adelante.

Por lo tanto, se tiene que la función de valoración  $P$  debe cumplir la siguiente ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} f(y)^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho \beta x f(y) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ + r \left( x \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + (\alpha(m - y) - \beta\Lambda(t, x, y)) \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La condición final es  $P(T, x, y) = h(x)$ .

Agrupando los operadores de (2.9) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} f(y)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right)}_{\mathcal{L}_{BS}(f(y))} + \underbrace{\rho \beta x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}}_{\text{correlación}} \\ + \underbrace{\frac{1}{2} \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(m - y) \frac{\partial P}{\partial y}}_{\mathcal{L}_{OU}} - \underbrace{\beta \Lambda(t, x, y) \frac{\partial P}{\partial y}}_{\text{prima}}, \end{aligned}$$

se obtiene que el primer grupo es el operador de Black-Scholes (1.22) con volatilidad  $f(y)$ ; el segundo término es debido a la correlación de  $X$  y de  $Y$ ; el tercero es el generador infinitesimal del proceso OU ( $Y_t$ ) y el último término es debido al precio de mercado por la volatilidad estocástica.

La función  $\gamma$  en (2.8) es el factor de la prima de riesgo de la segunda fuente de

aleatoriedad ( $V_t$ ) la cual afecta la volatilidad. La razón para esta definición es que

$$dP(t, X_t, Y_t) = \left[ \frac{(\mu - r)}{f(y)} \left( xf(y) \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) + rP + \gamma \beta \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial P}{\partial y} \right] dt \\ + \left( xf(y) \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) dW_t + \beta \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial P}{\partial y} dZ_t,$$

la cual se obtiene usando la fórmula de Itô y la ecuación diferencial estocástica (2.9) a la función  $P$ . En esta expresión un incremento en el riesgo de volatilidad  $\beta$ , incrementa la tasa infinitesimal de la tasa de retorno por  $\gamma$  veces esa fracción.

## 2.2. Precio Asintótico

Como se analizó anteriormente, la volatilidad estocástica se puede modelar como una función de un proceso auxiliar ( $Y_t$ ) (el cual se supondrá de tipo OU). En esta sección se derivará una fórmula asintótica para valorar una opción europea que se rige mediante (2.1). Esta es la principal contribución del trabajo de Fouquet, Papanicolaou y Sircar (ver [13]).

Para esto, se definen tres parámetros muy importantes para la derivación del precio.

- i. La volatilidad efectiva  $\bar{\sigma}$  definida por,

$$\bar{\sigma}^2 = \langle f^2 \rangle, \quad (2.10)$$

donde los paréntesis están definidos en (1.13) como la esperanza con respecto a la medida invariante.

- ii. La tasa de reversión a la media  $\alpha$ , o su inversa la correlación típica del tiempo de  $Y$ , el cual es usualmente una cantidad pequeña y se denotará,

$$\varepsilon = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.11)$$

- iii. La varianza de la distribución invariante  $\nu^2$ , la cual controla la volatilidad de las fluctuaciones en el largo plazo. Se asumirá que esta cantidad permanece constante conforme  $\varepsilon$  se vuelve cada vez más pequeño.

Reescribiendo los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de (2.9) en términos de  $\nu$  y  $\varepsilon$  definidos en (1.12) y

(2.11) se obtiene,

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$$

y

$$\beta = \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Con esto, se consigue reescribir (2.9) en términos de  $\varepsilon$  de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}f(y)^2x^2\frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\nu}{\varepsilon}\frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\sqrt{2}\rho\nu}{\sqrt{\varepsilon}}xf(y)\frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial x\partial y} \\ + r\left(x\frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x} - P^\varepsilon\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon}(m-y) - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\Lambda(t,x,y)\right)\frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

con la condición final  $P^\varepsilon(T, x, y) = h(x)$ .

Ahora, se subdivide el operador que aparece en (2.12) en tres partes que se denota,

$$\mathcal{L}_0 = \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (m-y)\frac{\partial}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{2}\rho\nu xf(y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \nu\sqrt{2}\Lambda(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y} \quad (2.14)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}f(y)^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + r\left(x\frac{\partial}{\partial x} - 1\right) = \mathcal{L}_{BS}(f(y)), \quad (2.15)$$

por lo tanto, se puede reescribir (2.12) de esta manera

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\right)P^\varepsilon = 0. \quad (2.16)$$

Haciendo uso del trabajo expuesto sobre teoría de homogenización en [2, 23, 24], es posible expandir  $P^\varepsilon$  en series de potencias de  $\sqrt{\varepsilon}$ ,

$$P^\varepsilon = P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon}P_3 + \dots, \quad (2.17)$$

donde  $P_0, P_1, P_2, \dots$  son funciones de  $(t, x, y)$ . Combinando (2.16) y (2.17), se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_0 P_0 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0) \\ & + (\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0) \\ & + \sqrt{\varepsilon} (\mathcal{L} P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0) \\ & + \dots \\ & = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Analizando los términos que contengan  $\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 1, \dots$ , uno a uno, se puede observar que, el primer término en (2.18) es

$$\mathcal{L}_0 P_0 = 0.$$

En este caso  $\mathcal{L}_0$  contiene sólo derivadas con respecto a  $y$ , por lo tanto se está buscando una función independiente de  $y$ , es decir,

$$P_0 = P_0(t, x).$$

El siguiente término en (2.18) es,

$$\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0, \tag{2.19}$$

en el cual  $P_0$  sólo depende de  $t$  y  $x$ . Además,  $\mathcal{L}_1$  contiene derivadas con respecto a  $y$  en todos los términos, por tanto se deduce además que  $\mathcal{L}_1 P_0 = 0$ . Entonces, la ecuación (2.19) quedaría  $\mathcal{L}_0 P_1 = 0$ . Por los argumentos explicados arriba,  $P_1$  sólo puede depender de  $t$  y  $x$ , es decir,

$$P_1 = P_1(t, x).$$

Por lo tanto, los dos primeros términos de (2.17) no dependen de  $y$ . El término de orden 1 sería,

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0.$$

Como  $P_1$  sólo depende de  $t$  y  $x$ , entonces la ecuación anterior se reduce a,

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0. \tag{2.20}$$

Si se toma  $t$  y  $x$  fijos note que (2.20) sólo depende de  $y$ , por tanto esta ecuación tiene

la forma

$$\mathcal{L}_0\chi(y) + g(y) = 0,$$

la cual se conoce como ecuación de Poisson para  $\chi(y) = P_2$  con respecto al operador  $\mathcal{L}_0$  en la variable  $y$ . Usando la misma notación que en (1.13), la condición para la existencia de una solución es que  $g$  esté centrada con respecto a la distribución invariante de  $Y$  introducida en la Sección 1.3, es decir

$$\langle g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi(y)dy = 0, \quad (2.21)$$

ya que por la propiedad (1.8) y usando  $\mathcal{L}_0^*\Phi = 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= -\langle \mathcal{L}_0\chi \rangle \\ &= -\int (\mathcal{L}_0\chi(y)) \Phi(y)dy \\ &= -\int \chi(y) (\mathcal{L}_0^*\Phi(y)) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

La condición de centrado (2.21) aplicada a (2.20) se reduce a,

$$\langle \mathcal{L}_2P_0 \rangle = 0.$$

Como  $P_0$  no depende de  $y$ , entonces se tiene que  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 = 0$  y, a partir de la definición en (2.15), se deduce que  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})$ , con  $\bar{\sigma}$  definido en (2.10). Por lo tanto, el término  $P_0$  es la solución de la ecuación de Black-Scholes

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0,$$

con la condición final  $P_0(T, x) = h(x)$ .

Note que a partir de (2.20) se puede deducir que

$$\mathcal{L}_2P_0 = -\mathcal{L}_0P_2. \quad (2.22)$$

Dado que la condición de centrado es satisfecha se puede escribir,

$$\mathcal{L}_2P_0 = \mathcal{L}_2P_0 - \langle \mathcal{L}_2P_0 \rangle = \frac{1}{2} (f(y)^2 - \bar{\sigma}^2) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}.$$

Entonces por (2.22) el término  $P_2$  está dado por

$$\begin{aligned} P_2(t, x, y) &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_0^{-1} (f(y)^2 - \bar{\sigma}^2) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \\ &= -\frac{1}{2} (\phi(y) + c(t, x)) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $\phi(y)$  es solución de la ecuación de Poisson

$$\mathcal{L}_0 \phi = f(y) - \langle f^2 \rangle \quad (2.24)$$

y  $c(t, x)$  es una constante en  $y$  que puede depender de  $(t, x)$ .

El término de orden  $\sqrt{\varepsilon}$  también debe ser igual a cero

$$\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 = 0.$$

Esta es una ecuación de Poisson para  $P_3$  con respecto a  $\mathcal{L}_0$ , el cual requiere la condición de centrado

$$\langle \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 \rangle = 0.$$

Usando el hecho de que  $P_1$  no depende de  $y$ , y que  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})$  se obtiene que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 \rangle &= 0 \\ \langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle + \langle \mathcal{L}_2 P_1 \rangle &= 0 \\ \langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle + \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_1 &= 0 \\ \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_1 &= -\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle, \end{aligned}$$

como  $c(t, x)$  es independiente de  $y$  y  $\mathcal{L}_1$  toma derivadas con respecto a  $y$  entonces  $\mathcal{L}_1 c = 0$ , además considerando la fórmula (2.23) para  $P_2$  se obtiene,

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_1 = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_1 \phi(y) \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2},$$

usando (2.14) es posible escribir el operador

$$\langle \mathcal{L}_1 \phi(y) \cdot \rangle = \sqrt{2} \rho \nu \langle f(y) \phi'(y) \rangle x \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{2} \nu \langle \Lambda(y) \phi'(y) \rangle$$

y se puede escribir una ecuación explícita para  $P_1(t, x)$ ,

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\nu\langle f\phi'\rangle x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} + \left( \sqrt{2}\rho\nu\langle f\phi'\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}\nu\langle \Lambda\phi'\rangle \right) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}, \quad (2.25)$$

con la condición final  $P_1(T, x) = 0$ .

Denótese la corrección que se hará al modelo por

$$\tilde{P}_1(t, x) = \sqrt{\varepsilon}P_1,$$

la cual, según (2.25), es solución de

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_1 = H(t, x),$$

donde se define el término fuente

$$H(t, x) = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}; \quad (2.26)$$

$V_2$  y  $V_3$  son dos coeficientes, dados en términos de  $\alpha = 1/\varepsilon$  por

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} (2\rho\langle f\phi'\rangle - \langle \Lambda\phi'\rangle) \\ V_3 &= \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi'\rangle. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Por lo tanto, se pueden escribir los dos primeros términos de (2.17) como el precio de Black-Scholes con condición terminal cero y con un factor de corrección dado por (2.26), de la siguiente manera

$$P_0 - (T - t) \left( V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} \right), \quad (2.28)$$

donde  $P_0$  viene dado por la fórmula de Black-Scholes con volatilidad constante  $\bar{\sigma}$ .

