UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DE LIMITE E CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 12.º ANO

Luis Fabián Gutiérrez Fallas

Mestrado em Educação

Área de especialidade em Didática da Matemática

Dissertação de mestrado orientada pela Profª. Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

2016

Resumo

Esta investigação tem como objetivo analisar que compreensão evidenciam os alunos do 12.º ano sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. O quadro teórico evidencia a complexidade destes conceitos do Cálculo Infinitesimal, constatando-se que os alunos têm muita dificuldade na compreensão destes entes matemáticos. Para alcançar o objetivo, assume-se que a compreensão dos conceitos de limite e continuidade envolve: (i) os significados que os alunos atribuem ao conceito, considerando as suas conceções intuitivas; (ii) as representações e a visualização do conceito, nomeadamente o uso e a articulação que os alunos lhes dão; e (iii) as dificuldades de aprendizagem e os erros que manifestam os alunos durante a resolução de tarefas. Este estudo envolve alunos de 12.º ano de uma escola secundária, porque constitui a etapa inicial de transição entre o pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado, na qual os alunos enfrentam procedimentos que já não se levam a cabo através da aritmética ou álgebra simples. A metodologia da investigação segue, em termos gerais, o paradigma interpretativo com uma abordagem qualitativa. O principal procedimento de recolha de dados foi a recolha documental das produções escritas dos alunos nas resoluções de um conjunto de tarefas que foram propostas em sala de aula, além da realização de observações de aula e de uma entrevista a alguns alunos.

Os resultados revelam que os participantes neste estudo evidenciam uma compreensão instrumental dos conceitos de limite e continuidade de uma função, embora se possa identificar duas formas diferentes de desenvolver esta compreensão. Primeiramente, desenvolvem uma compreensão instrumental de caráter mais intuitiva, resolvendo tarefas a partir de experiências particulares mais próximas das suas próprias conceções do que da formalidade matemática, sem terem domínio do conceito em si mesmo. No entanto, depois do estudo das caraterísticas, propriedades, processos e definições dos conceitos, os alunos evidenciam uma compreensão instrumental de caráter mais formal, caraterizada pela aplicação de regras e estratégias pré-estabelecidas pelas convenções matemáticas de sala de aula, bem como o uso, visualização e articulação dos conceitos através de diferentes sistemas de representação, e a formulação de significados mais próximos da conceção dinâmica dos conceitos.

Palavras-chave: Limite de uma função; Continuidade de uma função; Ensino secundário; Representações matemáticas; Visualização matemática.

Abstract

This research aims to analyze the understanding that students of the 12th year show on the concepts of limit and continuity of a function. The theoretical framework highlights the complexity of these concepts of infinitesimal calculus, noting that students have great difficulty in understanding these mathematical entities. To achieve the goal, it is assumed that understanding the concepts of limit and continuity involves: (i) the meaning that students attribute to the concept, considering its intuitive conceptions; (ii) the representations and concept visualization, including the use and articulation that students give them; and (iii) learning difficulties and mistakes that students show while solving tasks. This study involves students from 12th grade of a secondary school because it is the initial stage of transition between elementary mathematical thinking and advanced mathematical thinking, in which students face procedures that are no longer carried out through arithmetic or algebra simple. The research methodology follows, in general terms, the interpretative paradigm with a qualitative approach. The main data collection procedure was the documentary collection of written productions of students in the resolution of a set of tasks that have been proposed in the classroom, in addition to conducting classroom observations and an interview done to a few students.

The results showed that participants in this study reveal an instrumental understanding of the concepts of limit and continuity of a function, although one can identify two different ways to develop this understanding. First, they develop an instrumental understanding with a more intuitive character, solving tasks from particular experiences closer to their own conceptions than of the mathematical formality, without having concept of the domain itself. However, after the study of the characteristics, properties, processes and definitions of concepts, students showed an instrumental understanding with a more formal character. This understanding is characterized by the application of rules and pre-established strategies by mathematical conventions of classroom, well as the use, visualization and articulation of concepts across different systems of representation, and the development of closer meanings of the dynamic conception of the concepts.

Keywords: Limit of a function; Continuity of a function; High school; Mathematical representations; Mathematical visualization.

Esta investigação tem sido financiada pela Universidade da Costa Rica. O mestrando tem usufruído de uma bolsa de estudo do *Régimen de Beneficios para el Mejoramiento Académico en el Exterior para el Personal Docente e Administrativo en Servicio*, a qual se extende desde o 1 de Setembro de 2014 até o 31 de Agosto de 2019, e encontra-se inscrita segundo o documento OAICE-CAB-11-201-2014.

Sabemos que em todas as coisas Deus coopera juntamente com aqueles que o amam, para trazer à existência o que é bom, com os que foram chamados de acordo com o seu propósito. Pois aqueles que de antemão conheceu, também os predestinou para serem conformes à imagem de seu Filho, a fim de que ele seja o primogênito entre muitos irmãos. E aos que predestinou, também chamou; aos que chamou, também justificou; aos que justificou, também glorificou. Que diremos, pois, diante dessas coisas? Se Deus é por nós, quem será contra nós? Aquele que não poupou seu próprio Filho, mas o entregou por todos nós, como não nos dará juntamente com ele, e de graça, todas as coisas?

(Pablo de Tarso, 50 d.C., em Romanos 8:28-32)

Agradecimentos

Quero agradecer à Universidade da Costa Rica, instituição que me tem outorgado a bolsa de estudo que tem financiado totalmente os meus estudos de pós-graduação durante estes dois primeiros anos em Portugal. Igualmente, agradeço aos funcionários da *Oficina de Asuntos Internacionales y Cooperación Externa* que tem estado ao serviço, e à *Escuela de Matemática* por ter acreditado em mim e apoiado na realização destes estudos. ¡Muchas Gracias!

O meu profundo agradecimento à minha orientadora, Professora Doutora Ana Henriques, pela forma como me acompanhou na realização deste trabalho, pela confiança, incentivo e exigência, pelas suas preciosas sugestões e críticas pertinentes, e acima de tudo pela permanente disponibilidade e pelos seus ensinamentos.

Também quero agradecer aos professores do Departamento de Didática da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pelos contributos à minha formação e os ensinamentos que me tem permitido crescer como investigador. Especialmente ao professor Doutor João Pedro da Ponte por acompanhar por perto este trabalho e estar sempre disponível.

Agradeço à escola onde se realizou esta investigação, à professora titular da turma e aos alunos, sem os quais não teria sido possível concretizar este trabalho.

Quero agradecer profundamente a minha companheira fiel e ajuda idónea nesta aventura, minha querida esposa, Joselyn. Agradeço pelo apoio, o amor incondicional, e a paciência que tem mostrado durante todo este tempo. Muito obrigado pelo esforço, porque maior é a recompensa do trabalho dos dois. ¡Muchas gracias mi amor! ¡Te amo! Também quero agradecer a minha pequena princesa Sara, quem chegou no meio deste caminho e converteu-se numa luz que tem iluminado a minha vida.

Agradeço a todas as pessoas que têm apoiado os meus estudos. Agradeço às minhas professoras e amigas: Andrea Araya, Susana Murillo e Gabriela Valverde, pelo seu apoio e confiança que desde o início fizeram possível viver esta experiência. Aos meus familiares, que apesar da distância, continuam mostrando o seu carinho e apoio incondicional; aos meus amigos em Costa Rica. ¡Muchas gracias! ¡Pura vida!

Finalmente, agradeço às maravilhosas pessoas que tenho conhecido em Portugal, as quais nos têm recebido, a mim e minha família, com muito carinho. Especialmente ao Pastor Ismael, à Pastora Patrícia, ao Pastor Marcelo, ao Nelo e à Kariny, em fim, muito obrigado a todos na Embaixada Cristã por acolher-nos com amor e serem a nossa família.

Índice Geral

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresento as motivações pessoais que conduziram à realização deste trabalho, assim como a sua pertinência quando enquadrado nas orientações curriculares nacionais e internacionais, como também o caráter relevante que tem a temática para a investigação em Educação Matemática. Além disso, formulo o objetivo geral e as questões de investigação que vão orientar o que se pretende alcançar com este trabalho.

1.1 Motivações e pertinência do estudo

Ao longo da minha formação como professor de Matemática, tenho concebido a Matemática como uma área disciplinar fundamental para promover o desenvolvimento de distintas capacidades ou habilidades nos alunos, para além das esperadas aprendizagens estabelecidas num programa de estudo. Por exemplo, a abstração, a visualização, o uso de distintas representações dos entes matemáticos, a comunicação, a tomada de decisões no momento da resolução de uma tarefa, a confiança em si mesmo, o trabalho colaborativo, entre outras.

Depois da minha preparação inicial e durante os três anos de trabalho como docente na Universidade da Costa Rica, onde tive a oportunidade de lecionar a disciplina de *Cálculo*

Infinitesimal para as áreas de Engenharia, Saúde e Economia, considero que o processo de ensino da Matemática deve estar ao serviço da aprendizagem dos alunos, procurando garantir que essa aprendizagem seja um processo de compreensão através da criação de significados e aplicação dos conceitos matemáticos. Nesse sentido, um dos meus objetivos como professor é promover a compreensão dos conceitos matemáticos de forma que os alunos sejam capazes de criar a sua própria interpretação e definição dos objetos matemáticos, embora não descurando a definição formal, mas sim atribuindo-lhes significado para que os possam utilizar e visualizar de distintas formas, mediante diferentes representações e em diversos contextos, tanto no académico como no seu quotidiano.

No caso dos conhecimentos matemáticos respeitantes a uma disciplina inicial de Cálculo Infinitesimal, tive experiências em diferentes turmas que permitiram-me observar distintas interpretações dos alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, tanto, interpretações iniciais, antes do processo de aprendizagem, como as que desenvolveram durante e no final deste processo. Esta observação levou-me a perceber que os alunos tinham grandes dificuldades para dar significado aos conceitos de limite e continuidade de uma função, tal como referido em diversos estudos (Cornu, 1991; Juter, 2006; Karatas, Guven & Cekmez, 2011; Moru, 2009; Prezenioslo, 2004; Tall, 1992).

Tall e Vinner (1981) indicam que é provável que as conceções ou interpretações dos alunos do conceito de limite e continuidade de uma função contenham fatores que entram em conflito com a definição formal do conceito, fatores que podem estar ocultos e causar confusão na aprendizagem destes conceitos. Mas recentemente, para Prezenioslo (2004) “a aprendizagem da noção de limite tem dificuldades, obstáculos e possibilidades de degeneração “ocultos” em sua própria “natureza”” (p. 130, aspas no original). Então, pela sua natureza, existem dificuldades de aprendizagem na compreensão dos conceitos de limite e continuidade (Jaffar & Dindyal, 2011; Karatas et al., 2011; Pons, Valls & Llinares, 2012).

Por outro lado, os conceitos de limite e continuidade de uma função são conceitos de natureza complexa pois requerem processos do *Pensamento Matemático Avançado* (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, & Rico, 2013; Jaffar & Dindyal, 2011), nomeadamente os processos cognitivos que caraterizam este tipo de pensamento, tanto ao nível psicológico como representar e abstrair, como também os processos matemáticos como definir, demonstrar e formalizar (Fernández-Plaza et al., 2013). Estes autores consideram, ainda, que a diferença entre o pensamento matemático elementar e o avançado radica em que neste último têm maior importância as definições, enquanto na matemática elementar os objetos descrevem-se a partir das experiências. Assim, os autores argumentam que o primeiro contato dos alunos com os conceitos de limite e continuidade de uma função constitui "um período de transição no qual os alunos abordam com técnicas elementares os conteúdos matemáticos cujo desenvolvimento histórico, epistemológico e didático merece o estatuto de avançados" (Fernández-Plaza et al., 2013, p. 132).

Vários autores têm-se pronunciado sobre a relevância do desenvolvimento dos conceitos de limite e continuidade, atendendo a que a noção de limite de uma função é fundamental para o estudo do Cálculo Infinitesimal, constituindo a base prévia para a aprendizagem de outros conceitos como a convergência, continuidade, derivadas ou integrais (Jaffar & Dindyal, 2011; Juter, 2005a; Karatas et. al., 2011; Pons, Valls & Llinares, 2012) e às suas aplicações noutras áreas da Matemática como as *Equações Diferenciais*, a *Geometria Diferencial* e a *Estatística Matemática Avançada* (Karatas et. al., 2011; Nair, 2010).

Em relação às abordagens didáticas do ensino destes conceitos, Tall e Vinner (1981) revelaram que a forma de ensinar estes conceitos carateriza-se por seguir uma técnica em espiral: introduzir o conceito contextualmente através de exemplos específicos e logo voltar a esses exemplos em determinados momentos, de modo que a definição formal do conceito se vá desenvolvendo subtilmente. A este respeito, Fernández-Plaza et al. (2013) acrescentam que além desta técnica tradicional de ensino, os conceitos de limite e continuidade são apresentados sem fazer referência a contextos reais, eludindo os significados pessoais que os alunos possam associar a tais definições.

No entanto, Prezenioslo (2004) salienta o difícil que é determinar com precisão as formas em que os alunos aprenderam o conceito de limite nas diferentes disciplinas universitárias e na secundária, não obstante os resultados do seu estudo revelam que os alunos estiveram expostos a diferentes teorias matemáticas relacionadas com os limites de uma função, como a definição formal épsilon-delta, a teoria dos limites a partir das sequências numéricas, noções da topologia, e as conceções intuitivas de aproximação numérica ou a partir da análise do gráfico de uma função.

O que foi dito mostra que provavelmente os alunos haviam formado diversas conceções sobre o limite ao longo das diferentes disciplinas de Cálculo Infinitesimal, as quais na sua maioria se afastam das definições formais (Prezenioslo, 2004). O que pode levar a que muitos alunos sentem-se confiantes sobre o seu conceito de limite apesar da sua falta de capacidade para apresentar uma definição do conceito e seguros de aplicar essa conceção na resolução de tarefas rotineiras, mas sendo incapazes de dar justificações corretas e coerentes com a teoria em tarefas de maior nível de dificuldade (Juter, 2006). Nas palavras de Skemp (1976), estas situações podem resultar de uma compreensão instrumental dos conceitos matemáticos, ocasionando obstáculos ou dificuldades na aprendizagem dos alunos para garantir uma compreensão relacional destes conceitos.

Ainda que os recentes recursos tecnológicos (como os computadores e calculadoras gráficas) e *software* matemático (como o *GeoGebra*) sejam potenciais ferramentas que professores e alunos têm ao seu dispor para apoiar a aprendizagem destes conceitos, segundo Tall e Vinner (1981) o seu uso fica limitado à apresentação da imagem do conceito e não é aproveitado para aprofundar a sua definição formal. Assim, para Tall (1992) a utilização de ferramentas tecnológicas é vista por alguns professores como a introdução de problemas adicionais que aumentam as dificuldades e, por outros, como um caminho onde o aluno pelo menos aprende os algoritmos necessários para solucionar uma determinada questão.

Os estudos já mencionados, na sua maioria, têm sido feitos ao nível do ensino universitário, revelando que as disciplinas universitárias não têm conseguido corrigir as ideias erróneas sobre estes conceitos; pelo contrário, novas associações incorretas desenvolvem-se nestas disciplinas (Prezenioslo, 2004). Portanto, é preciso realizar investigações sobre o desenvolvimento da aprendizagem destes conceitos ao nível secundário, de modo a ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades descritas, adquirindo uma correta compreensão destes entes matemáticos (Domingos, 2003).

Em Portugal, o desenvolvimento do conceito de limite e continuidade inicia-se no ensino secundário. O *Programa de Matemática A* para 11.º ano, no seu tema II sobre a *Introdução ao Cálculo Diferencial I*, apresenta como indicação metodológica: “o conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito) ” (ME, 2002a, p. 6). Na continuação deste tema, no *Programa de Matemática A* para 12.º ano, indica-se que nesta altura “são estudados de forma mais rigorosa conceitos já utilizados antes de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada” (ME, 2002b, p. 4).

De acordo com os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NTCM, 2007) os alunos ao concluírem o 12.º ano deverão ter predisposição, conhecimentos e estratégias que lhes permitam enfrentar os novos desafios. Para o qual se pressupõem os seis princípios para a Matemática Escolar, entre os quias, o princípio de aprendizagem declara que “os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios” (NTCM, 2007, p. 11). Colocando a compreensão dos conceitos matemáticos como um aspeto essencial na aprendizagem dos alunos. Aliás, fundamenta-se que a capacidade de representar e usar as representações dos entes matemáticos contribuem no alcance deste alvo, pois os alunos de 12.º ano deverão produzir explicações, formular questões e escrever argumentos logicamente corretos e coerentes para si mesmos, para os professores e para os colegas, pelo que deverão usar representações geométricas e símbolos algébricos de forma correta e apropriada; considerando que "diferentes representações sustentam diferentes formas de pensar e manipular os objetos matemáticos" (NTCM, 2007, p. 423).

Portanto, este estudo envolve participantes de uma escola secundária, porque é nesta etapa de transição entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado que os alunos enfrentam procedimentos que já não se levam a cabo através da aritmética ou álgebra simples (Tall, 1992). Pelo que procura-se analisar a compreensão que tem os alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, nomeadamente, através dos significados que os alunos atribuem a estes conceitos durante a resolução de tarefas nas que os alunos usam diferentes sistemas de representação e a visualização, aliás, considerando as dificuldades de aprendizagem que manifestam os alunos; já que "se se encontram os obstáculos, o ensino pode ser alterado consequentemente, não mediante a exclusão das dificuldades, mas sim com o apoio e ajuda aos alunos para superá-las" (Juter, 2005a, p. 13).

1.2 Objetivo e questões do estudo

Esta investigação centra-se em quatro aspetos que têm lugar durante o processo de aprendizagem que leva à compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função: os significados, as representações, a visualização matemática e as dificuldades de aprendizagem.

Portanto, o objetivo geral que se pretende alcançar com este trabalho é analisar que compreensão evidenciam os alunos do 12.º ano sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, indagando, em particular:

1. Quais os significados que os alunos desenvolvem destes conceitos?
2. Como os alunos utilizam as diferentes representações e a visualização destes conceitos para obter significados e resolver tarefas que os envolvem?
3. Quais os principais erros e dificuldades que os alunos manifestam na compreensão destes conceitos e na resolução de tarefas que os envolvem?

Capítulo 2

Enquadramento Teórico

Este capítulo está estruturado em cinco secções: na primeira, apresento os aspetos relacionados com a definição e o tratamento curricular dos conceitos de limite e continuidade de uma função. Na segunda secção apresento várias teorias sobre a compreensão destes conceitos, nomeadamente a posição de distintos autores sobre o processo de criação de significados. Na terceira secção pretendo discutir as representações matemáticas focando, em particular, os três tipos de representações que serão considerados neste estudo: representação verbal, simbólica e geométrica. A quarta secção aborda o papel da Visualização Matemática na compreensão destes conceitos. Por último, na quinta secção sintetizo as dificuldades de aprendizagem associadas à compreensão destes conceitos que são mais evidenciadas na literatura.

2.1 Os conceitos de limite e continuidade de uma função

Esta seção tem o propósito de apresentar o tratamento que tem sido dado aos conceitos de limite e continuidade de uma função, tanto ao nível da investigação como ao nível curricular em Portugal (Programas de Estudo do Ensino Secundário).

2.1.1 A definição dos conceitos

A partir da revisão de literatura realizada sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, identificam-se duas perspetivas de os abordar: a partir da d*efinição informal ou conceção dinâmica*, que se desenvolve de maneira intuitiva ou a *definição formal ou conceção métrica* que é o resultado de um processo dedutivo (Tall, 1992).

A definição informal refere-se ao uso dos conceitos a partir de exemplos específicos e apresentados mediante explicações informais, por exemplo, no caso do limite considerado como um processo dinâmico de aproximação e o conceito de continuidade construído a partir do uso coloquial do termo, como ao dizer que "*choveu continuamente durante todo o dia*" (Tall & Vinner, 1981). Nesta perspetiva, a conceção dinâmica do limite de uma função é definido a partir do seguinte enunciado:

> Seja f uma função e a um número real, o número L é o limite da função f no ponto a, escrevendo-se como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se quando x se aproxima de a mais do que qualquer outra aproximação, então as suas imagens $f(x)$ aproximam-se de L mais do que qualquer outra aproximação. (Pons et al., 2011, p. 393)

A conceção dinâmica de continuidade num ponto surge como consequência deste sentido de aproximação, no facto de que a função é contínua se o valor limite que alcança é igual à imagem do ponto em que é estudado o limite (Fernández-Plaza et al., 2013) ou mediante as ideias de que uma função é contínua se o seu gráfico não tem lacunas ou espaços vazios (Tall & Vinner, 1981).

A definição formal dos conceitos é o resultado de um processo dedutivo. Nesta perspetiva o limite, considerado como objeto e não como processo, é definido a partir da conceção métrica representada simbolicamente da seguinte forma (Pons et al., 2011, p. 393):

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \; (0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon)$$

Esta definição também pode ser apresentada, segundo a *definição de Weierstrass*, com o enunciado seguinte: "L é chamado de limite de $f(x)$ quando $x \to a$, se para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $fx{-}L{<}\varepsilon$ para todo o x que pertence ao domínio, com $0 < |x - a| < \delta$" (Juter, 2006, p. 13). Consequentemente, no caso particular quando o $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, diz-se que a função é contínua, que formalmente define-se (Domingos, 2003, p.93):

A função $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ se e só se

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: \forall x(0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon)$$

Deste modo, a sua natureza dos conceitos muda conforme os alunos vão avançando na sua aprendizagem. Por exemplo, o limite inicialmente pode ser um processo intuitivo de aproximação e, a seguir, concebe-se o mesmo desde a definição formal ($\varepsilon - \delta$). Assim, quando são demonstrados alguns teoremas em que a definição é suprimida e os teoremas e resultados práticos ocupam o seu lugar, os alunos deparam-se com diferentes significados e definições do conceito (Tall, 1992).

2.1.2 Tratamento curricular dos conceitos

De acordo com o trabalho de Helena Santos (2010), que no seu capítulo terceiro analisa a presença do conceito de limite, ao longo da história, nos programas de Matemática em Portugal, em 1905 ainda não era contemplado o estudo de limite de uma função num ponto, apesar de ser introduzido no Ensino Secundário o conceito de derivada. Só na reforma de 1918 se apresenta, pela primeira vez, um capítulo intitulado *Elementos de Cálculo Infinitesimal*, onde o conceito de limite antecede a noção de derivada e esta temática começa a ganhar autonomia. A partir desta altura o estudo do conceito de limite foi integrado regularmente no ensino pré-universitário, tendo sofrido uma interrupção de doze anos entre 1936 e 1948.

No programa do ensino secundário para os cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas (ME, 2002), ainda em vigor nos 11.º e 12.º ano, a presença deste tópico situa-se no *Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial I* e *II*, respetivamente. Para o 11.º ano de Matemática A apresentam-se como indicações metodológicas que "o conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito)" (ME, 2002a, p. 6). Da mesma forma, os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ são introduzidos através de uma abordagem experimental. Também se assinala que para calcular derivadas de funções simples não é preciso levantar questões especiais sobre os limites, basta recorrer à sua noção intuitiva e ao seu uso informal. A seguir, neste mesmo ano, apresenta-se a noção de Sucessão e mediante o uso calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos, abordam-se os conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão.

No programa de Matemática A para o 12.º ano indica-se que "aqui são estudados de forma mais rigorosa conceitos já utilizados antes de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada" (ME, 2002b, p. 4). Entre os conteúdos que são propostos dentro da teoria de limites estão: limite de função segundo *Heine*, propriedades operatórias sobre limites, limites notáveis, indeterminações, assimptotas, continuidade, Teorema de *Bolzano–Cauchy* e aplicações numéricas. Alerta-se que o programa apenas pressupõe que se levantem as indeterminações em casos simples e aconselha-se que os alunos experimentem numérica e graficamente a relação entre os limites no infinito das funções exponencial, potência e logarítmica, assim como também o estudo intuitivo de expressões trigonométricas como $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x}$.

Por outro lado, a reforma curricular mais recente, o *Programa e Metas Curriculares Matemática A do Ensino Secundário*, homologado em 2014 e cuja implementação se iniciou no ano letivo 2015-16 no 10.º ano de escolaridade, apresenta algumas diferenças com respeito ao programa anterior (ME, 2002). Neste programa os aspetos teóricos em relação ao limite e a continuidade de uma função são situados no domínio *Funções Reais de Variável Real*. Por exemplo, no que respeita à definição do conceito de limite segundo *Heine* e ao desenvolvimento algébrico dos limites, é sugerido que sejam introduzidos no 11.º ano de forma bastante completa, incluindo uma análises das situações de indeterminação. Assim, também para este ano e em relação com a continuidade de uma função, é pedido que o aluno além de identificar se a função é contínua num ponto também justifique mediante a propriedade se o limite existe e se é igual à imagem da função nesse ponto. Para o 12.º ano "completa-se o estudo dos limites de sucessões e de funções. Continua-se ainda o estudo das funções contínuas e das funções diferenciáveis, enunciando-se, em particular, o Teorema de *Weierstrass* e o Teorema dos valores intermédios (ou de *Bolzano-Cauchy*)" (ME, 2014, p. 21).

2.2 Compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função

Para Skemp (1976) existem duas formas de compreender os conceitos matemáticos: *compreensão instrumental* ou *compreensão relacional*. O autor refere-se à compreensão instrumental como aquela que prioriza a memorização de factos, regras e normas pré-estabelecidas, promovida por um ensino fechado que orienta cada passo do individuo até chegar ao resultado desejado, isto é, focado no produto final da aprendizagem. A compreensão relacional consiste na construção de uma estrutura ou esquema conceitual em que o aluno poderia produzir um número ilimitado de planos e ideias para fundamentar o seu agir no processo de aprendizagem. Esta compreensão pode ser motivada por ideias inovadoras como jogos ou estratégias dinâmicas que promovem o desenvolvimento de competências e habilidades nos indivíduos e que são utilizadas em diferentes contextos, quer na Matemática quer em outras disciplinas.

Esta ideia de considerar duas formas de compreensão, uma mais superficial ou desarticulada e outra mais profunda ou integrada, relaciona-se com a posição de Gray e Tall (1991, 1994) sobre os tipos de pensamento que levam a um indivíduo a compreender determinado conceito matemático. Para estes autores a representação simbólica que é atribuída a um determinado conceito tem dois significados, por um lado o simbolismo leva a pensar num processo (algorítmico, operacional, analítico, entre outros) e por outro representa o objeto matemático em si mesmo (definição).

De este modo, definem *procept* como "a combinação de processo e conceito, em que processo e produto estão representados pelo mesmo simbolismo. Assim, o símbolo de um *procept* pode evocar um processo ou um conceito" (Gray & Tall, 1991, p. 73, itálico no original). Por exemplo, "a notação $\lim_{x \to a} f(x)$ representa o processo de *tender para um limite* e o conceito do *valor do limite*" (Gray & Tall, 1994, p. 119, itálico no original). Portanto, os autores afirmam que os indivíduos mais capazes, isto é, os que têm maior compreensão do conceito, são aqueles que interpretam a representação simbólica de forma flexível considerando a sua ambiguidade, ou seja, os indivíduos têm uma compreensão mais completa e profunda quando combinam o pensamento processual e o pensamento conceitual sobre o objeto matemático. Os autores definem esta combinação como *pensamento proceptual*: "Nós caraterizamos o *pensamento proceptual* como a capacidade de manipular de forma flexível o simbolismo como processo ou conceito, intercambiando livremente entre diferentes simbolismos para o mesmo objeto" (Gray & Tall, 1994, p.121, itálico no original). Acrescentam, ainda, que os dados empíricos dos seus trabalhos (Gray & Tall, 1994) revelam que os indivíduos têm dificuldades na compreensão dos conceitos quando o seu pensamento fica limitado só ao processo, tratando a representação simbólica de forma desarticulada e separada do próprio objeto matemático.

No caso do conceito de continuidade de uma função, especificamente sobre o conceito de função, Sajka (2003) e Sfard (1991) consideram que o conceito de função apresenta uma natureza dupla, no sentido de que a sua compreensão implica o reconhecer a função de duas formas que constituem uma unidade coerente: (i) *estruturalmente*, como objeto; e (ii) *operativamente*, como um processo. Por exemplo, a função é um conjunto de pares ordenados e através da sua fórmula conduz a um processo de cálculo de valores ou procedimento para desenhar o seu gráfico (Sfard, 1991). Nomeadamente, o conceito de continuidade de uma função implica a compreensão como objeto (função contínua) e como processo a partir de que a definição de continuidade apela à formulação e ao cálculo de limites para estudar e determinar a continuidade da função.

Como já referi anteriormente, a compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função acontece em um período de transição entre o *Pensamento Matemático Elementar* e o *Pensamento Matemático Avançado* (Fernández-Plaza et al., 2013; Jaffar & Dindyal, 2011). A teoria APOS (*Actions-Processes-Objects-Schemas*) ou APOE (*Ações-Processos-Objetos-Esquemas*) desenvolvida nos trabalhos de Dubinsky (1991) e Asiala et al. (1996) para ser aplicada na compreensão dos conceitos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado considera que:

> A compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação dos objetos físicos ou mentais previamente construídos para formar ações, as ações interiorizam-se para formar processos que se encapsulam para formar objetos. Os objetos podem voltar a descapsular-se até ao processo do qual se formaram. Finalmente as ações, os processos e os objetos podem organizar-se em esquemas (Asiala et al., 1996, p. 6).

