

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MODELO DE RIESGO EMISOR  
PARA LOS PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN  
DEL BANCO NACIONAL DE COSTA RICA

Trabajo final de investigación aplicada sometido a la  
consideración de la Comisión del Programa de Estudios de  
Posgrado en Matemática para optar al grado y título  
de Maestría Profesional en Matemática Aplicada.

OSCAR MELVIN GARITA MORA

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio  
Costa Rica

2014

# Dedicatoria

A Melissa, mi esposa, que ha estado ahí en tiempos de alegría, tristeza, determinación, indecisión, adversidad y éxito, siendo mi guía, mi luz, tolerando y tratando de entender a alguien tan complicado.

A mi hermano menor, Cli, una verdadera historia de inspiración, esfuerzo, sacrificio y virtud. Cuando te busco y no te encuentro, doy de cuentas que algo de mí también partió contigo en aquel momento, ¡no me cansaré de recordarle al mundo que exististe un día!, tú recuerdo este corazón latiendo lo conserva.

# Agradecimientos

Quiero corresponder las muchas sugerencias y vastos consejos de Santiago Cambrero, mi profesor guía en esta investigación aplicada, con un gran agradecimiento para él. Agradezco también las recomendaciones de Álvaro Guevara y de Alexander Ramírez, sin ellas este proyecto de graduación definitivamente no sería el mismo, ya que sirvieron de apoyo en mis etapas de confusión.

A mi padre, mi madre y mis hermanas, gracias a su *amor*, a su cuidado, a sus sabios consejos, ¡a todo lo que han hecho!, es que he podido encontrarle sentido a la partida de la vida.

Finalmente, deseo agradecer a las siguientes personas: a Allan y Gustavo (por su amistad y apoyo en esta investigación dentro del Banco Nacional); a Mayra, Fabio e Isaac (por las largas noches y rendidoras madrugadas que pasamos estudiando juntos); a Kattia (esa buena cuchara ¡era un incentivo para ir a trasnochar a la casa de Isaac!); y a don René y doña Mayra (por abriermé las puertas de su casa con tanto cariño y bondad).

San José, Costa Rica  
Diciembre 10, 2014

Melvin Garita Mora

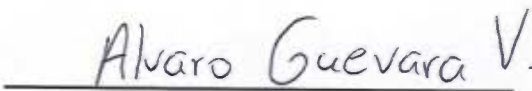
“Este trabajo final de investigación aplicada fue aceptado por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Profesional en Matemática Aplicada.”



Máster Andrea Collado Chaves  
**Representante de la Decana  
Sistema de Estudios de Posgrado**



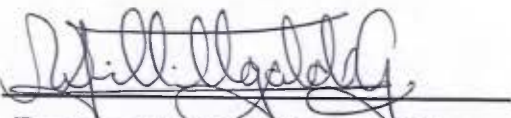
Doctor Santiago Cambronero Villalobos  
**Profesor Guía**



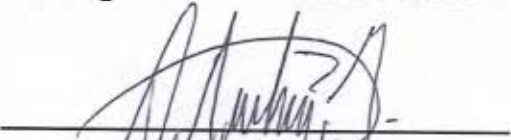
Doctor Álvaro Guevara Villalobos  
**Lector**



Doctor José Alexander Ramírez González  
**Lector**



Doctor William Ugalde Gómez  
**Director Programa de  
Posgrado en Matemática**



Oscar Melvin Garita Mora  
**Sustentante**

# Índice general

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
Resumen	vi
<b>1. Objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo general . . . . .	1
1.2. Objetivos específicos . . . . .	1
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>2</b>
2.1. Antecedentes . . . . .	2
2.2. Situación actual . . . . .	4
2.3. Hipótesis a demostrar . . . . .	5
<b>3. Marco Conceptual</b>	<b>6</b>
3.1. Glosario . . . . .	6
3.2. Riesgo de crédito de un activo financiero . . . . .	9
<b>4. Metodología</b>	<b>10</b>
4.1. Probabilidad de impago y Spreads . . . . .	10
4.2. Recovery Rate . . . . .	14
4.3. Distribución de la pérdida esperada . . . . .	15
4.3.1. De un modelo estático a uno dinámico . . . . .	18
<b>5. Resultados y Conclusiones</b>	<b>21</b>
5.1. Principales resultados . . . . .	21
5.2. Conclusiones . . . . .	24

# Resumen

Esta investigación examina una serie de técnicas para estimar las probabilidades de impago de un emisor, a través de la información de los precios de los instrumentos emitidos por dicho emisor. Estas técnicas permiten realizar una estimación de la pérdida esperada con información más oportuna. Además, se propone una supervisión financiera enfocada en los cambios en el valor de la pérdida esperada.

Clasificación JEL: G12, G21, G32.

Palabras claves: Riesgo emisor, Probabilidad de impago, Credit default swaps.

# Abstract

This paper reviews a range of techniques to estimate an entity's default probability, based on the pricing information available for the instruments issued by such entity. These techniques facilitates the adequate estimation of the expected loss based on timely information. Finally, it proposes a financial surveillance focused on changes in the value of the expected loss.

JEL Classification: G12, G21, G32.

Keywords: Default risk, Default probability, Credit default swaps.