### 2.3. Expresión para $V_2$ y $V_3$

En esta sección se calcula explícitamente las funciones  $V_2$  y  $V_3$  dadas en 2.27 usando casos particulares de  $f(y)$  en (2.1), dados por los modelos de Log Ornstein-Uhlenbeck y Cox-Ingersoll-Ross. Los detalles de los cálculos pueden ser encontrados en [1, 14], ya que realizar estos no brindarán un aporte significativo al objetivo de este capítulo. Utilizando

las fórmulas (2.27), (2.24), es posible reescribir  $V_2$  y  $V_3$  como,

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{\nu\sqrt{2\alpha}} \langle [-2\rho F + \rho(\mu - r)\tilde{F} + \sqrt{1 - \rho^2}\Gamma] (f^2 - \langle f^2 \rangle) \rangle \\ V_3 &= \frac{-\rho}{\nu\sqrt{2\alpha}} \langle F (f^2 - \langle f^2 \rangle) \rangle, \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde  $F$ ,  $\tilde{F}$  y  $M$  representan las antiderivadas de  $f$ ,  $1/f$ ,  $\gamma$  respectivamente. Los modelos aquí expuestos siguen las mismas hipótesis de  $V_t$  y  $W_t$  que en (2.2).

### 2.3.1. Log Ornstein-Uhlenbeck (LogOU)

Este modelo fue estudiado en detalle en la sección 1.3. El modelo a seguir sería,

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t, \\ dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta dV_t, \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde  $\sigma_t = e^{Y_t}$ . Debe recordarse que la distribución invariante es una  $\mathcal{N}(m, \nu^2)$  con  $\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ . Las expresiones de  $V_2$  y  $V_3$  están dadas por,

$$V_2 = \frac{-2\rho}{\beta} \left( e^{9\nu^2/2+3m} - e^{5\nu^2/2+3m} \right) - \frac{\rho}{c} (\mu - r) \left( e^{\nu^2/2+m} - e^{5\nu^2/2+m} \right) + \frac{2}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{1 - \rho^2} \gamma \bar{\sigma}^2 \nu, \quad (2.31)$$

$$V_3 = \frac{-\rho}{\beta} \left( e^{9\nu^2/2+3m} - e^{5\nu^2/2+3m} \right).$$

### 2.3.2. Cox-Ignersoll-Ross (CIR)

Este modelo, es un modelo de reversión a la media con la dinámica,

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t, \\ dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \sqrt{Y_t} dV_t, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $m$  son constantes. La volatilidad es dada por  $\sigma_t = f(Y_t)$  donde  $f(y) = \sqrt{y}$ . Usando las ideas de 1.3 es posible concluir que  $Y_t$  posee una distribución invariante gamma con esperanza  $m$  y varianza  $\nu^2 = m\beta^2/2\alpha$ . Es decir su distribución es,

$$\zeta(y) = \frac{y^{(a-1)} e^{-(y/b)}}{\Gamma(a) b^a},$$

donde  $a = 2\alpha m/\beta^2$  y  $b = \beta^2/2\alpha$ . Usando 2.29 y  $f(y) = \sqrt{y}$ ,  $V_2$  y  $V_3$  pueden ser calculados por

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{\beta\sqrt{2\alpha m}} \left( \gamma m \sqrt{1-\rho^2} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+a)}{\Gamma(a)} \sqrt{b\rho} [(\mu-r) - b(1-2a)] \right) \\ V_3 &= \frac{-\rho\beta^{3/2}}{\sqrt{2\alpha a}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+a)}{\Gamma(a)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

## 2.4. Estimación del Modelo

La fórmula desarrollada en (2.28) incluye los términos  $V_1$  y  $V_2$  los cuales son funciones no triviales de los parámetros del modelo original presentado en (2.1). Se ha visto como es posible, en algunos casos particulares, calcular explícitamente la fórmula. Pero en general, la tarea no es para nada trivial. El objetivo de esta sección será el de mostrar la independencia del modelo con respecto a la función  $f$  y dar una forma eficiente para estimar el precio de una opción europea.

Primero se deberá calcular el precio aproximado  $P_0 + \tilde{P}_1$  dado por (2.28) en el caso de opciones call. Usando la notación en (1.23) el término  $P_0$  se denotará como  $C_{BS}(t, x; K, T, \bar{\sigma})$ , el cual tiene la expresión

$$C_{BS}(t, x) = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

donde

$$\begin{aligned} d_{1,2} &= \frac{\log(x/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ N(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy. \end{aligned}$$

A partir de esto es posible calcular **Delta**

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = N(d_1),$$

y **Gamma**,

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} = \frac{e^{-d_1^2/2}}{x\bar{\sigma}\sqrt{2\pi(T-t)}}.$$

Ahora, resulta necesario incluir una nueva "Griega" llamada **Epsilon** para calcular

el término fuente  $H$  (2.26) el cual quedaría,

$$\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} = \frac{e^{-d_1^2/2}}{x^2 \bar{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t)}} \left( 1 + \frac{d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} \right)$$

obteniendo

$$H(t, x) = \frac{e^{-d_1^2/2}}{\bar{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t)}} \left( V_2 - V_3 - \frac{V_3 d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} \right).$$

De la fórmula en (2.28), la corrección esta dada por

$$\tilde{P}_1 = -(T-t)H(t, x) = \frac{e^{-d_1^2/2}}{\bar{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t)}} \left( \frac{V_3 d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} + (V_3 - V_2) \sqrt{T-t} \right). \quad (2.34)$$

Se utilizará la volatilidad implicada para estimar las funciones  $V_1$  y  $V_2$ . Recuerde que la volatilidad implicada se define como aquel valor de  $I$  que hace que

$$C_{BS}(t, x; K, T; I) = C^{\text{observado}}(K, T). \quad (2.35)$$

Esta se puede expandir como  $I = \bar{\sigma} + \sqrt{\varepsilon} I_1 + \dots$  en el lado izquierdo y a la vez usar una aproximación de Taylor para el precio en el lado izquierdo.

$$C_{BS}(t, x; K, T; \bar{\sigma}) + \sqrt{\varepsilon} I_1 \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x, K, T; \bar{\sigma}) + \dots = P_0(t, x) + \tilde{P}_1(t, x) + \dots$$

Comparando términos se tiene que

$$\sqrt{\varepsilon} I_1 = \tilde{P}_1(t, x) \left[ \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x, K, T; \bar{\sigma}) \right]^{-1}.$$

Entonces la volatilidad implicada esta dada por

$$I = \bar{\sigma} + \tilde{P}_1(t, x) \left[ \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x, K, T; \bar{\sigma}) \right]^{-1} + O(1/\alpha), \quad (2.36)$$

donde la derivada de  $C_{BS}$  con respecto a la volatilidad es llamada **Vega**

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{x e^{-d_1/2} \sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.37)$$

Combinando (2.36) y (2.37) con la fórmula de corrección se obtiene,

$$I = \bar{\sigma} + \frac{V_3 d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} + \frac{V_3 - V_2}{\bar{\sigma}} + O(1/\alpha).$$

Reescribiendo esta ecuación convenientemente obteniéndose

$$I = \bar{\sigma} + \frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \left( r + \frac{3}{2} \bar{\sigma}^2 \right) - \frac{V_2}{\bar{\sigma}} - \frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \left( \frac{\log(K/x)}{T-t} \right) + O(1/\alpha),$$

la cual es una función afin a la razón de log-moneyness a la madurez (*log-moneyness-to-maturity ratio*)

$$I = a \left[ \frac{\log(K/x)}{T-t} \right] + b + O(1/\alpha), \quad (2.38)$$

con

$$a = -\frac{V_3}{\bar{\sigma}^3}$$

$$b = \bar{\sigma} + \frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \left( r + \frac{3}{2} \bar{\sigma}^2 \right) - \frac{V_2}{\bar{\sigma}}.$$

Para la calibración, una vez estimados  $a$  y  $b$  de la superficie de volatilidades implícadas,  $V_1$  y  $V_2$  están dados por

$$V_2 = \bar{\sigma} \left( (\bar{\sigma} - b) - a \left( r + \frac{3}{2} \bar{\sigma}^2 \right) \right)$$

$$V_3 = -a \bar{\sigma}^3. \quad (2.39)$$

En el próximo capítulo se comprobará la efectividad de esta fórmula con respecto a la fórmula exacta presentada en 2.31.

## Capítulo 3

# Implementación

### 3.1. Introducción

En este capítulo se implementarán las ideas discutidas en el Capítulo 2 para modelar el precio de una opción cuyo subyacente posee volatilidad estocástica. El requisito indispensable para el proceso de la volatilidad es establecer que posea reversión a la media. Para esto se definirá y calculará el variograma para decidir si un activo posee reversión a la media y cuál es la magnitud de esta.

En otra sección se implementará la fórmula del precio asintótico (2.28), ajustando para esto el *log-moneyness* a la volatilidad implicada tal y como se hizo en la sección 2.4. Luego se realizará la valoración del precio usando simulación Monte Carlo para el modelo Ornstein-Uhlenbeck. Por último, se analizará los resultados en cada modelo y las posibles discrepancias entre cada modelo.

Los datos utilizados corresponden a una aproximación de S&P 500 mediante el fondo SPY. Se han tomado los datos desde Enero de 1993 hasta Marzo 2010 generando 4321 observaciones diarias (en días hábiles). Las opciones seleccionadas fueron extraídas el 26 de Marzo del 2010, comprendiendo opciones con vencimiento desde unos días hasta el 2012. La fecha de valoración se mantendrá en el día 26 de Marzo.

Para simplificar los cálculos se escogió como tasa de descuento la tasa LIBOR a 6 meses. Tanto la volatilidad y el periodo hasta el vencimiento se han anualizado para mantener todos los parámetros en unidades de tiempo consistentes.

## 3.2. Valoración por el Método Asintótico

### 3.2.1. Análisis de Variograma

Denote  $X_n$  el precio diario del activo correspondiente al día  $t_n = n\Delta t$ . En este caso, dado que se tiene datos diarios se tomará  $\Delta t = 1/252$ . Basado en (2.1), es posible escribir formalmente una versión discreta de las fluctuaciones de la siguiente manera,

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \frac{\Delta X_t}{X_t} = f(Y_t) \frac{\Delta W_t}{\sqrt{\Delta t}} + \mu \sqrt{\Delta t}.$$

En general, la fluctuación normalizada de los datos se representa por

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n} - \mu \sqrt{\Delta t}, \quad (3.1)$$

donde,  $D_n$  es la realización observada del retorno del precio del activo. Dado que  $\mu$  es negligible, se podrían modelizar las fluctuaciones por

$$D_n = f(\tilde{Y}_n) \varepsilon_n, \quad (3.2)$$

donde  $\{\varepsilon_n\}$  es un secuencia de normales estándar i.i.d. y  $\{\tilde{Y}_n\}$  es un proceso OU discreto que representa  $\{Y_{t_n}\}$ . Se analiza el logaritmo del valor absoluto de  $D_n$ , esto para agregarle un efecto aditivo al ruido blanco,

$$L_n = \log |D_n| = \log f(\tilde{Y}_n) + \log |\varepsilon_n|.$$

Note que si  $f(y) = e^y$ , el primer término de la izquierda es un proceso OU, el cual tiene función de covarianza

$$\text{Cov} \{ \tilde{Y}_{n+j}, \tilde{Y}_n \} = \nu^2 e^{-j\alpha\Delta t},$$

la demostración de la versión continua de esta fórmula está en el siguiente lema.