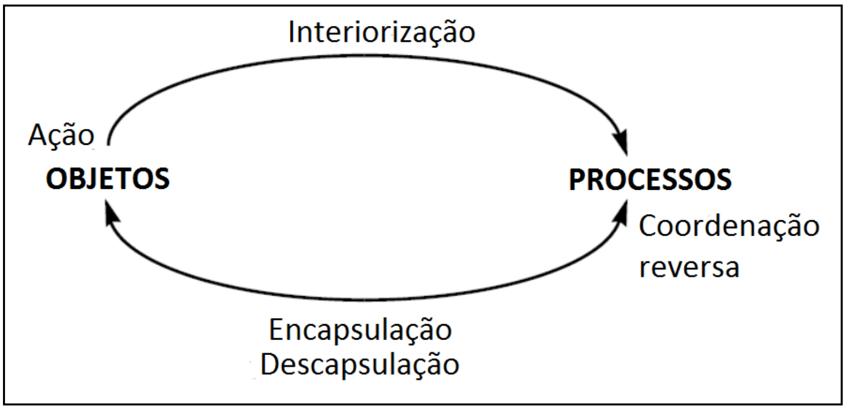


Figura 2.1 Esquemas e a sua construção (Adaptado de Dubinsky, 1991)

Nesta teoria, uma *ação* é qualquer transformação física ou mental dos objetos resultado de uma resposta aos estímulos externos que o indivíduo percebe, como o facto de lembrar um ato de memória. Quando se repete uma ação e o individuo reflete sobre essa ação de modo a já não ter necessidade de estímulos externos, então pode fazer uma construção mental chamada *processo*. Um processo é uma transformação de um objeto que tem a caraterística importante do indivíduo estar no controlo dessa transformação, no sentido de descrever e refletir sobre todos os passos do processo sem necessidade de fazê-los. Um *objeto* é construído através da encapsulação de um processo, que se alcança quando o indivíduo percebe a totalidade do processo e que transformações pode operar sobre esse objeto, sendo importante que o individuo seja capaz de avançar e retroceder entre um objeto e um processo. Finalmente, um *esquema* para um determinado conceito matemático corresponde ao conjunto de ações, processos e objetos vinculados por alguns princípios gerais que existe na mente do indivíduo e pode ser aplicado numa situação problemática que envolva o conceito.

No trabalho de Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf e Vidakovic (1996) procura-se compreender o conceito de limite a partir de um esquema de processos coordenados. Este esquema consiste em que o conceito de limite, desde a sua definição informal e dinâmica, implica o cálculo de um número infinito de passos, que só pode ser entendida através da conceção de um processo. De modo que o indivíduo que não vai mais além da ação de calcular um número finito de valores próximos à abscisa respetiva tem uma noção da aproximação de uma variável a uma quantidade fixa, mas essas ações não se interiorizam num processo. Os autores salientam que esta interiorização das ações é complexa no sentido em que a interiorização não deve levar só a um processo mas a uma dupla de processos coordenados que conformam o esquema: um processo que descreve o que acontece no domínio e outro em relação com o que acontece no contradomínio da função. Uma vez que isto é alcançado, o indivíduo procede à encapsulação destes processos coordenados num objeto, o qual será utilizado para quantificar o valor do limite e perceber o que este valor representa.

Outra teoria que procura explicar como a compreensão de um conceito evolui a partir das ações do individuo sobre os objetos e os processos é referida por Tall (2004a, 2004b) como a teoria dos *três mundos*, partindo do facto de não haver só três tipos distintos de conceitos matemáticos (geométricos, simbólicos e axiomáticos) mas sim três tipos diferentes de desenvolvimento cognitivo que fazem alusão a três mundos matemáticos diferentes. Em relação ao primeiro mundo, o autor explica que emerge da nossa perceção do mundo, constituído pela nossa forma de pensar acerca das coisas que percebemos, não só do mundo físico mas também do nosso próprio mundo mental, centrando-se na ideia de realização conceptual, que se refere à forma em que construímos noções mais sofisticadas das experiências sensoriais. Este mundo é chamado pelo autor de *mundo* *personalizado/personificado* (*embodied world*, no original). O desenvolvimento cognitivo deste mundo sobre a conceção da verdade dos objetos começa com a noção de que a verdade se estabelece mediante a experimentação, isto quer dizer que se a experiência produz o resultado esperado então é certo. Conforme as ações neste mundo vão evoluindo, as propriedades dos símbolos tomam maior presença dando lugar a um novo mundo, chamado *mundo proceptual* (*proceptual world*, no original*)*. Surge como o mundo dos símbolos que se utilizam no cálculo infinitesimal e para a manipulação aritmética ou algébrica. Este mundo desenvolve-se através de uma sequência de diferentes contextos que em diversas ocasiões requerem ser reconstruídos a partir de experiências anteriores. O desenvolvimento cognitivo da verdade, neste caso, está ligado ao cálculo numérico e à manipulação algébrica dos símbolos, sendo estes processos que permitem verificar a verdade.

Por último, o *mundo formal* (*formal world*, no original), é baseado em propriedades expressas por meio de definições formais que se utilizam como axiomas para especificar as estruturas matemáticas, tais como grupo, campo, espaço topológico, entre outras. Neste mundo não se trabalha com objetos familiares resultantes da experiência mas com objetos deduzidos mediante provas formais. Consiste, portanto, no mundo onde se constrói uma teoria coerente e deduzida logicamente. Deste modo, o desenvolvimento cognitivo da verdade é estabelecido com provas formais axiomáticas. Finalmente, o autor argumenta que é evidente o facto de que cada mundo cresce em sofisticação e os alunos percorrem diferentes caminhos através destes mundos, evidenciando a sua compreensão do conceito. Por isso, é importante considerar que se produzem diversos acontecimentos nestes caminhos que ocasionam o progresso significativo ou o insucesso do aluno, dependendo do seu percurso entre um mundo e outro.

No trabalho de Juter (2007), a autora entrelaça aspetos respeitantes ao desenvolvimento do conceito de limite com esta teoria dos três mundos da Matemática. Segundo a autora, o conceito de limite pode manipular-se inicialmente através de um enfoque exploratório intuitivo, com tabelas de valores de uma função e seu gráfico (mundo personalizado), depois ter lugar o uso de entidades expressas simbolicamente (mundo proceptual) e por último considerar-se a definição formal do conceito (mundo formal). No seu trabalho empírico realizado com alunos de uma disciplina de Matemática do primeiro semestre na Universidade Tecnológica de Luleå, na Suécia, procurava perceber "Como se desenvolvem os alunos no que respeita ao conceito de limite de funções no nível universitário básico de Suécia?” (Juter, 2006, p. 11). Obteve como resultados que quando as representações intuitivas do conceito de limite não são suficientemente desenvolvidas no mundo personalizado provocam algumas ideias erróneas que dificultam a compreensão do conceito. Além disso, observou que na maioria dos alunos a compreensão do conceito de limite evoluiu durante o trabalho realizado na disciplina mas sem alcançar com sucesso o mundo formal, ou seja, os alunos não chegavam a compreender a definição formal de limite.

Noutro estudo semelhante, Tall e Vinner (1981) apresentam um enquadramento teórico para analisar o desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre a noção de limite e continuidade de uma função. Para isso, estes autores começam por definir vários termos. Um primeiro termo - *conceito-imagem* - refere-se à estrutura cognitiva total que se associa com o conceito em questão e que inclui as imagens mentais, propriedades e processos relacionados com ele. Este conceito-imagem é construído através de experiências múltiplas, mudando conforme os novos estímulos e a maturidade cognitiva do indivíduo. Associado a este termo surge o *conceito-imagem evocado* que é a parte do conceito que se ativa num momento determinado por um estímulo específico. Neste aspeto, os autores salientam que em diferentes momentos podem ser evocados imagens contraditórias sobre o mesmo conceito. Na teoria exposta utiliza-se, igualmente, o termo *conceito-definição* que se refere ao conjunto de palavras ou símbolos que se usam para especificar e comunicar as ideias em torno do conceito. Esta definição pode ser aprendida de memória ou por reconstrução pessoal de uma definição formal, o que pode gerar que o conceito-definição seja diferente da definição formal matematicamente aceite. Estes termos podem relacionar-se num contexto pouco significativo para o aluno, onde o professor define formalmente um conceito matemático, mas as atividades de aula estão orientadas maiormente para que o aluno utilize um conceito-imagem que, ainda que esteja inadequado, é capaz de resolver as tarefas propostas. Neste caso, o conceito-definição é uma parte inativa na estrutura cognitiva do aluno.

Os autores argumentam que, frequentemente, os conceitos-imagem de limite e continuidade de uma função contêm fatores que entram em conflito com a sua definição formal e que podem estar ocultos e causar confusão na aprendizagem formal destes conceitos. Neste sentido, os autores definem *fator potencial de conflito* à parte do conceito-imagem que entra em conflito com outra parte da imagem do mesmo conceito ou com a sua definição formal. Acrescentam, ainda, que os alunos que têm um fator potencial de conflito no seu conceito-imagem podem desenvolver confiança nas suas próprias interpretações sobre o conceito a tal ponto de considerar a teoria formal como inoperante na resolução das tarefas.

Estas ideias teóricas têm sido base de referência em várias investigações sobre o conceito de limite e continuidade (Domingues, 2003; Juter, 2006; Nair, 2010; Prezenioslo, 2004). Por exemplo, Prezenioslo (2004), no seu estudo com estudantes universitários na Polónia, procurava determinar os conceitos-imagem do limite em relação com as associações, conceções e intuições que os alunos têm relacionadas com este conceito. Assim, para além de considerar os termos propostos por Tall e Vinner (1981) define outros como associação, intuições, eficiência, degeneração e elemento chave. Por *associação* entende-se a conexão feita na mente entre diferentes ideias ou objetos. *Intuições* refere-se às conceções que algum individuo considera como óbvias acerca de um conceito dado, podendo ser incompatíveis com o significado matemático aceite. *Eficiência* relaciona-se com o *conceito-imagem eficiente* quando o aluno é capaz de utilizar o seu conceito-imagem com sucesso na resolução de problemas. Por outro lado, define-se *degeneração do conceito matemático* quando o conceito-imagem é inadequada e difícil de corrigir durante a aprendizagem dos alunos. Finalmente, o *elemento chave da imagem* é o elemento mais significativo que o aluno utilizou na resolução de tarefas ou para solucionar situações complexas.

Também Domingos (2003), a partir dos dados empíricos recolhidos no seu estudo, caracterizou três níveis de complexidades sobre o conceito-imagem das noções iniciais do Cálculo Infinitesimal (limites, derivas, integrais), as quais são: conceito-imagem incipiente, conceito-imagem instrumental e conceito-imagem relacional. O *conceito-imagem incipiente* é o nível em que agrupa os conceitos-imagem que são muito incompletos, referindo-se a objetos elementares que por si só não traduzem o conceito pretendido. Na maior parte das vezes referem apenas algumas características mais notórias do objeto matemático. Enquanto no nível do *conceito-imagem instrumental* inclui o uso de alguns objetos matemáticos que estão na base do conceito em estudo. Encontram-se alguns objetos mais complexos que estão na base dos conceitos abordados sendo possível estabelecer processos que possam conduzir à construção dos novos conceitos. É possível identificar alguns processos realizados sobre esses objetos, mas falta a coordenação entre eles para que possam ser encapsulados em novos objetos. No último nível, *conceito-imagem relacional*, refere-se aos conceitos-imagem que são abordados de forma estrutural, isto é, como objetos matemáticos com uma existência própria para além dos processos que estiveram na sua origem, sendo os alunos capazes de recorrer a esses processos sempre que seja necessário. Neste nível é possível encarar os conceitos como objetos matemáticos e como processos.

Por outro lado, para Jaffar e Dindyal (2011), a compreensão dos conceitos consiste na interpretação dos seus significados, pelo que cada individuo tem a sua própria interpretação que implica a tradução dos significados para si mesmo, sendo um facto relativo e indeterminado. Esta interpretação consiste em identificar-lhe os aspetos ou caraterísticas essenciais de interesse e concebê-los como um todo para que estejam disponíveis como uma entidade sobre a qual pensar (Gray & Tall, 2007). De acordo com Mata-Pereira e Ponte (2012) estes processos de significação são os que permitem estabelecer as conexões necessárias para formular, testar e justificar conjeturas e, ao mesmo tempo, perceber como o conceito se relaciona com outros conceitos e a sua aplicação em distintos contextos, considerando ainda que "compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos só é possível ao observar as suas representações" (p. 85).

Seguindo esta linha de ideias, vários autores defendem que a compreensão dos conceitos matemáticos está ligada com a capacidade que o aluno tem para utilizar diferentes representações de um mesmo conceito (Biza, Diakoumopoulos & Souyoul, 2007; Duval, 2006; Juter, 2005a; Karatas et al., 2011; Tall, 1992). Segundo Duval (2006), "a compreensão matemática requer uma coordenação interna entre os diversos registos de representação semióticos possíveis de escolher e usar" (p. 158) e, nesta coordenação interna, surgem representações mentais dos conceitos, sendo essencial que estejam bem construídas para uma compreensão profunda dos conceitos fundamentais do cálculo, como no caso do conceito de limite (Bezuidenhout, 2001).

Este uso de diferentes representações deve ser produto de uma manipulação flexível das mesmas. Em Tall (1992) indica-se que os alunos que alcançam maior sucesso no Cálculo Infinitesimal são aqueles que de maneira flexível e versátil utilizam diferentes representações dos conceitos – simbólicas, numéricas e visuais – e reconhecem a representação que é útil na situação particular. Além disso, Juter (2005a) salienta que é preciso que nesta manipulação as representações não entrem em conflito nem se contradigam, mas que se integrem num modo que o aluno seja capaz de identificar as conexões entre elas. A este propósito, no estudo de Moru (2009) formulou-se uma pergunta dirigida aos alunos numa entrevista: Qual é a sua compreensão do conceito de limite?

Obtendo como resultado que três deles descreveram limite em termos do processo de aproximar ou mover-se em direção a algo (dinâmico), dois descreveram-no segundo as operações para calcular o valor de um limite (operacional), outros dois relacionaram-no com os pontos numa vizinhança e mais dois como um ponto final. Deste modo o autor conclui que "a conceção de limite muda com as formas de representação" (Moru, 2009, p. 450) e, portanto, "a compreensão do conceito de limite numa das representações, não implica necessariamente a sua compreensão noutra representação" (Pons et al., 2011, p. 394).

Natsheh e Karsenty (2014) também têm encontrado evidência para conjeturar que o pensamento matemático surge da interação entre o sistema simbólico e o sistema visual-espacial do cérebro, interação que se ativa nos dois hemisférios do cérebro, pelo que a instrução que motiva estes sistemas durante a aprendizagem é fundamental para a compreensão dos conceitos matemáticos avançados. Isto é, a compreensão dos conceitos surge da integração entre o raciocínio visual e os processos que seguem uma lógica simbólica.

Em resumo, de acordo com o já referido, neste estudo considera-se que os significados que os alunos atribuem aos entes matemáticos formam parte do seu conceito-imagem (Tall & Vinner, 1981) e esses significados evoluem desde o mundo personalizado até o mundo formal (Tall, 2004a, 2004b), através do uso de diferentes representações para o tratamento do mesmo conceito (Duval, 2006; Tall, 1992) e da consideração da ambiguidade dessas representações enquanto a sua conceção como processos ou conceitos, o que leva o aluno a deselvolver um pensamento proceptual (Gray & Tall, 1994). Neste sentido, este tipo de pensamento envolve um esquema de ações, processos e objetos (Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1991) e é produto da interação entre a visualização e as representações (Natsheh & Karsenty, 2014).

Nas duas seções seguintes deste capítulo vou ampliar os aspetos respeitantes às *representações matemáticas* envolvidas no ensino e aprendizagem destes conceitos e discuto também algumas ideias sobre a *visualização matemática* que têm sido experimentadas neste contexto de aprendizagem. Pois como foi articulado anteriormente, as representações e a visualização são duas componentes que estão na base das teorias apresentadas sobre a compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função.

2.3 As representações matemáticas envolvidas na compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função

2.3.1 Alguns aspetos teóricos

Recentemente tem sido salientado o papel das representações nas investigações em Educação Matemática como um aspeto fundamental da aprendizagem dos alunos, quer para facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos como para desenvolver a capacidade de resolução de problemas (Biza et al., 2007; Henriques & Ponte, 2014; Karatas et al., 2011).

Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NTCM, 2007) fundamentam que os alunos de 12.º ano deverão ser capazes de usar a linguagem e os símbolos matemáticos de forma correta e apropriada para comunicar a suas ideias, tanto de forma escrita como oral. Estas normas salientam que à medida que os conhecimentos matemáticos dos alunos e a sua capacidade de utilizar uma vasta gama de representações matemáticas aumentam, terão um maior poder matemático que os ajudará a estabelecer conexões com outras áreas das ciências.

> A medida que os alunos se tornam matematicamente mais competentes, vão desenvolvendo um repertório cada vez maior de representações matemáticas e de como as usar de forma produtiva. Este conhecimento inclui a seleção de representações específicas, com o propósito de extrair informações específicas ou de alcançar determinados fins (NTCM, 2007, p. 422).

São vários os autores que definem representação matemática. Para Goldin (1998) uma representação é qualquer configuração ou relação de carateres, imagens ou objetos concretos que representam algo. Castro e Castro (1997) afirmam que “as representações são as notações simbólicas ou gráficas, específicas para cada noção, mediante as quais se expressam os conceitos e procedimentos matemáticos assim como as suas caraterísticas e propriedades mais relevantes” (p. 96). Para Mata-Pereira e Ponte (2012) uma representação é definida como uma configuração que pode usar-se para substituir, sugerir ou simbolizar um objeto. Enquanto, Henriques e Ponte (2014) posicionam as representações matemáticas como recursos que permitem compreender os processos de raciocínio dos alunos e como ferramentas que aumentam a sua capacidade de pensar, salientando igualmente a sua relevância na comunicação das ideias matemáticas.

Gómez (2007) considera um sistema de representação como um registo de regras que permitem identificar ou criar signos com a finalidade de operar com eles e concluir as relações que se podem determinar com os mesmos, classificando-os como: simbólico, algébrico, verbal e gráfico. Neste contexto, Goldin (1998) indica que estes sistemas de representação estão constituídos por duas estruturas: uma estrutura intrínseca, onde as regras operam dentro do próprio sistema e uma estrutura extrínseca, na qual se estabelecem relações com outros sistemas de representação. Neste sentido, o autor salienta a importância de que o individuo reconheça e faça uso da estrutura extrínseca para aprofundar na compreensão do objeto representado, o que também é defendido por Tripathi (2008) ao afirmar que "diferentes representações matemáticas de um conceito destacam diferentes aspetos da sua estrutura, que se complementam no sentido da compreensão desse mesmo conceito" (p. 438).

Em relação às funções das representações, o NTCM (2007) recomenda que os alunos "criem e usem representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; selecionem, apliquem e traduzam representações matemáticas para resolver problemas; usem as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos" (p. 160). Ao respeito, Stylianou (2011) adjudica às representações as funções de compreensão, registro, exploração, verificação e avaliação. Defendendo que os alunos devem familiarizar-se com uma variedade de representações para que sejam usadas de forma flexível, desenvolvendo a capacidade para traduzir dentro e entre diferentes representações, selecionar as representações adequadas para situações específicas e como meio facilitador da sua compreensão matemática. Esta experiência que vivem os alunos dentro da sala de aula de matemática através da manipulação e uso flexível das representações transcende a tarefa de aprendizagem que estão a resolver, desenvolvendo habilidades que alcançam o nível quotidiano, familiar e futuro académico do indivíduo.

> As representações matemáticas que os alunos do 9.º ano 12.º ano aprendem fornecem-lhes a oportunidade de compreender o poder e a beleza da matemática, apetrechando-os de modo a poderem usar as representações nas suas vidas pessoais, no seu local de trabalho e em estudos futuros (NTCM, 2007, p. 427)

Do ponto de vista de Duval (2006), as representações constituem um papel importante para a compreensão dos conceitos matemáticos, mas usualmente são interpretadas como produtos, externas e afastadas da compreensão do conhecimento matemático. No seu trabalho, o autor refere que existem dois tipos de transformações para as representações semióticas: as conversões e os tratamentos, que correspondem aos processos cognitivos fundamentais do pensamento matemático durante a resolução de uma tarefa (Figura 2.2). Os tratamentos consistem em transformações dentro de um mesmo sistema de representação, como por exemplo resolver uma equação (tratamento dentro do sistema simbólico-algébrico), enquanto as conversões (explícitas ou implícitas) são transformações entre sistemas de representação, transformando a representação de um objeto, situação ou informação dada num dado sistema numa outra representação dentro de outro sistema de representação. São exemplo de conversões a passagem de uma descrição ou de uma relação em linguagem natural (sistema de representação verbal) para notação algébrica (sistema simbólico-algébrico).

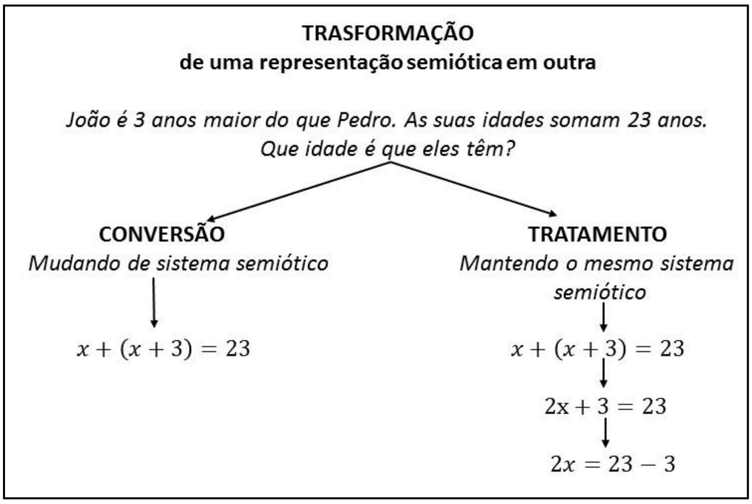


Figura 2.2 Processos cognitivos fundamentais (adaptado de Duval, 2006)

Na conversão, o processo de associar um enunciado com uma representação visual pode desempenhar duas funções: como recurso para ter em conta todos os elementos que se relacionam ou como heurística para encontrar o fundamento teórico que sustenta a resolução da tarefa. No entanto, a conversão não deve reduzir-se a uma codificação da informação. Por exemplo, nos problemas que envolvem equações polinomiais, Duval menciona que é essencial distinguir dois níveis de conversão: um nível relacionado com a expressão literal das quantidades desconhecidas do enunciado e outro nível diz respeito ao estabelecimento da igualdade na formulação da equação. Por outro lado, o autor considera que a resolução de uma tarefa e as atividades matemáticas feitas pelo aluno caraterizam-se por ter, por um lado o conteúdo matemático conceptual não semiótico e por outro lado, as representações semióticas que podem ser escolhidas segundo a necessidade de comunicação ou de tratamento. Considerando o conteúdo matemático como um objeto mental e as representações como externas a este, pelo que a conversão passaria a ser o resultado da compreensão conceptual e qualquer dificuldade neste processo de transformação seria produto de conceções erróneas; pois "o problema que a maioria dos estudantes encontram é tão profundo que a conversão pode ser considerada como a porta da compreensão" (Duval, 2006, p. 149).

Outro aspeto apresentado pelo autor relaciona-se com o facto de que o fazer matemática satisfaz dois requisitos que frequentemente entram em conflito: as representações semióticas devem ser usadas necessariamente e os objetos matemáticos representados não devem confundir-se com o significado dessas representações. Este conflito pode ter lugar quando se resolvem problemas que respondem a um contexto real, pois exige que os alunos utilizem a sua experiência física ou diária e a suas representações mentais.

Por último, o autor conclui que a importância das representações semióticas está na capacidade intrínseca para serem transformadas noutras representações. Os dois tipos de transformação são cognitivamente independentes, embora matematicamente as conversões dependam dos tratamentos. Por isso, é essencial considerar estas transformações em separado para analisar o que fazem os alunos no momento de resolução de problemas.

2.3.2 Diferentes tipos de representações utilizadas na compreensão dos conceitos de limite e continuidade

O ensino e a aprendizagem dos conceitos no Cálculo Infinitesimal caraterizam-se pelo uso de vários tipos de representações. Tall (1992) afirma que, nesta área da Matemática, habitualmente segue-se um enfoque utilizando três representações - gráfica, numérica e simbólica – e, sempre que seja possível, os conceitos devem ensinar-se recorrendo a todas e à sua articulação. Nesta sua posição, o autor considera que "os matemáticos concentram-se de forma seletiva sobre a representação mais útil, mas o movimento versátil entre as representações é mais importante e cognitivamente mais vantajoso centrar-se nas três representações de uma só vez" (Tall, 1992, p. 21).

Esta ideia de que a instrução no Cálculo Infinitesimal deve contemplar as diferentes representações dos objetos matemáticos também é defendida por outros autores. Por exemplo, Karatas et al. (2011) apontam que o professor não deve limitar-se ao uso de representações algébricas mas também incluir e ter em conta as representações geométricas desses objetos e as representações intuitivas que os alunos têm sobre os conceitos em questão. Especificamente, no que respeita ao conceito de limite de uma função, Pons et al.

(2011) indicam que este conceito tem sido desenvolvido iniciando com ideias intuitivas, exprimidas verbalmente (Fernández-Plaza et al., 2013; Jaffar & Dindyal, 2001), seguidas de aproximações numéricas, para depois utilizar estratégias algébricas e finalmente exemplificar mediante representações gráficas. Pois é mediante esta combinação de diversas representações que os alunos não ficam limitados pelas potencialidades ou fragilidades de uma representação particular (Elia, Gagatsis, Panaoura, Zachariades & Zoulinaki, 2009).

De acordo com isto e com as investigações empíricas consultadas há três tipos de representações involucradas na compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função as quais serão consideradas para fins deste trabalho: (i) as *representações verbais*, usadas para exprimir as ideias, geralmente em discussões coletivas dentro da sala de aula ou através do uso da linguagem natural nas justificações escritas durante a resolução de tarefas; (ii) as *representações simbólicas*, que inclui o uso de expressões numéricas ou algébricas; e (iii) as *representações geométricas*, como os gráficos de funções.

Representação verbal

No que respeita aos conceitos de limite e continuidade de uma função, são vários os termos utilizados para representar de forma verbal um objeto ou um processo matemático. Os estudos que têm considerado esta representação (por exemplo, Fernández-Plaza et al., 2013; Jaffar & Dindyal, 2001) tentam descrever como os estudantes expressam verbalmente as suas conceções intuitivas, partindo de termos que integram do seu quotidiano antes de serem apresentados aos conceitos formais na disciplina de matemática.

Na representação verbal destes conceitos utilizam-se termos para definir, descrever um processo ou comunicar uma resposta, tudo expresso de forma oral. Neste sentido destacam-se termos como *função*, *limite*, *ponto*, *aproximação*, *imagem*, *continuidade*, *contínua*, *alcança*, *alcançável*, *ultrapassável*, *tende a*, *acerca-se a*, *infinito*, *finito*, *indeterminado*, *indefinido*, *existe*, *lateral*, *vizinhança*, entre outros.

Deste modo, Fernández-Plaza et al. (2013) consideram diferentes conotações da palavra *termo* no contexto das representações verbais, assim como o que se entende por *uso* e *significado* de um termo. Os autores definem *termo*, como a palavra dotada de significado válido na disciplina ou no contexto particular; *termo específico*, usado dentro de uma única disciplina ou área de conhecimento; *termo comum*, utilizado em várias disciplinas mas com diferente significado; *termo importado*, palavra adotada do vocabulário geral ou coloquial; e *termo efetivo*, que se refere aos vocábulos usados pelos alunos que coincidem com algum termo específico da disciplina. Acrescentam que se entende por *uso de um termo* o sentido no qual se utiliza o termo dentro de determinado contexto, quer seja matemático ou quotidiano; e *significado do termo* consiste na interpretação do termo mediante um sistema de representação e os fenómenos associados ao mesmo.

Representação simbólica

No trabalho de Pons et al. (2011) os resultados obtidos revelam que a representação numérica determina o início do desenvolvimento do processo de coordenação entre o domínio e o contradomínio de uma função durante a aproximação de valores a um ponto fixo do domínio. Conclui que a representação numérica tem um papel importante na coordenação destes processos de aproximação, além de ser um passo prévio à manipulação da representação algébrica permitindo que o aluno se consciencialize da existência ou não do limite. De modo geral, a representação numérica é utilizada em tarefas como a que se apresenta a seguir (Figura 2.3), em que para a sua resolução é sugerido que o aluno complete uma tabela.

Se $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$.

Preencha a seguinte tabela a calcula o $\lim_{x \to 2} f(x)$

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$									

Figura 2.3 Exemplo de tarefa que envolve o conceito de limite e a representação numérica

Neste sentido os números são utilizados como símbolos que permitem descobrir o comportamento das imagens a partir das aproximações que são feitas na vizinhança do valor fixo de x em que se quer calcular o limite da função. Neste tratamento numérico de uma função, a aproximação é considerada como um processo limitado e finito (Moru, 2009).

Outra representação simbólica que é habitualmente utilizada para o tratamento do conceito de limite é a representação algébrica, que inclui a expressão algébrica que modela a função e o desenvolvimento algébrico para a simplificação de expressões e resolução de equações, envolvendo diferentes tipos de expressões como polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. É utilizada, por exemplo, em tarefas que solicitam o cálculo de limites mediante o desenvolvimento de alguma técnica algébrica como a substituição, a factorização, a simplificação de frações ou a racionalização. A manipulação de expressões algébricas é o modo de operação preferido pelos alunos (Tall, 1992), atendendo a que nos livros de texto do Cálculo Infinitesimal apresentam-se, habitualmente, uma grande quantidade de exercícios que propiciam o uso das representações algébricas para a sua solução (Bezuidenhout, 2001).

Por outro lado, além da simbologia utilizada nas representações algébricas, o limite como novo conhecimento tem a sua própria simbologia, o que implica que o aluno deverá ser capaz de identificar essas novas representações para usá-las em articulação com outras, de forma flexível, convertendo-as e realizando tratamentos conforme seja necessário, de modo que possa compreender o conceito matemático a partir da combinação dessas representações simbólicas.

> Ao estudarem novos conteúdos, por exemplo, os alunos irão deparar-se com muitas representações novas de conceitos matemáticos. Deverão ser capazes de converter e alternar entre essas representações de forma flexível. Grande parte do poder da matemática advém da capacidade de observar e operar com objetos sob diferentes perspetivas (NTCM, 2007, p. 423).

Por exemplo, a expressão lim como abreviatura do limite, as setas ($\rightarrow$) para representar a noção de "*tender a*" ou "*aproximar-se a*" e a simbologia usada na definição formal ou métrica do limite, que faz uso da simbologia da teoria de conjuntos e a lógica:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Neste sentido da utilização dos símbolos, Bezuidenhout (2001) salienta que o ensino deverá, através das tarefas, promover nos alunos o conhecimento do significado dos símbolos, sendo capazes não só de utilizá-los, mas também de interpretá-los dentro do contexto:

> Abordagens de ensino e tarefas matemáticas deveriam ser de tal natureza que levasse os alunos a experimentar e a considerar que os símbolos matemáticos têm significado, que é importante ser capaz de interpretar os símbolos e de usá-los para representar conceitos e que a destreza no cálculo de limites, derivadas e integrais por meio da manipulação de expressões algébricas (embora muito importante) não implicam uma compreensão dos significados dos símbolos envolvidos. (p. 498)

Representação geométrica

As origens do Cálculo Infinitesimal, inclusive antes de serem definidos formalmente os seus conceitos e demais constructos teóricos, remontam-se à exploração de problemas geométricos e físicos (Natsheh & Karsenty, 2014; Cornu, 1991; Santos, 2010). As representações geométricas dos gregos, por exemplo, aplicadas no problema para calcular a área do círculo, foi uma oportunidade para desenvolver as conceções iniciais do conceito do limite. Hipócrates de Chios (430 a.C.) abordava esta problemática tendo em conta que se tratava de uma figura que se podia inscrever e circunscrever num polígono regular, pelo que aumentando o número de lados do polígono, a área da circunferência ia ficando compreendida (limitada) entre as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos que se iam obtendo sucessivamente (Cornu, 1991).