# Índice de cuadros

4.1. Prelación de deudas . . . . .	15
4.2. Pérdida esperada y percentil 99 % . . . . .	20
5.1. CDS y Probabilidad de impago . . . . .	22
5.2. Evolución probabilidades de impago del gobierno costarricense . . . . .	23



# Índice de figuras

4.1. Histograma Simulación de Escenarios de PEs . . . . .	18
4.2. Histograma Centros Aleatorios de la Distribución . . . . .	19
4.3. Histograma Centros Estresados de la Distribución . . . . .	20



# Capítulo 1

## Objetivos

A continuación se presentan los objetivos del presente trabajo.

### 1.1. Objetivo general

Actualizar la metodología utilizada por el Banco Nacional de Costa Rica para analizar el riesgo emisor de los instrumentos que componen su portafolio de inversión, y el de sus subsidiarias.

### 1.2. Objetivos específicos

1. Investigar sobre las diferentes técnicas utilizadas para la estimación de la probabilidad de impago de emisores soberanos y corporativos.
2. Implementar un modelo de riesgo de crédito, basado en técnicas de información de mercado, para estimar la distribución de pérdida asociada al riesgo emisor de un portafolio de inversión.
3. Construir indicadores de alerta temprana de eventos de crédito que puedan afectar un portafolio de inversión.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

En este capítulo se aborda la importancia de investigar y desarrollar modelos de riesgo emisor basados en técnicas de información de mercado, así como la de construir indicadores de alerta temprana de eventos de crédito, esto con el objetivo de estimar la distribución de pérdidas asociada al riesgo emisor de un portafolio de inversión, y de disminuir el impacto de un evento de crédito en esa distribución.

Para esto se presentan los motivos que dieron origen al presente tema de investigación, destacando sus antecedentes, definiendo y representando el momento del tema en cuestión, además, se expone la hipótesis que se pretende demostrar en el presente proyecto.

### 2.1. Antecedentes

La relación entre la rentabilidad de un emisor y el costo de la deuda que este emite está ligada al concepto de **sostenibilidad de sus finanzas**, este se basa en los niveles de libertad financiera alcanzada por el emisor al permitirle liberar, o comprometer, recursos futuros que podrían ser usados en necesidades alternativas.

Esto ocurre debido a que cualquier desfase entre ingresos y gastos (rentabilidad), debe corregirse a través del tiempo, ya que existe una restricción intertemporal que

impide que un agente económico pueda endeudarse por siempre. Más formalmente, si  $RF_t^e$  representa el resultado financiero esperado de un emisor en el periodo  $t$ , se debe cumplir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} RF_t^e dt \geq 0 \quad (2.1)$$

En palabras de Merton [8] lo anterior quiere decir que el valor de mercado esperado del emisor, en el momento  $t$ , tiene que ser mayor o igual al valor de los pasivos de ese emisor, en ese mismo instante de tiempo. En términos del valor de mercado dinámico del emisor,  $V$ , esto puede escribirse mediante la siguiente ecuación estocástica:

$$dV = (\alpha V - C)dt + \sigma V dZ \quad (2.2)$$

donde  $\alpha$  es el rendimiento esperado instantáneo del emisor,  $C$  es el valor de los pasivos, ya sea por intereses o dividendos, y  $\sigma^2$  es la varianza instantánea del rendimiento del emisor, todas estas variables expresadas por unidad de tiempo.

Lo anterior se resume en que los flujos,  $(\alpha V - C)dt$ , determinan el resultado financiero esperado del emisor,  $RF_t^e$ .

Cuando se compromete la sostenibilidad de las finanzas de un emisor, **aumenta su riesgo y consigo el costo de fondeo**, lo que afecta negativamente el valor del deudor, llevándolo incluso a posibles situaciones de impago.

La estimación del riesgo de crédito consiste en valorar la *distribución de pérdida* de un portafolio de inversión ante eventos de impago. Esta distribución también incluye el riesgo de concentración.

Este tipo de eventos de crédito no solo conllevan el asumir la *pérdida dado el incumplimiento*, sino, que implica el asumir costos adicionales para gestionar cualquier litigio necesario para minimizar esa pérdida. También hay costos reputacionales asociados a estos eventos, ya que dependiendo de la *exposición al impago*, se pueden

presentar cuestionamientos sobre el impacto de dicho incumplimiento en el portafolio de inversión y en consecuencia en las finanzas del tenedor de los instrumentos financieros.

El objetivo que se busca con este proyecto es determinar una metodología de cálculo de este tipo de riesgo que permita medir de una manera más sensible cualquier cambio en la capacidad de pago de un emisor y que esta sea plasmada en la distribución de pérdida.

## 2.2. Situación actual

Actualmente la distribución de pérdida asociada al riesgo emisor del portafolio de inversión del Banco Nacional, y el de sus subsidiarias, es calculada a través de *técnicas basadas en información fundamental*, la cual subyace en factores económicos y sistémicos, información financiera y calificaciones de riesgo [3].

Específicamente, el riesgo de crédito se calcula con base en el modelo de Merton [8], el cual asocia variables de capacidad de pago a cada emisor, descomponiendo estas en aspectos idiosincráticos (propios de cada emisor) y sistémicos (comunes a todos los emisores).

El riesgo emisor calculado a través de este tipo de técnicas, a pesar de que da resultados muy estables, conlleva un rezago importante de tiempo en reflejar los cambios que experimenta la capacidad de pago de un emisor en particular, esto debido al procesamiento, incorporación e institucionalización de esa información fundamental.