**Lema 3.1.** Si  $Y_t$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck definido por la ecuación diferencial estocástica  $dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta dV_t$  donde  $V_t$  es un movimiento browniano, se tiene que sobre la distribución invariante para  $h \geq 0$

$$\text{Cov} \{ Y_{t+h}, Y_t \} = \nu^2 e^{-\alpha h}. \quad (3.3)$$

*Demostración.* Como se demostró en la sección 1.3 la distribución de  $Y_t|Y_{t_0}=y$  es

$$\mathcal{N}\left(m + (y - m)e^{-\alpha(t-t_0)}, \frac{\beta^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-t_0)}\right)\right).$$

Además, la solución de la ecuación diferencial es  $Y_t = m + (y - m)e^{-\alpha(t-t_0)} + \beta \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} dV_s$ . Usando las propiedades de la integral estocástica e isométrica de Itô se obtiene que,

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{Y_{t+h}, Y_t\} &= \beta^2 \text{Cov}\left\{\int_{t_0}^{t+h} e^{-\alpha(t+h-s)} dV_s, \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} dV_s\right\} \\ &= \beta^2 \text{Cov}\left\{\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t+h-s)} dV_s + \int_t^{t+h} e^{-\alpha(t+h-s)} dV_s, \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} dV_s\right\} \\ &= \beta^2 e^{-\alpha h} \int_{t_0}^t e^{-2\alpha(t-s)} ds \\ &= \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\alpha h} \left(1 - e^{-2\alpha(t-t_0)}\right). \end{aligned}$$

Basta tomar  $t_0 \rightarrow -\infty$  para que  $Y_t$  siga la distribución invariante  $\mathcal{N}(m, \beta^2/2\alpha)$  y obtener el resultado.  $\square$

El variograma de  $L_n$  se definirá como

$$V_j^N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (L_{n+j} - L_n)^2$$

con  $j$  el retraso y  $N$  el total de puntos. Si se define  $c^2 = \text{Var}\{\log|\varepsilon|\}$  el ruido blanco posee correlación nula  $\rho = 0$  y utilizando la estacionalidad del proceso  $L$ , es posible estimar el variograma definido anteriormente por,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(L_{n+j} - L_n)^2\} &= \mathbb{E}\{(L_j - L_0)^2\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\left(\tilde{Y}_j - \tilde{Y}_0\right)^2\right\} + \mathbb{E}\left\{(\log|\varepsilon_j| - \log|\varepsilon_0|)^2\right\} \\ &= 2\mathbb{E}\{\tilde{Y}^2\} - 2\mathbb{E}\{\tilde{Y}_j\tilde{Y}_0\} + 2\text{Var}\{\log|\varepsilon|\} \\ &\approx 2\nu_j^2(1 - e^{-j\alpha\Delta t}) + 2c^2. \end{aligned}$$

Se ha aplicado un filtro usando la mediana con una ventana de 10 puntos, esto para compensar el efecto del ruido  $\log|\varepsilon_n|$ . El gráfico se puede observar en la figura 3.1.

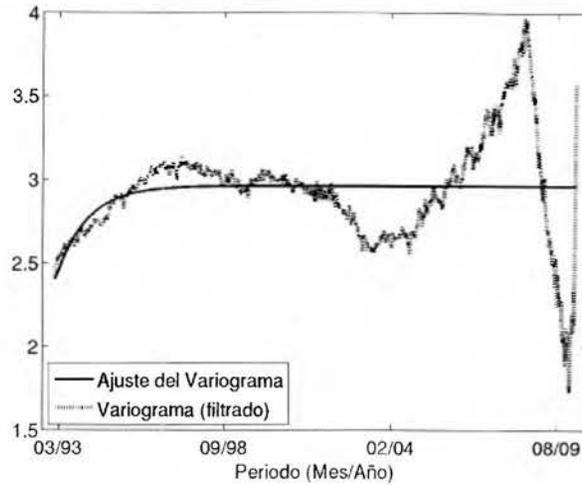


Figura 3.1: Ajuste del variograma con la función  $2\nu_j^2 (1 - e^{-j\alpha\Delta t}) + 2c^2$ . Aquí se tiene que  $c = 1.0950$ ,  $\nu_j = 0.53032$  y  $\alpha = 0.0039546$ .

El parámetro primordial en este ajuste es  $\alpha$ , ya que este proporciona la “fuerza” con la cual el proceso regresa a la media. Aún más,  $1/\alpha$  indica el tiempo característico de regresión a la media. Para el caso de SPY se tiene que  $\alpha = 0.0039546$  dando un tiempo característico de aproximadamente 252.87 días hábiles. Para mantener los parámetros en unidades de tiempo consistente se anualizará  $\alpha$  multiplicando por 252, dando como resultado  $\alpha = 0.99657$  que produce aproximadamente 1.0034 años de tiempo característico.

### 3.2.2. Precio Asintótico

En esta sección se realizará el ajuste del modelo de Black Scholes necesario, para esto se retomarán las ideas de la sección 2.4. El objetivo es encontrar un conjunto de parámetros consistentes para compararlos con el modelo de simulación de Monte Carlo en la sección 3.4.

Inicialmente se describirá un esquema del procedimiento para valorar una opción europea usando el modelo de volatilidad estocástica:

- i. Estimar  $\bar{\sigma}$ , la volatilidad efectiva histórica, a partir de los datos del activo.
- ii. Usar un análisis de variograma para establecer que el activo tiene regresión a la

media rápida.

- iii. Ajustar mediante la ecuación (2.38) el log-moneyness a la superficie de volatilidades implicadas  $I$ ,

$$I = a \left[ \frac{\log \left( \frac{\text{Precio Strike}}{\text{Precio del Activo}} \right)}{\text{Vencimiento}} \right] + b. \quad (3.4)$$

- iv. Utilizando los parámetros  $a$  y  $b$ , encontrar  $V_2$  y  $V_3$  a partir de las ecuaciones,

$$\begin{aligned} V_2 &= \bar{\sigma}(\bar{\sigma} - b) - a\left(r + \frac{3}{2}\bar{\sigma}^2\right) \\ V_3 &= -a\bar{\sigma}^3, \end{aligned}$$

donde la tasa de interés instantánea  $r$  se asumirá constante.

- v. El precio del contrato con fecha de madurez  $T$  y con función de pago  $h(X_T)$  es dado por  $P_0 + \tilde{P}_1$  donde

$$\tilde{P}_1 = -(T - t) \left( V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} \right),$$

y  $P_0$  es el precio de Black-Scholes calculado con volatilidad  $\bar{\sigma}$  e interés  $r$  constantes. Para el caso de un call europeo la fórmula se simplifica en (2.34).

*Observación 3.2.* La aproximación necesita que la volatilidad posea reversión a la media, pero no depende en la forma que ésta es modelada. Es decir, el modelo es totalmente independiente de una función particular  $\sigma_t = f(Y_t)$  o un proceso ergódico particular  $Y_t$ .

*Observación 3.3.* Esta estimación simplifica la complejidad del modelo ya que es sólo necesario calcular  $\bar{\sigma}$ ,  $a$  y  $b$  en vez de las seis cantidades necesarias:  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $m$ ,  $\beta$ ,  $\nu$  y  $\rho$ , para los modelos descritos en 2.31 y en 2.33. Se encontrará estimadores para estos parámetros en la siguiente sección cuando se realice una estimación por simulación Monte Carlo.

De ahora en adelante, se denotará el strike como  $K$ , al valor del activo como  $x$ , al periodo hasta el vencimiento expresado en años como  $T$  y a la volatilidad implicada  $I$ . Se han escogido las opciones que poseen mayor liquidez, es decir con  $|K/x - 1| \leq 3\%$ , esto para garantizar que los datos reflejen efectivamente la dinámica de estos (ver figura 3.2). Además, se ha filtrado sólo aquellas opciones que posean más de 180 días para el vencimiento, de este modo se garantiza que el modelo posea bastante tiempo para poder retornar a la media.

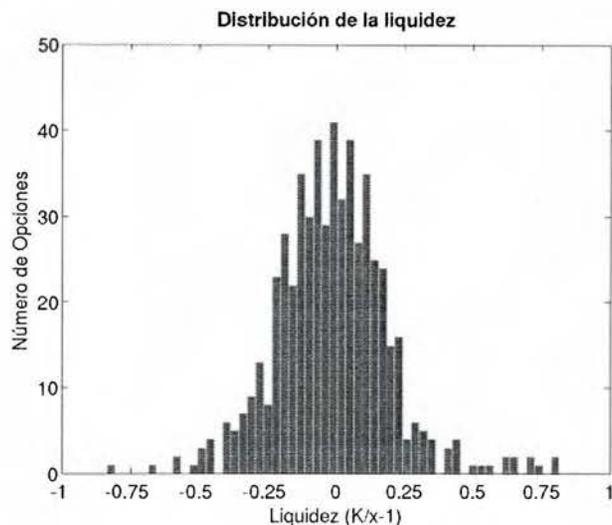


Figura 3.2: El histograma representa cuántas opciones están al porcentaje indicado de liquidez ó moneyness.

$\hat{\alpha}$	0.99695
$\hat{a}$	-0.095081
$\hat{b}$	0.16355
$\hat{\sigma}$	0.20133
$V_2$	0.0088536
$V_3$	0.00077587

Cuadro 3.1: Parámetros estimados para el modelos asintótico. Todos están anualizados tomando como un año 252 días hábiles.

La volatilidad implicada se calculó utilizando la función `blsprice` en Matlab, la cual resuelve numéricamente (2.35). En el cuadro 3.1 se resume la obtención de los parámetros mediante el ajuste por mínimos cuadrados de la función  $a [\log (K/x) / T] + b$  con respecto a la volatilidad  $I$ , se muestra además los valores de  $V_2$  y  $V_3$  en (2.39) utilizando una tasa de interés  $r = 0.4394$ .

El ajuste con la volatilidad implicada se encuentra en la Figura 3.3. La suma de los errores cuadráticos del ajuste ronda el 0.050937, lo que soporta aún más el buen ajuste del modelo con los datos. En la Figura 3.4 se puede apreciar la superficie estimada de la volatilidad estocástica con los valores de  $a$  y  $b$  calculados anteriormente. Cabe recalcar que este gráfico se calculó sin tomar ningún tipo de restricción con la liquidez y el plazo.

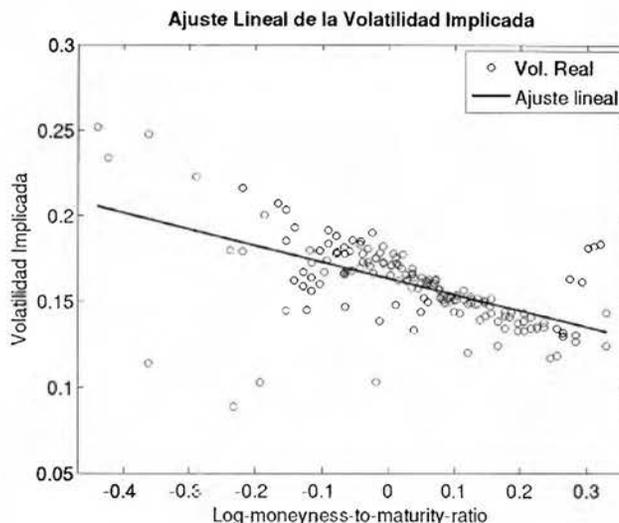


Figura 3.3: Ajuste de la función  $I = a [\log (\frac{K}{x}) / T] + b$  con respecto a la volatilidad implícada. Para el caso de SPY se obtiene que  $a = -0.095081$  y  $b = 0.16355$ .