Anos mais tarde, em problemas como estes, os matemáticos gregos, particularmente Arquimedes, recorriam ao *Método da Exaustão,* atribuído a Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.). Este método, que é enunciado na primeira proposição do Livro X de *Os Elementos de* Euclides e que hoje é conhecido como uma dupla redução ao absurdo, permitiu provar os resultados meramente dentro do contexto geométrico. Deste modo, pode afirmar-se que foram os Gregos os primeiros a trabalhar com o conceito matemático do limite, atribuindo-lhe uma forte identidade geométrica, e que só seria definido dois mil anos depois (Santos, 2010). Esta influência de utilizar representações geométricas permaneceu na primeira fase do Cálculo Infinitesimal da época moderna, séc. XVII, caraterizada por uma forte componente visual no seu desenvolvimento devido à interação com a geometria, a física e a astronomia (Natsheh & Karsenty, 2014).

Por outro lado, nas investigações feitas em Educação Matemática que consideram as representações geométricas dos objetos matemáticos do Cálculo Infinitesimal, em particular do conceito de limite e continuidade de uma função (Bezuidenhout, 2001; Biza et al., 2007; Karatas et al., 2011; Moru, 2009; Prezenioslo, 2004; Tall, 1992), no geral utilizam as representações geométricas que são adotadas da *Geometria Analítica*, como no caso do gráfico de uma função ou de outras curvas como a reta vertical usada comumente neste contexto para modelar assíntotas, e demais representações gráficas feitas sobre um sistema de coordenadas cartesianas. Por exemplo, é comum que as representações geométricas estejam envolvidas em tarefas como as que apresentam-se nas figuras 2.4 e 2.5.

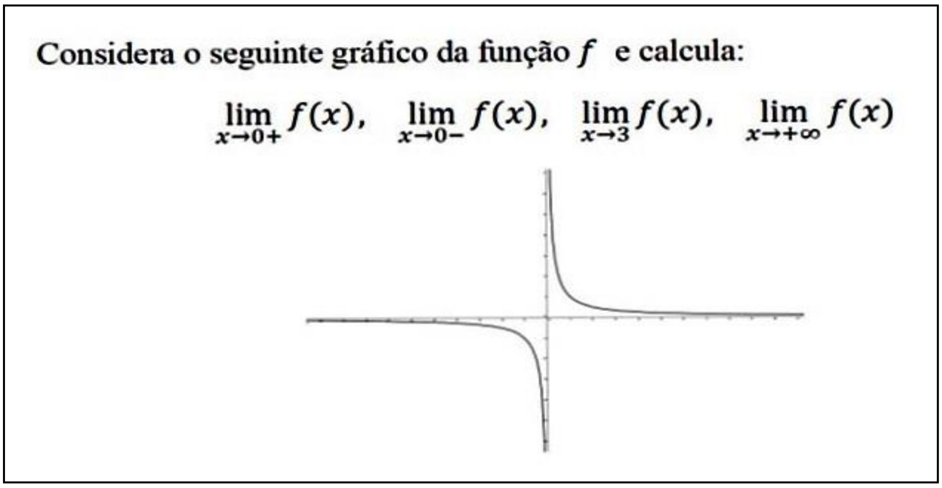


Figura 2.4 Exemplo de tarefa que envolve o conceito de limite e a representação geométrica

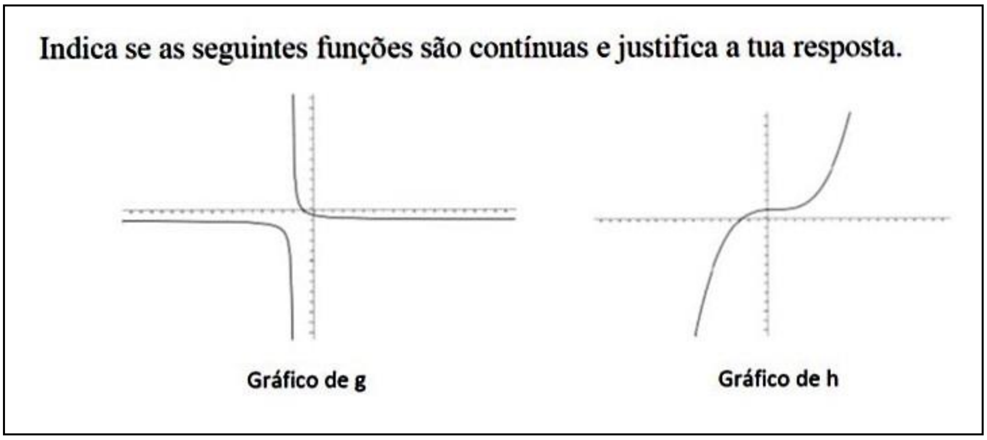


Figura 2.5 Exemplo de tarefa que envolve o conceito de continuidade e a representação geométrica

Moru (2009) conclui que que os alunos precisam que o gráfico da função esteja acompanhado da respetiva expressão algébrica quando é solicitado o cálculo de limites. Além de que existem conceções sobre a continuidade de uma função promovidas por um ensino a partir do uso de imagens, como o facto de determinar se uma função é contínua caso possa desenhar-se todo seu gráfico sem necessidade de desligar o lápis da folha, ou dito de outra forma, quando o gráfico da função é uma só peça (Karatas et al., 2011).

Por último, os estudos sobre o uso das representações visuais neste contexto revelam que essa utilização proporciona conhecimentos relevantes para a aprendizagem dos conceitos (Tall, 1992). Este aspeto tem beneficiado com os avanços da tecnologia e, particularmente, do *software* de geometria dinâmica, utilizado tanto pelo professor nos momentos de instrução para facilitar a apresentação das representações geométricas como na aprendizagem por parte dos alunos para aprofundamento e desenvolvimento das suas habilidades visuais (Biza et al., 2007; Natsheh & Karsenty, 2014; Tall, 1992).

2.4 Visualização Matemática na compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função

Nas últimas décadas, a visualização tem sido reconhecida como uma importante área de investigação em Educação Matemática (Natsheh & Karsenty, 2014; Rivera, 2011). Presmeg (2006) afirma que foi na conferência do grupo internacional de Psicologia da Educação Matemática de 1991 (PME-15) em Assis, Itália, que a visualização converteu-se formalmente num campo de investigação, apresentando-se como um tema independente que agrupou nessa altura dez relatórios de investigação a seu respeito.

A visualização é fundamental para os seres biológicos e socioculturais que se desenvolvem numa sociedade que tem um grande potencial de cultura visual, o qual se reflete nas salas de aulas e, particularmente, nas aulas de Matemática. A própria natureza da Matemática motiva o facto da visualização aparecer de forma natural nos processos de ensino e aprendizagem, de modo que é comum que o professor na sala de aula utilize imagens, diagramas ou esquemas visuais para orientar a aprendizagem, ao mesmo tempo que o aluno é levado a criar imagens mentais no seu pensamento matemático e a utilizar representações visuais para comunicar os seus raciocínios ou solucionar uma tarefa (Arcavi, 2003).

2.4.1 O que é visualização na Educação Matemática?

A atenção crescente que a visualização tem tido nas investigações em Educação Matemática, deu origem a que hoje o termo seja polissémico, segundo o contexto e a fundamentação teórica adotada por quem o define. Por exemplo, para Arcavi (2003) a visualização concebe-se a partir de três dimensões: capacidade, processo ou produto.

> A visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre as imagens, quer seja nas nossas mentes, na folha de papel ou com ferramentas tecnológicas, com o fim de representar, comunicar, raciocinar e desenvolver ideias e conhecimentos novos (Arcavi, 2003, p. 217).

Como *capacidade*, a visualização está ligada à capacidade da abstração matemática (Gray & Tall, 2007); como *processo*, Presmeg (2006) afirma que a visualização inclui o processo de construir e transformar as imagens mentais e as representações de natureza espacial que estão envolvidas no fazer Matemática; e como *produto*, isto é, como criação ou uso de imagens ou representações visuais, Gómez-Chacón (2014) distingue duas funções dessas imagens: uma *função heurística*, na qual a representação/imagem é utilizada para raciocinar, gerar novas ideias, inventar ou criar e uma *função ilustrativa*, onde a representação visual só tem um papel explicativo subordinado ao discurso formal.

Por outro lado, para Zazkis, Dubinsky e Dautermann (1996) a visualização é um conjunto de ações do indivíduo que o levam a estabelecer fortes ligações entre as suas construções ou imagens mentais e as experiências externas.

> A visualização é um ato no qual um indivíduo estabelece uma forte ligação entre uma construção interna e algo no qual o acesso é feito através dos sentidos. Uma tal ligação pode ser feita em qualquer das duas direções. Um ato de visualização pode consistir em qualquer construção mental de objetos ou processos que um indivíduo associa com objetos ou eventos percebidos por ele como externo. Alternativamente, um ato de visualização pode consistir na construção nalgum meio externo, como o papel, o quadro ou o ecrã de computador, de objetos ou eventos que o indivíduo identifica com objeto (s) ou processo (s) na sua mente (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996, p. 441).

Ao igual que Zazkis et al. (1996), Rivera (2011) considera que as ações internas do indivíduo são influenciadas pelos fatores externos, no sentido de que considera que o *pensamento visual* baseia-se em inferências que podem ser elaboradas pessoalmente através de imagens subjetivas do indivíduo, ou mediadas pelo exterior por meio de experiências do indivíduo no contexto, como a interação com outros indivíduos ou o uso de instrumentos manipulativos como as calculadoras gráficas. Em termos gerais, “o pensamento visual em matemática abrange o uso de todos os tipos de símbolos a partir de imagens e sinais pessoalmente construídos, expressões alfanuméricas e diagramas, que transmitem significados e são usados para a razão” (Rivera, 2011, p. 54). Deste modo, para Rivera (2011) a visualização é uma ferramenta cognitiva que permite ao individuo explorar, construir, estabelecer relações conceituais, demonstrar e justificar.

Dentro do enquadramento teórico deste autor, estabelecem-se três princípios fundamentais da visualização: o *princípio de aquisição* (*principle of acquisition*, no original), que se refere ao ato do indivíduo abduzir os significados das representações visuais dos objetos mediante estratégias como a manipulação de representações icónicas, a associação de experiências ou o estabelecimento de semelhanças e padrões. O *princípio de raciocínio* (*principle of reasoning*, no original), que se refere à situação do indivíduo na resolução de problemas utilizar raciocínios imaginativos na organização dos seus pensamentos e como alternativa das formas simbólicas e linguísticas do raciocínio, entendendo por raciocínio imaginativo o uso de estratégias visuais para comunicar, descobrir, resolver problemas ou interpretar um facto. E terceiro, o *princípio de individualização* (*principle of individuation*, no original), que se refere ao facto da capacidade de um indivíduo representar visualmente estar primeiramente influenciada pelo sistema visual dele próprio, mas também ser influenciada pelas práticas socialmente construídas. Assim, as imagens visuais construídas pelo indivíduo têm origens fisiológicas, sociais e culturais.

Para Rivera (2011) existem três níveis de visualização dentro da atividade matemática. O *nível imaginativo*, que surge das experiências pessoais e a perceção sensorial de forma subjetiva e intuitiva. O *nível formativo*, que é quando se estabelecem previamente os objetos, conceitos ou processos a partir de imagens estruturadas pela comunidade matemática. E o *nível transformacional*, que pode incluir o nível imaginativo ou formativo, mas que carateriza-se pelo facto do indivíduo dar sentido à atividade visual. Para o autor, esta transformação do visual para a obtenção de significados acontece no que ele chama *cenário de visualização*. Estes cenários de visualização são uma forma de processamento visual cognitivo na qual o indivíduo conscientemente seleciona a informação visual relevante para transformá-la, dar-lhe significado e inclusive para fazer projeções visuais futuras.

2.4.2 Usos e limitações da visualização

Nas grandes áreas ou tópicos curriculares da Matemática, como a Aritmética, a Álgebra, a Geometria, a Trigonometria, a Análise Infinitesimal, entre outras, existem investigações que têm considerado no seu objeto de estudo à visualização matemática. Por exemplo, em Gómez-Chacón (2014) apresentam-se várias linhas de estudo da visualização em Educação Matemática: no desenvolvimento curricular, na procura de práticas de ensino que promovem (ou inibem) uma visualização matemática efetiva, no uso da tecnologia dinâmica e a sua influência para orientar a visualização nas aulas de matemática, na categorização e sistematização das representações visuais, e ainda estudos sobre a motivação ou rejeição do uso da visualização na Matemática.

Num destes estudos, Arcavi (2003) sintetiza os seguintes usos que tem a visualização em diferentes contextos da aprendizagem da Matemática:

i. *Acompanha o desenvolvimento simbólico.* Isto refere-se a que uma imagem pode ser um fator essencial para criar a sensação de evidência de alguma propriedade algébrica-simbólica.

ii. *Estabelece conexões entre conceitos e significados.* Num contexto simbólico, a solução visual numa tarefa permite relacionar conceitos e significados que ficariam de fora de uma solução meramente simbólica.

iii. *Permite esclarecer a estratégia de resolução de uma tarefa*. A visualização pode funcionar como uma ferramenta para apoiar o aluno quando está inseguro no modo de proceder.

Não obstante, apesar de que nas últimas décadas as investigações têm demostrado a evidente importância do papel da visualização na Educação Matemática, a representação visual continua a ser, de acordo com Arcavi (2003), um cidadão de segunda classe na teoria e na prática das matemáticas. Isto implica o facto de considerar pouco significativas as diferentes formas em que a visualização pode intervir na compreensão dos conceitos.

Quanto aos fatores que limitam o desenvolvimento da visualização na aprendizagem do aluno, Arcavi (2003) enfatiza dois:

i. Os conhecimentos prévios que os alunos têm quando estão a olhar para uma representação visual podem apoiar ou interferir no estabelecimento de conexões com conceitos subjacentes ao objeto representado.

ii. O contexto em que a observação é feita pode gerar diferentes significados dos mesmos objetos que são representados por um recurso visual. Quer seja o contexto emocional, estado de ânimo do aluno, o contexto cognitivo, nível de entendimento das representações visuais ou o contexto matemático, por exemplo, uma linha reta não tem o mesmo significado na aritmética, na geometria ou no estudo das funções.

Em relação às dificuldades, quer dos alunos quer do professor, no uso da visualização, Arcavi (2003) classifica-as em três categorias: cultural, cognitiva e sociológica.

i. *Dificuldade cultural*. Refere-se às crenças e valores que se tem sobre o que é Matemática e a conceção do que é fazer matemática, pois disso depende o valor atribuído à visualização como parte integrante do processo de aprendizagem.

ii. *Dificuldade cognitiva*. Em relação ao facto de que raciocinar com representações visuais, como diagramas, desenhos ou gráficos, na resolução de tarefas, implica que os procedimentos nem sempre sejam rotineiros e seguros para que o aluno confie, contrariamente aos procedimentos simplesmente simbólicos. Além disto a exigência cognitiva aumenta quando o aluno é conduzido a converter as representações visuais em analíticas, dentro de uma mesma situação, pelo que o autor afirma que aprender a ser competente na manipulação de numerosas representações poder ser um processo difícil para os alunos.

iii. *Dificuldade sociológica.* Existem dificuldades na visualização quando numa sala de aula interatuam alunos de diversas origens culturais, pois o ambiente de desenvolvimento de um aluno fora da escola pode influenciar a sua forma de visualizar e torna-la diferente da de seu colega.

Atendendo a estas dificuldades, Gómez- Chacón (2014) manifesta que o uso limitado do registo visual por parte dos alunos e a dificuldade cognitiva própria desse registo visual são possíveis causas para que os alunos, e inclusive o professor, rejeitem o uso da visualização nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Igualmente, para Natsheh e Karsenty (2014), os professores não estão conscientes da variada utilidade do raciocínio visual na Educação Matemática e muitas vezes prejulgam os seus alunos como incapazes de resolver tarefas visuais de um nível elevado, pelo que os autores concluem que os professores não estão capacitados para utilizar este tipo de tarefas nas suas aulas.

2.4.3 A visualização na compreensão dos conceitos do Cálculo Infinitesimal

No que respeita ao Cálculo Infinitesimal, pode afirmar-se ser uma área da Matemática na qual a visualização e o raciocínio visual que lhe está subjacente têm um papel importante, por motivo das suas origens na exploração de problemas geométricos e físicos. Embora com o passar do tempo e a formalização rigorosa e teórica desta área, tenha havido uma deslegitimação do pensamento visual como argumento válido para as justificações e a aprendizagem dos conceitos que surgem intuitivamente (Natsheh & Karsenty, 2014).

Um estudo com foco no Cálculo Infinitesimal é o trabalho de Natsheh e Karsenty (2014), realizado com alunos e professores da Palestina que não tinham experiência na resolução de tarefas que envolvem o raciocínio visual. O estudo pretendia documentar e analisar os enfoques e reações dos sujeitos na resolução de uma tarefa sobre a derivada de uma função, com o fim de obter alguma informação sobre a visualização nos processos de raciocínio no ensino e na aprendizagem do Cálculo Infinitesimal no contexto palestino. Dentro do seu enquadramento teórico, estes autores concordam com a definição de visualização de Arcavi (2003), salientando o papel do raciocínio visual e o pensamento visual que desenvolvem os alunos durante a resolução de tarefas.

Assim, estes autores definem *raciocínio visual* como “o uso de desenhos, imagens ou diagramas de forma eficiente para resolver tarefas de pensamento de ordem superior” (Natsheh & Karsenty, 2014, p. 110). Acrescentando que este tipo de raciocínio é produto de um processo interno considerado como *pensamento visual,* o qual tem um importante valor cognitivo nas ações dos indivíduos relacionadas com a descoberta de conhecimentos novos, a compreensão de conceitos e a demonstração de provas de caráter formal, salientando que assim a visualização permite compreender de forma global determinado conceito ou objeto matemático. Não obstante, alertam que “o pensamento visual é um processo intelectual que necessita preparação, tempo e esforço intencional” (Natsheh & Karsenty, 2014, p. 112), pelo que aconselham incorporar nas aulas de Cálculo Infinitesimal tarefas que exijam ao aluno utilizar e dar significado às imagens para justificar e produzir a solução da tarefa.

O processo de análise dos dados neste estudo, levou os autores à identificação de um tipo específico de raciocínio visual, a que chamaram *raciocínio visual inferencial conceitual* (*visual inferential conceptual reasoning*, no original), considerado como “a capacidade para utilizar as considerações ou apreciações visuais com o propósito de obter inferências que melhoram a conceitualização” (Natsheh & Karsenty, 2014, p. 114), isto é, inferir informação a partir de um quadro visual como uma imagem, diagrama, gráfico ou desenho, que contribua para a compreensão de um conceito dado. No cerne desta proposta teórica constam três componentes que interagem durante a resolução de tarefas: objetos visuais, ações visuais e efeitos visuais. Os *objetos visuais* são as imagens, desenhos, diagramas, gráficos ou qualquer outro objeto sobre o qual se está exercendo a visualização, inclusive uma expressão algébrica pode ser considerada como objeto visual. As *ações visuais* referem-se aos processos e atividades que os indivíduos podem fazer sobre um objeto ou conjunto de objetos visuais, como por exemplo fazer medições, comparações, leituras de informação, assim como também descompor o objeto visual em partes ou construir um novo objeto visual. E os *efeitos visuais* aludem aos objetivos ou propósitos que levaram ao individuo a realizar as ações visuais, por exemplo a reformulação de informação, a justificação de ideias e a descrição, explicação ou demostração de factos. De este modo, “quando o propósito da ação visual é gerar inferências a partir do objeto visual, de maneira a que se manifeste a compreensão dos conceitos fundamentais, percebemos isto como a realização de um raciocínio visual inferencial conceitual” (Natsheh & Karsenty, 2014, p. 115).

2.5 Dificuldades de aprendizagem associadas à compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função

2.5.1 Obstáculos, dificuldades e erros na aprendizagem da Matemática

Em todo o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, estão envolvidos obstáculos, dificuldades e erros que influenciam a compreensão dos alunos sobre esses conceitos em estudo. Para Cornu (1991) é possível distinguir entre diferentes tipos de obstáculos à compreensão: *obstáculos genéticos e psicológicos*, *obstáculos didáticos* e *obstáculos epistemológicos*. O autor salienta que os obstáculos epistemológicos caracterizam-se por serem componentes indispensáveis e essenciais aos conhecimentos a adquirir e, em alguma medida, encontram-se no desenvolvimento histórico do conceito.

Para Socas (1997) "as dificuldades na aprendizagem da Matemática são o resultado de múltiplas situações que se relacionam entre si e que vão desde uma deficiente planificação curricular até a natureza própria das Matemáticas" (p. 35). Neste sentido, para o autor as dificuldades de aprendizagem resultam da combinação de elementos internos do conhecimento matemático, como os objetos, os processos e as representações dos conceitos; e elementos fora da matemática, como os processos cognitivos e as atitudes do aluno. No seu trabalho, o autor classifica as dificuldades segundo a natureza da sua origem em cinco grandes classes: (i) dificuldades associadas à complexidade própria dos objetos; (ii) dificuldades associadas aos processos de pensamento matemático; (iii) dificuldades associadas aos processos de ensino; (iv) dificuldades associadas aos processos do desenvolvimento cognitivo dos alunos; e (v) dificuldades associadas às atitudes afetivas e emocionais pela Matemática.

Em Rico (1995), considera-se que os erros são a manifestação das conceções erróneas dos conceitos, que em geral se apresentam mediante a aplicação incorreta de um procedimento ou algoritmo, mas que para o aluno é acreditável no sentido de que frequentemente eles criam os seus próprios métodos na resolução de tarefas. Para o autor, os erros surgem de forma espontânea, são persistentes e particulares para cada indivíduo, devido ao facto de o aluno inicialmente não estar consciente do seu erro. Rico (1995) salienta, ainda, que o estudo e a análise dos erros cometidos pelos alunos têm emergido recentemente nas diferentes áreas de investigação da Educação Matemática. Por exemplo, no trabalho de Seah (2005) sobre a análise dos erros que manifestam os alunos do ensino secundário em Singapura, durante a resolução de tarefas que envolvem o conceito de integral de uma função, os erros são classificados pelo autor em três categorias: (i) o *erro conceitual*, que se refere ao erro que exprime falta de compreensão do conceito e das suas caraterísticas ou propriedades; (ii) o *erro procedimental*, que acontece durante a aplicação de algoritmos ou procedimentos apesar de que já se tem compreensão do conceito; e (iii) o *erro técnico*, que consiste na manifestação errada causada pela falta do conhecimento necessário para resolver a tarefa.

2.5.2 Obstáculos, dificuldades e erros associados à compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função

Ao longo dos anos, diversas investigações têm identificado obstáculos, dificuldades e erros que os alunos enfrentam na compreensão dos conceitos de limite e continuidade (Cornu, 1991; Domingos, 2003; Juter, 2006; Nair, 2010; Tall, 1992).

Os conceitos de limite e continuidade surgem, de alguma forma, nas experiências dos indivíduos antes de serem definidos formalmente, pelo que existe uma estrutura cognitiva complexa na mente de cada sujeito que produz diversas conceções quando o conceito é evocado em alguma situação de aprendizagem (Bezuidenhout, 2001; Tall & Vinner, 1981). Isto cria uma falsa sensação de controlo na resolução de tarefas quando o aluno conhece e usa a noção de limite (ou de continuidade) intuitivamente, mesmo quando a tarefa exige uma conceção matematicamente mais formal (Cornu, 1991; Juter, 2005a).

Cornu (1991) descreve estas ideias, intuições, imagens ou conhecimentos que provêm da experiencia quotidiana do individuo e que se produzem antes da aprendizagem formal como *conceções espontâneas*, indicando que estas conceções espontâneas não desaparecem mas são integradas com os novos conhecimentos, modificando-os e adaptando-os para formar conceções pessoais dos conceitos. Não obstante, durante este processo as conceções espontâneas e intuitivas podem bloquear ou entrar em conflito com os novos conhecimentos e a teoria formal dos conceitos (Biza et al., 2007; Moru, 2009; Tall, 1992).

Outros resultados revelam que as ideias intuitivas que podem gerar dificuldades durante a resolução de tarefas originam-se a partir de experiências com outros conceitos matemáticos. Por exemplo, Jaffar e Dindyal (2011) indicam que, em alguns casos, encontram-se expressões como $\frac{a}{0} =$ indefinido ou $\frac{a}{0} = \infty$, o qual os alunos importam do estudo dos números reais para o estudo do limite, concebendo que o infinito e indefinido são a mesma coisa. De maneira semelhante, associam que se um limite tem valor zero então não existe. Também, ao trabalhar com expressões indeterminadas como $\frac{0}{0}$, os alunos podem concluir que a resposta é 1 justificando que qualquer número quando é dividido por si mesmo o resultado é 1.

Um dos erros mais frequentes na aprendizagem destes conceitos é produto de uma das conceções intuitivas relacionada com as suas experiências prévias no estudo de funções, no caso do limite, o erro consiste em que o aluno sempre atribui ao valor do limite de uma função num ponto o respetivo valor da imagem da função nesse ponto; e no caso da continuidade, o erro é posto em manifesto quando o aluno afirma que uma função é contínua se para todos os objetos corresponde uma imagem. Ou doutra forma, o erro consiste em considerar que a existência do limite ou da continuidade depende se a função está ou não está definida no ponto em questão (Juter, 2007; Moru, 2009; Prezenioslo, 2004; Tall, 1992; Tall & Vinner, 1981). Se bem há casos nos que o valor do limite é igual ao valor da imagem da função no ponto e efetivamente em toda função contínua todos os objetos relacionam-se com uma imagem, estes casos particulares muitas vezes fundamentam a manifestação deste erro quando a tarefa exige a aplicação da definição dos conceitos de forma mais rigorosa. Isto se manifesta em muitos momentos durante a resolução de tarefas, quando os alunos justificam que o valor do limite não é alcançável pela função no ponto indicado ou se é alcançável teria que ser igual ao valor da imagem nesse ponto (Juter, 2007; Moru, 2009), a tal grau de causar frustração nos alunos perante exemplos de limites alcançáveis pela função e de não serem capazes de criar uma imagem coerente da situação (Juter, 2007). Em Cornu (1991) indica-se que esta problemática está em debate, não só ao nível da sala de aula mas também pelos investigadores, salientando que a questão: *Alcançou-se o limite ou não se alcançou?*, corresponde a um obstáculo epistemológico.

Estes erros põem em evidência a dificuldade para compreender a definição dos conceitos de limite e continuidade. Ainda que consigam ter uma forte imagem mental do conceito, o seu conceito-definição é, em geral, fraco (Tall & Vinner, 1981). Em qualquer enfoque que se adote para definir estes conceitos, quer seja informal ou formal, vão-se manifestar dificuldades nos alunos (Tall, 1992). No enfoque informal podem apresentar-se fatores que podem entrar em conflito com alguma teoria formal. Já o enfoque formal pode apresentar-se demasiado difícil como ponto de partida, pelo que significa que os alunos podem não ser capazes de dar sentido à definição formal (Biza et al., 2007; Juter, 2005a).

Deste modo, um dos obstáculos epistemológicos encontrados em Cornu (1991) é o *aspeto metafísico da noção de limite*, indicando que "a noção de limite é difícil de introduzir na Matemática, já que parece ter mais que ver com a metafísica ou a filosofia" (Cornu, 1991, p. 161). É um facto que "o conceito de limite proporciona uma base matemática para desenvolver o Cálculo e a Análise Matemática, mas com o seu aspeto formal tornou-se difícil de entender pelos alunos do secundário e universitários" (Natsheh & Karsenty, 2014, pp. 111-112). Este caráter formal da própria natureza do conceito de limite transcende até o conceito de continuidade, na medida de que a conceção formal de limite está envolvida na conceção formal de continuidade.

Também para compreender estes conceitos é muito importante que o aluno compreenda a noção de infinito que, ao ser um conceito abstrato, os alunos precisam de desenvolver um adequado processo de abstração para lhe dar significado dentro do contexto do Cálculo Infinitesimal. No entanto, investigações revelam o facto dos estudantes terem conceções muito limitadas do conceito de infinito (Cornu, 1991; Moru, 2009). Portanto, Cornu (1991) considera que a noção de *infinitamente grande* e de *infinitamente pequeno* é um obstáculo epistemológico que dificulta a compreensão destes conceitos.

Durante a resolução de tarefas, também é comum verificar-se a existência de dificuldades na seleção e uso de representações apropriadas para atender a uma situação específica (Tall, 1992). A seguir apresento as dificuldades associadas com cada uma das representações consideradas neste trabalho: verbal, simbólica e geométrica.

Dificuldades associadas à representação verbal

Os alunos fazem, frequentemente, uso coloquial e pouco rigoroso dos termos específicos envolvidos na compreensão dos conceitos de limite e continuidade, dando lugar a dificuldades associadas à compreensão da linguagem utilizada pelo professor e à comunicação das suas ideias intuitivas e das definições formais (Cornu, 1991; Fernández-Plaza et al., 2013; Jaffar & Dindyal, 2011; Nair, 2010; Moru, 2009; Tall, 1992). Por exemplo, termos como: *limite*, *contínua*, *existe*, *aproximar-se*, *alcança*; e frases como: *tende a*, *tão pequeno quanto se quiser*, *para todos*, têm um forte significado no contexto quotidiano do aluno. Deste modo, em Moru (2009) considera-se a linguagem coloquial ou natural como um obstáculo epistemológico destes conceitos. Na verdade, os alunos mantêm a confiança nestes significados quotidianos dos termos, ainda que lhes tenha sido dada a definição formal dos mesmos, além de que os significados que são atribuídos aos termos variam de um estudante a outro (Cornu, 1991).

Por exemplo, Jaffar e Dindyal (2011) indicam que os alunos utilizaram termos como *indeterminado, indefinido, não pode proceder-se* ou *não existe*, para responder e justificar sobre as mesmas coisas, tal como o significado da expressão $\frac{0}{0}$ ou o facto de descrever limite infinito como um limite que não existe ou que é indeterminado. Concluem que os alunos não estão conscientes quanto ao uso das palavras: *infinito, não existe* ou *indeterminado*.