Debido a que se supone que el sistema de precios incorpora de una manera expedita este tipo de información, es que se pretende migrar hacia *técnicas basadas en información de mercado*.

En este sentido, uno de los mejores indicadores respecto a la percepción crediticia es la facilidad/dificultad del financiamiento, donde la evolución de las tasas de interés, y consecuentemente de los credit default swaps, es una guía manifiesta de esa percepción crediticia [4].

Tomando esto en consideración, se revisarán diferentes técnicas para estimar la probabilidad de impago, haciendo especial énfasis en aquellas aplicadas utilizando como base los credit default swaps y los spreads de los instrumentos de renta fija.

### **2.3. Hipótesis a demostrar**

Se pretende comprobar que las técnicas basadas en información de mercado constituyen una herramienta que responde de manera más oportuna a cambios imprevistos en la condición financiera de los emisores, respecto a técnicas basadas en información fundamental, esto con el objetivo de representar el riesgo emisor, y en particular su evolución a través del tiempo.



# Capítulo 3

## Marco Conceptual

En este capítulo se procederá a definir los principales conceptos relacionados al tema en cuestión, esto con el objetivo de facilitar la comprensión de los elementos que constituyen la base de la presente investigación, haciendo énfasis en la forma en la que estos serán utilizados aquí.

### 3.1. Glosario

**Portafolio de inversión:** Es un arreglo de  $N$  instrumentos donde la riqueza total invertida,  $W$ , es distribuida de la forma  $W = \sum_{i=1}^N P_i X_i$ , con  $X_i$  representando la cantidad invertida en el instrumento  $i$  y  $P_i$  el precio de ese instrumento, donde  $X_i \geq 0$  e independiente de  $P_i$ .

**CDS (Credit Default Swaps):** Contrato para protegerse contra el evento de impago de un activo financiero. Análogo a un seguro de impago, el cual se expresa como una prima o spread respecto a la curva swap.

**Curva swap:** Constituye la representación del costo de fondeo, a diferentes plazos, que enfrentan los participantes del mercado.

**EaD (Exposure at Default o exposición al impago):** Corresponde al monto del portafolio,  $W_i = P_i X_i$ , que estaría siendo afectado por el evento de incumplimiento. También se puede expresar como un porcentaje del portafolio:  $w_i = W_i/W =$

$P_i X_i / W$ .

**Instrumento de renta fija:** Activo financiero que constituye una deuda para su emisor y del cual el propietario conoce la rentabilidad a priori si las condiciones de emisión (tasa y plazo) son honradas y satisfechas por el emisor.

**Instrumento de renta variable:** Activo financiero cuya rentabilidad no puede ser conocida a priori, ya que depende de variables subyacentes, como el desempeño financiero de una empresa. Por lo general representan participación en el capital de una empresa.

**LGD** (Loss Given Default o pérdida esperada en caso de impago): Porcentaje esperado de pérdida sobre  $X_i$  en el caso de que se presente un evento de incumplimiento. El proceso de liquidación de activos de la empresa emisora respecto a los pasivos de la misma es el que determina ese porcentaje, por lo general es menor que 1.

**PD** (Probability of Default o probabilidad de impago): Medida de la posibilidad de que el emisor deje de cumplir con sus obligaciones contractuales.

**RR** (Recovery Rate at Default o recuperación en caso de impago): Porcentaje esperado de recuperación en el caso de que se presente un evento de incumplimiento.  
 $RR = 1 - LGD$ .

**Riesgo emisor:** Cuantificación de la posibilidad de que el emisor de un instrumento de renta fija o variable no cumpla las obligaciones en los plazos y las condiciones pactadas.

**Spread:** Diferencia entre el rendimiento de un bono con riesgo de impago respecto a uno libre de este tipo de riesgo. Por lo general se expresa en términos de puntos base, multiplicado por 10.000, en este trabajo se presentarán en su nivel porcentual.



**VaR** (Value at Risk o valor en riesgo): Técnica estadística utilizada para medir y cuantificar el riesgo financiero de un portafolio de inversión en un periodo de tiempo específico y con un nivel de confianza dado (percentil de la distribución de pérdida).

**VaR de riesgo de crédito:** Técnica estadística utilizada para medir y cuantificar las posibles pérdidas derivadas de que un emisor incurra en impago.

### 3.2. Riesgo de crédito de un activo financiero

Estimar la probabilidad de impago,  $PD_i$ , de un activo financiero  $i$  constituye el principal y más desafiante factor detrás de calcular su riesgo de crédito [3]. Una vez que esta medida se ha efectuado, el cálculo del riesgo de crédito es directo y simple.

La pérdida esperada de un activo financiero,  $PE_i$ , se define como sigue:

$$PE_i = PD_i \cdot LGD_i \cdot EaD_i \quad (3.1)$$

Para obtener las probabilidades de impago se utilizarán las implícitas en los credit default swaps, y en ausencia de este tipo de contratos para un activo financiero en particular, se procederá a utilizar el valor, i.e. el spread, observado en el mercado para dicho activo financiero, utilizando la metodología definida para tal efecto.

En el capítulo 4, sección 4.2, se analizará la importancia de utilizar el principio de prelación de deudas para determinar el  $LGD$  de cada emisión, mientras que el  $EaD_i$  corresponderá al valor facial de la emisión  $i$  en particular,  $X_i$ .