### 3.3. Valoración por Simulación Monte Carlo

En esta sección se simularán los modelos descritos en (2.30), usando la forma particular de  $\sigma_t = e^{Y_t}$ . Como se indicó en la sección anterior, la parametrización se vuelve un poco más compleja, esencialmente porque se deben determinar las cantidades  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $m$ ,  $\beta$ ,  $\nu$  y  $\rho$  para este caso particular. Para esto se utilizará la teoría explicada en [14].

Se debe recordar que el modelo es

$$\begin{aligned}
 dX_t &= \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t, \\
 \sigma_t &= e^{Y_t}, \\
 dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta dV_t, \\
 dV_t &= \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde  $W_t$  y  $Z_t$  son movimientos brownianos independientes.

La valoración se hará en el mundo indiferente al riesgo  $Q$ , por lo tanto en la simulación se tomará que el rendimiento medio será  $\mu = r$ . Los otros parámetros dependen directamente de  $Y_t$  y por lo tanto, de la volatilidad la cual es un proceso *oculto*, por lo que es necesario un tratamiento especial. Se propone tres metodologías para la obtención del este proceso oculto y la estimación de las cantidades antes mencionadas. La primera

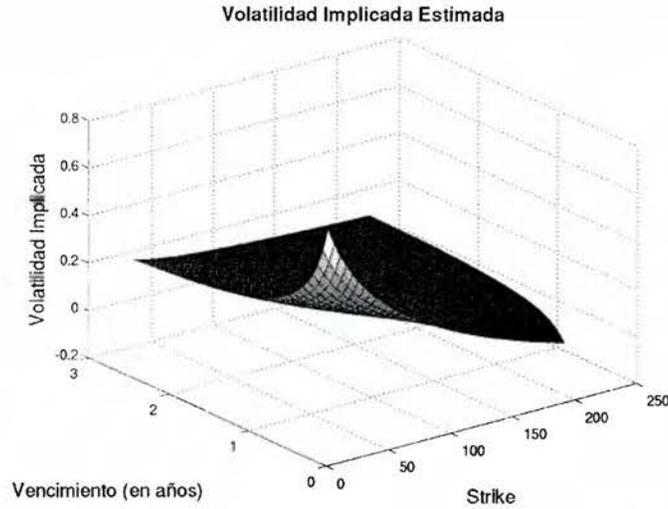


Figura 3.4: Superficie de volatilidad implicada calculada para diferentes plazos y strikes utilizando los datos del Cuadro 3.1.

es la generación de las volatilidades mediante una ventana móvil, la segunda será utilizar el activo VIX para aproximar la volatilidad, y la última es utilizar la variable  $D_n$ . Para efectos prácticos se llamarán de ahora en adelante a estas metodologías Simulación (VM), Simulación (VIX) y Simulación (D) respectivamente.

### 3.3.1. Cálculo de Parámetros

**Simulación (VM)** Se generará una serie de volatilidades con una ventana móvil de 30 días a partir del retorno logarítmico del precio, esta ventana fue escogida dado que se requiere que la volatilidad refleje un comportamiento estable pero reciente de la dinámica del activo. La forma en la cual se calculó esta serie fue de la siguiente manera

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{252} \sqrt{\frac{1}{29} \sum_{n=i}^{i+29} \left( \log \left( \frac{X_{n+1}}{X_n} \right) - \hat{\mu}_i^{30} \right)^2} \quad i = 1, \dots, N$$

donde

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{30} \sum_{n=i}^{i+29} \log \left( \frac{X_{n+1}}{X_n} \right).$$

Así por lo tanto  $\hat{Y}_i = \ln(\hat{\sigma}_i)$ . Asumiendo la distribución estacionaria de  $Y_t$  se tiene

que  $\mathbb{E}\{Y_t\} = m$  y  $\text{Var}\{Y_t\} = \nu^2 = \beta^2/2\alpha^1$ . Por lo tanto los estimadores estándar por el método de los momentos para  $m$ ,  $\nu^2$  y  $\beta$  serían

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{Y}_i \quad (3.6)$$

$$\hat{\nu}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\hat{Y}_i - \hat{m})^2 \quad (3.7)$$

$$\hat{\beta} = \sqrt{2\hat{\alpha}\hat{\nu}^2}. \quad (3.8)$$

**Simulación (VIX):** VIX es un activo que representa una medida de la volatilidad (en una base anual) esperada en el mercado para S&P 500 en el periodo de los próximos 30 días, para más detalles de su implementación se puede consultar [11]. Dado que SPY está indexado con S&P 500, se asumirá que VIX representa fielmente la volatilidad implicada de SPY. A partir de estas observaciones se puede definir la volatilidad estimada  $\hat{\sigma}$  como el valor diario de VIX y calcular  $\hat{Y} = \ln(\hat{\sigma})$ , por lo tanto las fórmulas (3.6), (3.7) y (3.8) son totalmente aplicables.

**Simulación (D):** Se usará la secuencia  $D$  definida en (3.1) y en (3.2) para estimar los parámetros requeridos.

Como  $D_n = e^{Y_n}\varepsilon_n$ ,  $\mathbb{E}\{D_n^2\} = \sigma^2 = \mathbb{E}\{e^{2Y_t}\}$ , entonces el estimador para  $\sigma$  será

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_n^2}.$$

Siguiendo con  $\nu^2$ , se tiene que, por un cálculo directo en el caso expOU  $\mathbb{E}\{D_n^4\} = 3\sigma^4 e^{\nu^2}$ , por lo tanto el estimador buscado es

$$\hat{\nu}^2 = \frac{1}{4} \log \left( \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_n^4 \right) / 3\hat{\sigma}^4 \right).$$

Ahora, para realizar el cálculo de  $\hat{m}$  es necesario aplicar la función generadora de momentos de  $Y_t$ .  $\sigma^2 = \mathbb{E}\{e^{2Y_t}\} = e^{2m+2\nu^2}$  obteniendo así que

$$\hat{m} = \log \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^2.$$

<sup>1</sup>Se debe tomar en cuenta que el valor de  $\alpha$  se calculó en la sección (3.2.1).

Metodología	$\hat{m}_t$	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\nu}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$
Simulación (VM)	-1.8891	0.11601	0.49969	0.70545	-0.11733
Simulación (VIX)	-1.2631	0.2552	0.37991	0.53635	-0.1638
Simulación (D)	-1.6409	0.20187	0.39636	0.55957	-0.1559

Cuadro 3.2: Parámetros utilizados para las simulaciones por metodología. En este caso  $\alpha = 0.99695$  se mantiene invariante para todas las simulaciones.

Por último, el estimador  $\hat{\beta}$  se puede calcular de la misma forma que en (3.8).

**Estimación de  $\rho$ :** Para calcular la correlación entre  $W_t$  y  $Z_t$  se usará la fórmula de la volatilidad implícita dada en la pág. 15 de [14],

$$I = \bar{\sigma} + (2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho}{\nu} \left( e^{3\nu^2/2} - e^{-\nu^2/2} \right) \left[ \frac{\log(K/x)}{T-t} - \mu + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \right] - 2\gamma\sqrt{1 - \rho^2\nu\bar{\sigma}} \right),$$

que junto con (2.38) se obtiene,

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{a}\nu\sqrt{2\hat{\alpha}}}{e^{3\hat{\nu}^2/2} - e^{-\hat{\nu}^2/2}} \quad (3.9)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\sigma} - \hat{b} - \hat{a}(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)}{\hat{\nu}\hat{\sigma}} \sqrt{\frac{\hat{\alpha}}{2(1 - \hat{\rho})}}. \quad (3.10)$$

En el Cuadro 3.2 se presenta una tabla con los parámetros utilizados en la simulación en cada modelo. Para efectos de la simulación  $\hat{\sigma}_0$  representa el valor inicial de la volatilidad en el momento de la valoración. beta:

### 3.3.2. Esquema de la Simulación

Una vez calculados los parámetros la simulación que se ejecutó utilizando 3000 escenarios. Se utilizó la función normrnd para generar  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  números normales estándar independientes. Siguiendo el modelo en (3.5), un esquema de la simulación sería:

- i. Defina un valor inicial  $Y_0 = y$  y  $X_0 = x$ . Se utilizará  $Y_0 = \log(\hat{\sigma}_0)$  según los valores del Cuadro 3.2 y  $X_0 = 117.63$
- ii. Generar  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  variables aleatorias normales estándar independientes y calcular  $\zeta_3 = \hat{\rho}\zeta_1 + \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}\zeta_2$ .
- iii. Genere  $Y_n$  y  $X_n$  desde  $n = 1, \dots, T$  donde  $T$  es la cantidad de días de vencimiento

usando las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}Y_n &= Y_{n-1} + \hat{\alpha}(\hat{m} - Y_{n-1})\Delta t + \hat{\beta}\sqrt{\Delta t}\zeta_3, \\ \hat{\sigma}_n &= e^{Y_n}, \\ X_n &= X_{n-1} + rX_{n-1}\Delta t + \hat{\sigma}_nX_{n-1}\zeta_1.\end{aligned}$$

- iv. Repita este procedimiento la cantidad de escenarios requerida. En este caso se tomarán 3000 escenarios.
- v. Por último, el precio de la opción sería

$$\mathbb{E}^Q \left\{ \max(X_T - K, 0) e^{-r \frac{T}{252}} \right\}.$$

## Capítulo 4

# Conclusiones

Este capítulo estará dedicado al estudio de los resultados de las secciones 3.2 y 3.3, realizando un análisis de su comportamiento y una comparación la valoración del mundo real. Se escogió un conjunto amplio de opciones a valorar y comprobar la eficacia de los modelos. Los valores completos de estos resultados se pueden encontrar en el Apéndice A.

Una observación importante es que la parametrización de los modelos es muy sensible al tiempo, es decir, tanto  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$  deben estar en las mismas unidades de tiempo. En esta tesis se utilizó datos diarios sobre un año de 252 días hábiles (según los mercados estadounidenses), pero en la literatura se encuentran valoraciones con datos intradía sobre periodos de unas semanas para los cuales se requiere que  $\alpha$  sea grande (reversion a la media rápida). Sin embargo, no se pudo conseguir tal información para poder valorar un activo sobre esta escala, aunque toda la metodología propuesta es totalmente válida para tal propósito.

En una primera instancia la Figura 4.2 revela cómo la corrección del precio de Black Scholes tiene un comportamiento un poco irregular donde se aprecia que conforme se aumenta el *strike* y el plazo al vencimiento se debe aumentar la corrección, donde predomina un mínimo alrededor del eje  $K = 150$ , aumentando así la corrección sobre plazos cortos con strikes altos.