Dificuldades associadas à representação simbólica

Prezenioslo (2004) conclui, baseado nos resultados do seu estudo, que um elemento chave na resolução das tarefas consiste no uso de diferentes procedimentos algébricos para o cálculo de limites e, por isso, as ações da maioria dos alunos estão fortemente vinculadas aos processos estabelecidos pela repetitiva prática algébrica (Natsheh & Karsenty, 2014), levando-os a priorizar o uso de estratégias pragmáticas em lugar do uso da teoria ou a não estabelecer conexões com ela (Juter, 2005a). É natural, por isso, que se identifiquem dificuldades associadas ao desempenho dos alunos na utilização de procedimentos algébricos, quer para calcular limites quer para determinar a continuidade de uma função (Domingos, 2003; Juter, 2005a; 2007; Tall, 1992). Neste contexto, para Gray e Tall (2007) a repetição é uma ação inerente nas pessoas quando estão a aprender, não obstante, a repetição pode fortalecer as conexões no cérebro a tal grau de criar uma rotina e gerar uma ação realizável sem pensamento consciente do que se está a fazer. Portanto, os autores recomendam utilizá-la junto com outros mecanismos de aprendizagem e não de forma isolada e inadequada, pois existe o risco de aprender regras sem conhecer as razões.

Além disto, estudos revelam o facto de os alunos justificarem que o valor do limite só é possível de determinar quando a função está representada algebricamente (Moru, 2009). Também é comum os alunos usarem incorretamente os quantificadores (Juter, 2005a; Tall, 1992) e terem dificuldades para traduzir enunciados de situações mediante a simbologia utilizada em torno do conceito de limite (Tall, 1992).

Dificuldades associadas à representação geométrica

Um dos obstáculos epistemológicos proposto por Cornu (1991) sobre a compreensão do conceito de limite é o facto de *vincular a geometria com números,* indicando que o conceito unificador de limite implica uma transferência desde as figuras geométricas, representadas no sistema de coordenadas cartesianas, para a interpretação numérica. Isto é, o aluno deve ser capaz de interpretar numericamente uma representação geométrica, embora não signifique traduzir a representação gráfica de uma função para a sua expressão algébrica, pois isso não é possível em todos os casos, mas sim interpretar a representação gráfica ainda que não esteja disponibilizada a sua expressão algébrica, o que implica que muitas vezes o aluno não consiga determinar o limite sem ter uma expressão algébrica da função representada no gráfico (Moru, 2009).

Alguns erros que se apresentam durante a interpretação do gráfico de uma função são, por exemplo, negar a existência do limite nos pontos em que a função não está definida (Moru, 2009), determinar a continuidade de uma função num ponto observando se a função está ou não está definida nesse ponto (Karatas et al., 2011), uso incorreto das calculadoras gráficas e dificuldades associadas com a conexão entre os limites e o comportamento assintótico das funções (Nair, 2010).

Na Figura 2.6 apresenta-se uma síntese dos obstáculos, as dificuldades e os erros de aprendizagem associados à compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função que têm sido identificados na literatura consultada e apresentados nas linhas anteriores.

Obstáculos epistemológicos

- *Aspeto metafísico da noção de limite.*
- *Alcançou-se o limite ou não se alcançou?*
- *A noção do infinitamente grande e do infinitamente pequeno.*
- *Vincular a geometria com números.*
- *A linguagem coloquial ou natural.*

Dificuldades de aprendizagem

- *Dificuldade para compreender a definição dos conceitos.*
- *Dificuldades no uso das representações verbais, associadas à compreensão da linguagem e dos termos usados para referirem-se aos conceitos.*
- *Dificuldade no uso das representações simbólicas, associadas ao desempenho dos alunos na utilização de procedimentos algébricos e o uso de símbolos específicos.*
- *Dificuldade no uso das representações geométricas, associadas à interpretação do gráfico de uma função.*

Erros

- *Se o* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, *então o limite não existe.*
- *A forma indeterminada* $\frac{0}{0}$ *é igual a 1.*
- *O* $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe só se* $f(a)$ *existe.*
- *O valor do* $\lim_{x \to a} f(x)$ *corresponde sempre ao valor de* $f(a)$
- *Negar a existência do limite nos pontos em que a função não está definida.*
- *A função* f *é contínua em* $x = a$ *só se* $f(a)$ *existe.*
- *O* $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ *corresponde sempre a uma assíntota da função.*
- *Erros em traduzir os enunciados de situações nos símbolos adequados para formular um limite.*
- *Erros nos cálculos numéricos e/ou algébricos.*

Figura 2.6 Síntese dos **o**bstáculos, dificuldades e erros de aprendizagem associados à compreensão dos conceitos de limite e continuidade identificados na literatura consultada

Capítulo 3

Metodologia de Investigação

Neste capítulo apresento as opções metodológicas gerais desta investigação (interpretativa com abordagem qualitativa), assim como também o meu papel como investigador no estudo. De seguida, apresento o balanço dos principais resultados do Estudo Exploratório, a caracterização dos participantes, e finalmente os procedimentos e instrumentos de recolha e análise de dados.

3.1 Opções metodológicas gerais

Com este estudo pretendo analisar a compreensão que revelam os alunos que cursam o último ano do ensino secundário sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. As questões que orientam esta investigação requerem uma fonte natural de dados, o que implica que o ambiente investigado seja observado, de forma a permitir uma interpretação descritiva do fenómeno fundamentada em dados empíricos. Portanto, pela sua natureza, a metodologia da investigação adotada segue, em termos gerais, o *paradigma interpretativo* com uma *abordagem qualitativa*.

Paradigma interpretativo

Neste paradigma "o objetivo primordial da investigação centra-se no significado humano da vida social e na sua clarificação e exposição por parte do investigador" (Erickson, 1989, p. 196). O paradigma interpretativo valoriza a compreensão dos significados procurando penetrar no mundo pessoal dos sujeitos, dentro de um contexto em que tem lugar a interação entre o investigador e o investigado (dupla hermenêutica) e onde a produção do conhecimento é um processo indutivo, interativo e em espiral (Coutinho, 2011).

Nomeadamente, neste estudo o objetivo geral apela à interpretação, clarificação e descrição por parte do investigador dos significados dos alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. O qual me levou como investigador a formar parte do ambiente onde se produzem estes significados: uma sala de aula de uma turma de 12.º ano. A ser este o contexto ideal para interagir com os participantes do estudo, com o propósito de extrair os dados a partir dos quais se obtêm os resultados que dão resposta às questões desta investigação.

Abordagem qualitativa

Esta investigação segue uma abordagem qualitativa que compreende as cinco principais características de uma investigação qualitativa apresentadas por Bogdan e Biklen (1994): (i) O ambiente natural é a fonte direta dos dados e o investigador é o principal instrumento de recolha de dados. Neste estudo, o ambiente natural corresponde à sala de aula, onde eu como investigador faço a recolha dos dados, quer através da observação direta dos participantes quer através dos instrumentos aplicados; (ii) Os dados são de natureza essencialmente descritiva e interpretativa. No estudo, os dados recolhidos permitem a descrição dos fenómenos observáveis dentro da sala de aula e a interpretação das produções escritas dos alunos; (iii) O interesse do investigador centra-se na compreensão do modo como os fenómenos decorrem, sendo o processo mais relevante do que os produtos finais obtidos. Ao ser uma investigação que procura analisar que compreensão evidenciam os alunos sobre os conceitos de limite e continuidade, principalmente a partir da resolução de tarefas, o meu interesse como investigador é interpretar os significados que eles atribuem aos conceitos, as representações que usam e as dificuldades que manifestam durante a resolução das tarefas e não só verificar se responderam correta ou incorretamente a tarefa; (iv) A análise dos dados é feita de forma indutiva e exploratória. Através de uma análise exploratória dos dados obtêm-se os resultados e as conclusões do estudo, de forma que o conhecimento vai construir-se a partir da natureza empírica dos dados; (v) O investigador interessa-se por compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Neste estudo, as experiências dos participantes correspondem aos momentos de discussão na sala de aula e de resolução das tarefas, ocasiões que centram a minha atenção como investigador, particularmente as diferentes ações dos alunos que evidenciam a sua compreensão dos conceitos em questão.

Papel do investigador

O meu papel como investigador desenrolou-se em várias vertentes. Uma primeira vertente foi a elaboração das tarefas que foram aplicadas no Estudo Exploratório e no Estudo Principal. Neste ponto da investigação coordenei com a professora titular da turma a adaptação das tarefas ao contexto da turma e os momentos apropriados para serem aplicadas.

Numa outra vertente, tendo em conta que "os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48), realizei um total de dez visitas à escola secundária, das quais em sete ocasiões foram feitas observações de aula como parte dos procedimentos de recolha de dados. Neste momento, o meu papel como investigador caraterizou-se por estudar objetivamente os estados subjetivos dos sujeitos, passar uma quantidade de tempo considerável no ambiente em que acontece o fenómeno recolhendo grandes quantidades de dados, confrontar constantemente as minhas opiniões próprias e preconceitos com os dados, procurando construir conhecimento e descrever objetivamente os resultados em lugar de dar opiniões sobre o contexto investigado (Bogdan & Biklen, 1994).

Além das observações, numa outra vertente como investigador, dentro do ambiente investigado, foi a realização de entrevistas a alguns dos alunos participantes no estudo, com o propósito de complementar as fontes de recolha de dados para assim aprofundar a interpretação objetiva da informação recolhida. Finalmente, a última fase do meu papel como investigador consistiu na análise dos dados recolhidos, a organização e apresentação dos resultados.

3.2 Estudo exploratório

Previamente à realização da investigação que agora apresento, realizei um Estudo Exploratório (EE) com o objetivo de obter informação que pudesse contribuir para a seleção e elaboração de tarefas e para o estabelecimento de um quadro conceptual que permita analisar a compreensão que evidenciam os alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, com o propósito da planificação do Estudo Principal da investigação.

3.2.1 Contexto e aspetos metodológicos do Estudo Exploratório

Contexto e participantes

O estudo exploratório foi realizado numa turma de 25 alunos (7 raparigas e 18 rapazes) de 11.º ano de uma Escola Secundária dos arredores de Lisboa, durante o ano letivo 2014/2015. Os alunos participantes tinham idades compreendidas entre os 16 e os 18 anos, pertencentes a um contexto suburbano com um nível socioeconómico de classe média. Em relação ao desempenho académico, segundo a professora da turma, os alunos têm um desempenho médio-alto. A Escola e a turma foram determinadas por conveniência, pela professora titular que me deu acesso à sua turma e se disponibilizou para aplicar as tarefas que suportam o estudo.

Os participantes do estudo, primeiramente a professora que disponibilizou o aceso à sala de aula e igualmente os alunos, foram informados do objetivo do estudo e aceitaram participar voluntariamente, também lhes foi garantido o anonimato no uso dos dados recolhidos.

Este estudo teve por base a aplicação de quatro tarefas em sala de aula (Anexo 1), tendo sido estabelecidos 40 minutos para os alunos as resolverem. Embora o trabalho dos alunos tenha sido individual, o seu posicionamento em pares ocasionou a partilha ocasional de resultados entre eles. Durante o tempo designado para o trabalho autónomo os alunos não tiveram nenhum tipo de ajuda ou orientação por parte da professora da turma nem do investigador.

Como investigador, neste Estudo Exploratório acompanhei a turma durante duas aulas mediante uma observação não participante, com o propósito de identificar os conhecimentos prévios dos alunos e formar parte do ambiente da sala de aula sem perturbar a dinâmica entre os alunos e a professora. Depois realizei mais uma visita à escola para aplicar as tarefas.

Recolha e análise de dados

Para este Estudo Exploratório a recolha de dados foi levada a cabo a partir da recolha documental das produções escritas dos alunos na resolução das quatro tarefas já referidas (Anexo 1).

A *Tarefa 1* teve o objetivo de identificar aspetos que fazem parte do *conceito-imagem* dos alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, nomeadamente identificar as suas conceções intuitivas a partir da interpretação do gráfico de uma função, quer para determinar limites (*questão 1*) quer para determinar a continuidade de uma função num ponto (*questão 2*). Com a *Tarefa 2* pretendeu-se determinar o uso que os alunos dão ao conceito de limite no infinito de uma função na resolução de um problema e identificar se os alunos usam a informação dada de forma verbal (linguagem natural) para formular, calcular e interpretar o valor do limite que permite resolver o problema. Na *Tarefa 3*, a partir da fórmula de uma função definida por ramos, pretendeu-se identificar as estratégias algébricas que os alunos usam para calcular limites de uma função num ponto. Finalmente, a *Tarefa 4* teve o propósito de determinar se os alunos interpretam corretamente as caraterísticas de uma função definida simbolicamente e são capazes de desenhar o seu gráfico. Considero importante salientar o facto das tarefas 3 e 4 serem as mais desafiantes para os alunos por não terem ainda trabalhado este tipo de tarefas na sala de aula.

A análise dos dados consistiu num processo descritivo e interpretativo com base em identificar a compreensão que evidenciam os alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, nomeadamente, focando a atenção nas estratégias de resolução das tarefas, o uso das representações e as conceções que os alunos têm dos conceitos, algumas delas conceções erróneas que revelam a presença de dificuldades de aprendizagem. A seguir apresentam-se os principais resultados deste estudo.

3.2.2 Principais resultados do Estudo Exploratório

Nas aulas prévias à aplicação deste Estudo Exploratório os alunos trabalharam intuitivamente a determinação de limites a partir da interpretação do gráfico de uma função, o conceito de assíntota de uma função, nomeadamente, a determinação de assíntotas verticais e horizontais, e a determinação de limites através da análise do comportamento assintótico da função.

Neste contexto, surge um primeiro resultado da análise dos dados do Estudo Exploratório: *os alunos atribuem o significado de assíntota horizontal ao conceito de limite quanto x tende para mais ou menos infinito*. Este resultado verifica-se mediante diferentes factos, por exemplo, na Tarefa 1, a turma alcançou o maior nível de sucesso (68% de respostas corretas), em relação com as outras tarefas e com a determinação dos outros limites, na determinação de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Na Tarefa 2, em que era solicitado aos alunos resolver uma situação que faz referência a um contexto semi-real, todos os casos nos quais os alunos responderam corretamente (48% dos alunos) seguiram uma estratégia de resolução (Figura 3.1) que consistiu em quatro passos principais: (1) o aluno identifica corretamente que a expressão representa uma função racional, com o grau do polinómio do numerador igual ao grau do polinómio do denominador; (2) interpreta que a expressão "*o tamanho limite da colónia*" corresponde à assíntota horizontal da função racional; (3) conclui que $a=1{,}24\times 106$; e (4) finalmente substituiu os respetivos valores na expressão para determinar o valor solicitado. Alguns dos alunos incluíram o desenho do gráfico da função evidenciando a existência da assíntota horizontal (Figura 3.2), o que revela o propósito de acompanhar o desenvolvimento algébrico implicado na sua estratégia de resolução com uma representação geométrica: o gráfico da função. Mas nenhum dos alunos utilizou alguma expressão simbólica que incluísse a noção de limite, por exemplo: $\lim_{t \to +\infty} N(t)$. Isto pode interpretar-se pelo facto dos alunos terem trabalhado estratégias algébricas com funções racionais para determinar assíntotas horizontais e estar implícito o comportamento do limite no infinito da função.

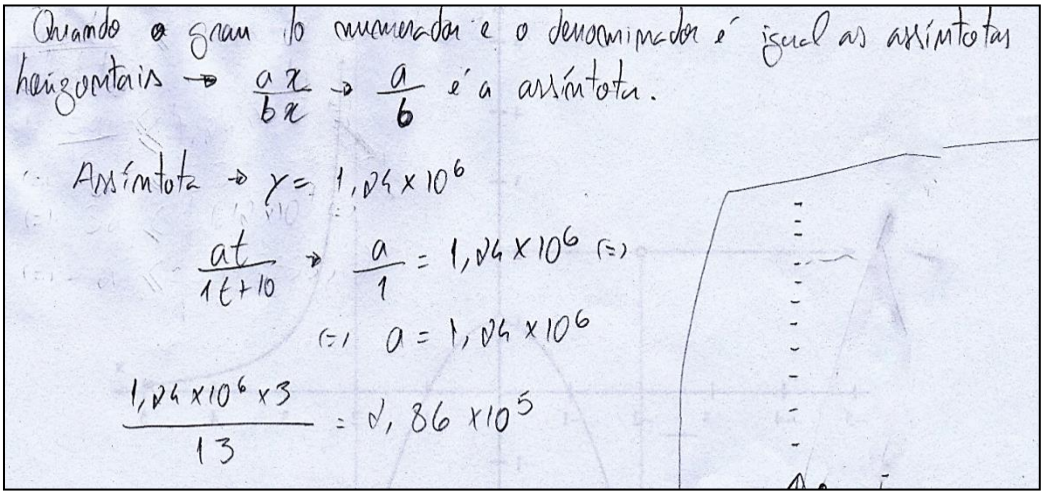


Figura 3.1 T2_EE: exemplo de resolução

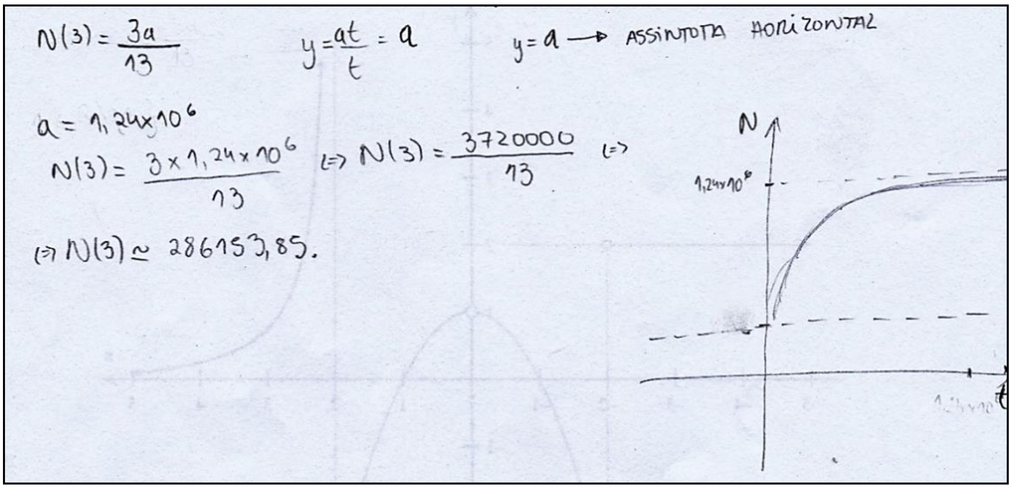


Figura 3.2 T2_EE: exemplo de resolução que inclui uma representação gráfica

Outro facto que verifica este resultado é que na resolução da Tarefa 4, mais de metade da turma (52% dos alunos) representou corretamente no gráfico o comportamento assintótico da função indicado através da expressão: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Neste aspeto, é importante salientar que só 20% dos alunos representaram corretamente o gráfico da função cumprindo todas as condições indicadas, evidenciando que esta tarefa foi a mais desafiante para os alunos porque nas aulas prévias não tinham trabalhado nada semelhante, estavam acostumados a interpretar o gráfico da função para determinar limites e não ao contrário: o desenho do gráfico da função a partir dos limites já estabelecidos. Na Figura 3.3 apresento uma resposta correta da Tarefa 4 e na Figura 3.4 a resposta de dois alunos que mostram o erro que cometeram no círculo indicado, mas representaram corretamente o comportamento da função quando x tende para mais infinito.

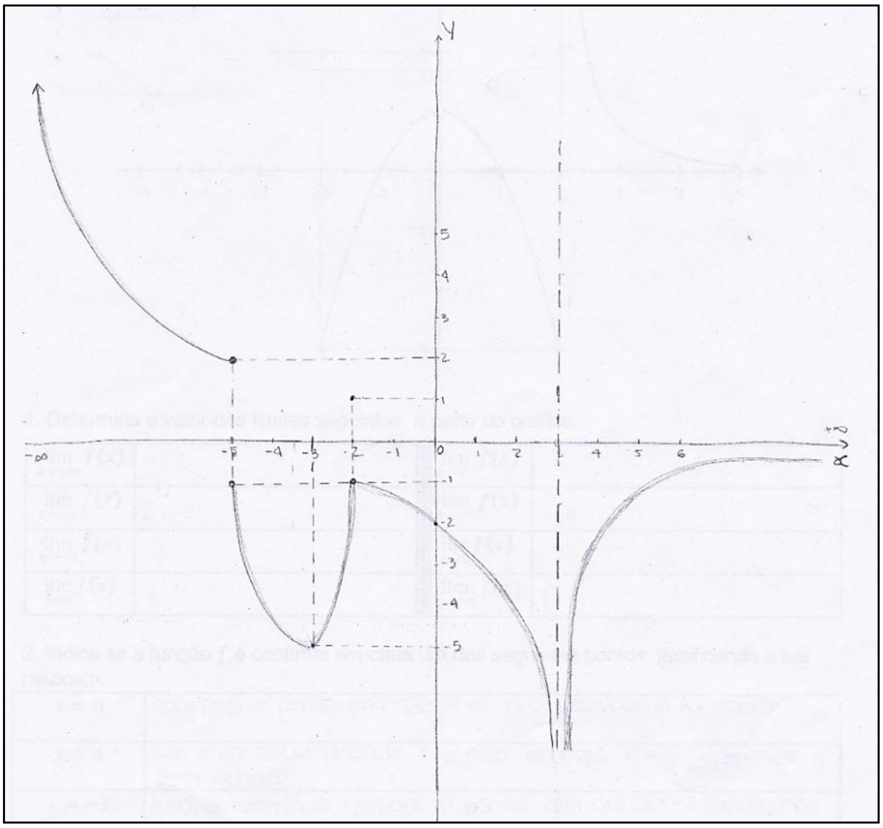


Figura 3.3 T4_EE: exemplo de resolução correta

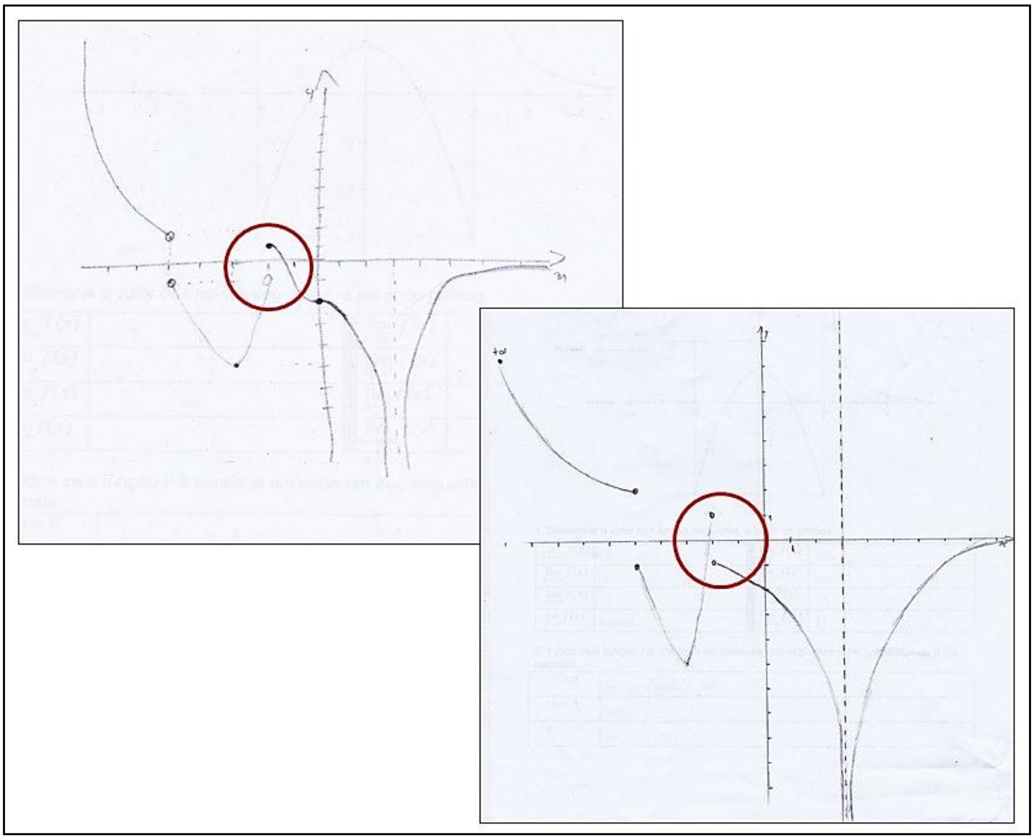


Figura 3.4 T4_EE:exemplo de resoluções incorretas

Um segundo resultado dos dados analisados é que na resolução das tarefas *os alunos evidenciam dificuldade para determinar a existência do limite de uma função quando x tende para um ponto*. Nomeadamente, quando o limite existe e o objeto do ponto não pertence ao domínio, quando o limite existe e o seu valor é diferente da imagem do objeto no ponto, ou quando o limite não existe porque os limites laterais são diferentes. A seguir se detalham os factos que verificam este resultado.

<u>Caso 1:</u> $\lim_{x\to a} f(x)$, quando a não pertence ao domínio de f, mas o limite existe.

Na questão 1 da Tarefa 1 (Figura 3.5), dois alunos responderam que era impossível calcular o $\lim_{x\to 0} f(x)$ e um outro aluno determinou o seu valor mas acrescentou que esse valor não faz parte do contradomínio. Na Tarefa 3 um aluno responde que o $\lim_{x\to 1} g(x)$ é igual a $+\infty$ justificando que 1 não pertence ao domínio da função. Neste caso interpreto que o aluno atribuiu $+\infty$ o significado de não poder determinar o valor do limite. Estes erros revelam que para alguns alunos é imprescindível que o objeto do ponto pertença ao domínio para poder determinar a existência do limite nesse ponto.

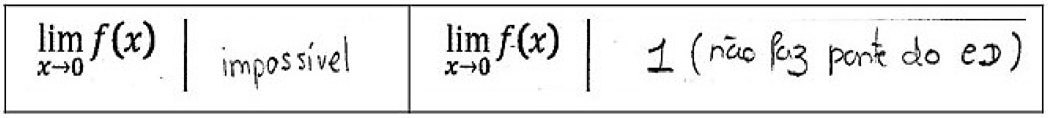
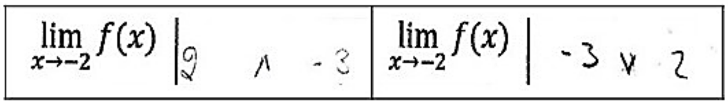


Figura 3.5 T1_Q1_EE: exemplo de resoluções

<u>Caso 2:</u> $\lim_{x\to a} f(x)$, quando a pertence ao domínio de f, mas o limite não existe.

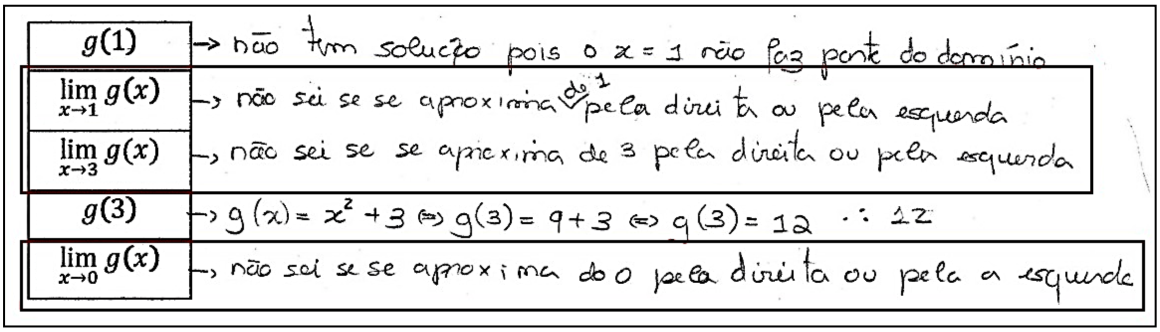
Neste caso, os alunos apresentaram dificuldades em responder que o limite não existia. Os resultados revelam que os alunos sempre atribuíam algum valor (ou valores) aos limites solicitados. Por exemplo, na questão 1 da Tarefa 1 nenhum dos alunos foi capaz de indicar que os limites $\lim_{x\to -2} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existiam, mais de metade dos alunos atribuíram-lhe o valor de -3 que em ambos os casos corresponde à imagem da função no respetivo objeto. Isto também foi detetado na Tarefa 3, no estudo do $\lim_{x\to 3} g(x)$, em que alguns alunos responderam que o seu valor é 12, valor obtido da substituição de $x=3$ no ramo correspondente, ou seja, o cálculo da imagem de 3. O qual confirma este resultado e revela um outro: *os alunos têm uma conceção errónea de que o valor do limite corresponde ao valor da imagem do objeto no qual se estuda o limite*; com o qual atribuem ao limite o significado de imagem.



$\lim_{x \to -2} f(x)$	$2 \wedge -3$	$\lim_{x \to -2} f(x)$	$-3 \vee 2$

Figura 3.6 T1_Q1_EE: exemplo de resoluções incorretas

Noutras respostas sobre o $\lim_{x \to -2} f(x)$, na Tarefa 1 (Figura 3.6), os alunos indicaram que o limite tinha dois valores ou podia variar entre dois valores. Este facto evidencia a dificuldade em determinar a existência do limite mas também revela um outro resultado: *os alunos têm dificuldade na compreensão da unicidade do limite,* a ser a unicidade uma caraterística importante do conceito do limite. Aspeto que pode estar relacionado com o facto de o aluno não conceber que o valor do limite corresponde ao valor dos limites laterais quando estes são iguais, pois numa das respostas da Tarefa 3 (Figura 3.7) o aluno justifica que não pode determinar o valor dos limites em questão porque não se indicava se se aproxima pela direita ou pela esquerda do respetivo valor de x. Esta dificuldade evidencia também que *os alunos atribuem ao conceito de limite o significado de aproximação lateral numa só direção (pela esquerda ou pela direita do objeto) e não como aproximação conjunta em ambas as direções*.