# Capítulo 4

## Metodología

En este capítulo se describen las técnicas, métodos, e información utilizada para alcanzar los objetivos de esta investigación.

### 4.1. Probabilidad de impago y Spreads

Tal como lo señala Merton [8]:

“El valor de una emisión de deuda corporativa en particular depende esencialmente de tres términos: (1) la tasa de retorno libre de riesgo requerida (en términos de impago, por ejemplo bonos del gobierno o bonos corporativos con un muy alto grado crediticio); (2) las diferentes provisiones y restricciones contenidas en la emisión (fecha de vencimiento, cupón, términos de call, señoreidad en el evento de impago, amortización, etc.); (3) la probabilidad de que la empresa no pueda satisfacer parte o la totalidad de los requerimientos de la emisión (esto es la probabilidad de impago).”

El valor de un bono en particular no solo debe reflejar el rendimiento libre de riesgo,  $y^F$ , sino, adicionalmente debe reflejar un premio por riesgo que compense el peligro de impago,  $y^D$ , y cualquier particularidad de la emisión,  $y^P$ .

De esta forma, el spread debe compensar al inversionista por el riesgo de impago del activo subyacente, para probar esto definamos:

$y_t^F$ : rendimiento de un bono cero cupón libre de riesgo al plazo  $t$

$y_t^D$ : rendimiento de un bono cero cupón con riesgo de impago al plazo  $t$

$e^{-y_t^F T}$ : Valor de un bono cero cupón libre de riesgo con plazo  $T$

$e^{-y_t^D T}$ : Valor de un bono cero cupón con riesgo impago con plazo  $T$

$PD(T)$ : Probabilidad de impago del bono riesgoso en el plazo  $T$

$RR$ : Porcentaje esperado de recuperación en caso de impago

En caso de impago el valor del bono es  $RR \cdot e^{-y_t^F T}$ , mientras que de no ocurrir el impago, evento con una probabilidad  $1 - PD(T)$ , el valor del bono es  $e^{-y_t^F T}$ . Considerando esto, el **valor esperado del bono** es:

$$PD(T) \cdot RR \cdot e^{-y_t^F T} + [1 - PD(T)] \cdot e^{-y_t^F T}. \quad (4.1)$$

Esta forma de cálculo arroja probabilidades en el mundo indiferente al riesgo, las cuales sobreestiman la probabilidad real de impago, debido a la aversión al riesgo de los inversionistas. Para un mayor detalle sobre este particular se puede consultar la sección V de [3]. Un tema de investigación posterior podría incluir buscar cuantificar la prima por aversión al riesgo respecto a la probabilidades reales o determinísticas.

Y dado que el rendimiento del bono con riesgo impago es  $y_t^D$ , tenemos:

$$PD(T) \cdot RR \cdot e^{-y_t^F T} + [1 - PD(T)] \cdot e^{-y_t^F T} = e^{-y_t^D T}. \quad (4.2)$$

Simplificando (4.2):

$$e^{-y_t^F T} (PD(T) \cdot RR + 1 - PD(T)) = e^{-y_t^D T},$$

de donde:

$$PD(T) \cdot RR - PD(T) = e^{-(y_T^D - y_T^F)T} - 1,$$

despejando para  $PD(T)$ :

$$PD(T) = \frac{e^{-(y_T^D - y_T^F)T} - 1}{RR - 1}.$$

Así obtenemos la **probabilidad de impago para el plazo T**, derivada a través del principio de neutralidad de tasas de interés:

$$PD(T) = \frac{1 - e^{-Spread \cdot T}}{1 - RR} \quad (4.3)$$

Tal como lo señala Hull [6], esta metodología para el cálculo de la probabilidad de impago implícita en los spreads es acertada para bonos que se transan cerca del valor par. En caso contrario, algunos autores recomiendan calcular el *hazard rate* tal como lo desarrolla Duffie [4]; o utilizar bootstrapping asumiendo una  $PD(T)$  constante, tal como lo esboza el mismo Hull.

El mercado de credit default swaps es más líquido y profundo para el nodo de cinco años, por lo que se procederá a utilizar la ecuación 4.3 para encontrar la probabilidad de impago a 5 años, para luego aplicar un proceso recurrente para encontrar la probabilidad de impago a 1 año plazo, tal como se muestra a continuación.

Sea  $N$  el número de años requerido para que se presente un evento de impago, y  $PD$  la probabilidad de que ocurra dicho evento, la cual se supone constante, independiente y condicionada a que no haya ocurrido un evento de impago en los periodos anteriores; tenemos que la probabilidad de que ocurra un evento de impago en el primer año es  $P(N \leq 1) = PD$ ; mientras que de que ocurra en el segundo año es  $P(N \leq 2) = P(N \leq 1) + P(1 < N \leq 2) = P(N \leq 1) + P(N \leq 2 | N > 1) \cdot P(N > 1) = PD + PD \cdot (1 - PD)$ .

La probabilidad de que ocurra el evento de impago en el tercer año está dada por  $P(N \leq 3) = P(N \leq 2) + P(2 < N \leq 3) = P(N \leq 2) + P(N \leq 3 | N > 2) \cdot P(N > 2) = PD + PD \cdot (1 - PD) + PD \cdot (1 - PD)^2$ .