Se comparó el precio generado por el modelo asintótico y por simulación en la Figura (4.3), la interpretación de esta figura es que entre más cercano a la función identidad, el modelo ajusta mejor los precios reales. Se nota claramente que el ajuste es bastante bueno pero aún así posee varias discrepancias importantes. Este efecto es especialmente por el aumento del plazo del vencimiento y del *strike* debido al faltante de opciones

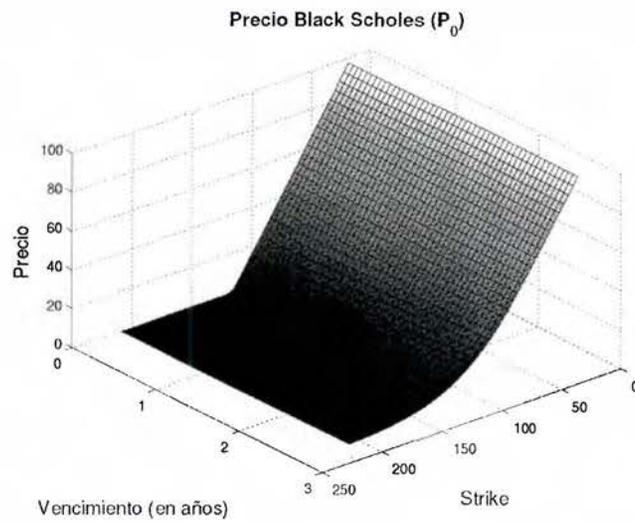


Figura 4.1: Precio de Black Scholes para un call europeo, estimado para diferentes plazos y strikes.

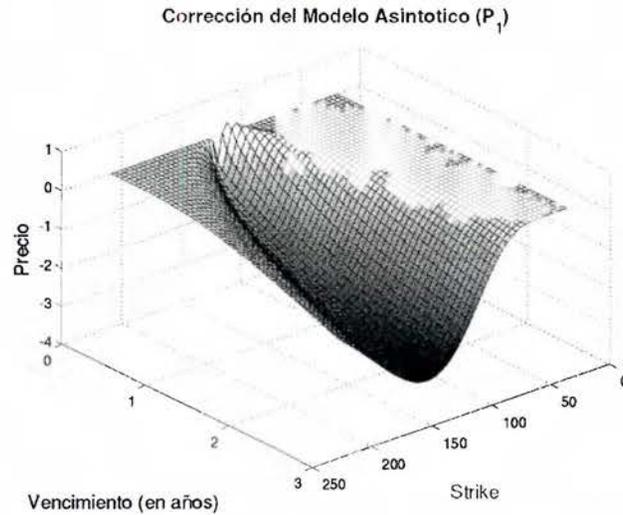


Figura 4.2: Corrección del modelo de Black Scholes para un call europeo estimado para diferentes plazos y strikes. El ajuste se calculó utilizando la fórmula (2.34) y los parámetros del Cuadro 3.1.

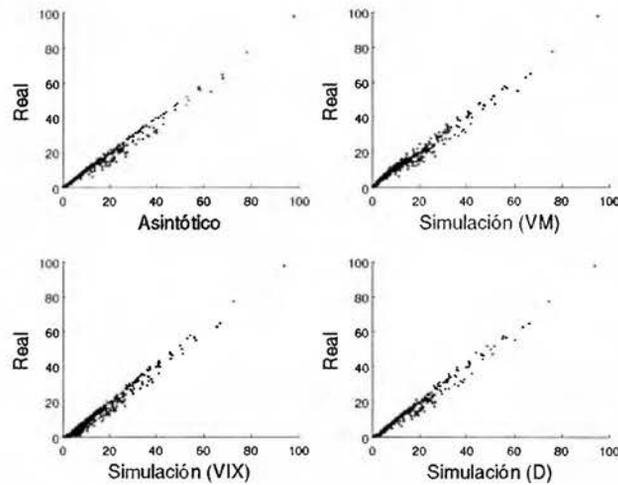


Figura 4.3: Comparación de los precios reales versus los precios estimados por cada modelo.

a partir de los 300 días. Es interesante ver en el Cuadro 4.1 las sumas de los errores cuadrados del ajuste, el cual claramente los métodos Simulación (D) y Simulación (VM) proyectaron mejor los precios reales, aunque seguido de cerca por el método asintótico. Es claro también que utilizar VIX como estimador de la volatilidad no genera mayor ganancia en la precisión y de hecho utilizar una ventana móvil parece ser un camino más eficiente.

Metodología	SSE
Simulación (VM)	1852.4
Simulación (D)	1914.4
Asintótico	2029.7
Simulación (VIX)	3457.1

Cuadro 4.1: Sumas de errores al cuadrado con respecto a los datos reales ordenadas de menor a mayor.

Nótese sin embargo, en la Figura 4.4 que el modelo asintótico se ajusta muy bien con respecto a los modelos simulados, lo cual soporta fuertemente la buena estimación de los parámetros generados en los Cuadros 3.1 y 3.2. De hecho debe aclararse que aunque la estimación de los parámetros se hizo tomando en cuenta opciones con un vencimiento superior a los 180 días, el ajuste para plazo menores es bastante estable, lo cual nos

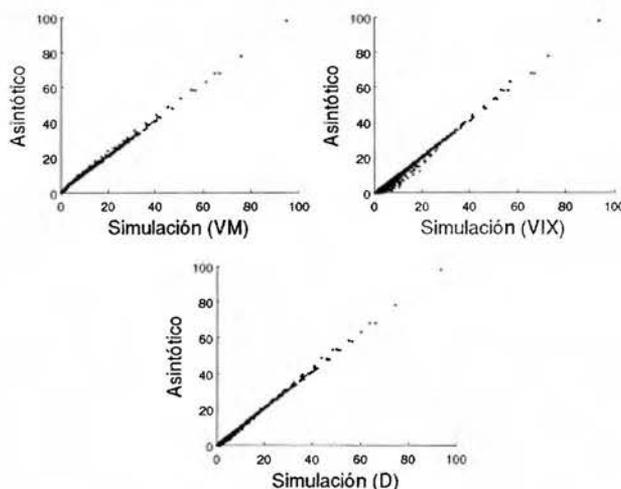


Figura 4.4: Comparación de los precios por el método asintótico versus los precios estimados por los modelos de simulación.

Metodología	SSE
Simulación (D)	725.53
Simulación (VM)	745.79
Simulación (VIX)	2123.8

Cuadro 4.2: Sumas de errores al cuadrado con respecto al precio asintótico ordenadas de menor a mayor.

permite concluir que lo necesario para el modelo de volatilidad estocástica es utilizar opciones y plazos que permitan que el proceso oculto  $Y_t$  tenga suficiente tiempo para retornar a la media. Nuevamente se calculó las sumas de los errores al cuadrado pero esta vez con respecto al precio asintótico, en este cálculo se confirma que el mejor ajuste lo da la Simulación (D) y que la Simulación (VM) posee mejores características de estimación que Simulación (VIX).

Con base en la evidencia empírica presentada aquí concluimos la volatilidad está bien modelada como un proceso de reversión a la media con una tasa de reversión a la media pequeña (reversión lenta). Aunque en el modelo no proporciona una aproximación tan buena como por ejemplo Simulación (D) o Simulación (VM), la principal ventaja del modelo asintótico es su baja demanda computacional para estimar el precio y otros parámetros de mercado la cual observamos en el Cuadro 4.3. Por ejemplo, mediante

esta metodología, la volatilidad implicada se puede calcular establemente mediante una función lineal del log-moneyness-to-maturity-ratio  $\log(K/x)/(T-t)$ .

Metodología	Segundos
Asintótico	5.67
Simulación (VM)	231.37
Simulación (VIX)	235.93
Simulación (D)	235.96

Cuadro 4.3: Tiempo computacional calculado en Matlab para 64 bits utilizando un procesador Intel Core 2 Duo (T5800).

El método proporciona estimadores estables de la prima por riesgo  $\gamma$ , la correlación  $\rho$  y la tasa de reversión a la media  $\alpha$ , los cuales en general son difíciles de calcular, pero no necesarios para la teoría asintótica.

Debido a la restricción de tiempo no se pudo comparar este procedimiento con otros activos, especialmente para comparar el ajuste de la función  $I = a \log(K/x)/(T-t) + b$ , la cual es la base de la valoración. Otro punto importante que queda para un futuro trabajo es realizar la valoración con datos generados con parámetros ya establecidos y comparar nuevamente los resultados. Sería interesante explorar el ajuste en el caso de CIR (ver sección 2.3.2), el cual se puede demostrar que la correlación mantiene un decaimiento exponencial al igual que el caso OU, en otras palabras que

$$\text{Cov} \{f(Y_{t+h}), f(Y_t)\} \approx \nu_f^2 e^{-\alpha h}$$

con  $\nu_f^2 = \text{Var} \{\log f(Y_t)\}$ . Por lo tanto, es posible demostrar fórmulas similares para los otros estimadores paramétricos.

Es posible extender la metodología presentada aquí para valorar otro tipo de opciones como lo son las americanas, asiáticas, binarias y barrera; ya que sería necesario calcular las formulas de valoración en cada caso pero el ajuste de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $\bar{\sigma}$  se mantendría invariante. Incluso queda por aplicar esta metodología a la valoración de bonos mediante modelos de tasa corta (como por ejemplo Vasicek) los cuales pretenderían calcular la corrección que genera el proceso con volatilidad estocástica de reversión a la media.

## Apéndice A

### Valoraciones en cada método

Opciones valoradas según cada modelo. Aquí **T** significa el tiempo hasta el vencimiento contado en días, **K** es el strike. Las valoraciones son **Asint.** para el modelo asintótico, **VM**, **VIX** y **D** son las simulaciones según la metodología ventana móvil, **VIX** ó realizaciones observadas, respectivamente.

T	K	Asint	VM	VIX	D	Real	T	K	Asint	VM	VIX	D	Real
3	102	15.64	15.61	15.60	15.59	15.06	122	124	2.61	1.81	4.72	3.89	2.72
3	103	14.64	14.60	14.53	14.64	14.24	122	124	2.61	1.83	4.80	4.12	2.27
3	104	13.64	13.60	13.60	13.60	13.06	122	125	2.27	1.55	4.51	3.65	2.46
3	105	12.64	12.62	12.62	12.62	11.85	122	125	2.27	1.46	4.44	3.55	2.56
3	107	10.64	10.62	10.63	10.66	9.92	122	126	1.95	1.25	4.25	3.29	2.06
3	108	9.64	9.68	9.60	9.60	9.31	122	126	1.95	1.35	3.95	3.27	2.10
3	109	8.64	8.63	8.61	8.59	8.32	122	127	1.66	1.14	3.69	3.16	1.74
3	110	7.66	7.61	7.59	7.58	7.32	122	127	1.66	1.16	3.91	3.03	1.91
3	111	6.70	6.65	6.59	6.58	6.90	122	128	1.40	0.99	3.68	2.64	1.49
3	112	5.79	5.65	5.65	5.61	4.80	122	128	1.40	0.95	3.56	2.79	1.58
3	113	4.94	4.64	4.53	4.62	4.27	122	129	1.16	0.83	3.15	2.54	1.32
3	114	4.11	3.60	3.74	3.69	3.49	122	129	1.16	0.87	3.40	2.55	1.21
3	115	3.26	2.65	2.77	2.68	1.99	122	130	0.94	0.78	3.02	2.42	1.11
3	116	2.35	1.69	1.91	1.89	1.34	122	130	0.94	0.82	3.02	2.39	1.20
3	117	1.40	0.87	1.24	1.19	0.65	122	131	0.74	0.61	2.80	2.17	0.87
3	118	0.54	0.32	0.74	0.67	0.33	122	131	0.74	0.76	2.69	2.04	0.57
3	119	0.00	0.07	0.40	0.34	0.12	122	132	0.56	0.58	2.65	1.69	0.76
3	120	0.00	0.01	0.17	0.13	0.05	122	132	0.56	0.49	2.81	1.89	0.68
3	121	0.00	0.00	0.06	0.05	0.02	122	133	0.40	0.39	2.43	1.79	0.61
3	122	0.00	0.00	0.03	0.02	0.02	122	133	0.40	0.43	2.63	1.86	0.56
3	123	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	122	134	0.27	0.34	2.32	1.72	0.43
3	124	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	122	134	0.27	0.38	2.48	1.55	0.54
3	125	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	122	135	0.14	0.44	2.11	1.48	0.42
3	126	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	122	135	0.14	0.29	2.09	1.45	0.48
3	127	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	122	136	0.04	0.27	1.96	1.29	0.76
3	128	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	122	137	0.00	0.24	1.92	1.24	0.20
3	129	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	122	137	0.00	0.27	1.77	1.16	0.16
3	130	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	122	138	0.00	0.16	1.62	1.09	0.21
15	90	27.65	27.63	27.76	27.40	27.00	122	139	0.00	0.17	1.28	1.04	0.17
15	92	25.65	25.66	25.67	25.59	24.15	122	140	0.00	0.15	1.37	0.93	0.12
15	96	21.66	21.60	21.77	21.42	20.46	122	142	0.00	0.07	1.39	0.71	0.03
15	97	20.66	20.56	20.77	20.50	18.99	122	144	0.00	0.09	0.95	0.68	0.05
15	100	17.67	17.68	17.55	17.74	17.04	122	145	0.00	0.06	0.86	0.50	0.05
15	101	16.68	16.56	16.49	16.35	16.08	122	150	0.00	0.03	0.60	0.35	0.07
15	102	15.69	15.67	15.46	15.41	14.06	122	155	0.00	0.00	0.32	0.22	0.09
15	103	14.71	14.63	14.72	14.59	13.41	122	160	0.00	0.01	0.33	0.14	0.05