$g(1)$	→ não tem solução pois o $x = 1$ não faz parte do domínio
$\lim_{x \to 1} g(x)$	→ não sei se se aproxima de 1 pela direita ou pela esquerda
$\lim_{x \to 3} g(x)$	→ não sei se se aproxima de 3 pela direita ou pela esquerda
$g(3)$	→ $g(x) = x^2 + 3 \Leftrightarrow g(3) = 9 + 3 \Leftrightarrow g(3) = 12 \therefore 12$
$\lim_{x \to 0} g(x)$	→ não sei se se aproxima do 0 pela direita ou pela a esquerda

Figura 3.7 T3_EE: exemplo de resolução

<u>*Caso 3:*</u> $\lim_{x \to a} f(x)$, quando a pertence ao domínio de f, o limite existe mas é diferente de $f(a)$.

Os alunos depararam-se com esta situação na Tarefa 4. Entre as respostas incorretas evidencia-se a dificuldade para garantir a existência do limite num ponto quando a imagem do objeto do ponto é diferente. Na Figura 3.4, acima indicada, apresentam-se dois gráficos nos quais o erro se encontra em redor do ponto de $x = -2$ no qual os alunos deviam garantir a existência do limite ainda que a imagem em $x = -2$ fosse diferente do valor do limite. Isto revela que os alunos consideram que todas as imagens de uma função devem estar unidas na curva ou ramo da função, o que alimenta a conceção errónea que tem-se mantido nos alunos sobre a ideia de que se o limite existe então o seu valor corresponde à imagem do objeto no qual se estuda o limite.

Finalmente, um último resultado obtido na análise dos dados é que *os alunos têm a conceção errónea de que uma função é contínua num ponto se está definida nesse ponto*; ou dito de outra forma, para os alunos, se a imagem do objeto existe no ponto então a função é contínua, caso contrário é descontínua. Este resultado verifica-se na resolução da questão 2 da Tarefa 1, na qual a maioria dos alunos deu uma resposta certa; contudo, as suas justificações evidenciam que a determinação da continuidade depende da existência da imagem do objeto (Figura 3.8) ou se o objeto pertence ao domínio da função (Figura 3.9). No entanto, é importante salientar que ainda neste nível de ensino o estudo da continuidade é limitado, no sentido de que não se tem trabalhado o conhecimento da conceção dinâmica da continuidade de uma função num ponto – a função é contínua se o valor do limite no ponto é igual à imagem correspondente. Pelo que só se obteve este resultado referente às conceções intuitivas do conceito de continuidade.

$x = 0$	é descontínua porque o objeto 0 não tem imagem
$x = 4$	é contínua porque o objeto (4) 4 tem uma imagem
$x = -2$	é contínua porque o objeto (-2) tem uma imagem

Figura 3.8 T1_Q2_EE: exemplo de resolução

$x = 0$	Não, porque $x=0$ não pertence a Domínio
$x = 4$	Sim, porque $x=4$ pertende ao Domínio
$x = -2$	Sim, porque $x=-2$ pertence ao Domínio

Figura 3.9 T1_Q2_EE: exemplo de resolução

A análise das resoluções dos alunos nas quatro tarefas propostas neste Estudo Exploratório permitiu-me, assim, concluir que, em termos gerais, os alunos de 11.º ano que participaram neste Estudo Exploratório têm uma *compreensão instrumental* de caráter intuitiva dos conceitos de limite e continuidade de uma função. Instrumental no sentido de que ainda que os alunos tenham conceções erróneas dos conceitos, o que revela que não são conscientes da definição formal dos entes matemáticos em estudo, eles conseguem aplicar procedimentos, estratégias e diferentes representações para resolver tarefas. Intuitiva pelo facto de que os alunos serem orientados mediante experiencias externas que conformam um conjunto de ideias inicias e muitas vezes informais dos conceitos, levando-os a atribuir-lhes distintos significados através das conexões com outros conceitos.

Isto verifica-se por exemplo no facto de que foram identificados três significados que os alunos atribuem ao conceito de limite: (i) o significado de imagem do ponto no qual está a determinar o limite, quando associam o valor da imagem do objeto ao valor do limite da função; (ii) o significado de assíntota horizontal, quando analisam o comportamento da função em $+\infty$ ou $-\infty$; e (iii) o significado de aproximação unilateral (pela esquerda ou pela direita do objeto) e não como aproximação conjunta em ambas as direções. Estes significados podem surgir das suas experiências prévias com abordagens intuitivas do conceito de limite associadas a outros conceitos como imagem ou assíntota de uma função. Assim, estes significados constituem as conceções iniciais que se desenvolvem nos alunos de 11.º ano e formam parte do seu *conceito-imagem* de limite de uma função, num nível de *conceito-imagem incipiente* (Domingos, 2003), caracterizado principalmente pelas conceções incompletas e parciais que têm os alunos sobre este conceito.

As representações simbólicas, nas tarefas, apelam principalmente ao cálculo algébrico para determinar os valores dos limites solicitados nas questões, sobretudo nas tarefas 2 e 3. Com respeito às representações geométricas observaram-se dois tipos de usos: a leitura e interpretação do gráfico de uma função (Tarefa 1) ou o desenho do gráfico de uma função, quer seja porque é solicitado (Tarefa 4) ou como parte da estratégia de resolução do aluno para acompanhar o desenvolvimento algébrico (tarefas 2 e 3). Evidencia-se, assim, a tendência dos alunos em visualizar uma representação do gráfico de uma função para resolver tarefas relacionadas com o conceito de limite. A representação verbal é frequentemente usada pelos alunos para justificações (Tarefa 3), mas também teve um papel importante na Tarefa 2 que consistiu na conversão da informação representada verbalmente em representações simbólicas que permitiram resolver a tarefa.

Também, posso concluir que segundo os dados analisados os alunos fazem uso da estrutura extrínseca dos sistemas de representação (Goldin, 1998) nas resoluções das tarefas, na medida em que foi observado a naturalidade com que os alunos conseguem realizar conversões entre sistemas de representação. Por exemplo, a informação representada geometricamente no gráfico da função é interpretada e convertida em dados representados simbolicamente para responder as questões na Tarefa 1, ou de maneira contrária a conversão das representações simbólicas dadas na Tarefa 4 numa representação geométrica.

As representações geométricas e simbólicas, consideradas como objetos visuais, têm uma *função ilustrativa* (Gómez-Chacón, 2014), no sentido em que são usadas pelos alunos numa perspetiva explicativa, principalmente para justificar as suas respostas. Os dados revelam que na resolução das tarefas os alunos manifestaram os usos da visualização mencionados em Arcavi (2003) pois, por exemplo, nas Tarefas 2 e 3 criaram imagens (o gráfico da função) para acompanhar o desenvolvimento simbólico e, na Tarefa 2, estabeleceram conexões entre o conceito de limite quando x tende para mais infinito e o conceito de assíntota horizontal.

Por outro lado, posso concluir que, segundo os níveis de visualização propostos em Rivera (2011), os alunos de 11.º ano apresentam um *nível de visualização imaginativo*, caraterizado pelo conjunto de experiências com outros conceitos e o uso intuitivo das representações.

Finalmente, as dificuldades de aprendizagem dos alunos que foram identificadas são produto das suas conceções ou significados que atribuem aos conceitos, nomeadamente a dificuldade para compreender a definição de limite no sentido de reconhecer as condições de existência e de unicidade.

3.2.3 Contributos do Estudo Exploratório para a investigação

Este estudo permitiu ter uma visão geral da compreensão que os alunos têm sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, contribuindo para estruturar o Estudo Principal da investigação atendendo às reflexões que foram suscitadas pelos resultados.

Um primeiro contributo foi a reformulação e delimitação das questões da investigação. Os dados recolhidos e a análise feita levou-me refletir sobre as questões que procurava responder com o propósito de analisar a compreensão que evidenciam os alunos sobre os conceitos. Por exemplo inicialmente formulei cinco questões: (i) Como os alunos reconhecem e interpretam os conceitos de limite e continuidade de uma função a partir de diferentes representações? (ii) Como os alunos utilizam as representações destes conceitos para resolver tarefas? (iii) Qual o conceito-imagem e o conceito-definição que têm os alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função? (iv) Em que medida está envolvida a visualização matemática no desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre estes conceitos? (v) Quais as principais dificuldades e os erros comuns que os alunos manifestam durante a resolução de tarefas que envolvem estes conceitos? Tendo em conta a natureza dos dados recolhidos, os resultados obtidos após a análise e a sua articulação com a fundamentação teórica, foram considerados dois aspetos: as representações e a visualização estão articuladas nas ações dos alunos nas resoluções das tarefas; e as formas em que os alunos reconhecem e interpretam os conceitos, o conceito-imagem e o conceito-definição, globalmente se referem aos significados que os alunos atribuem a estes conceitos. Posto isto, assim, estas cinco questões foram reformuladas nas três questões apresentadas na secção 1.2 deste relatório.

Esta reformulação também contribuiu para refletir sobre o procedimento de análise de dados e a forma em que os resultados do Estudo Principal iriam ser apresentados, o que permitiu estabelecer um quadro de análise de dados, apresentado na secção 3.4.2 deste capítulo, com a intenção de estruturar e de organizar a análise dos dados e a apresentação dos resultados do Estudo Principal a partir de três dimensões correspondentes às novas questões: os significados que os alunos atribuem aos conceitos, o uso que os alunos dão às representações e à visualização dos conceitos para gerar os significados durante a resolução das tarefas, e os erros e dificuldades que têm os alunos na compreensão dos conceitos.

O Estudo Exploratório permitiu ter em consideração que as tarefas do Estudo Principal deveriam incluir perguntas nas quais os alunos tenham a oportunidade de definir os conceitos de limite e continuidade de uma função, ainda que informalmente, com o propósito de recolher dados que permitam analisar o seu *conceito-definição* destes conceitos. Além disso, sugere a necessidade de aplicação de mais tarefas que integrem o conceito de continuidade de uma função e, para isso, foi preciso estabelecer que o Estudo Principal decorrerá com alunos do 12.º ano, nomeadamente com a turma de 12.º ano formada, na sua maioria, pelos alunos que participaram neste Estudo Exploratório, pois curricularmente o conceito de continuidade define-se formalmente neste nível de ensino.

Em relação às opções metodológicas para a recolha dos dados, o Estudo Exploratório levou-me refletir que para aprofundar as questões da investigação e interpretar melhor os dados, devia realizar observações de aula e entrevistas aos alunos como outras fontes de recolha de dados além das produções escritas feitas pelos alunos na resolução das tarefas propostas.

3.3 Contexto e Participantes

O Estudo Exploratório e o Estudo Principal foram realizados na mesma Escola secundária, situada nos arredores de Lisboa, pelas razões de conveniência já referidas. Em ambos os estudos, a professora titular da turma também foi a mesma. O Estudo

Exploratório foi realizado no ano letivo de 2014/2015, com uma turma de 11.º ano da escola referida e o Estudo Principal no ano letivo seguinte de 2015/2016 numa turma de 12.º ano, a qual era formada por 80% dos alunos que participaram no Estudo Exploratório. Do mesmo modo, os participantes do estudo foram informados do objetivo da investigação e foi-lhes garantido o anonimato dos dados recolhidos, pelo que aceitaram participar voluntariamente.

No Estudo Principal participaram 28 alunos, 21 rapazes e 7 raparigas, com idades compreendidas entre os 17 e os 19 anos, pertencentes a um contexto suburbano com um nível socioeconómico de classe média. Em relação ao desempenho académico, segundo a professora da turma, os alunos têm um desempenho médio-alto, e só um dos alunos está a repetir o 12.º ano.

O estudo foi levado a cabo durante o desenvolvimento dos objetivos e conteúdos curriculares referentes ao Tema II *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do Programa de Matemática A para 12.º ano (MEC, 2002). A sala de aula estava organizada em mesas de trabalho duplas, cada aluno tinha o seu par, com o qual discutia durante o seu trabalho autónomo. A aula normalmente decorria em três etapas: uma etapa inicial dirigida pela professora na que eram ditas as instruções e o sumário da aula, um momento de explicação dos conteúdos ou estratégias de resolução de tarefas por parte da professora e finalmente um momento de resolução de tarefas, principalmente de exercícios, consistindo no trabalho autónomo dos alunos e na discussão coletiva das soluções, momento aproveitado pela professora para esclarecer questões levantadas pelos alunos e para a consolidação dos conceitos trabalhados.

3.4 Procedimentos e instrumentos de recolha e análise de dados

Nesta seção vou-me referir aos procedimentos levados a cabo e aos instrumentos aplicados para a recolha e análise de dados. O termo *dados* “refere-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontrarem a estudar; são os elementos que formam a base da análise” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 149).

3.4.1 Recolha de dados

Observação participante

Para autores como Denscombe (2003), a observação é participante sempre que o investigador se encontre inserido na ação, ainda que apenas como acompanhante, como "sombra" da pessoa a ser investigada. A observação permite ter acesso direto às intervenções sociais e favorece uma abordagem aberta e indutiva. O observador participa no quotidiano das pessoas que estão a ser estudadas, quer abertamente, quer de forma encoberta, observando o que acontece, ouvindo o que é dito e questionando as pessoas durante um determinado período de tempo (Becker & Geer, 1957). Neste estudo foi através da observação que tive acesso direto ao contexto no qual se desenvolvia o fenómeno que pretendia investigar – a compreensão que evidenciam os alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. A sala de aula constituiu o ambiente que foi observado no período entre 28 de Janeiro de 2016 e 18 de Fevereiro de 2016, realizando um total de sete observações de aulas de 90 minutos cada uma; cada observação foi gravada em áudio para complementar as notas de campo registadas pelo observador.

A participação que tive na observação consistiu no acompanhamento dos alunos durante a resolução de tarefas na sala de aula, nomeadamente durante o seu trabalho autónomo. Para além de observar as suas ações desde fora, descolava-me pela sala de aula interagindo com eles na procura de perceber as questões que levantavam em relação à compreensão dos conceitos em estudo. Este procedimento de recolha de dados permitiu-me obter informação que de outro modo permaneceria oculta, por exemplo, compreender as aprendizagens bem como as dificuldades que se manifestam durante a resolução das tarefa e perceber como os alunos estruturam o seu pensamento, aplicam os conceitos ou procedimentos, usam as representações e estabelecem as suas estratégias de resolução. Além disto, este tipo de observação tem como vantagens o facto de não necessitar de muito equipamento, de não interferir com o que está a ser observado, de oferecer perspetivas muito mais ricas do fenómeno observado dado que permite uma visão holística do mesmo e de permitir conhecer o ponto de vista dos sujeitos (Denscombe, 2003, p.209).

Entrevista

Para Bogdan e Biklen (1994) uma entrevista consiste numa conversa intencional, geralmente entre duas pessoas, dirigida por uma delas – o entrevistador – com o objetivo de obter informações sobre a outra. Numa investigação qualitativa, a entrevista surge com um formato próprio e pode ser usada de duas formas: "podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134). Neste sentido, neste estudo a entrevista é usada para complementar a informação recolhida por meio das observações e das produções escritas dos alunos.

Como procedimento de recolha de dados, as entrevistas têm as vantagens de: (i) as pessoas sentem-se "mais à vontade do que quando completam um questionário" e (ii) permitem "uma informação mais completa do que a disponível na escrita" (Anderson & Arsenault, 2002, p. 190). Além disto, as entrevistas permitem ao investigador aprofundar nas conclusões ou ideias sobre significados ou interpretações dos indivíduos (Bogdan & Biklen, 1994).

Por outro lado, de acordo com Gay, Mills e Airasian (2006) as entrevistas podem subdividir-se em três tipos principais: estruturadas, não estruturadas e semi-estruturadas. Neste estudo, realizei uma entrevista semi-estruturada que foi gravada em áudio e orientada por um conjunto de questões definidas à partida (Anexo 2) para serem administradas de forma flexível, de modo a que a partir das repostas dos alunos possam ser introduzidas novas perguntas que permitam esclarecer, aprofundar ou obter novas informações. Isto porque a entrevista, de modo geral, não é uma conversa arbitrária, pelo contrário é dedicada a aprofundar um determinado tema e o fluxo da discussão é habitualmente monitorizado e segue uma agenda estabelecida pelo entrevistador (Denscombe, 2003).

As entrevistas foram aplicadas no final da unidade de ensino onde foram propostas as tarefas do estudo, a 3 alunos da turma, escolhidos de acordo com o seu desempenho na resolução das tarefas através de uma análise prévia que realizei sobre as produções escritas dos alunos de toda a turma e a partir das observações da aula. Deste modo identifiquei estes três alunos: Samuel, caraterizado pela constante participação na sala de aula através de intervenções acertadas e que mostrava ter domínio suficiente dos conhecimentos matemáticos, justificando assim o seu alto desempenho académico; Tiago, pouco participativo, evidenciava deficiências conceituais e nas estratégias de resolução das tarefas, pelo que mostra ter um desempenho baixo; e Sara, uma aluna regular da turma que mostra ter um desempenho académico médio. Estes três alunos decidiram participar da entrevista voluntariamente, uma vez que foram informados do objetivo da entrevista e foi-lhes garantido o anonimato, pelo que neste relatório são usados nomes fictícios.

Foram entrevistados só estes três alunos por questões de tempo e conveniência. Estas entrevistas, realizadas na escola e de acordo com a disponibilidade dos alunos, tiveram uma duração aproximada de 10 minutos e com elas pretendi obter informação mais detalhada sobre as resoluções dos alunos, nomeadamente no que respeita a: (i) os significados que formam parte do *conceito-imagem* e do *conceito-definição* que os alunos têm sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função; (ii) o uso que os alunos dão às representações verbais, nomeadamente o uso que dão aos termos específicos, para referirem-se a estes conceitos; e (iii) as dificuldades de aprendizagem que podem, ainda, continuar formando parte da estrutura cognitiva dos alunos em relação a estes conceitos.

Notas de campo

Segundo Bogdan e Biklen (1994) as notas de campo são um complemento importante para métodos de recolha de dados como a observação e a entrevista. Neste estudo, eu como investigador, recorri às notas de campo como procedimento de registo dos dados observados e da informação recolhida através das entrevistas. De modo que as notas de campo constituem "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150).

Estas notas caraterizam-se por descreverem com exatidão o que está a acontecer, nomeadamente o relato dos acontecimentos particulares e a descrição pormenorizada das atividades em relação aos factos que põem em evidência a compreensão dos alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. Durante as observações de aula e a resolução das tarefas do estudo, tirei notas de campo para registar informação relacionada com as estratégias usadas pelos alunos, as questões levantadas que evidenciam dúvidas ou dificuldades de aprendizagem, e o uso que os alunos dão aos termos específicos para referirem-se aos conceitos e comunicar as suas ideias.

Recolha documental

Os procedimentos de recolha de dados acima descritos complementam o principal procedimento de recolha de dados: a recolha documental. Para Stake (2012) "recolher dados através do estudo de documentos segue a mesma linha de pensamento que observar ou entrevistar. É preciso termos a mente organizada e, no entanto, aberta a pistas inesperadas" (p. 84). Nomeadamente, recolhi as resoluções escritas dos alunos das diversas tarefas do estudo, como forma de identificar vestígios sobre os significados, o uso das representações, a aplicação e visualização dos conceitos, e os erros e as dificuldades dos alunos durante a resolução de tarefas que integram os conceitos de limite e continuidade de uma função. Isto porque as produções escritas "servem como fontes de férteis descrições de como as pessoas que produziram os materiais pensam acerca do seu mundo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 176), neste caso acerca dos conceitos em questão.

A recolha documental foi feita especificamente sobre as produções escritas dos alunos durante a resolução das tarefas propostas no estudo, pelo que as tarefas constituem os instrumentos de recolha de dados. Estas tarefas (Anexo 3) foram aplicadas aos alunos em forma de duas fichas. A primeira, *Ficha de Tarefas de Diagnóstico*, tinha como principal objetivo analisar os conhecimentos prévios dos alunos no que respeita às suas conceções de limite e continuidade, nomeadamente através de representações geométricas, tendo em conta que as suas experiências iniciais caraterizavam-se pelo trabalho com o gráfico de uma função para determinar limites e concluir a continuidade da função. A segunda ficha, *Ficha de Tarefas de Consolidação*, foi mais abrangente pois tinha a intenção de levar o aluno a usar estratégias de resolução que incluíssem diversas e diferentes representações, assim como também a aplicação dos conceitos em diferentes tipos de tarefas. As tarefas de diagnóstico foram aplicadas na segunda aula observada durante 40 minutos e as tarefas de consolidação aplicaram-se nas três últimas aulas observadas, durante 30 minutos de cada uma dessas aulas. As tarefas foram combinadas com a professora titular da turma para fazerem parte do trabalho a realizar durante as aulas, deste modo foram também considerados os objetivos programáticos para a sua elaboração.

A seguir apresento duas tabelas com o propósito de cada uma das tarefas aplicadas, na qual se indica o objetivo de aprendizagem que responde aos interesses curriculares e o objetivo da tarefa para o estudo como instrumento de recolha de dados.

Tabela 3.1 Objetivos das tarefas da Ficha de Diagnóstico

Ficha de Tarefas de Diagnóstico		
Tarefa	**Objetivo de aprendizagem**	**Objetivo para o estudo**
Tarefa 1	Determinar o limite de uma função a partir da interpretação do seu gráfico.	Identificar os significados que os alunos atribuem ao conceito de limite a partir da interpretação do gráfico da função.

Tarefa 2	Representar, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função aplicando a noção de continuidade.	Identificar os significados que os alunos atribuem ao conceito de continuidade de uma função a partir de representação do gráfico de uma função.
Tarefa 3	Determinar a existência e o valor do limite de uma função num ponto a partir da interpretação do seu gráfico.	Identificar se na sua conceção de limite de uma função, os alunos reconhecem as condições de existência e unicidade, e as aplicam para resolver tarefas que envolvem a representação do gráfico de uma função.

Tabela 3.2 Objetivos das tarefas da Ficha de Consolidação

Ficha de Tarefas de Consolidação		
Tarefa	**Objetivo de aprendizagem**	**Objetivo para o estudo**
Tarefa 1	Reconhecer uma função contínua a partir da sua fórmula algébrica ou do seu gráfico.	Analisar a aplicação que os alunos dão à definição do conceito de continuidade de uma função na resolução da tarefa. Identificar o tipo de representação (simbólica ou gráfica) em que os alunos têm maior facilidade em determinar a continuidade de uma função.
Tarefa 2	Calcular o limite de uma função quando x tende para infinito.	Analisar as estratégias de resolução dos alunos em relação à noção de limite ao infinito de uma função e o uso que os alunos dão ao gráfico de uma função para calcular limites. Identificar de que forma o uso de propriedades operatórias e as indeterminações formam parte da noção de limite que têm os alunos.
Tarefa 3	Determinar a equação da assintota horizontal de uma função.	Identificar o uso que os alunos dão à noção de limite ao infinito de uma função para determinar assintotas horizontais. Analisar as formas em que os alunos utilizam a informação dada mediante representações verbais e simbólicas para formular e calcular um limite ao infinito de uma função.
Tarefa 4	Representar, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função aplicando a noção de limite.	Identificar se termos como tende, aproxima e alcança formam parte da noção de limite, e o uso que os alunos dão-lhes na estratégia de resolução para representar graficamente uma função.

Tarefa 5	Resolver situações que modelam uma semi-realidade aplicando a noção de limite de uma função e as suas propriedades operatórias.	Determinar o uso que os alunos dão ao conceito de limite ao infinito de uma função na resolução de um problema. Identificar se os alunos usam a informação dada de forma verbal e geométrica para calcular o limite que permita resolver o problema e interpretar o seu valor no contexto da situação.
Tarefa 6	Interpretar o gráfico de uma função aplicando a noção de limite de uma função.	Identificar se os alunos usam a informação dada simbólica e geometricamente para formular e calcular limites. Determinar como os alunos relacionam os conceitos de assíntota vertical, assintota horizontal e ponto de descontinuidade com o conceito de limite.

Em síntese, pretendendo garantir a consistência e coerência da informação recolhida, este estudo inclui uma variedade de formas de recolha de dados e registo da informação: as observações de aula, a realização de uma entrevista, as notas de campo e a recolha documental das resoluções escritas dos alunos das tarefas. Na Figura 3.10 apresento a sequência do processo da recolha de dados do estudo, na qual se indica a data da recolha, o procedimento ou instrumento aplicado e o registo da informação usado.

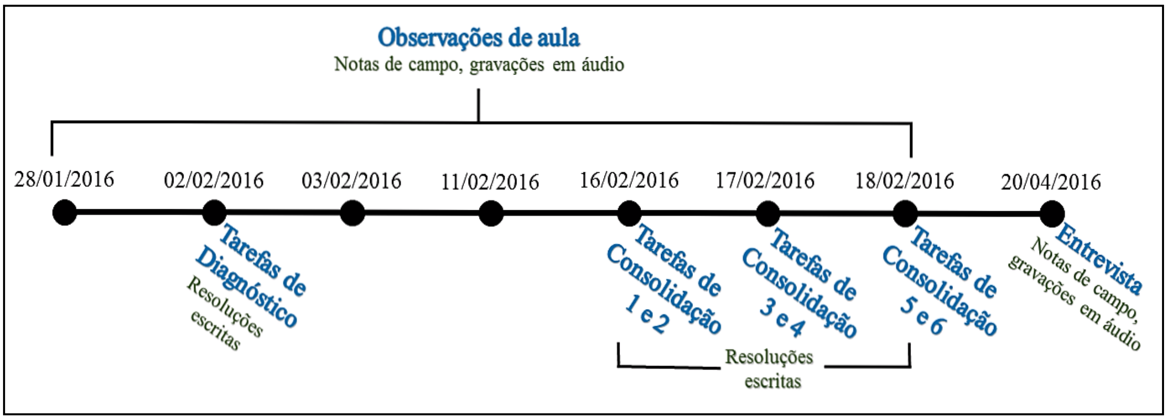


Figura 3.10 Fases da recolha de dados

3.4.2 Análise de dados

A análise de dados consiste num processo sistemático de busca e de organização da informação recolhida através das notas de campo, dos registos de áudio das aulas e das entrevistas, das transcrições das entrevistas e das produções escritas dos alunos com o objetivo de aumentar a compreensão de toda esta informação e de apresentar aos outros aquilo que foi encontrado (Bogdan & Biklen, 1994). Estes autores acrescentam que esta análise também envolve o trabalho com os dados, a sua organização, síntese, descoberta dos aspetos importantes e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros.

Neste estudo o processo de análise de dados consistiu num ciclo de quatro fases: (1) organização dos dados em duas grandes classes, dados respeitantes ao conceito de limite e ao conceito de continuidade; (2) para cada uma destas classes, os dados subdividiram-se em três categorias de análise definidas à priori tendo em conta as questões do estudo (Figura 3.11): (i) significados, (ii) representações e visualização, e (iii) dificuldades de aprendizagem; (3) a seguir, devido à natureza do estudo, a análise de dados assumiu um carácter essencialmente descritivo e interpretativo; (4) finalmente, os principais resultados que emergem da análise são apresentados neste relatório segundo as categorias estabelecidas. Nesta etapa o processo de análise é cíclico no sentido de repetir as fases ou passar de uma fase a outra procurando manter a consistência e coerência da organização, análise e apresentação da informação.

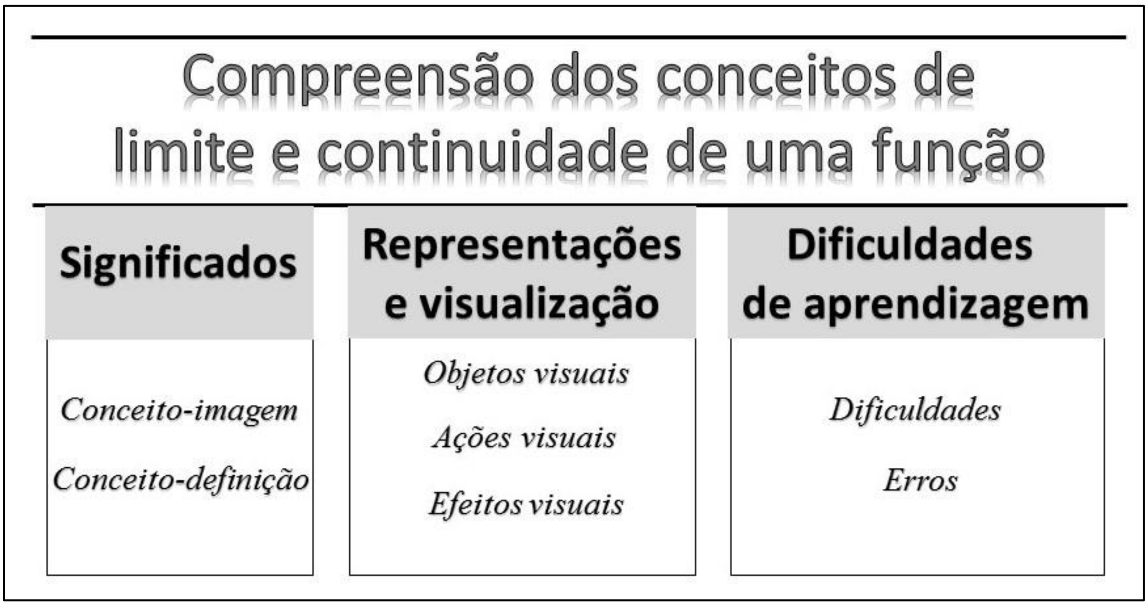


Figura 3.11 Categorias da análise de dados

As três categorias de análise baseiam-se na revisão bibliográfica considerada no enquadramento teórico (Capítulo 2). A primeira categoria – *significados* – refere-se à análise das conceções e noções que os alunos têm sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. A análise é feita tendo em consideração a teoria de Tall e Vinner (1981) sobre o *conceito-imagem* e o *conceito-definição,* já que constitui uma forma de interpretar a compreensão que os alunos têm sobre os conceitos em questão em relação com os significados que eles atribuem a estes conceitos.

As *representações* e a *visualização* constituem a segunda categoria de análise fundamentada na argumentação teórica encontrada em Natsheh e Karsenty (2014) sobre as componentes visuais que interatuam na resolução de tarefas: os objetos visuais, as *ações visuais* e os *efeitos visuais*. Desta forma, as representações (*verbais*, *simbólicas* e *geométricas*) são consideradas como os objetos visuais sobre os quais os alunos operam visualmente motivados pelos efeitos visuais que constituem os propósitos ou objetivos do agir do aluno durante a resolução das tarefas. É por isto que a visualização e as representações estão ligadas no quadro de análise. Por exemplo, as transformações das representações indicadas em Duval (2003): *conversões* e *tratamentos*, consideram-se como ações visuais, pois conformam processos sobre os objetos visuais, inclusive processos mentais que acontecem de forma implícita.