Generalizando el cálculo de la probabilidad de impago para el año T, tenemos:

$$P(N \leq T) = \sum_{i=0}^{T-1} PD \cdot (1 - PD)^i. \quad (4.4)$$

La cual corresponde a una serie geométrica que converge a:

$$P(N \leq T) = 1 - (1 - PD)^T. \quad (4.5)$$

Despejando para  $PD$  se obtiene la probabilidad de impago a un año, constante e independiente, implícita en la probabilidad de impago al año T,  $P(N \leq T)$ :

$$PD = 1 - (1 - P(N \leq T))^{1/T} \quad (4.6)$$

Por lo que al utilizar 4.3 y 4.6 se puede obtener la probabilidad de impago a un año plazo.

Estimar la probabilidad de impago a través del spread que implican los credit default swaps, CDS, es la manera más clara de medir el riesgo de crédito, ya que este spread está directamente relacionado con la prima por riesgo de impago,  $y^D$ , y no incorpora las particularidades de la emisión,  $y^P$ .

Sin embargo, en ausencia de CDS, el spread que ofrece el mercado de bonos puede ser un *second best*, ya que los argumentos de arbitraje garantizan que para un cero cupón estos spreads (CDS y bonos) deben presentar valores similares [7].

Tomando esto en consideración, los cálculos a realizar se enfocarán en el modelado de bonos cero cupón a 1 año plazo, a través los datos del vector de precios utilizado para la valoración de los portafolios de inversión supervisados por la Dirección General de Riesgos del Banco Nacional.

## 4.2. Recovery Rate

Altman [1] resume algunos de los principales enfoques utilizados para la estimación del recovery rate,  $RR$ . Detalla los enfoques que parten de relaciones inversas entre la  $PD$  y el  $RR$ , pasando también por los que consideran correlaciones negativas entre esos eventos, hasta llegar a modelos estructurales, basados en información fundamental del emisor, que parten del supuesto de independencia entre la  $PD$  y el  $RR$ .

Así mismo, Chan-Lau [2] define un porcentaje de recuperación máxima (maximum recovery rate) el cual se basa en determinar el valor máximo de recuperación para un nivel dado de probabilidad de impago (utiliza como restricción la misma probabilidad de impago), lo cual tiene como ventaja que permite determinar cuando se da un cambio en la relación estructural entre la  $PD$  y el  $RR$ , lo que el autor define como una señal de alerta temprana. Esta técnica tiene el inconveniente de que condiciona el  $RR$  a sus límites máximos posibles, lo cual por definición sobredimensiona la probabilidad de impago.

Tomando en consideración la independencia entre el evento de impago y el porcentaje de recuperación esperado, o sea:  $P(RR|PD) = P(RR)$ , y que estos eventos corresponden a una probabilidad conjunta,  $P(PD, RR) = PD \cdot RR$ , resulta más conveniente utilizar la *prelación de la deuda* (debt seniority), ya que una vez dado el impago, es la preferencia (manera y orden) que poseen las emisiones la que determina finalmente cuál será el porcentaje de recuperación de los acreedores.

Para esto, se recurrirá a la estimaciones realizadas y publicadas por Moody's Investor's Service [5], las cuales se encuentran divididas según el orden de prelación, tal como se muestra a continuación para los bonos corporativos:



Calidad	RR Promedio
Bonos senior garantizados	51.89 %
Bonos senior no garantizados	36.69 %
Bonos senior subordinados	32.42 %
Bonos subordinados	31.19 %
Bonos junior subordinados	23.95 %

Cuadro 4.1: Prelación de deudas

### 4.3. Distribución de la pérdida esperada

Actualmente a través de la técnica de Valor en Riesgo (VaR) se representa la pérdida máxima, a un año plazo y con un nivel de confianza del 99 %. Para esto se simulan escenarios usando *MatLab* para cada emisor suponiendo una distribución normal, e independiente entre cada emisor, los cuales conforman el vector  $S$ .

A través de la descomposición de Cholesky de la matriz de correlaciones  $R$ , i.e.  $M'M = R$ , se transforma la matriz  $S$ ,  $Z = M'S$ , para darle una distribución multivariada normal estándar, donde el vector  $Z$  tiene una distribución normal multivariada con matriz de covarianza  $R$ .

Así, cada entrada  $Z_{ij}$  representa un simulación de la posición del emisor  $i$  en el escenario  $j$  dentro de la inversa de la función de distribución de la normal estándar.

Se considera que ocurre un evento de impago del emisor  $i$  en el momento  $j$  si  $Z_{ij} < K_i$ , donde  $K_i = \Phi^{-1}(PD_i)$ . De esta forma, se llega a la construcción de un vector de pérdidas,  $L_{j \times 1}$ , del cual se extrae la pérdida correspondiente al percentil 99.

Esta modelación conlleva implícito que cuando se presenta una alta correlación entre los emisores, al nivel de confianza dado (99 %) con un número de escenarios

que garantice que se cumpla la ley de los grandes números, todos aquellos emisores  $i$  que cumplan que  $\Phi^{-1}(PD_i) > \Phi^{-1}(1\%)$ , o sea  $PD_i > 0,01$ , incorporarán su  $EAD$  al vector de pérdidas.