15	104	13.74	13.42	13.51	13.66	13.63	186	50	67.79	67.03	66.12	66.73	64.52
15	105	12.78	12.56	12.54	12.39	12.22	186	60	57.83	56.21	55.56	56.00	56.78
15	106	11.84	11.54	11.50	11.63	10.95	186	65	52.85	51.58	52.09	51.13	52.10
15	107	10.91	10.62	10.46	10.70	10.10	186	65	52.85	51.98	51.64	50.92	47.50
15	108	9.99	9.59	9.74	9.66	9.12	186	70	47.87	46.89	46.51	46.33	46.71
15	109	9.08	8.67	8.88	8.76	8.41	186	70	47.87	46.69	46.28	46.26	44.30
15	110	8.18	7.57	7.85	7.59	6.94	186	75	42.92	42.04	41.46	41.19	42.00
15	111	7.28	6.57	6.98	6.97	5.96	186	75	42.92	41.88	41.01	41.62	35.95
15	112	6.40	5.69	6.12	6.09	5.62	186	76	41.93	41.27	40.67	40.89	40.96
15	113	5.52	4.82	5.28	5.06	5.01	186	77	40.94	39.94	39.40	39.32	39.96
15	114	4.67	3.82	4.62	4.29	3.62	186	78	39.96	38.95	38.20	38.66	32.60
15	115	3.83	2.99	3.92	3.77	2.81	186	78	39.96	38.92	38.72	38.44	31.05
15	116	3.05	2.27	3.34	3.20	2.10	186	79	38.97	38.33	37.07	37.59	31.70
15	117	2.31	1.56	2.80	2.55	1.61	186	80	37.99	37.67	36.31	36.23	37.85
15	118	1.65	1.10	2.32	1.97	1.13	186	80	37.99	37.29	36.21	36.47	37.93
15	119	1.08	0.74	1.80	1.51	0.74	186	81	37.01	36.00	35.34	35.69	34.37
15	120	0.60	0.44	1.46	1.16	0.50	186	84	34.09	32.71	32.35	32.72	27.31
15	121	0.22	0.25	1.09	0.91	0.31	186	85	33.12	32.24	32.28	31.68	33.51
15	122	0.00	0.15	0.80	0.72	0.21	186	85	33.12	31.69	32.03	31.99	31.87
15	123	0.00	0.08	0.65	0.48	0.14	186	86	32.15	30.68	30.60	31.23	32.40
15	124	0.00	0.04	0.58	0.37	0.06	186	86	32.15	30.90	29.97	30.85	27.53
15	125	0.00	0.02	0.33	0.27	0.04	186	87	31.19	29.03	29.98	29.52	24.55
15	126	0.00	0.01	0.25	0.19	0.05	186	88	30.24	28.99	30.03	29.20	29.20
15	127	0.00	0.01	0.17	0.12	0.04	186	90	28.33	27.14	26.84	26.82	28.97
15	128	0.00	0.00	0.13	0.09	0.03	186	90	28.33	27.48	27.99	27.10	27.93
15	129	0.00	0.00	0.07	0.04	0.02	186	91	27.39	26.30	25.32	26.45	24.20
15	130	0.00	0.00	0.06	0.03	0.02	186	91	27.39	26.44	26.93	27.38	20.10
15	131	0.00	0.00	0.04	0.02	0.03	186	92	26.45	25.59	26.01	25.75	19.39
15	132	0.00	0.00	0.02	0.01	0.02	186	93	25.52	24.49	25.41	24.85	20.49
15	133	0.00	0.00	0.02	0.01	0.02	186	93	25.52	24.02	24.75	25.23	20.45
15	134	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	186	94	24.60	23.58	24.01	23.85	20.26
15	136	0.00	0.00	0.01	0.00	0.02	186	94	24.60	23.58	24.60	23.22	22.15
15	137	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	186	95	23.68	22.31	22.32	23.04	24.23
15	146	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	186	95	23.68	22.20	23.56	23.28	19.45
40	100	17.90	17.51	17.48	17.14	18.10	186	96	22.78	21.09	23.05	22.35	14.35
40	101	16.94	16.55	16.88	16.51	14.84	186	96	22.78	21.29	22.40	22.76	21.75
40	102	16.00	15.51	15.75	15.33	16.29	186	97	21.88	20.86	22.37	20.69	16.60
40	103	15.06	14.44	14.72	14.28	15.33	186	97	21.88	20.57	21.98	21.10	15.70
40	104	14.13	13.59	13.97	13.65	13.38	186	98	20.99	19.62	20.57	20.03	14.65
40	105	13.21	12.55	13.15	12.97	13.29	186	98	20.99	19.49	21.19	20.68	15.20
40	106	12.29	11.80	11.97	11.90	11.56	186	99	20.11	18.76	20.75	18.84	18.98
40	107	11.39	10.62	11.17	11.14	10.96	186	99	20.11	18.76	19.79	19.52	14.35
40	108	10.49	9.58	10.20	9.94	10.31	186	100	19.25	17.85	19.54	18.56	20.00
40	109	9.61	8.67	9.22	9.68	9.54	186	100	19.25	17.92	19.28	18.65	19.15
40	110	8.75	7.84	9.05	8.71	8.31	186	101	18.39	17.26	19.60	18.23	12.18
40	111	7.90	6.95	7.95	7.97	7.95	186	101	18.39	17.22	18.76	18.18	13.40
40	112	7.08	6.00	7.46	6.92	6.67	186	102	17.55	15.88	17.15	17.52	15.63
40	113	6.29	5.18	6.75	6.18	6.09	186	102	17.55	15.68	18.85	17.46	16.16
40	114	5.53	4.33	6.32	5.58	5.33	186	103	16.73	14.79	18.19	16.20	10.24
40	115	4.80	3.59	5.23	5.07	4.05	186	103	16.73	15.05	17.12	15.88	11.79
40	116	4.12	3.14	4.80	4.43	3.42	186	104	15.92	13.94	17.41	15.83	16.72
40	117	3.48	2.53	4.29	3.91	2.96	186	104	15.92	14.47	17.04	15.56	12.62
40	118	2.88	2.01	3.75	3.51	2.37	186	105	15.12	13.61	16.21	14.67	15.89
40	119	2.34	1.50	3.39	3.01	1.91	186	105	15.12	13.55	15.80	14.40	14.25
40	120	1.85	1.19	3.20	2.47	1.53	186	106	14.35	12.76	15.61	14.45	13.94
40	121	1.42	0.92	2.64	2.19	1.23	186	106	14.35	12.47	14.73	13.67	14.86
40	122	1.04	0.76	2.21	1.91	0.89	186	107	13.59	11.59	13.89	13.53	13.35
40	123	0.71	0.51	2.05	1.73	0.73	186	107	13.59	11.93	15.01	13.19	13.09
40	124	0.43	0.37	1.59	1.53	0.52	186	108	12.85	11.21	14.17	13.27	12.28
40	125	0.20	0.25	1.43	1.13	0.36	186	108	12.85	10.82	13.91	13.00	12.52
40	126	0.01	0.18	1.17	0.90	0.26	186	109	12.12	10.57	13.95	12.49	12.35
40	127	0.00	0.12	1.02	0.82	0.19	186	109	12.12	10.49	13.39	12.34	11.70
40	128	0.00	0.08	0.97	0.74	0.15	186	110	11.42	9.36	13.06	12.03	12.11
40	129	0.00	0.07	0.75	0.55	0.10	186	110	11.42	9.72	12.84	11.99	11.85
40	130	0.00	0.05	0.72	0.49	0.08	186	111	10.74	8.95	12.52	11.20	11.00
40	131	0.00	0.02	0.55	0.41	0.07	186	111	10.74	9.13	12.48	11.27	11.38
40	132	0.00	0.02	0.41	0.28	0.04	186	112	10.08	8.23	12.24	10.76	9.96
40	133	0.00	0.01	0.42	0.28	0.03	186	112	10.08	8.40	11.47	10.55	10.52