A terceira categoria, *dificuldades de aprendizagem*, integra a análise dos erros e das dificuldades que manifestam os alunos durante a resolução das tarefas à luz das dificuldades que têm sido identificadas e descritas nas investigações empíricas que foram consultadas (Secção 2.5.2 deste relatório) e tendo em conta outras que possam surgir nos dados recolhidos. Contudo, esta dimensão não está desligada das outras, pois é através do processo de visualização e do uso das representações durante a resolução das tarefas que são manifestados os erros e as dificuldades que os alunos enfrentam para compreender os conceitos em questão, e estas dificuldades muitas vezes constituem a base para a formulação de significados que evidenciam as conceções erróneas que os alunos possam ter dos conceitos.

Finalmente, na apresentação dos resultados (Capítulo 4) faço uso de excertos dos dados, nomeadamente episódios da sala de aula, fragmentos das entrevistas e extratos das resoluções das tarefas com o propósito de evidenciar a interpretação dos dados e justificar os resultados obtidos.

Capítulo 4

Análise e interpretação dos dados e apresentação dos resultados

Neste capítulo apresento os resultados da análise e interpretação dos dados recolhidos através das observações de aula, das produções escritas dos alunos na resolução de tarefas e da entrevista. Apresento uma análise global da turma participante no estudo e um seguimento de três alunos – *Sara*, *Samuel* e *Tiago* – que foram escolhidos para acompanhar este processo e exemplificar os resultados de forma mais particular e representativa.

Nos resultados apresentados aparecem legendas simplificadas que fazem referência à fonte de recolha de dados que são: Q: *questão da tarefa*; T: *tarefa*; FD: *ficha de tarefas de diagnóstico*; FC: *ficha de tarefas de consolidação*. Nos casos em que são apresentados excertos do trabalho ou da participação de outros alunos da turma, que não Sara, Samuel ou Tiago, é utilizada a notação A_i.

4.1 Análise da compreensão do conceito de limite de uma função

4.1.1 Significados atribuídos ao conceito de limite

Os dados revelam que os alunos atribuiram distintos significados ao conceito de limite, a seguir, descrevem-se e exemplificam-se estes significados que formam parte do *conceito-imagem* que os alunos têm sobre este ente matemático.

Na questão 1.2 da Tarefa 1 de diagnóstico – *Explica o que entendes por limite de uma função num ponto* – 70% dos alunos atribuem ao conceito de limite de uma função o significado de um *valor*, o qual é referido nas suas respostas através de expressões como: *"o valor de y", "o valor de $f(x)$", "o valor do contradomínio da função", "o valor que a função toma"*; ou seja, para estes alunos o limite é um valor correspondente do eixo y.

Samuel: *À medida que nos aproximamos desse ponto ao longo de x (de esquerda ou direita) a que **valores** y ele se aproxima.*
Sara: *É o **valor** máximo para que tende o ponto uma determinada parte da função.*
Tiago: *É o **valor** de y para o qual a função tende nesse ponto.*
(Extrato de respostas, T1_ Q1.2_FD)

Na questão 1.4 desta mesma tarefa – *Explica o que entendes por limite de uma função quando a variável tende para infinito* – 50% dos alunos, semelhantemente, referiram-se ao limite como um valor da função.

Samuel: *A que **valores** y a função tende quando x tende para objetos grandes (o infinito).*
Sara: *É o **valor** máximo que a função tende a ter quando a variável cresce/descresse para o infinito.*
Tiago: *É o **valor** de uma função ao longo do seu domínio.*
(Extrato de respostas, T1_ Q1.4_FD)

Particularmente, Tiago relaciona a ideia da variável tender para infinito com o facto de considerar a função ao longo do seu domínio, ou seja os valores do domínio vão para o infinito e o domínio não tem fim. No caso de Sara, pode interpretar-se que para ela a noção de limite como uma aproximação de barreira está a ser influenciada pelo comportamento do gráfico da função ao considerar que é um valor máximo, no sentido de que pode estar a relacionar casos particulares quando o valor da aproximação coincide com um máximo da função.

Esta conceção de limite foi aplicada implicitamente na resolução da Ficha de Diagnóstico nas questões 1.1 da Tarefa 1 e 3.1 e 3.2 da Tarefa 3, pois os dados revelam que os alunos, no geral, tiveram maior sucesso quando se tratava de determinar limites que existiam, ou seja, limites que convergem para um determinado valor finito. Por exemplo, os alunos foram bem-sucedidos em responder aos limites: $\lim_{x \to -3} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x)$ e $\lim_{x \to -2} f(x)$.

Por outro lado, nas respostas dos alunos quando explicam o que entendem por limite de uma função num ponto, o termo "*tende*" é usado por 68% dos alunos e o termo "*aproxima*" é usado em 29% das respostas. No caso do limite quando a variável tende para infinito, 65% dos alunos usou o termo *"tende"* e 21% o termo *"aproxima"* na sua definição de limite. Deste modo, os dados revelam que os termos usados no ensino deste conceito influenciam o *conceito-imagem* dos alunos ao ponto de estar implícito a conceção do limite como um *processo dinâmico de aproximação* levado a cabo para obter o seu valor. A noção de limite como aproximação é uma das intuições mais comuns.

A1: *O valor para que* ***tende*** *a função para um valor de x.*
A2: *É o valor ao qual a função mais se* ***aproxima****.*
A3: *O limite de uma função num ponto é o valor para o qual a função* ***tende*** *quando x se* ***aproxima*** *desse ponto.*

(Extrato de respostas, T1_Q1.2_FD)

A4: *Valor que a função toma ou se* ***aproxima*** *quando o seu gráfico se* ***aproxima*** *de valores elevados.*
A5: *O valor para que y* ***tende*** *quando x* ***aproxima-se*** *de infinito.*

(Extrato de respostas, T1_ Q1.4_FD)

Esta conceção de limite como valor obtido mediante um processo de aproximação mantém-se até o fim do estudo, pois na primeira questão da entrevista – *Explica o que entendes por limite de uma função num ponto* – os três alunos entrevistados responderam:

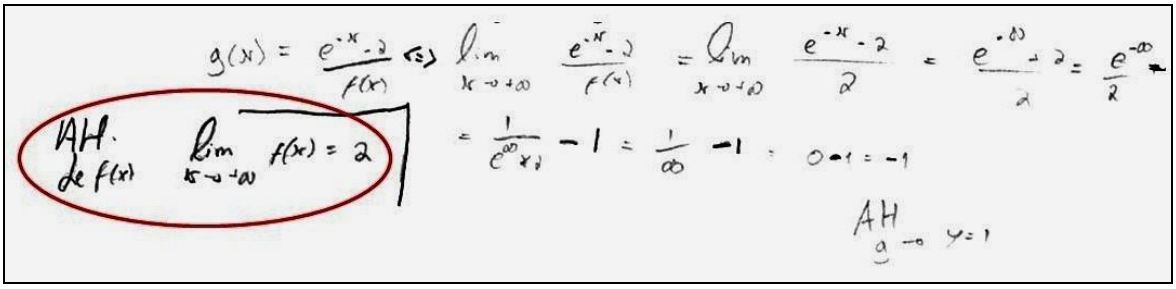
Samuel: *A que valores de y a função se aproxima quando x se aproxima desse ponto.*
Sara: *Limite de uma função num ponto é o valor que a função tinha de ter à direita, à esquerda e no ponto tinham que ser iguais para o ponto ter um limite.*
Tiago: *É um valor máximo da função ao qual se está a aproximar.*

(Extrato de respostas, Q1_E)

No caso de Samuel e Sara, pode identificar-se que a conceção dinâmica de limite está mais aperfeiçoada. Sara exprime na sua resposta a noção de aproximação lateral para garantir a existência do limite e Samuel inclui o duplo processo de aproximaçao coordenado que está envolvido na determinação do limite. Tiago, ainda mantém uma conceção incipiente do conceito.

Ainda neste sentido do limite como valor, os dados mostram posições contrárias com respeito a que o limite é concebido por alguns como um *valor que a função alcança* e por outros como um *valor que não se pode ultrapassar ou atingir*, estas conceções são o resultado de dois possíveis fatores: (1) o obstáculo epistemológico – *alcançou-se ou não se alcançou o limite?* – que forma parte da natureza do conceito ou (2) as experiências prévias dos alunos, em particular no estudo de assíntotas horizontais de uma função, o qual leva aos alunos a ter uma noção de limite ligado com a noção de assíntota. Por exemplo, na questão 1.4 da Tarefa 1 de diagnóstico um aluno responde que o limite de uma função quando a variável tende para infinito *"quer dizer que quando a variável tende para infinito, a função tende para um número mas nunca o alcança"*, evidenciando ter um *conceito-imagem* de limite influenciado pelos casos particulares no estudo do comportamento assintótico de uma função.

Este facto confirma-se na Tarefa 3 de consolidação, pois os dados revelam que 70% dos alunos interpretaram a condição "*A reta $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico de f*" como o valor correspondente ao $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e assim resolver corretamente a tarefa (Figura 4.1). O mesmo ocorreu na Tarefa 2 de consolidação, na qual os alunos foram bem-sucedidos na sua resolução, pois 90% respondeu corretamente a todas as alíneas (Figura 4.2). As suas respostas evidenciam que a identificação gráfica de uma assíntota horizontal é interpretada pelos alunos como o limite quando a variável tende para infinito, conseguindo assim determinar o valor do limite para ser usado na resolução da tarefa. Esta associação entre estes conceitos também foi observada na resolução da questão 6.1 da Tarefa 6, onde os alunos identificaram a reta horizontal como assíntota da função e 96% deles determinaram a equação da reta calculando o limite da função fazendo tender x para mais infinito (Figura 4.3).



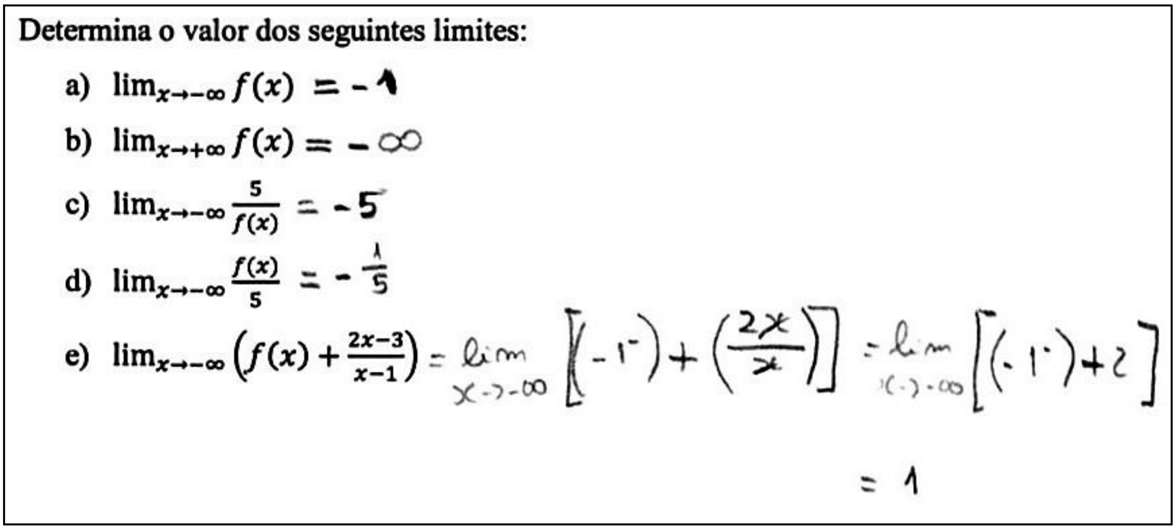
$g(x) = \frac{e^{-x}-2}{f(x)} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-2}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-2}{2} = \frac{e^{-\infty}-2}{2} = \frac{e^{-\infty}}{2}$

AH. de $f(x)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$= \frac{1}{e^{\infty}\times 2} - 1 = \frac{1}{\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$

$AH_g \to y = 1$

Figura 4.1 T3_FC: Samuel



Determina o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

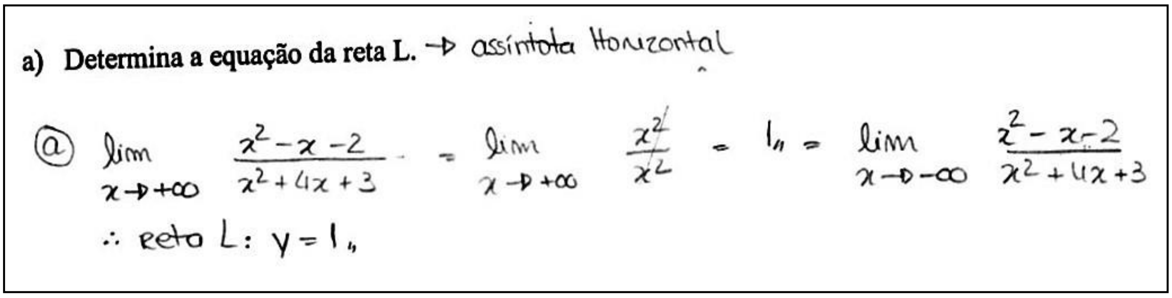
c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{f(x)} = -5$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{5} = -\frac{1}{5}$

e) $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) + \frac{2x-3}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left[(-1^-) + \left(\frac{2x}{x}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[(-1^-) + 2\right]$

$= 1$

Figura 4.2 T2_FC : Tiago



a) **Determina a equação da reta L.** $\to$ assíntota Horizontal

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}$

$\therefore$ reta L: $y = 1$

Figura 4.3 T6_Q6.1_FC : Sara

Em relação com isto, de maneira mais geral, na questão 1.5 da Tarefa 1 de diagnóstico – Explica em que outros contextos fora da sala de Matemática tens ouvido falar do termo “limite”? Qual o seu significado nesses contextos? – Em 40% das respostas os alunos consideram que o limite é algo que não se pode ultrapassar, o que também mostra que as experiências quotidianas do aluno nas que aparece o termo limite formam parte da sua estrutura cognitiva associada ao conceito-imagem que ele tem deste conceito.

Samuel: *Significa o fim do "tolerável" ou seja um ponto imaginário o qual* ***não se deve passar****, mas caso se passe usualmente tem consequências indesejadas. Ex. Limite do corpo humano: exceder o seu limite significa lesões no corpo.*
Sara: *Quando se está quase a cometer um crime, está-se no limite do que é legal e do que não é (por exemplo). Significa que* ***não se deve passar*** *à ação do "crime", pois aí passa a ser uma ação ilegal.*

(Extrato de respostas, T1_ Q1.5_FD)

Esta parte do *conceito-imagem* é evocado pelos alunos quando estão perante uma tarefa que modela uma situação real, por exemplo na resolução da questão 5.3 da Tarefa 5, 75% dos alunos realizaram os cálculos solicitados e fizeram uma interpretação correta dos mesmos. Um deles (Figura 4.4), por exemplo, referiu-se ao valor encontrado como assíntota horizontal da função, e em 30% das respostas (Figura 4.5) o aluno indicou que a colónia de microrganismos nunca vai atingir ou nunca chegará a alcançar esse valor. Conclui-se, assim, que a noção do limite quando a variável tende para infinito tem sido influenciada a partir das experiências prévias dos alunos no trabalho com assíntotas desde o 11.º ano.

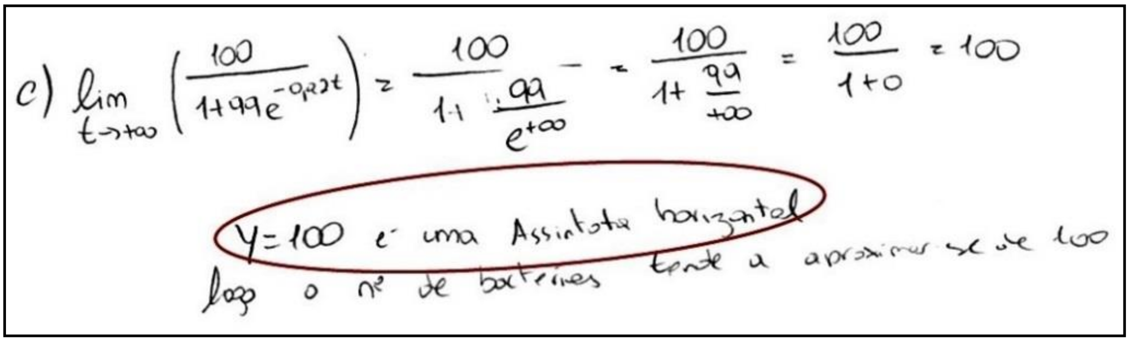


Figura 4.4 T5_Q5.3_FC: exemplo de resolução de um aluno

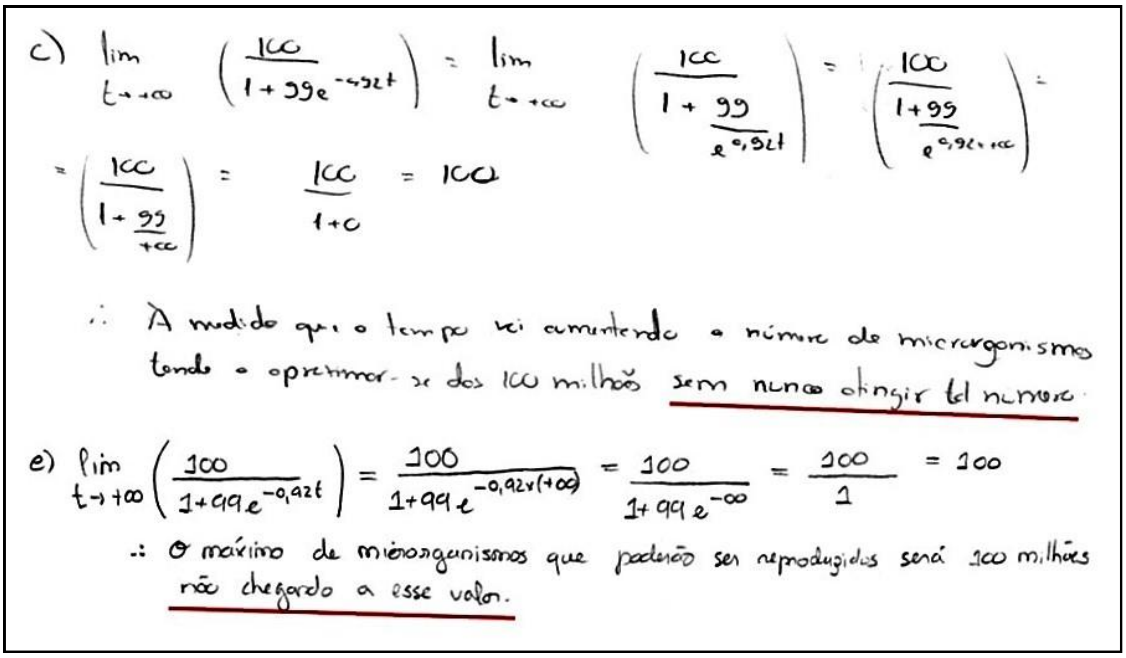


Figura 4.5 T5_Q5.3_FC: exemplo de resolução de dois alunos

No entanto, em 22% das respostas o aluno indica que a colónia chega alcançar esse valor de microrganismos (Figura 4.6), pelo que pode então confirmar-se a presença do obstáculo epistemológico *alcançou-se ou não se alcançou o limite?.*

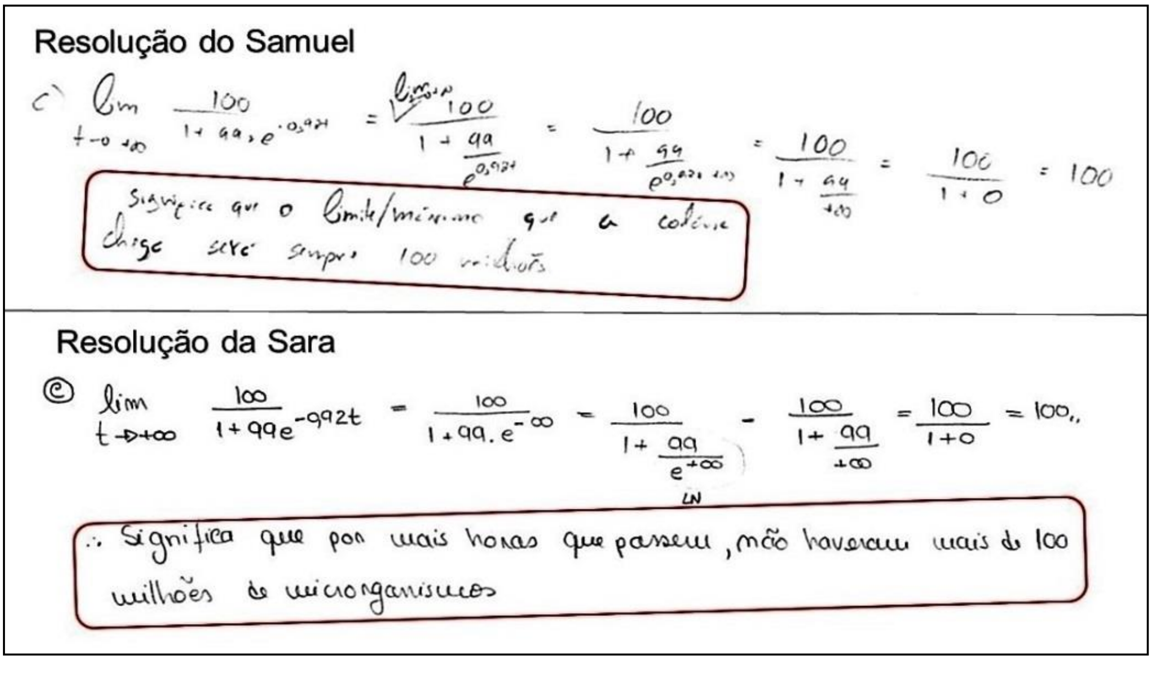


Figura 4.6 T5_Q5.3_FC: Samuel e Sara

Assim estas duas interpretações que os alunos dão ao valor do limite calculado nesta tarefa podem ter dois significados, por um lado o contexto da situação leva o aluno a pensar que a colónia vai estabilizar o seu crescimento quando chega aos 100 milhões de microrganismos e, por outro lado, alguns alunos relacionam o valor do limite com a noção de assíntota horizontal, levando ao aluno a considerar o comportamento assintótico da função e, portanto, concluem que a colónia nunca vai chegar a ter esse número de microrganismos. Portanto, em ambos os casos, os alunos têm bases para justificar as suas interpretações, sendo válidas e fundamentadas nas suas experiências prévias e na sua perceção do contexto da situação.

Um outro significado que os alunos atribuiram com maior frequência ao conceito de limite é o concebê-lo como o *valor da imagem* do objeto ao qual se está a aproximar o x. Isto é posto em evidência nas questões 3.3 e 3.4 da Tarefa 3 de diagnóstico onde, em 30% das respostas, o aluno indicou que o limite no ponto em questão é igual ao valor da imagem do objeto (Figura 4.7). Assim como também nas questões 1.2 e 1.4 da Tarefa 1 de diagnóstico, quando alguns alunos usaram o termo *"imagem"* para definir o conceito de limite.

A1: *O limite é a* ***imagem*** *quando o objeto tende para um certo valor.*
A2: *A* ***imagem*** *para o qual o objeto tende.*
(Extrato de respostas, T1_ Q1.2_FD)

A3: *A* ***imagem*** *para o qual a função tende em objetos muito muito grandes.*
A4: *As* ***imagens*** *que a função vai obter com objetos muito grandes.*
A5: *É a* ***imagem*** *de x quando este tende para valores de x muito grande.*
(Extrato de respostas, T1_ Q1.4_FD)

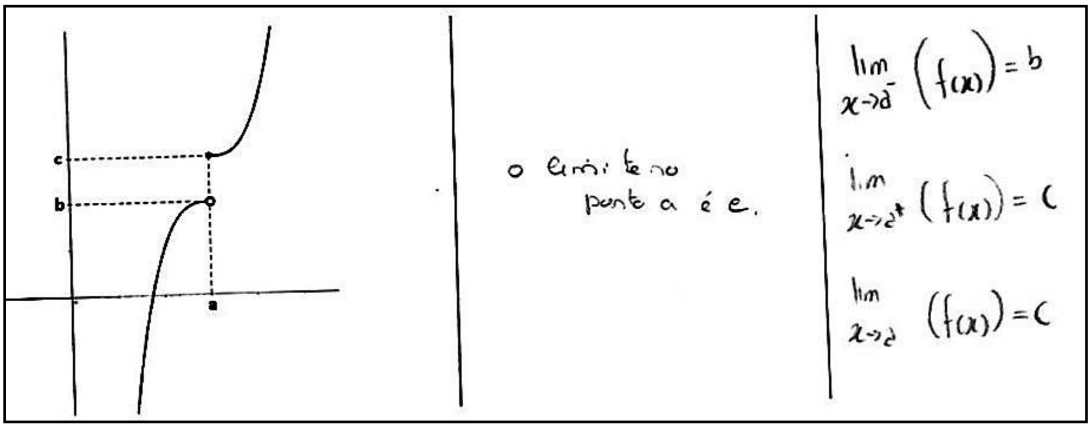
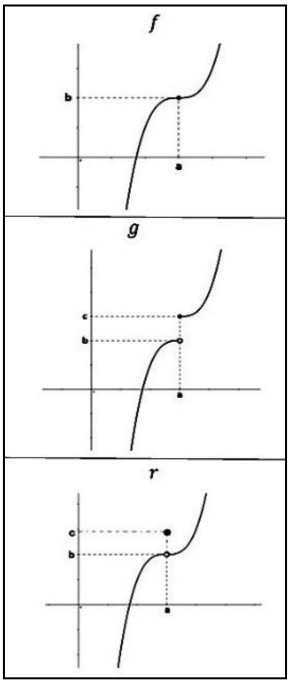


Figura 4.7 T3_Q3.3_FD: exemplo de resolução

Estes resultados revelam que alguns alunos não fazem distinção entre o conceito de imagem de uma função e o conceito de limite de uma função, considerando que o limite de uma função num ponto determina-se a partir da existência e do valor da imagem do objeto do ponto em questão. Isto mesmo foi identificado no *conceito-imagem* que revela ter o

Tiago sobre o conceito de limite de uma função num ponto, durante a entrevista, pois para ele o valor do limite corresponde ao valor da imagem do objeto no qual se está a estudar o limite.

Investigador:	Quais das seguintes funções têm limite no ponto a? Em caso de existir indica o valor do limite e em caso de não existir indica porque não existe.
Tiago:	[Fica a pensar em silêncio].
Investigador:	Na função f?
Tiago:	*Há limite.*
Investigador:	E qual é o valor do limite de f quando x tende para a?
Tiago:	b.
Investigador*:*	A seguir na função g?
Tiago:	*Há limite.*
Investigador	E qual é o valor do limite?
Tiago:	c.
Investigador:	Nesta outra, na função r?
Tiago:	[Fica a pensar]. *Acho que sim.*
Investigador:	Sim há limite? E qual é o valor?
Tiago:	O c.



(Extrato de episódio da entrevista ao Tiago)

Finalmente, em menor frequência, na questão 1.2 da Tarefa 1 de diagnóstico, dois alunos atribuiram o significado de *ponto* ao limite, indicando que o limite *"é o **ponto** para onde tende a função"*. Este significado continua a estar ligado à conceção de limite como valor, mas neste caso, influenciado pelas experiências com a determinação de limite através da interpretação do gráfico da função, pelo que o aluno refere-se ao limite como um ponto.

Em resumo (ver Figura 4.8), os alunos atribuem ao conceito de limite o significado de valor. Um valor correspondende a um elemento das ordenadas, cujo significado pode estar inicialmente associado ao conceito do gráfico da função; associado ao conceito de assíntota da função, ao considerar que o limite é um valor que a função nunca vai atingir; ou associado ao conceito de imagem da função ao considerar que a função alcança esse valor. Já no final, alguns alunos como Sara e Samuel, consideram o limite como um valor que se obtém através de um processo dinâmico de aproximação, o qual se relaciona com a definição informal ou conceção dinâmica do conceito de limite, ao considerar as condições que garantem a existência e a unicidade do limite de uma função, nomeadamente, os limites laterias serem iguais.

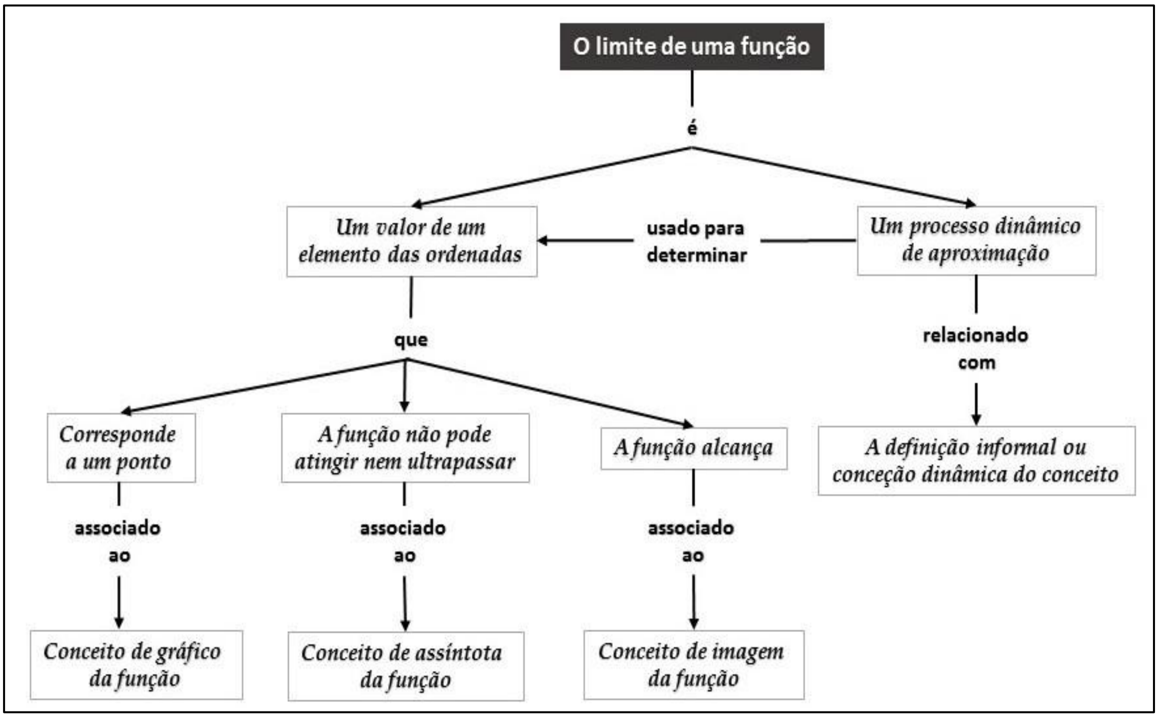


Figura 4.8 Significados atribuídos ao conceito de limite de uma função

4.1.2 Representação e visualização do conceito de limite

Na análise dos dados identificaram-se como principais ações visuais dos alunos: a conversão da representação geométrica em representação simbólica e/ou verbal, a conversão da representação simbólica em representação verbal, e a criação de uma representação geométrica. Estas ações foram aplicadas sobre objetos visuais representados de diferentes formas e motivadas por distintos efeitos visuais. Estes resultados são apresentados nesta secção.