O sea, que en casos con una alta concentración o correlación entre los emisores, al 99 % de confianza todos los emisores con  $PD_i > 0,01$  suman su exposición en caso de impago al VaR.

Como se mostrará más adelante en los cuadros 5.1 y 5.2, la presente propuesta para medir las probabilidades de impago, una mayor cantidad de emisores contarán con una  $PD_i > 0,01$ , por lo que se registrarán niveles de VaR relativamente altos, los cuales no son congruentes con las pérdidas efectivamente registradas por concepto de impago (*backtesting*).

Considerando esto, y que el cambio de metodología propuesto nos lleva de un modelo estático a uno dinámico en lo que a probabilidades de impago se refiere, es posible modelar las probabilidades de impago de cada emisor  $i$ , ya que se cuenta con observaciones para cada momento  $j$ , por lo cual es posible entonces también modelar la pérdida esperada.

De esta forma, sea  $X = (PD_1, PD_2, \dots, PD_n)'$ , con  $PD_i$  denotando el vector de observaciones de las probabilidades de impago del emisor  $i$  durante un periodo de tiempo dado, i.e.  $j = 1 \dots t$ , la cual asumimos cumple con una distribución multivariada normal, con media  $\mu$  y covarianza  $\Sigma > 0$ , o sea  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ , podemos modelar escenarios para la pérdida esperada del portafolio de acuerdo con la ecuación (3.1).

Para modelar  $X$  se procedió a explorar dos alternativas:

- Generar las probabilidades de impago a través de un modelo de vectores autoregresivos, VAR(p):

$$X_t = \beta X_{t-1} + \beta X_{t-2} + \dots + \beta X_{t-p} + E. \quad (4.7)$$

- Generar escenarios directamente desde la distribución multivariada normal, considerando como  $\mu$  la última observación de probabilidades ( $PD_n$ ) y calculando  $\Sigma$  desde  $X$ .

La implementación del VAR(p) tuvo como inconveniente que ante escenarios de probabilidades con baja volatilidad, la estimación de las probabilidades simuladas era inestable respecto a los rezagos a utilizar, lo cual implicaba migraciones de  $\mu$  a niveles carentes de sentido, donde la pérdida esperada sobrepasaba incluso el total del portafolio.

Debido a estos inconvenientes, se procedió a utilizar la simulación de la distribución multivariada normal,  $\tilde{X}$ , para que a partir de esta, dada la información de pérdidas esperadas en caso de impago y exposición al evento de impago para cada emisor, se procediera a calcular el vector de pérdidas,  $L$ , tal como sigue:

$$L = (LGD \cdot W)' \cdot \tilde{X} \quad (4.8)$$

donde

- **LGD** representa el vector de pérdidas esperadas en caso de impago
- **W** es el vector de exposición al evento de impago
- $\tilde{X}$  representa la matriz de probabilidades simuladas
- y el operador  $\cdot$  implica la multiplicación entrada por entrada de los vectores **LGD** y **W**.

El valor en riesgo de las pérdidas esperadas del portafolio de inversión corresponderá al percentil determinado de este vector de pérdidas.

### 4.3.1. De un modelo estático a uno dinámico

La forma propuesta de estimar las probabilidades de impago permite pasar de un MODELO ESTÁTICO A UNO DINÁMICO, ya que anteriormente los cambios en la pérdida esperada dependían básicamente de los cambios en la composición del portafolio, debido a que las probabilidades de impago varían muy poco<sup>1</sup>.

Para realizar la estimación de escenarios de pérdidas esperadas y finalmente llegar a la distribución de la pérdida esperada,  $Dist(PE)$ , se examinaron tres alternativas:

1. **Simulación de escenarios de PEs con distribución multinormal:** Para esto se procedió simplemente a simular escenarios de probabilidades de impago tomando en consideración la matriz de covarianzas calculada a partir de los datos de los últimos 12 meses y utilizando como promedio la última observación de PDs.

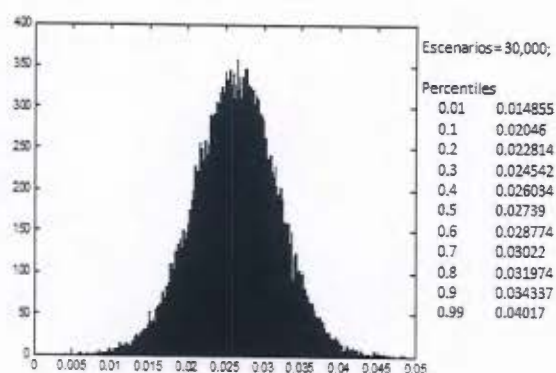


Figura 4.1: Histograma Simulación de Escenarios de PEs

Bajo este criterio la variabilidad de la pérdida esperada y su *distribución* están determinados por la matriz de covarianzas.

<sup>1</sup>En algunos casos cuando las calificaciones de riesgo cambian, lo que implica que cambia la probabilidad de impago, ya se ha presentado, o está por presentarse, un evento de crédito.



2. **Centros aleatorios ( $\mu_s^2$ ) de la distribución:** Se generó un número predefinido de escenarios de  $\mu_s$ , y luego se proceden a estimar las distribuciones correspondientes a esos  $\mu_s$  -utilizándolos como los nuevos promedios.