40	134	0.00	0.01	0.29	0.19	0.03	186	113	9.44	7.63	11.36	9.74	10.09
40	135	0.00	0.00	0.25	0.12	0.03	186	113	9.44	7.80	11.90	10.13	9.43
40	136	0.00	0.01	0.26	0.10	0.03	186	114	8.82	7.16	11.15	9.55	9.43
40	137	0.00	0.00	0.14	0.08	0.03	186	114	8.82	7.25	10.68	9.58	8.91
40	139	0.00	0.00	0.10	0.06	0.03	186	115	8.23	6.64	10.78	9.01	8.79
66	70	47.71	47.30	46.74	47.33	46.50	186	115	8.23	6.36	9.96	8.88	8.49
66	77	40.72	40.46	40.00	40.17	39.59	186	116	7.65	6.02	9.63	9.27	8.05
66	81	36.73	36.23	35.97	36.33	29.02	186	116	7.65	6.02	10.49	8.77	8.06
66	82	35.73	35.36	34.88	35.09	35.04	186	117	7.10	5.49	9.22	8.14	7.43
66	84	33.74	33.21	33.26	33.26	34.01	186	117	7.10	5.64	8.92	7.84	7.46
66	85	32.74	32.31	32.85	32.06	31.78	186	118	6.58	4.89	8.51	7.21	6.89
66	87	30.76	30.52	30.33	30.36	30.89	186	118	6.58	4.96	8.63	7.56	6.91
66	89	28.78	28.50	28.42	28.66	28.58	186	119	6.08	4.59	8.46	7.24	6.10
66	90	27.79	27.30	27.36	27.06	27.45	186	119	6.08	4.34	8.86	7.20	6.44
66	91	26.81	26.56	26.36	26.19	17.46	186	120	5.60	4.20	8.18	6.99	5.78
66	92	25.83	25.49	24.96	24.69	22.73	186	120	5.60	4.08	8.05	6.48	5.65
66	93	24.85	24.32	24.05	23.70	22.07	186	121	5.14	3.78	7.99	6.16	5.32
66	94	23.88	23.47	22.95	23.05	20.64	186	121	5.14	3.63	7.47	6.65	4.08
66	94	23.88	23.42	23.46	23.27	20.50	186	122	4.70	3.29	7.52	5.97	4.80
66	95	22.91	22.55	22.66	22.26	22.50	186	122	4.70	3.49	7.75	6.31	4.11
66	95	22.91	22.55	22.29	22.05	22.95	186	123	4.29	3.17	6.84	5.77	3.98
66	96	21.95	21.52	21.76	21.05	20.23	186	123	4.29	2.96	7.05	5.57	4.44
66	96	21.95	21.45	21.24	21.62	17.25	186	124	3.90	2.98	6.51	5.10	4.14
66	97	20.99	20.48	20.49	20.61	20.32	186	124	3.90	2.74	6.44	5.01	4.17
66	97	20.99	20.36	20.29	20.23	15.40	186	125	3.54	2.43	6.42	4.65	3.49
66	98	20.03	19.41	19.67	19.38	19.09	186	125	3.54	2.49	6.22	4.83	3.38
66	98	20.03	19.51	19.99	19.35	12.95	186	126	3.19	2.32	6.12	4.58	3.05
66	99	19.09	18.46	19.02	18.79	18.17	186	126	3.19	2.32	5.81	4.56	3.20
66	99	19.09	18.59	18.25	18.55	14.30	186	127	2.87	2.00	5.35	4.33	2.91
66	100	18.15	17.55	18.00	17.54	17.97	186	127	2.87	2.02	5.80	4.43	2.83
66	100	18.15	17.56	17.81	17.56	17.32	186	128	2.56	1.93	5.43	3.86	2.57
66	101	17.21	16.55	16.90	16.88	16.52	186	128	2.56	1.84	5.44	4.23	2.76
66	101	17.21	16.45	17.07	16.76	14.50	186	129	2.28	1.64	5.66	3.74	2.34
66	102	16.28	15.36	16.26	16.01	16.44	186	129	2.28	1.68	5.11	3.66	2.40
66	102	16.28	15.55	16.04	15.57	14.15	186	130	2.01	1.36	4.73	3.39	2.05
66	103	15.36	14.26	15.04	15.06	15.10	186	130	2.01	1.47	5.05	3.53	2.14
66	103	15.36	14.72	15.09	15.06	13.55	186	131	1.77	1.25	4.76	3.27	1.87
66	104	14.46	13.80	13.95	13.98	14.60	186	131	1.77	1.24	4.20	3.49	1.90
66	104	14.46	13.55	14.44	13.84	13.85	186	132	1.54	1.16	4.39	2.84	1.50
66	105	13.56	12.59	13.66	12.98	12.84	186	132	1.54	1.08	4.09	3.01	1.76
66	105	13.56	12.37	13.41	13.42	10.97	186	133	1.33	0.94	4.15	2.96	1.22
66	106	12.67	11.66	12.69	12.38	12.79	186	133	1.33	0.90	3.79	2.82	0.88
66	106	12.67	11.60	12.79	12.34	11.82	186	134	1.13	0.98	3.78	3.10	1.16
66	107	11.80	10.99	12.03	11.70	11.64	186	134	1.13	0.87	4.04	2.86	0.99
66	107	11.80	10.81	11.88	11.77	10.95	186	135	0.95	0.79	4.11	2.88	1.08
66	108	10.94	9.75	10.88	10.57	11.04	186	135	0.95	0.78	3.47	2.67	1.08
66	108	10.94	9.94	11.35	10.90	10.62	186	136	0.79	0.87	3.38	2.26	0.74
66	109	10.11	9.19	10.65	10.13	9.86	186	136	0.79	0.68	3.06	2.27	0.83
66	109	10.11	8.61	10.37	9.90	10.40	186	137	0.64	0.64	3.28	2.18	0.65
66	110	9.29	8.10	9.80	8.73	9.19	186	137	0.64	0.64	3.05	1.86	0.85
66	110	9.29	8.14	9.57	9.21	8.79	186	138	0.50	0.70	3.27	1.94	0.59
66	111	8.50	7.24	9.14	8.44	8.60	186	138	0.50	0.54	3.40	1.85	0.71
66	111	8.50	7.29	9.14	8.56	7.77	186	139	0.38	0.53	2.86	2.03	0.54
66	112	7.73	6.46	8.47	8.14	7.75	186	139	0.38	0.69	2.73	1.70	0.52
66	112	7.73	6.63	8.44	7.68	7.30	186	140	0.27	0.41	3.06	1.93	0.50
66	113	6.99	5.49	7.58	6.94	6.54	186	140	0.27	0.48	2.62	1.82	0.46
66	113	6.99	5.90	7.85	7.63	5.93	186	141	0.17	0.38	2.44	1.47	0.20
66	114	6.28	5.00	7.24	6.44	5.98	186	142	0.08	0.33	2.40	1.43	0.18
66	114	6.28	5.06	7.33	6.49	6.31	186	142	0.08	0.36	2.25	1.33	0.34
66	115	5.60	4.23	6.71	6.13	5.58	186	143	0.00	0.28	2.24	1.41	0.27
66	115	5.60	4.30	6.42	6.18	5.74	186	143	0.00	0.34	2.20	1.40	0.25
66	116	4.96	3.66	6.44	5.65	4.64	186	144	0.00	0.29	1.83	1.36	0.64
66	116	4.96	3.78	5.82	5.45	5.12	186	145	0.00	0.28	2.09	1.25	0.19
66	117	4.35	3.21	5.61	5.31	4.04	186	145	0.00	0.28	2.08	1.32	0.16
66	117	4.35	3.29	5.35	5.02	4.58	186	146	0.00	0.33	1.80	1.28	0.49
66	118	3.79	2.69	5.06	4.22	3.17	186	147	0.00	0.14	1.59	1.02	0.73
66	118	3.79	2.74	5.14	4.44	3.71	186	148	0.00	0.19	1.51	0.91	0.68
66	119	3.26	2.29	4.98	3.99	2.90	186	149	0.00	0.21	1.63	0.94	0.64

66	119	3.26	2.22	4.48	4.05	3.17	186	150	0.00	0.26	1.47	0.79	0.06
66	120	2.77	1.84	4.13	3.78	2.33	186	150	0.00	0.17	1.38	0.95	0.16
66	120	2.77	1.75	4.31	3.84	2.88	186	155	0.00	0.11	0.94	0.60	0.05
66	121	2.32	1.52	3.88	3.46	2.07	186	160	0.00	0.06	0.82	0.37	0.01
66	122	1.92	1.31	3.52	2.89	1.64	186	165	0.00	0.02	0.80	0.34	0.02
66	123	1.55	1.00	3.20	2.60	1.41	186	170	0.00	0.03	0.57	0.23	0.02
66	124	1.22	0.81	3.00	2.22	1.17	186	190	0.00	0.02	0.13	0.06	0.01
66	125	0.93	0.64	2.47	2.13	0.86	186	195	0.00	0.00	0.11	0.05	0.03
66	126	0.67	0.51	2.16	1.90	0.63	186	200	0.00	0.00	0.05	0.03	0.01
66	127	0.45	0.38	2.23	1.56	0.56	186	210	0.00	0.00	0.04	0.04	0.02
66	128	0.26	0.32	1.80	1.57	0.34	248	93	25.90	24.55	25.87	25.05	25.81
66	129	0.10	0.26	1.68	1.14	0.31	248	105	15.88	14.10	17.66	16.24	15.85
66	130	0.00	0.20	1.51	1.07	0.19	248	115	9.27	6.91	12.58	9.95	9.31
66	131	0.00	0.14	1.33	0.86	0.12	248	118	7.66	5.92	10.69	8.87	7.77
66	132	0.00	0.10	1.23	0.77	0.11	248	119	7.16	5.43	10.75	8.77	7.63
66	133	0.00	0.10	0.95	0.79	0.09	248	120	6.69	4.84	9.95	7.70	7.05
66	134	0.00	0.08	0.90	0.59	0.05	248	121	6.23	4.84	9.71	7.60	6.32
66	135	0.00	0.05	0.77	0.54	0.04	248	122	5.79	4.14	9.38	7.47	6.08
66	136	0.00	0.04	0.75	0.42	0.03	248	123	5.37	4.00	8.52	6.91	5.32
66	137	0.00	0.03	0.53	0.36	0.05	248	124	4.98	3.68	7.92	6.70	4.69
66	138	0.00	0.03	0.62	0.36	0.11	248	125	4.60	3.53	7.40	6.18	4.85
66	139	0.00	0.02	0.43	0.28	0.04	248	126	4.23	3.10	7.10	5.61	4.43
66	140	0.00	0.01	0.35	0.28	0.02	248	127	3.89	2.80	7.01	5.59	3.97
66	141	0.00	0.01	0.40	0.24	0.18	248	128	3.57	2.49	6.53	5.24	3.35
66	142	0.00	0.01	0.26	0.19	0.18	248	129	3.26	2.11	6.86	5.13	3.22
66	143	0.00	0.01	0.28	0.12	0.05	248	131	2.69	2.06	4.93	4.32	2.39
66	144	0.00	0.01	0.19	0.11	0.14	248	133	2.19	1.77	5.74	4.24	2.21
66	145	0.00	0.00	0.21	0.10	0.07	248	134	1.97	1.58	5.17	3.94	2.01
66	148	0.00	0.00	0.12	0.05	0.07	248	136	1.55	1.29	4.98	3.63	1.46
66	150	0.00	0.00	0.10	0.04	0.04	248	137	1.37	1.24	4.63	3.18	1.50
66	155	0.00	0.00	0.03	0.02	0.04	248	140	0.89	0.91	4.06	2.50	1.04
66	170	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	248	141	0.75	0.68	3.93	2.43	0.88
122	70	47.78	47.34	46.22	46.97	46.54	248	144	0.40	0.60	3.34	2.07	0.59
122	75	42.80	42.09	41.56	42.45	39.71	438	20	97.78	95.80	92.04	94.20	97.47
122	77	40.81	40.18	40.17	39.58	39.69	438	40	77.94	74.36	74.12	74.46	77.10
122	82	35.86	35.37	34.69	34.48	29.60	438	50	68.02	65.59	64.36	64.79	62.63
122	84	33.89	33.44	32.75	33.21	34.21	438	55	63.06	60.52	58.85	58.95	55.13
122	85	32.90	31.80	31.87	31.67	32.80	438	60	58.12	55.11	53.82	54.80	57.49
122	86	31.92	31.19	30.72	30.80	31.14	438	65	53.20	50.24	49.80	49.80	52.10
122	87	30.95	30.32	30.30	30.62	31.14	438	70	48.31	45.47	46.17	45.27	47.37
122	88	29.97	29.15	29.14	29.05	29.09	438	75	43.48	41.44	40.60	40.30	42.14
122	88	29.97	29.19	29.04	29.06	26.85	438	80	38.74	36.76	38.29	35.76	38.31
122	89	29.00	28.22	28.32	28.28	28.89	438	80	38.74	36.21	36.87	35.53	33.89
122	90	28.04	27.34	27.30	26.87	27.80	438	85	34.12	31.59	32.52	30.95	34.58
122	91	27.07	26.19	26.91	26.12	19.90	438	85	34.12	31.91	34.33	32.73	31.04
122	91	27.07	26.17	26.12	26.04	24.15	438	90	29.69	28.22	29.40	28.49	29.94
122	92	26.11	25.18	25.89	25.24	22.95	438	90	29.69	26.99	29.37	28.22	25.68
122	93	25.16	24.51	24.62	24.22	24.86	438	95	25.49	22.63	25.30	24.02	24.57
122	93	25.16	23.89	24.62	23.74	21.75	438	95	25.49	23.76	26.99	25.08	21.25
122	94	24.21	23.05	23.52	23.27	23.72	438	100	21.57	19.35	23.22	21.32	21.69
122	94	24.21	23.56	23.29	23.46	21.45	438	100	21.57	19.41	22.71	21.13	17.34
122	95	23.26	22.42	22.87	22.06	22.50	438	105	17.98	15.45	20.23	17.57	18.41
122	95	23.26	22.56	22.26	22.49	20.65	438	105	17.98	15.65	19.29	18.53	16.88
122	96	22.33	21.64	21.84	21.35	21.65	438	110	14.74	12.51	17.71	14.76	15.09
122	97	21.39	20.48	20.99	20.54	19.40	438	110	14.74	11.59	18.75	14.25	15.35
122	97	21.39	20.25	21.23	20.48	17.50	438	112	13.55	11.60	17.38	13.84	13.82
122	98	20.47	19.54	20.42	20.20	19.83	438	114	12.42	10.27	15.32	14.07	8.75
122	98	20.47	19.70	20.00	19.73	16.25	438	115	11.87	9.88	15.85	12.85	12.71
122	99	19.56	18.58	19.53	19.64	12.20	438	115	11.87	9.66	14.92	12.60	10.30
122	100	18.65	17.43	18.91	18.63	18.27	438	120	9.39	7.87	14.35	11.34	10.18
122	100	18.65	17.23	18.48	18.07	14.55	438	120	9.39	7.33	14.48	10.47	8.48
122	101	17.75	16.55	17.88	17.21	16.82	438	125	7.26	5.83	12.90	8.88	7.64
122	101	17.75	16.36	18.17	17.65	15.55	438	125	7.26	5.59	12.33	9.11	7.15
122	102	16.87	15.76	16.80	16.78	15.65	438	130	5.49	4.60	9.97	6.94	5.65
122	102	16.87	15.82	16.56	16.79	16.41	438	130	5.49	4.08	10.18	6.61	5.79
122	103	16.00	14.62	15.95	15.45	15.69	438	135	4.03	3.32	8.39	5.65	3.93
122	103	16.00	14.94	16.86	15.68	13.49	438	135	4.03	3.21	7.99	5.84	3.92
122	104	15.14	13.87	15.50	14.99	14.76	438	140	2.86	2.51	7.79	4.80	2.85