Nas tarefas nas quais o objeto visual era o gráfico de uma função, a principal ação visual dos alunos consistiu na *conversão da representação geométrica* em *representação simbólica* e/ou *verbal* com base na leitura e interpretação da informação do gráfico de uma função. Esta ação foi motivada fundamentalmente pelo efeito de determinar o limite de uma função visual e justificar a suas respostas.

Por exemplo, na questão 1.1 da Tarefa 1 de diagnóstico, os alunos precisaram de interpretar os dados representados geometricamente (o gráfico de uma função) e converter essa informação em resultados simbólicos ou em representações verbais (linguagem natural), só 50% dos alunos lograram responder corretamente a cada um dos limites solicitados, o Samuel é um desses alunos e a sua resolução da tarefa é apresentada na Figura 4.9, Além disto, na determinação do $\lim_{x \to 1} f(x)$, os alunos estudam o comportamento do limite no ponto e quando os limites laterais são diferentes usam representações verbais para indicar que o limite não existe. Algumas das expressões usadas foram: "*não determinado*" (Figura 4.9), "*não definido*", "*não há*", "*não existe*" e "*sem solução*".

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$-\infty$	$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$	2
$\lim\limits_{x\to-3} f(x)$	0	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to-2} f(x)$	-1	$\lim\limits_{x\to1} f(x)$	Não determinado
$\lim\limits_{x\to0} f(x)$	1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	-2

Figura 4.9 T1_Q1.1_FD: Samuel

Outro resultado deste processo de visualização emerge na questão 3.7 da Tarefa 3 de diagnóstico, onde 70% dos alunos foi capaz de determinar que o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (Figura 4.10), evidenciando uma boa compreensão na determinação de limites num ponto onde a função tem uma assíntota vertical. Este aspeto que pode estar relacionado com as suas experiências prévias no estudo de assíntotas de uma função, que principalmente foi desenvolvido através da interpretação do gráfico da função e o seu comportamento assintótico.

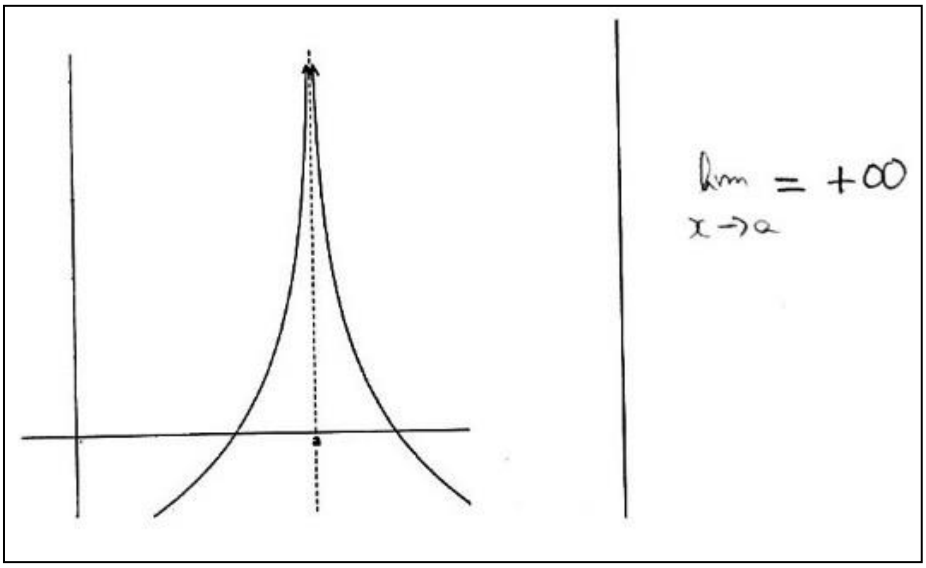


Figura 4.10 T3_ Q3.7_FD: Tiago

Além disto, nas questões 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 e 3.8 desta mesma tarefa, 25% dos alunos justificaram corretamente que o limite em questão não existe porque os limites laterais eram diferentes (Figura 4.11). Estes alunos, incluindo o Samuel, identificam as condições para que o limite de uma função num ponto exista, neste caso, através da interpretação do gráfico da função e usam representações simbólicas e verbais para justificar as suas respostas. Resultados semelhantes, que evidenciam compreensão do conceito de limite, também foram observados na questão 1.3 da Tarefa 1 de diagnóstico – *Que condições são necessárias para garantir a existência do limite de uma função num ponto?* – onde, por exemplo, um aluno respondeu que *"O valor de y para o qual a função tende da direita para a esquerda e da esquerda para a direita ser o mesmo"*.

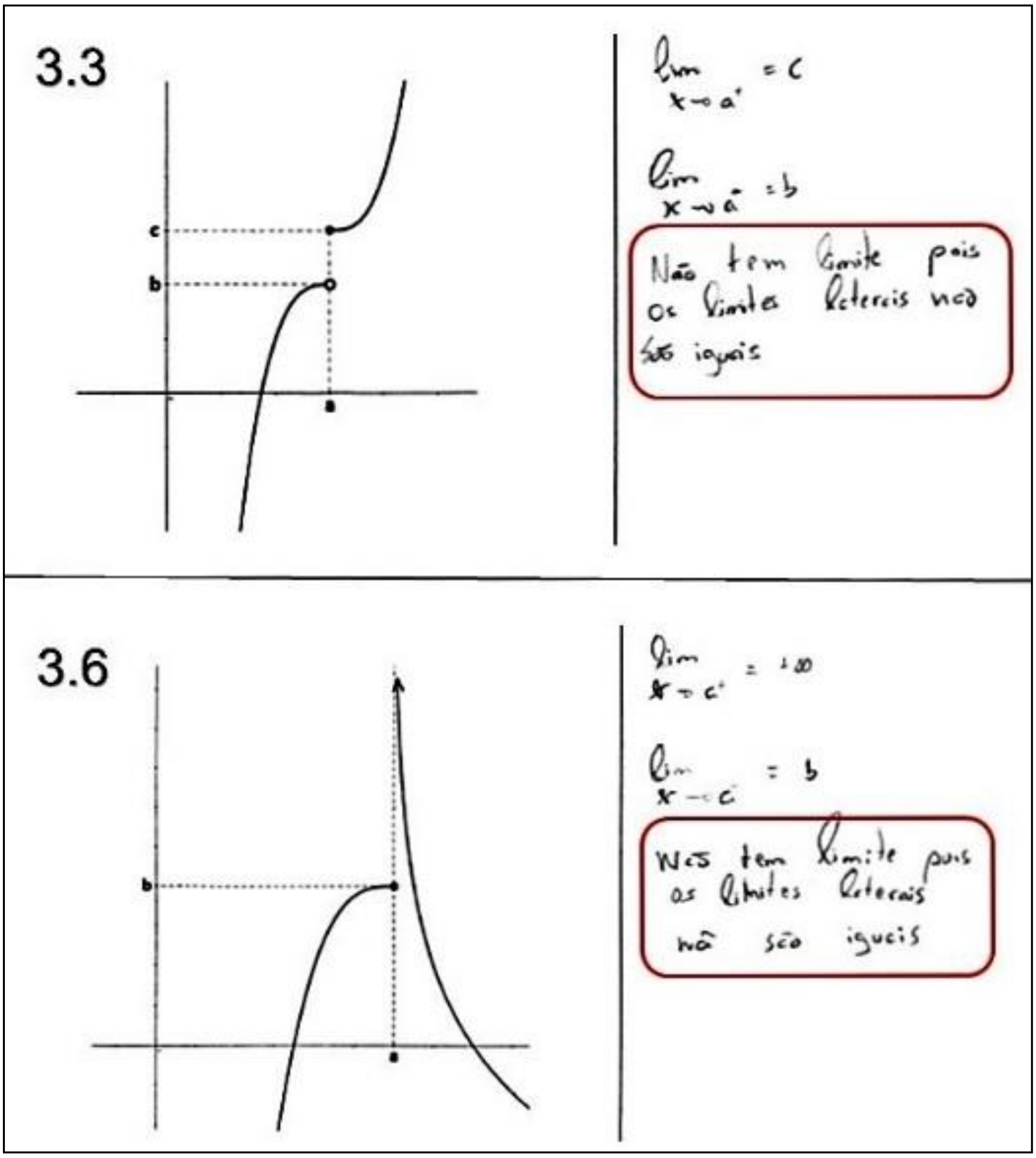
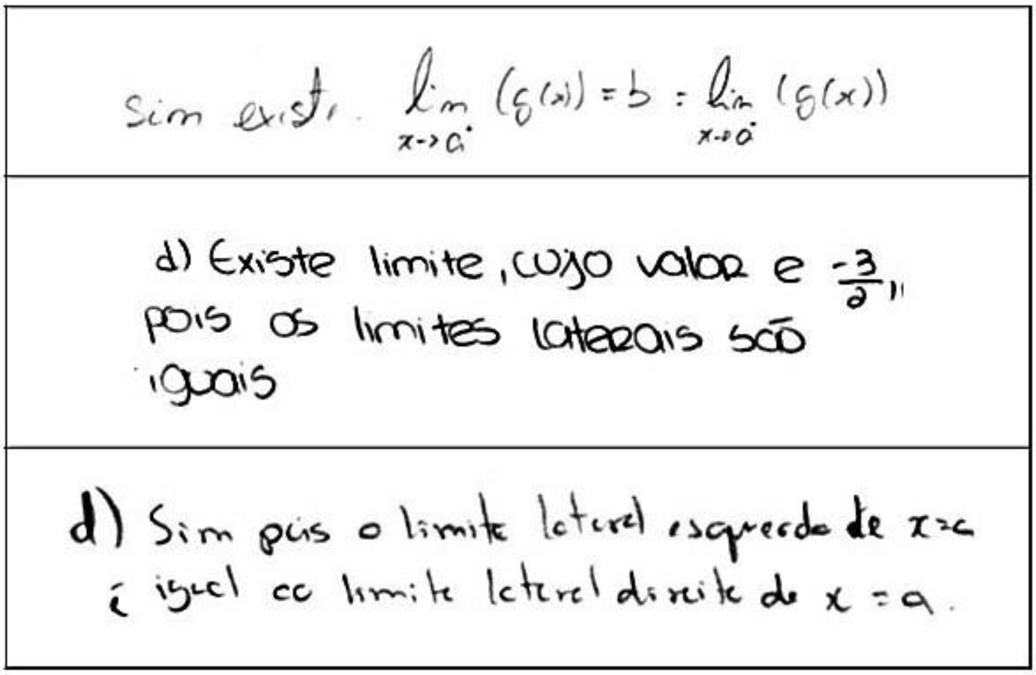


Figura 4.11 T3_FD: Samuel

Ainda que nesta altura inicial do estudo de limites sejam poucos os alunos que reconhecem esta condição de existência do limite de uma função, no decorrer das aulas e com base nos dados obtidos da observação das mesmas, observam-se aprendizagens a este respeito. Por exemplo, identifica-se um episódio de aula em que o Samuel interveio durante o momento de discussão coletiva fazendo referência à solução de uma tarefa que envolvia a interpretação do gráfico de uma função, indicando que *"em f quer pela esquerda quer pela direita o valor do limite em $x = 0$ é -3, então o limite de f quando x tende para 0 é -3"*. Esta intervenção foi aproveitado pela professora para consolidar o facto de que o limite num ponto existe quando os limites laterais são iguais. Após este trabalho, é evidenciado na questão 6.4 da Tarefa 6 que de consolidação este resultado já forma parte do conceito de limite de mais alunos, pois em 47% das respostas a esta questão, os alunos justificaram a existência do limite quando x tende para -1 indicando que o limite pela esquerda e igual ao limite pela direita, expressado mediante representações simbólicas, verbais ou ambas (Figura 4.12).


Sim exist. $\lim_{x \to a^-} (g(x)) = b = \lim_{x \to a^+} (g(x))$

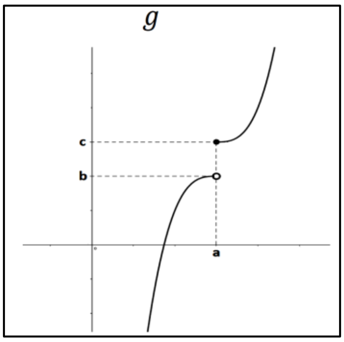
d) Existe limite, cujo valor é $-\frac{3}{2}$, pois os limites laterais são iguais

d) Sim pois o limite lateral esquerdo de $x=a$ é igual ao limite lateral direito de $x = a$.

Figura 4.12 T6_Q6.4_FC: exemplo de justificações da resposta

Na entrevista, as condições de existência de limite parecem consolidadas nas conceções do Samuel e da Sara, o que revela que através da interpretação do gráfico de uma função, os alunos conseguem justificar formalmente a existência ou não existência do limite de uma função.

Investigador:	Que condições são necessárias para garantir a existência de limite de uma função num ponto?
Samuel:	*Limite à esquerda no ponto tem que ser igual ao limite à direita.*
Investigador:	Quais das seguintes funções tem limite no ponto a? Em caso de existir indica o valor do limite e em caso de não existir indica porque não existe.
Samuel:	*Nas funções s e g não há limite.*
Investigador:	Porque não há limite na função g quando x tende para a?
Samuel:	*Porque o limite do lado esquerdo é diferente do lado direito. Aqui vai tendo para b* (pela esquerda) *e aqui para c* (pela direita).



(Extrato de episódio da entrevista ao Samuel)

Através do uso das representações nesta ação visual, também é posto em evidência o significado que os alunos atribuem ao conceito de limite como valor que se obtém dum processo dinâmico de aproximação, neste caso reconhecendo que a aproximação pela esquerda e a aproximação pela direita devem ter o mesmo valor.

Por outro lado, na resolução das questões 6.2 e 6.3 da Tarefa 6 de consolidação, a estratégia da maioria dos alunos foi formular e calcular os limites $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ para determinar a assíntota vertical da função e as coordenadas do ponto P, respetivamente (Figura 4.13). Isto evidencia compreensão dos alunos ligada ao facto de aplicar o conceito limite, as suas caraterísticas e propriedades operatórias, na estratégia de resolução de uma tarefa que não está a solicitar explicitamente o cálculo de um limite, daí que eles recorrem ao limite como uma ferramenta para dar resposta a aquilo que se está a solicitar.

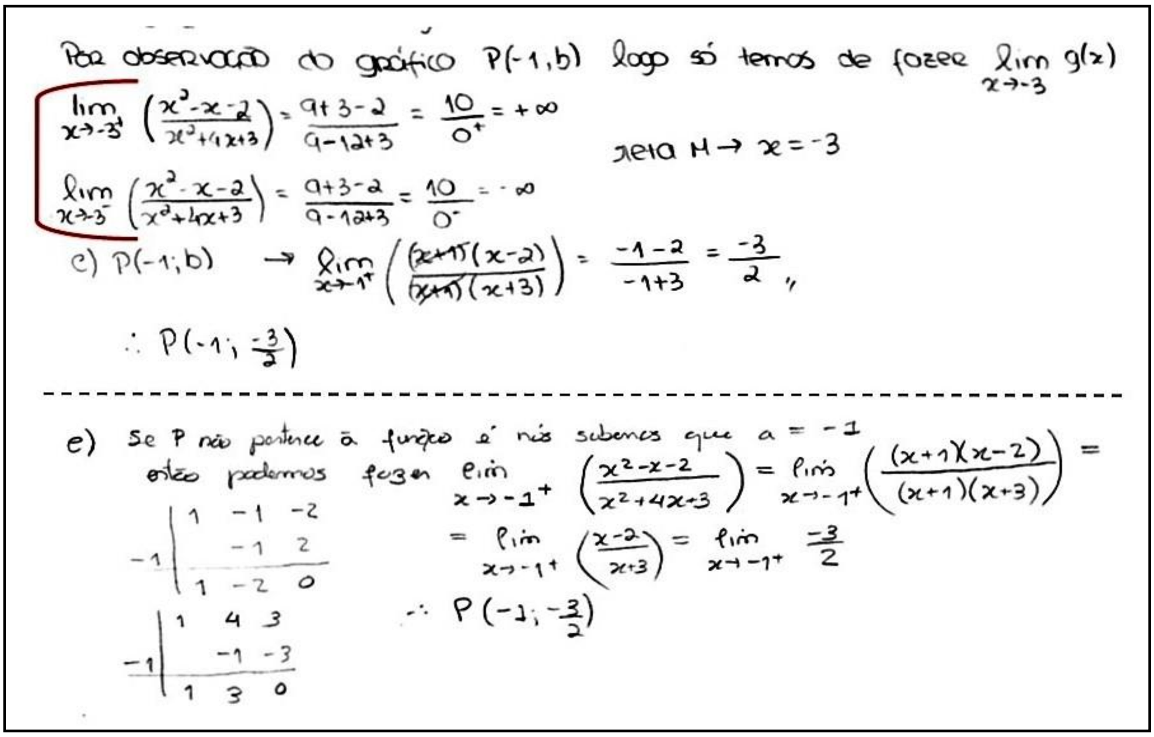


Figura 4.13 T6_FC: exemplo de resolução

Uma segunda ação visual observada com frequência consistiu na *conversão da representação simbólica em representação verbal através da leitura e da interpretação das expressões usadas para denotar limites*, que teve lugar nos momentos em que o objeto visual estava determinado mediante representações simbólicas que incluíam expressões algébricas, numéricas e simbologia específica da notação de limite. Neste caso o principal efeito visual ligado a esta ação é a comunicação, essencialmente, o referir-se de forma oral à definição do conceito de limite e traduzir expressões usadas neste contexto.

Esta ação visual identificou-se frequentemente, durante as observações de aula, em que os dados mostram o uso que os alunos dão às representações verbais para se referirem às expressões simbólicas envolvidas na compreensão do conceito do limite de uma função. Por exemplo, foram usadas frases como: “limite quando x tende para…” ($\lim_{x\to\cdots}$); “zero mais” ou “zero menos” (0^+ ou 0^-); “quando x se aproxima pela esquerda de 2” ou “quando x se aproxima pela direita de 2” ($x \to 2^-$ ou $x \to 2^+$). Estas representações verbais foram usadas na comunicação oral, nas suas intervenções, quer para levantar questões quer para justificar as suas respostas. As representações verbais foram usadas também para traduzir, dar sentido ou justificar o resultado de expressões simbólicas, como no caso dos limites notáveis, por exemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty\text{: } \textit{“a exponencial cresce mais rápido do que a potência”.}$$

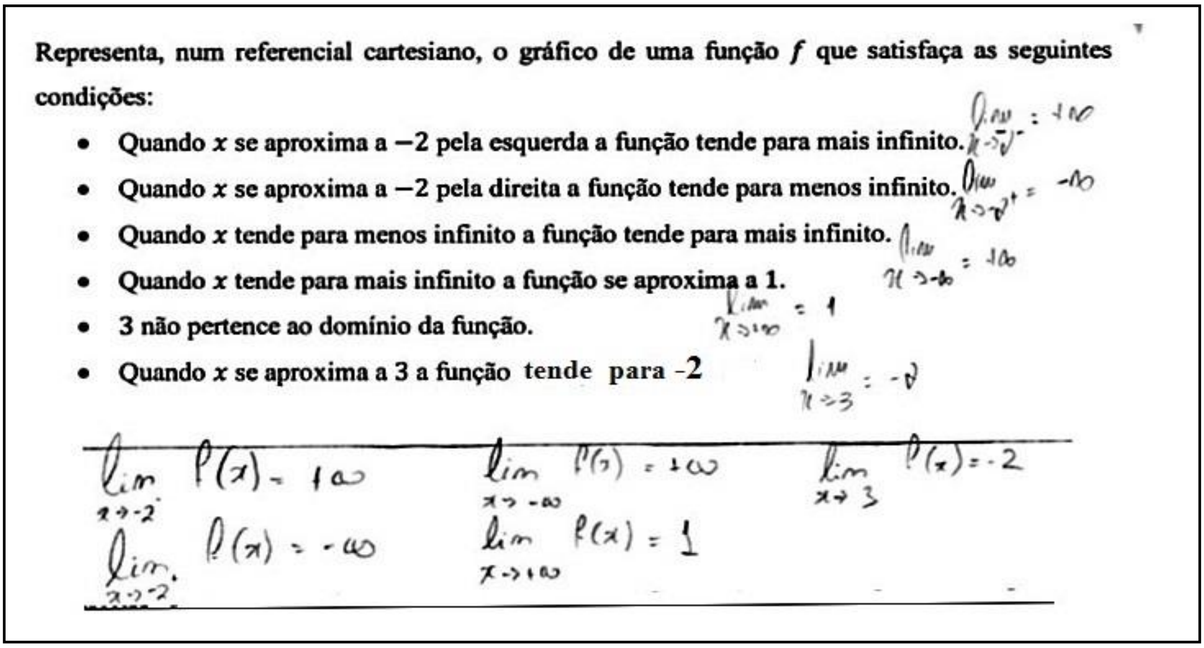
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{\log_a x}=+\infty\text{: } \textit{“a potência cresce mais rápido do que o logaritmo”.}$$

Outro aspeto a salientar foi o uso de várias representações simbólicas pelos alunos para referirem-se ao mesmo objeto, evidenciando fluência representacional e são capazes de identificar um objeto em distintas representações, por exemplo:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1 \qquad \begin{matrix} f\to 1 \\ (x\to 0)\end{matrix}$$

“O limite quando x tende para zero de $f(x)$ é 1”

Esta ação visual teve implicações na resolução da Tarefa 4 de consolidação, pois em 20% das respostas os alunos optaram por representar simbolicamente cada uma das condições que era dada através da linguagem natural (representação verbal), formulando expressões que envolviam limites, como mostra a Figura 4.14.



Representa, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função *f* que satisfaça as seguintes condições:

- **Quando *x* se aproxima a −2 pela esquerda a função tende para mais infinito.** $\lim_{x\to -2^-} = +\infty$
- **Quando *x* se aproxima a −2 pela direita a função tende para menos infinito.** $\lim_{x\to -2^+} = -\infty$
- **Quando *x* tende para menos infinito a função tende para mais infinito.** $\lim_{x\to -\infty} = +\infty$
- **Quando *x* tende para mais infinito a função se aproxima a 1.** $\lim_{x\to +\infty} = 1$
- **3 não pertence ao domínio da função.**
- **Quando *x* se aproxima a 3 a função tende para -2** $\lim_{x\to 3} = -2$

$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to 3} f(x) = -2$

$\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

Figura 4.14 T4_FC: conversão da linguagem natural (representação verbal) em representação simbólica

Este resultado também aponta para o facto de que alguns alunos terem facilidade na conversão de representações, neste caso, primeiramente traduzir as representações verbais em simbólicas e a seguir representar estas em representações geométricas no gráfico da função.

Desta forma, nesta tarefa teve lugar a terceira ação visual: *criação de uma representação geométrica*, nomeadamente, *criação do gráfico de uma função*. Neste caso, era solicitado aos alunos desenhar o gráfico de uma função que satisfazesse as condições estabelecidas. Na questão 4.1 da tarefa, todos os alunos identificaram corretamente o gráfico da função que satisfazia todas as condições. Este resultado evidencia que os alunos têm uma boa interpretação de termos como *"tende"* e *"aproxima"*, usados para descrever o comportamento de uma função, e que identificam visualmente este comportamento no gráfico da função. Já na questão 4.2, 85% dos alunos realizou corretamente o gráfico correspondente à função que cumpria com as condições indicadas (Figura 4.15), o que mostra a capacidade dos alunos para representar geometricamente o comportamento de uma função no que respeita à noção de limite.

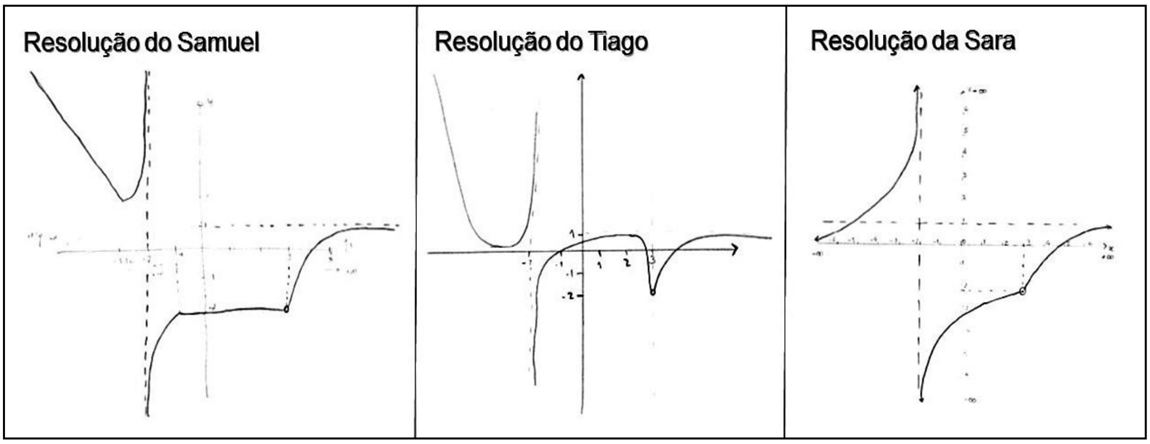


Figura 4.15 T4_Q4.2_FC: Samuel, Tiago e Sara

Esta ação visual também se observa na resolução da Tarefa 3 de consolidação. Nesta tarefa, 14% dos alunos, ainda de que não fosse solicitado, desenharam o gráfico de uma função usado para acompanhar o desenvolvimento algébrico envolvido na sua estratégia de solução (Figura 4.16).

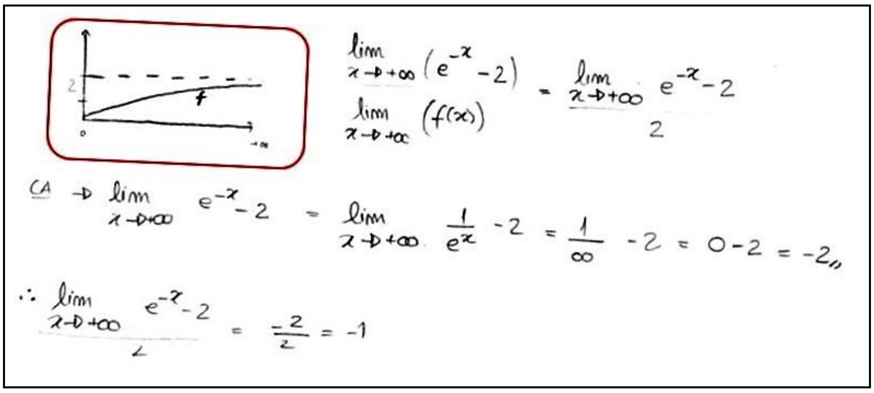


Figura 4.16 T3_FC: Sara

Finalmente, um outro resultado relevante, é o facto de nestas três ações visuais se identificar a estrutura extrínseca dos sistemas de representação, no sentido de que nas ações dos alunos se pode observar articulações dos três sistemas de representação (geométrico, simbólico, verbal), o que permite aos alunos referirem-se ao conceito de limite de uma função mediante distintos objetos visuais.

Em resumo, na Figura 4.17 apresentam-se os objetos, as ações e os efeitos visuais envolvidos na compreensão dos alunos sobre o conceito de limite de uma função. Durante estes três processos de visualização que foram identificados a partir dos dados recolhidos, verifica-se a presença das distintas representações do conceito (objeto visual), a transformação dessas representações durante a resolução das tarefas (ação visual), e o uso ou propósito que os alunos dão às representações (efeito visual).

Objeto visual	Ação visual	Efeito visual
O gráfico de uma função.	*A conversão da representação geométrica em representação simbólica e / ou verbal através da leitura e da interpretação da informação do gráfico de uma função.*	*Determinar o limite de uma função. Justificar as respostas.*
Expressões simbólicas.	*A conversão da representação simbólica em representação verbal através da leitura e da interpretação das expressões involucradas para denotar limites.*	*Comunicar oralmente os termos usados para referir-se ao conceito de limite. Traduzir o sentido das expressões simbólicas.*
Definição simbólica e /ou verbal de uma função.	*Criação de uma representação geométrica.*	*Desenhar o gráfico de uma função. Acompanhar o desenvolvimento algébrico.*

Figura 4.17 Representações e visualização do conceito de limite de uma função

4.1.3 Dificuldades de aprendizagem associadas à compreensão do conceito de limite

Nesta seção apresentam-se as principais dificuldades que os alunos manifestaram, associadas à compreensão do conceito de limite e que foram identificadas na análise dos dados: dificuldade em determinar a existência do limite, dificuldade em reconhecer a unicidade do limite de uma função, dificuldades associadas aos cálculos algébricos, e dificuldades em identificar as variáveis de uma situação.

Na resolução das tarefas, os alunos evidenciam ter *dificuldade em determinar a existência do limite de uma função quando x tende para um ponto*. Um dos erros que revela estas dificuldades é o facto dos alunos afirmarem que o limite de uma função num ponto existe só se a função está definida nesse ponto, podendo-se interpretar que esta dificuldade está associada ao significado que os alunos atribuem ao limite como a imagem da função. Isto é posto em evidência na questão 1.1 da Tarefa 1 de diagnóstico, na resposta de um aluno sobre o $\lim_{x \to -2} f(x)$ indicando que "*não está definido*", tendo em conta que -2 não pertence ao domínio da função, Semelhantemente, este argumento foi usado por outros alunos para responder à questão 3.2 da Tarefa 3 de diagnóstico (Figura 4.18).

Figura 4.18 T3_Q3.2_FD: exemplo de resolução

Também, na questão 4.2 da Tarefa 4 de consolidação, os dados revelam que os alunos cometeram erros na representação do gráfico de uma função que garantisse a existência de um limite quando a abscisa não pertence ao domínio da função, ou seja, quando o ponto não está definido mas o limite existe (Figura 4.19).