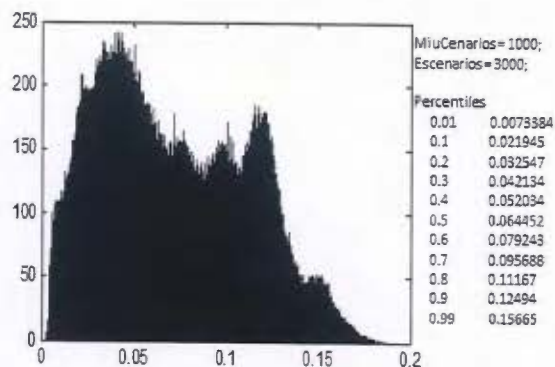


Figura 4.2: Histograma Centros Aleatorios de la Distribución

En términos relativos es más lento, y presentó inestabilidad de resultados cuando se genera un número pequeño de  $\mu_s$  -mano invisible del azar-, lo que lo hace una medida incoherente.

3. **Estresar los centros ( $\mu_s$ ) de la distribución:** Se asumió continuidad y se procedió a calcular el valor de la normal inversa que acumula el 99 % de la distribución de cada uno de los ( $\mu_s$ ), luego se estima una distribución tomando como promedio de la multinormal a esos  $\mu_s$  estresados.

Al calcular la  $Dist(PE)$  con las  $\mu_s$  estresadas, se está estresando algo ya estresado, por lo que los resultados eran similares a correr el centro de la distribución calculada en el punto 1. al percentil 99 de esa misma distribución.

<sup>2</sup>Donde los  $\mu_s$  conforman el vector que representa la media de la distribución multivariada normal utilizada para las simulaciones.

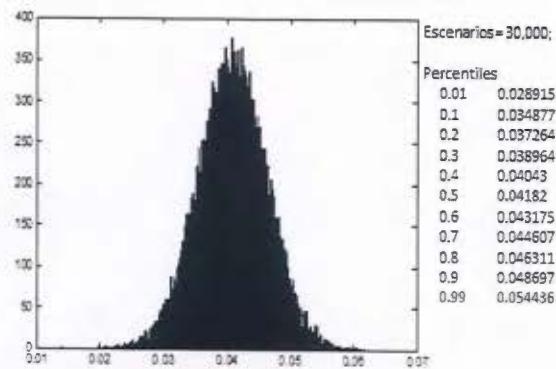


Figura 4.3: Histograma Centros Estresados de la Distribución

Como se observa, el  $\text{VaR}(\text{PE})$  es levemente inferior a la  $\text{PE}_{\mu_{\text{estresados}99\%}}$ , esto encuentra explicación en la teoría del portafolio, donde la matriz de covarianzas juega el principal papel detrás de las diferencias producto del efecto de la diversificación.

	Jun/13	Jul/13	Ago/13	Set/13	Oct/13	Nov/13
<b>PE</b>	2.36 %	2.51 %	2.36 %	2.62 %	2.46 %	2.74 %
<b>Dist(PE)<sub>99 %</sub></b>	3.62 %	3.77 %	3.62 %	3.88 %	3.72 %	4.01 %
<b>PE<sub><math>\mu_{\text{estresados}99\%}</math></sub></b>	3.80 %	3.95 %	3.80 %	4.05 %	3.90 %	4.18 %
<b>Dist(PE<sub><math>\mu_{\text{estresados}99\%}</math></sub>)</b>	5.07 %	5.21 %	5.07 %	5.31 %	5.17 %	5.44 %
<b>Dist(<math>\mu_{\text{aleatorios}}</math>)</b>	10.65 %	9.34 %	5.20 %	7.89 %	4.59 %	6.67 %

Cuadro 4.2: Pérdida esperada y percentil 99 %

# Capítulo 5

## Resultados y Conclusiones

Con el objetivo de investigar la eficacia de la metodología propuesta, ésta fue programada en *MatLab* y evaluada con el portafolio de inversiones propias del Banco Nacional al cierre de noviembre de 2013. Los principales resultados y conclusiones son mostrados en este capítulo.

### 5.1. Principales resultados

Esta propuesta de cambio de metodología, al basarse en técnicas de información de mercado, pretende medir más rápidamente cualquier cambio en la capacidad de pago de un emisor, y plasmar esos cambios en la pérdida esperada de los portafolios.

De acuerdo con (4.3) y con (4.3) y (4.6) se pueden realizar las siguientes comparaciones:

Como se observa, al utilizar la liquidez y profundidad relativa de nodos superiores a un año se incorporan otros factores, principalmente prima por plazo y liquidez  $-y^P$  en términos de Merton-, que sobreestiman la PD a un año plazo.

- Esto implicaría un enfoque más conservador.



	Costa Rica	Perú
<b>CDS 1yr</b>	<b>1.563 %</b>	<b>0.558 %</b>
- PD implícita a 1 año	3.10 %	1.11 %
<b>CDS 5yr</b>	<b>2.625 %</b>	<b>1.445 %</b>
- PD implícita a 5 años	24.60 %	13.94 %
- PD implícita a 1 año	5.49 %	2.96 %

Cuadro 5.1: CDS y Probabilidad de impago

- El uso de (4.3) y (4.6) es menos complicado y fácil de entender en términos de cálculo que la técnica de bootstrapping, la cual es ampliamente utilizada en la literatura<sup>1</sup>.