122	104	15.14	13.75	15.88	14.50	14.15	438	140	2.86	2.44	7.63	4.67	2.52
122	105	14.30	13.08	15.02	14.11	14.62	438	145	1.93	1.98	6.77	4.31	2.01
122	105	14.30	13.35	14.84	14.18	13.73	438	145	1.93	1.90	7.06	3.73	0.99
122	106	13.47	11.83	14.52	13.41	13.59	438	150	1.21	1.43	5.52	3.27	1.15
122	106	13.47	11.81	13.73	13.02	9.32	438	155	0.67	1.13	4.52	3.06	0.76
122	107	12.66	11.52	13.23	12.54	12.60	438	160	0.28	0.75	3.58	2.37	0.45
122	107	12.66	11.19	13.30	12.81	6.29	438	165	0.00	0.40	2.76	1.95	0.15
122	108	11.87	10.56	12.44	11.88	11.99	438	170	0.00	0.45	3.26	1.69	0.15
122	108	11.87	10.29	13.13	11.89	9.28	438	175	0.00	0.26	2.45	0.93	0.10
122	109	11.10	9.41	12.48	11.34	10.92	438	180	0.00	0.30	2.62	1.02	0.06
122	109	11.10	9.44	11.94	11.00	7.32	438	185	0.00	0.15	1.65	0.80	0.05
122	110	10.35	8.69	11.46	10.99	10.52	438	190	0.00	0.37	1.52	0.64	0.09
122	110	10.35	8.74	11.54	10.33	10.70	438	195	0.00	0.21	1.43	0.82	0.05
122	111	9.63	8.03	11.04	9.93	10.00	438	200	0.00	0.10	1.35	0.43	0.03
122	111	9.63	8.40	10.72	9.63	9.55	438	205	0.00	0.10	0.94	0.27	0.03
122	112	8.92	7.24	10.55	9.12	9.40	438	210	0.00	0.05	1.07	0.39	0.03
122	112	8.92	7.30	10.26	9.05	9.03	694	60	58.46	54.17	52.91	54.04	56.01
122	113	8.25	6.60	9.48	8.68	8.50	694	65	53.62	50.62	49.49	48.29	50.00
122	113	8.25	6.80	9.62	8.46	7.10	694	70	48.85	45.19	45.19	44.45	47.94
122	114	7.60	6.09	9.05	8.18	7.43	694	75	44.19	39.59	41.40	40.06	43.14
122	114	7.60	6.26	9.04	8.03	4.90	694	80	39.66	35.93	36.76	36.29	39.58
122	115	6.97	5.43	8.96	8.04	7.40	694	85	35.31	31.95	34.45	33.14	35.56
122	115	6.97	5.36	8.60	7.90	7.27	694	90	31.18	27.77	31.23	28.68	31.03
122	116	6.37	4.90	8.15	6.86	6.14	694	95	27.30	24.34	28.16	25.51	27.77
122	116	6.37	4.96	7.93	7.29	6.62	694	100	23.69	20.29	25.05	22.23	24.32
122	117	5.80	4.31	7.26	6.67	5.67	694	105	20.37	17.97	22.56	18.98	21.55
122	117	5.80	4.27	7.72	6.63	5.73	694	110	17.36	14.20	22.50	17.93	19.10
122	118	5.26	3.87	6.97	6.30	5.42	694	115	14.65	12.80	18.09	14.81	16.00
122	118	5.26	4.13	7.03	6.28	5.37	694	120	12.24	9.46	17.00	12.59	13.39
122	119	4.75	3.46	6.80	5.73	4.54	694	125	10.13	8.27	14.30	10.98	11.38
122	119	4.75	3.39	6.75	5.84	5.05	694	130	8.28	6.99	14.15	9.94	9.02
122	120	4.26	2.83	5.99	5.32	4.53	694	135	6.69	5.76	12.36	8.38	7.14
122	120	4.26	3.02	6.04	5.28	4.15	694	140	5.33	3.88	11.56	6.75	5.65
122	121	3.81	2.53	5.96	5.10	3.94	694	145	4.18	3.88	10.34	6.48	4.38
122	121	3.81	2.66	5.97	4.71	4.22	694	150	3.21	2.68	8.56	5.25	3.23
122	122	3.38	2.33	4.93	4.80	3.58	694	155	2.41	2.51	9.37	4.43	2.38
122	122	3.38	2.26	5.23	4.45	3.60	694	160	1.75	1.81	7.63	4.00	1.89
122	123	2.98	2.14	4.93	4.15	3.15	694	165	1.22	1.74	7.29	3.30	1.19
122	123	2.98	1.84	5.20	3.75	3.11	694	170	0.79	1.72	6.13	2.86	0.80

## Bibliografía

- [1] K. Andersson, L. O. Hammarlid, Swedbank Markets, and Examiner J. Tysk, *Stochastic volatility*, Master's thesis, Uppsala University, November 2003.
- [2] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis of periodic structures*, North-Holland Publ., 1978.
- [3] N. H. Bingham and R. Kiesel, *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives*, Springer Verlag, 2004.
- [4] T. Bjork, *Arbitrage theory in continuous time*, Oxford University Press, 1998.
- [5] F. Black and M. Scholes, *The valuation of option contracts and a test of market efficiency*, *The Journal of Finance* **27** (1972), no. 2, 399–417.
- [6] ———, *Valuation of option contracts and a test of market efficiency, the*, *The Journal of Finance* **27** (1972), no. 2, 399–417.
- [7] ———, *Pricing of options and corporate liabilities, the*, *Journal of Political Economy* **81** (1973), no. 3, 637–654.
- [8] ———, *The pricing of options and corporate liabilities*, *Journal of Political Economy* **81** (1973), no. 3, 637–654.
- [9] A. J. G. Cairns, *Interest rate models: an introduction*, Princeton Univ Press, 2004.
- [10] S. Chib, F. Nardari, and N. Shephard, *Analysis of high dimensional multivariate stochastic volatility models*, *Journal of Econometrics* **134** (2006), no. 2, 341–371.
- [11] The Chicago Board Options Exchange, *The New CBOE Volatility Index VIX*, Tech. report, C.B.O.E., 2003.

- 
- [12] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, Wiley-Interscience, 1999.
- [13] J. P. Fouque, G. Papanicolaou, and K. R. Sircar, *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*, Cambridge Univ Pr, 2000.
- [14] ———, *Mean-reverting stochastic volatility*, (2000).
- [15] P. Glasserman, *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer Verlag, 2004.
- [16] S. L. Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of financial studies **6** (1993), no. 2, 327–343.
- [17] J. Hull and A. White, *Pricing of options on assets with stochastic volatilities*, the Journal of Finance **42** (1987), no. 2, 281–300.
- [18] ———, *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*, Journal of finance **42** (1987), no. 2, 281–300.
- [19] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer, 1991.
- [20] S. Kim, N. Shephard, and S. Chib, *Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models*, Review of Economic studies **65** (1998), 361–393.
- [21] A. L. Lewis, *Option valuation under stochastic volatility*, Option Valuation under Stochastic Volatility, Finance Press, January 2000.
- [22] B. K. Øksendal, *Stochastic differential equations: an introduction with applications*, Springer, 1989.
- [23] G. C. Papanicolaou, *Asymptotics analysis of stochastic equations*, Studies in Probability Theory **18** (1978), 111–79.
- [24] G. C. Papanicolaou, D. Stroock, and S. R. S. Varadhan, *Martingale approach to some limit theorems*, Statistical Mechanics and Dynamical Systems, Duke turbulence conference **3** (1977), 1–120.
- [25] N. Shephard, *Stochastic volatility: Selected readings.*, Oxford University Press., 2005.

- 
- [26] N. Shephard and T. G. Andersen, *Stochastic volatility: Origins and overview*, March 2008.
- [27] W. A. Strauss, *Partial differential equations: An introduction*, Wiley New York, 1992.
- [28] S. J. Taylor, *Modeling stochastic volatility: A review and comparative study*, *Mathematical Finance* 4 (1994), no. 2, 183–204.
- [29] C. van Emmerich, *Modelling correlation as a stochastic process*, Tech. report, University of Wuppertal, 2006.