La medición empírica de las probabilidades de impago arrojó diferencias entre las PD calculadas a través de los CDS 5yr y las PD calculadas a través del spread de los títulos en dólares<sup>2</sup>, para considerar esta diferencia, que aplica básicamente para los títulos internos, se procedió a calcular el spread que minimiza los errores entre las probabilidades de impago calculadas a través de estas dos formas.

Ese spread se calculó con los títulos en dólares, pero es aplicado también a los títulos en colones, esto permite no subestimar el riesgo emisor de estos títulos, y a la vez considerar la menor probabilidad de impago de los títulos en moneda local,

<sup>1</sup>Si bien el propósito de esta investigación no radica en cuestionar la técnica de bootstrapping, uno de los hallazgos fue la poca diferencia entre esa técnica y el uso de (4.3) y (4.6) para la estimación de la probabilidad de impago de bonos cuponados y con vencimiento mayor a un año, las cuales en términos de tiempo de cálculo son diametralmente diferentes, por lo que constituye un aspecto a evaluar el realizar una investigación posterior sobre la bondad de una u otra técnica de aproximación, lo cual pertenece al campo del análisis numérico.

<sup>2</sup>El spread en dólares se calculó utilizando como tasa libre de riesgo el swap rate a 1 año, mientras que para colones se utilizó el rendimiento promedio del mercado de liquidez.

	Jun/13	Jul/13	Ago/13	Set/13	Oct/13	Nov/13
PD CDS <sub>5yr</sub>	5.44 %	5.46 %	5.23 %	5.64 %	5.49 %	5.69 %
PD YTMS <sub>1yr</sub>	2.77 %	3.57 %	3.61 %	3.30 %	3.16 %	4.08 %
PD YTMC <sub>1yr</sub>	2.56 %	1.84 %	1.49 %	2.06 %	1.70 %	2.72 %

Cuadro 5.2: Evolución probabilidades de impago del gobierno costarricense

un principio que es defendido en la literatura, pero que en no pocas ocasiones es sobreestimado.

En este punto es importante resaltar que la señoreidad o principio de prelación de deudas que aplica para emisores soberanos en moneda local, es en muchas ocasiones sobreestimada, y que con el objetivo de corregir esta situación, se procedió a calcular el spread entre los títulos emitidos por el Ministerio de Hacienda, incluidos emisores locales, y los rendimientos mensuales promedio del mercado de liquidez, para estimar la probabilidad de impago.

Esta aproximación para el caso del gobierno costarricense, presentó una evolución similar a las probabilidades de impago calculadas para los títulos en dólares, sin embargo, a un nivel menor.

Esto es congruente con el principio de que el gobierno, y las mismas empresas locales, tienen mayores grados de libertad cuando emiten en moneda interna respecto a cuando lo hacen en monedas externas. Algunas investigaciones sobreestiman esos grados de libertad al asignar una probabilidad de impago de 0, obvian por completo la posibilidad de un impago en moneda local, el planteamiento actual considera esos grados de libertad, pero limita su sobreestimación.

## 5.2. Conclusiones

Después de analizarse las tres alternativas para estimar los escenarios de pérdidas esperadas, se llegó a la conclusión de que tanto la técnica convencional del percentil al 99 % de confianza (1.), como la de  $\mu$ s estresados al 99 % de confianza (3.), dan resultados deseables respecto a la pérdida esperada efectiva.

Sin embargo, al buscar una distribución usando los  $\mu$ s estresados al 99 % sobredimensionaba la pérdida esperada, por lo que se decidió no utilizar esta medición alternativa.

La opción de estimar  $\mu$  aleatorias se desestimó por su inestabilidad y por el costo de cálculo al tener que poblar la distribución para tener resultados más coherentes y estables.

Tal como se observa en el cuadro 5.2, las técnicas basadas en información de mercado muestran una mayor variabilidad de la pérdida esperada, variabilidad que es congruente con los problemas fiscales que ha venido experimentando el gobierno costarricense para este caso en particular, lo que se puede interpretar como una incorporación más expedita del deterioro del riesgo de crédito respecto a las técnicas basadas en información fundamental, ya que en ese periodo la calificación soberana costarricense ha permanecido sin cambios.

# Bibliografía

- [1] Edward I. Altman. Default recovery rates and lgd in credit risk modeling and practice: An updated review of the literature and empirical evidence. *New York University, Stern School of Business*, 2006.
- [2] J. A. Chan-Lau. Anticipating credit events using credit default swaps, with an application to sovereign debt crises. *IMF Working Paper*, WP/03/106:1–19, 2003.
- [3] J. A. Chan-Lau. Market-based estimation of default probabilities and its application to financial market surveillance. *IMF Working Paper*, WP/06/104:1–17, 2006.
- [4] D. Duffie. Credit swap valuation. *Financial Analysts Journal*, January/February:73–87, 1999.
- [5] Moody's Global Corporate Finance. Corporate default and recovery rates, 1920–2007. *Moody's Investors Service*, 2008.
- [6] J.C. Hull. *Risk Management and Financial Institutions 3e*, pages 347–366. Wiley Finance, Hoboken, NJ, 2012.
- [7] J.C. Hull and A. White. Valuing credit default swaps i:- no counterparty default risk. *University of Toronto, Joseph L. Rotman School of Management*, pages 1–35, 2000.

- [8] R. C. Merton. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29:449–470, 1974.