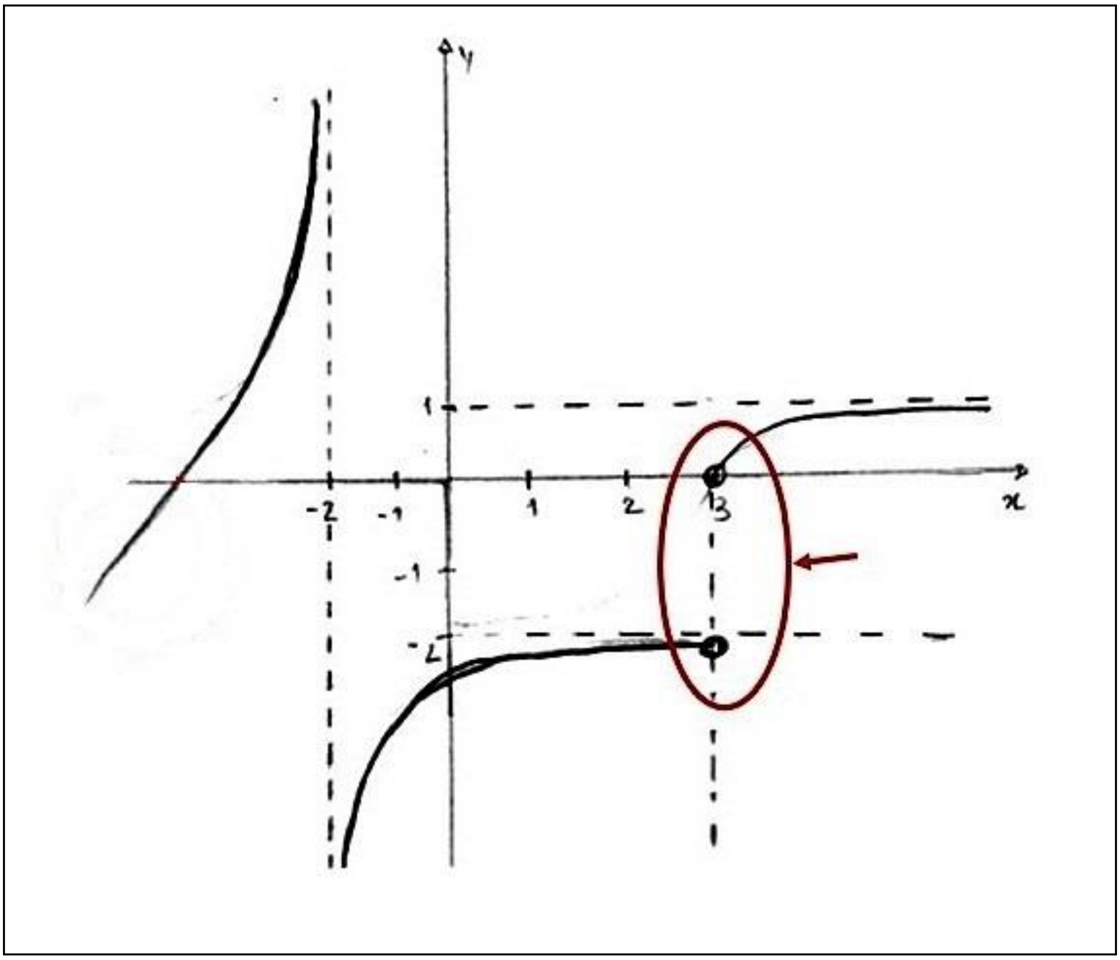


Figura 4.19 T4_Q4.2_FC: exemplo de resolução

De forma mais explícita, esta dificuldade identifica-se também na questão 1.3 da Tarefa 1 de diagnóstico – *Que condições são necessárias para garantir a existência do limite de uma função num ponto?* – na qual alguns dos alunos responderam que:

A1: *É necessário que a função exista nesse ponto.*
A2: *Esse número tem que pertencer ao domínio da função.*
A3: *O x tem de pertencer ao domínio da função.*
(Extrato de respostas, T1_ Q1.3_FD)

Além destas conceções erróneas sobre a existência do limite de uma função num ponto, alguns alunos também consideram que a existência de limite depende da continuidade da função no ponto em questão.

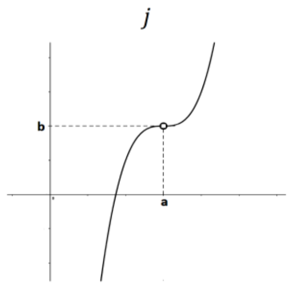
A1: *A função tem de ser contínua.*
A2: *Não existir continuidade nesse ponto.*
A3: *Não haver uma continuidade a partir desse ponto ao estudar a função.*
(Extrato de respostas, T1_ Q1.3_FD)

Os dados da entrevista realizada ao Tiago evidencia que esta dificuldade se manteve nalguns alunos, após o final da unidade de ensino.

Investigador: Que condições são necessárias para garantir a existência de limite de uma função num ponto?

Tiago: *O ponto tem que pertencer ao domínio.*

Investigador: Quais das seguintes funções tem limite no ponto a? Em caso de existir indica o valor do limite e em caso de não existir indica porque não existe.



Tiago: *Nesta,* (na função j) *não há limite.*

Investigador: Porque não há limite no ponto a?

Tiago: *Porque a função não é contínua nesse ponto.*

(Extrato de episódio da Entrevista ao Tiago)

Por outro lado, a conceção do limite como processo de aproximação lateral, levou aos alunos a ter *dificuldade em reconhecer a unicidade do limite de uma função num ponto*, já que em vários os casos quando foi solicitado o valor do limite num ponto quando os limites laterais eram diferentes vários dos alunos inclinaram-se por responder os dois comportamentos da função correspondentes aos limites laterais, pela esquerda e pela direita, do objeto em questão. Por exemplo, na questão 1.1 da Tarefa 1 de diagnóstico, 18% dos alunos respondeu que o $\lim_{x \to 1} f(x)$ é igual a 2 e $+\infty$, na Figura 4.20 apresentam-se a respostas que deram três alunos. Enquanto nas questões 3.4, 3.5 e 3.6 da Tarefa 3 de diagnóstico, mais de 35% dos alunos responderam determinando os dois limites laterais no ponto em questão, a Sara foi uma destes alunos e a sua solução apresenta-se na Figura 4.21.

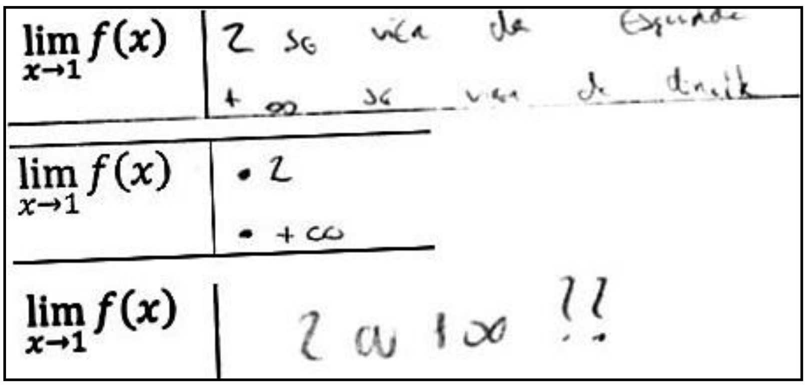


Figura 4.20 T1_Q1.1_FD: exemplo de resolução

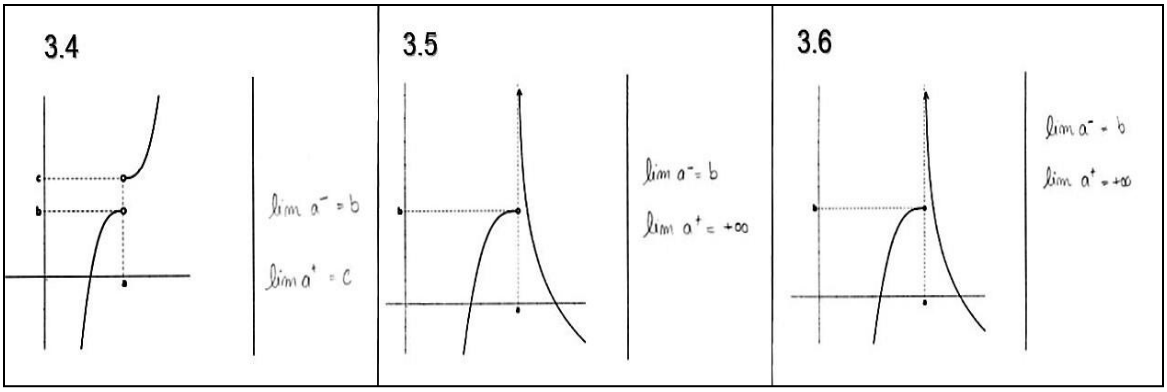


Figura 4.21 T3_FD: Sara

Na resolução deste conjunto de tarefas os alunos manifestaram diversas *dificuldades associadas à utilização de procedimentos algébricos* para calcular limites. Os alunos cometem erros na simplificação de expressões algébricas ou nas estratégias para levantar a indeterminação de um limite, como os exemplos apresentados na Figura 4.22, respeitantes aos erros no cálculo de limites na resolução da Tarefa 3 e da Tarefa 6 de consolidação. Por exemplo, na primeira resolução (Tarefa 3) o aluno esqueceu-se de manter o -2 na expresão do numerador, o que o levou a calcular mal o limite. Na segunda resolução (Tarefa 6) o aluno aplicou uma estratégia que não era a adequada para levantar a indeterminação do limite, optando pela estratégia de pôr em evidência o x, mas com isto não teve sucesso a determinar o limite, deixando incompleta a sua resolução.

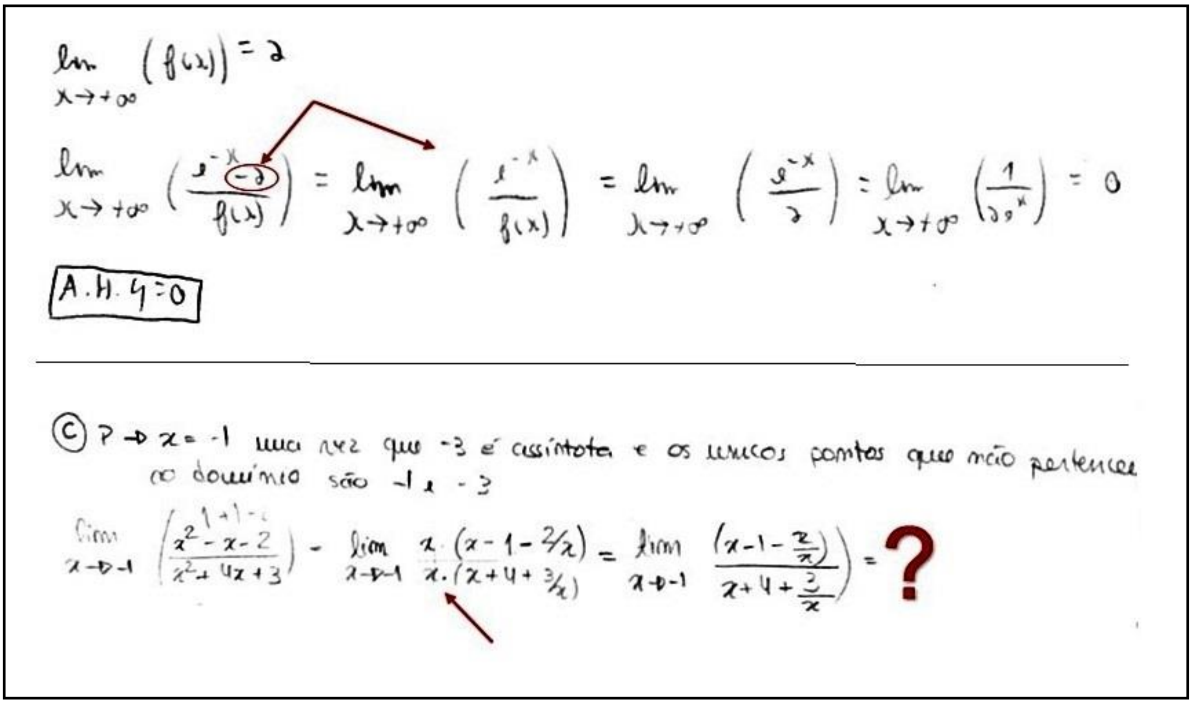


Figura 4.22 T3_T6_FC: exemplo de resolução que apresenta erros no cálculo de limite

Finalmente, na Tarefa 5 de consolidação, alguns alunos interpretaram incorretamente o valor do limite calculado indicando, tal como o Tiago, que "o *número de horas até que existem microrganismos a reproduzirem-se é 100*". Isto evidencia que o aluno tem *dificuldade em identificar as variáveis de uma situação* e a sua relação na formulação e no cálculo de um limite, levando ao aluno a fazer uma interpretação errada do resultado de acordo com o contexto da situação.

Em resumo, na Figura 4.23 apresentam-se as dificuldades de aprendizagem que manifestaram os alunos neste estudo. Principalmente os alunos evidenciaram ter dificuldades conceituais na compreensão da definição do conceito de limite, nomeadamente, dificuldade em determinar a existência e em reconhecer a unicidade do limite de uma função. E também mostraram ter dificuldades procedimentais associadas à identificação das variáveis de uma situação e aos cálculos algébricos envolvidos na formulação e na determinação do valor do limite.

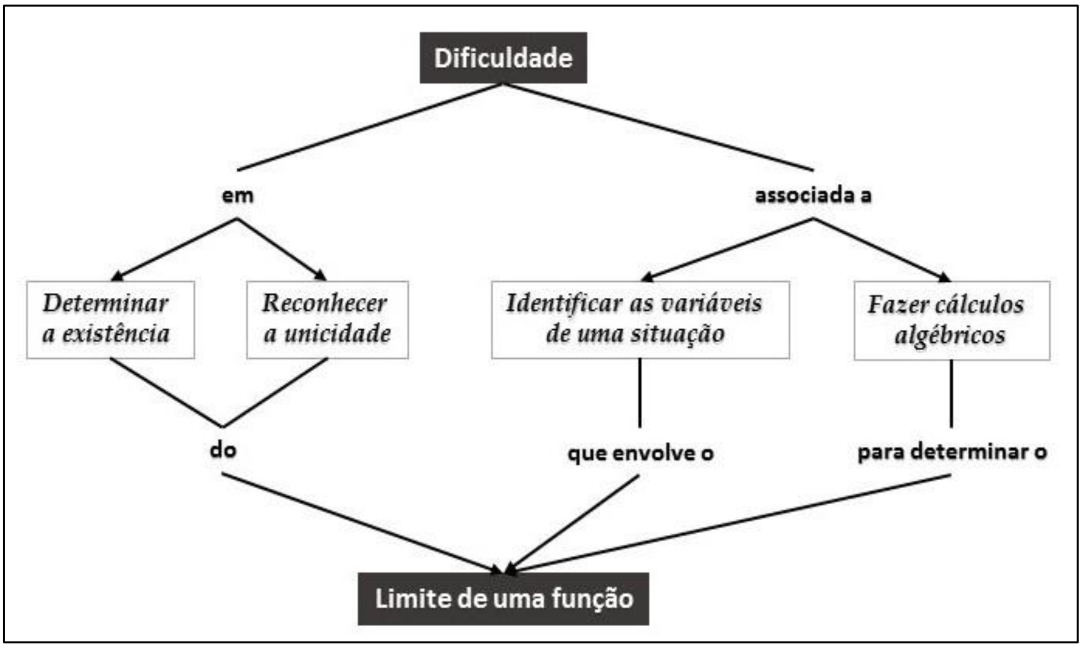


Figura 4.23 Dificuldades de aprendizagem associadas à compreensão do conceito de limite de uma função

4.1.4 Síntese

Segundo a análise feita e os resultados que foram apresentados, em termos gerais os alunos evidenciam ter uma compreensão instrumental sobre o conceito de limite de uma função. Esta compreensão desenvolve-se e evolui com o decorrer das aulas, a medida que os alunos realizam tarefas e usam os limites nelas. Neste processo de ensino e aprendizagem, eles criam uma identidade do conceito ligada a outros conceitos ou objetos matemáticos, por exemplo: a assíntota, a imagem e o gráfico de uma função; no sentido de atribuir caraterísticas ou propriedades ao limite que correspondem a caraterísticas ou propriedades destes outros entes matemáticos, o que verifica-se nas conceções intuitivas que foram identificadas, por exemplo a conceção de que o limite é um valor que não pode ser atingido pela função ou a conceção de que o limite corresponde a uma imagem da função, pelo que a função alcança esse valor.

Embora os alunos evidenciem ter dificuldades conceituais e cometam erros, estes são consequência das conceções iniciais que os alunos atribuem ao conceito de limite. Não obstante, apesar que estes significados intuitivos mostrarem que os alunos têm uma conceção parcial e incompleta do conceito de limite, os alunos conseguem resolver as tarefas que foram propostas e visualizar o conceito através de diferentes representações, inclusive estabelecendo conexões entre diversos sistemas de representação.

Por exemplo, no caso de Tiago, verificou-se que a suas conceções iniciais não se modificaram muito no fim das aulas, ele mantêm a ideia inicial de que o limite de uma função num ponto corresponde à imagem da função nesse ponto; os dados da sua entrevista confirmam isto. Esta conceção errónea que forma parte da identidade que ele tem do conceito de limite leva-o a ter dificuldade em reconhecer e aplicar as condições que garantam a existência do limite, conduzindo-o a manifestar erros na determinação de limites através da interpretação do gráfico de uma função.

No caso de Sara e Samuel, os alunos evidenciam ter uma evolução positiva dos significados que atribuem ao conceito de limite. Inicialmente, eles estão conscientes do duplo processo coordenado de aproximação que está por detrás da determinação de limites, muito influenciado pelas suas experiências prévias na determinação de limites através do gráfico da função. Não obstante, Sara mostra ter algumas deficiências, pois inicialmente mostrou ter dificuldade em reconhecer a unicidade do valor do limite, nos casos em que os limites laterais eram diferentes e, nas suas respostas, a aluna considerava que o limite podia ter os dois valores. Já na entrevista, esta dificuldade parece ter sido ultrapassada, e Sara evidenciou ter noção das condições que garantam a existência e a unicidade do limite de uma função num ponto. Quanto a Samuel, foi um aluno que desde as suas intervenções na sala de aula evidenciava ter a noção de que o limite de uma função num ponto existe sempre e quando os limites laterias são iguais. Neste sentido, a sua compreensão do limite evoluiu no sentido de conceber o limite como processo e como objeto, atribuindo uma identidade própria ao conceito e aplicando-o na resolução de tarefas.

4.2 Análise da compreensão do conceito de continuidade de uma função

4.2.1 Significados atribuídos ao conceito de continuidade

A análise dos dados revela que os alunos atribuem distintos significados ao conceito de continuidade de uma função, nomeadamente, concebem que uma função contínua é uma função que não tem interrupções no seu gráfico ou se para cada objeto corresponde uma imagem, até formalizarem a definição de função contínua num ponto.

Na questão 2.3 da Tarefa 2 de diagnóstico – *O que significa uma função ser contínua?* –45% dos alunos apresentaram uma conceção de continuidade associada aos seus conhecimentos prévios na interpretação do gráfico da função, atribuindo o significado de uma função contínua a uma *função que não tem interrupções*, quer no seu gráfico quer no seu domínio. Os alunos exprimiram o seu *conceito-definição* de continuidade do seguinte modo:

Sara: *Significa que a função tem de ter um domínio que "continua" desde o início da função até ao fim.*
A1: *Significa que eu consigo percorrer* [o gráfico da] *a função sem nunca levantar a caneta, ou seja, **não tem interrupções**.*
A2: *Significa que a função **não tem interrupções**.*
A3: *Uma função é contínua quando o seu domínio é bem definido por um único intervalo **sem interrupções**.*
(Extrato de respostas, T2_ Q2.3_FD)

A resposta de Sara exprime de maneira diferente este significado de continuidade. A aluna utiliza o termo "contínua" na sua definição para expressar o sentido de que a função não tem interrupções ao longo do seu domínio.

Ainda nesta mesma questão e com este mesmo significado, 30% dos alunos refere que uma *função é contínua se para cada objeto corresponde uma imagem*, Tiago e Samuel são dois destes alunos. Este resultado revela que o *conceito-definição* que têm os alunos está influenciado pelas suas experiências prévias e intuitivas no estudo de funções, por exemplo a função afim, quadrática, exponencial ou logarítmica, nas quais o aluno identifica caraterísticas particulares e comuns que têm as funções para criar a sua própria definição de função contínua.

Samuel: *Dentro dos extremos do domínio de uma função, a função toma todos os valores de x.*
Tiago: *É uma função em que a todos os objetos corresponde uma imagem.*
A$_4$: *Para todo o x, existe um y.*
A$_5$: *A função é contínua se todos os valores de x entre os extremos do domínio da função correspondem um valor de y.*
(Extrato de respostas, T2_ Q2.3_FD)

No caso de Tiago, esta conceção de continuidade está muito fixa na sua estrutura congnitiva, de modo que na questão 1.2 da Tarefa 1 de consolidação ele responde que "*uma função contínua é uma função em que a todos os objetos coresponde uma imagem, ou seja não existem assíntotas verticais*", o que evidencia que o seu conceito-definição de função contínua também está influenciado pelas caraterísticas gráficas das funções contínuas que tem estudado previamente. Na entrevista, Tiago ainda mantém este significado no que respeita ao conceito de continuidade de uma função:

Investigador:	Explica o que entendes por função contínua.
Tiago:	*Todo objeto corresponde a uma imagem.*
Investigador:	Que condições são necessárias para garantir a continuidade de uma função num ponto?
Tiago:	[Fica em silêncio] *Tem que haver uma imagem correspondente a cada ponto.*

(Extrato de episódio da entrevista ao Tiago)

Os contextos quotidianos em que surge o termo *"continuidade"* ou o termo *"contínuo"* formam parte do *conceito-imagem* que o aluno tem sobre o conceito de continuidade de uma função e que o levam a definí-lo através das conceções intuitivas acima descritas. Por exemplo, na questão 2.4 da Tarefa 2 de diagnóstico – *Em que outros contextos, fora da sala de aula de Matemática, tens ouvido falar do termo "continuidade" ou "contínuo (a)"? Qual o seu significado nesses contextos? – em* cerca de 40% das respostas os alunos relacionaram continuidade como algo que não pára, sem interrupção.

Sara: *Significa algo que* ***não tem quebras****, algo que se prolonga.*
A$_1$: *Algo contínuo é algo que* ***<u>nunca pára</u>*** *ou não há paragens.*
A$_2$: *Tempo. O facto de o tempo ser contínuo e* ***<u>não pára</u>****.*
(Extrato de respostas, T2_ Q2.4_FD)

Na altura da aplicação da Ficha de Diagnóstico, os alunos ainda não tinham contacto com uma definição matemáticamente formal do conceito de função contínua, mas com o decorrer das aulas este conceito foi formalizado. Os dados das observações de aula revelam que numa das sessões deu-se um momento de discussão no qual isto aconteceu. O contexto da discussão era a determinação de limites a partir do gráfico de funções, salientando as condições para que o limite exista. No quadro estavam desenhados dois gráficos correspondentes a duas funções, a discussão segue conforme o seguinte episódio:

(1) Simão:	Essas funções são contínuas?
(2) Professora:	O Simão está a perguntar: As duas funções são contínuas? *[A professora está-se a dirigir à turma]*
(3) Alunos:	Sim… Sim…
(4) Professora:	Com certeza absoluta. Porquê? *[A professora está-se a dirigir à turma]*
(5) Alunos:	Porque não se levanta o lápis.
(6) Professora:	Portanto, é contínua porque consigo seguir o gráfico sem levantar o lápis. Mas esta é uma definição intuitiva não matemática.
(7) Simão:	Eu posso afirmar que os limites laterais não diferem.
(8) Professora:	Se a função é contínua?
(9) Simão:	Sim, se a função é contínua os limites laterais não diferem.
(10) Professora:	Eu posso afirmar isso ou não? *[A professora está-se a dirigir à turma]*
(11) Alunos:	Silêncio… Sim…
(12) Professora:	Alguém acha que não? *[A professora está-se a dirigir à turma]* Quando é que será contínua? Pensem lá uma definição, matematicamente.
(13) Roberta:	Uma função é contínua quando os limites laterais são iguais.
(14) João:	Acho que no domínio a função tem que ser só uma expressão, não pode ser uma função num ramo e outra no outro.
(15) Alunos:	Sim. Uma função definida por ramos não é contínua.
(16) Professora:	Para estas definições vou dar um contraexemplo. *[A professora faz o gráfico de duas funções como contraexemplo do que os alunos estavam a dizer sobre o que é uma função contínua para refutar essas definições e apoiar a participação dos alunos, orientando-os à formulação da definição]* Então, volto a perguntar, quando é que uma função é contínua?
(17) Marcelo:	Eu acho que é quando os limites laterais são iguais e também são iguais à imagem.
(18) Professora:	Muito bem! Por exemplo nesta função, o limite quando x tende para 2 pela esquerda é igual ao limite quando x tende para 2 pela direita, mas também é igual a $f(2)$.

Vou ditar a definição de continuidade: Uma função é contínua se, eu vou escrever no quadro matematicamente como deve ser, o limite de a menos é igual ao limite de a mais e é igual a $f(a)$.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *[escrito no quadro]*

Mas reparem, e este a é um a qualquer? *[A professora está-se a dirigir à turma]*

(19) Pedro: Tem que pertencer ao domínio.

(20) Professora: Muito bem, a pertence ao domínio da função.

Neste episódio revela-se o facto dos alunos conseguirem identificar graficamente uma função contínua, mas terem dificuldade em definir as condições formais para garantir a continuidade de uma função num ponto. Além disso, confirmam-se as ideias intuitivas que tinham os alunos sobre este conceito, como por exemplo a noção de que o gráfico de uma função contínua consegue-se fazer sem levantar o lápis (*falas 5 e 6*), e também algumas outras conceções como a noção de que uma função definida por ramos não é contínua (*falas 14 e 15*). No final da discussão foram capazes de definir continuidade formalmente, como esperado (*fala 17*).

Não obstante, um dos aspetos mais significativos desta discussão foi o facto do questionamento acerca do que é ser contínua surgir a partir da determinação de limites e da análise das condições para que o limite num ponto exista, levando os alunos a reconhecerem uma consequência de uma função ser contínua: que os limites laterais em qualquer ponto da função não diferem (*falas 7, 8, 9, 10 e 11*). Isto evidencia uma forte ligação entre o conceito de continuidade e o conceito de limite e que a partir das suas experiências com limites os alunos são capazes de formalizar o conceito de continuidade de uma função, o qual contribui para a compreensão de ambos os conceitos. No caso do limite, os alunos conseguem aplicar o conceito na formulação do outro e, no caso da continuidade, compreendem as condições para que uma função seja contínua e assim definem o conceito de função contínua.

Esta discussão parece ter contribuído para que na resolução da questão 1.2 da Tarefa 1 de consolidação, na qual era solicitado ao aluno a definição de função contínua, 68% dos alunos evidenciaram que o seu *conceito-definição* está mais próximo da definição formal e matemáticamente aceite, como mostram algumas das respostas dos alunos na Figura 4.24:

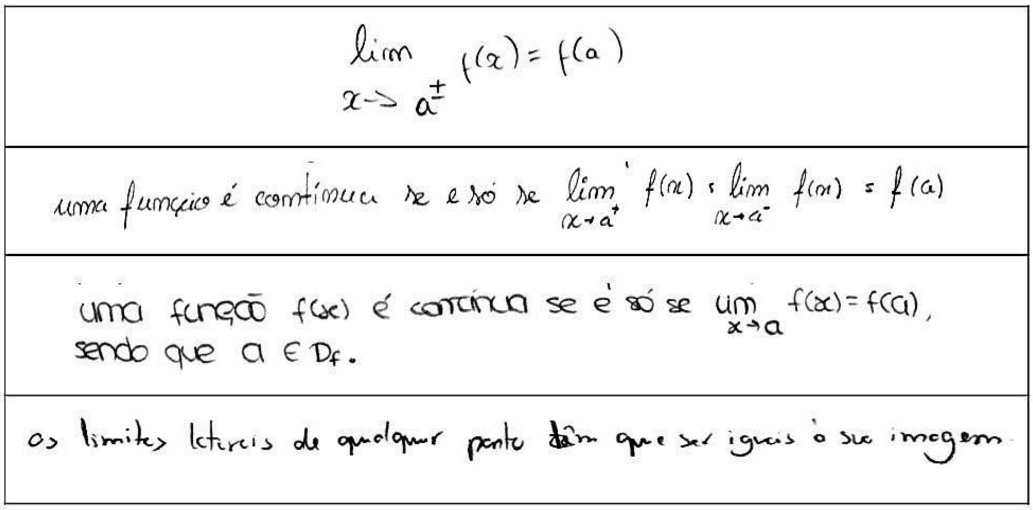


Figura 4.24 T1_ Q1.2_FC: exemplo de respostas

Finalmente, os dados obtidos na entrevista revelam que o *conceito-definição* de continuidade que Sara e Samuel inicialmente tinham revelado na resolução da Ficha de Diagnóstico se modificou. Evidenciando assim que o significado que têm estes alunos agora está mais próximo da conceção dinâmica de continuidade e reconhecem as condições para que uma função seja contínua. A seguir apresentam-se extratos da entrevista realizada a estes alunos que confirmam este resultado.

Investigador:	Explica o que entendes por função contínua.
Sara:	*Os pontos que constituem a função pertencem ao domínio*.
Investigador:	Que condições são necessárias para garantir a continuidade de uma função num ponto?
Sara:	*Espera lá, agora estou a confundir. Para ser contínua em a, a função, o limite à esquerda de a tinha que ser igual à imagem e o limite a direita de a tinha que ser igual à imagem, se fosse assim todos iguais então a função é continua nesse ponto.*
	(Extrato de episódio da entrevista à Sara)

Investigador:	Explica o que entendes por função contínua.
Samuel:	*Já me esqueci da definição* [fica a pensar]. *É uma função que em todos os pontos do domínio o limite do ponto, seja limite à esquerda ou à direita, é igual à imagem.*
	(Extrato de episódio da entrevista ao Samuel)

Em resumo (Figura 4.25), nas conceções iniciais, produto das suas experiências prévias com funções que são apresentadas como funções contínuas, os alunos atribuem dois significados intuitivos ao conceito de continuidade: (i) uma função contínua é uma função que não tem interrupções e (ii) uma função contínua é uma função que para cada objeto corresponde uma imagem. Esta conceções estão relacionadas com as caraterísticas que são interpretadas a partir do gráfico da função. Já no final, alguns alunos evidenciam ter noção das condições que garantam a continuidade de uma função num ponto e, assim, conseguem ter uma conceção dinâmica do conceito.

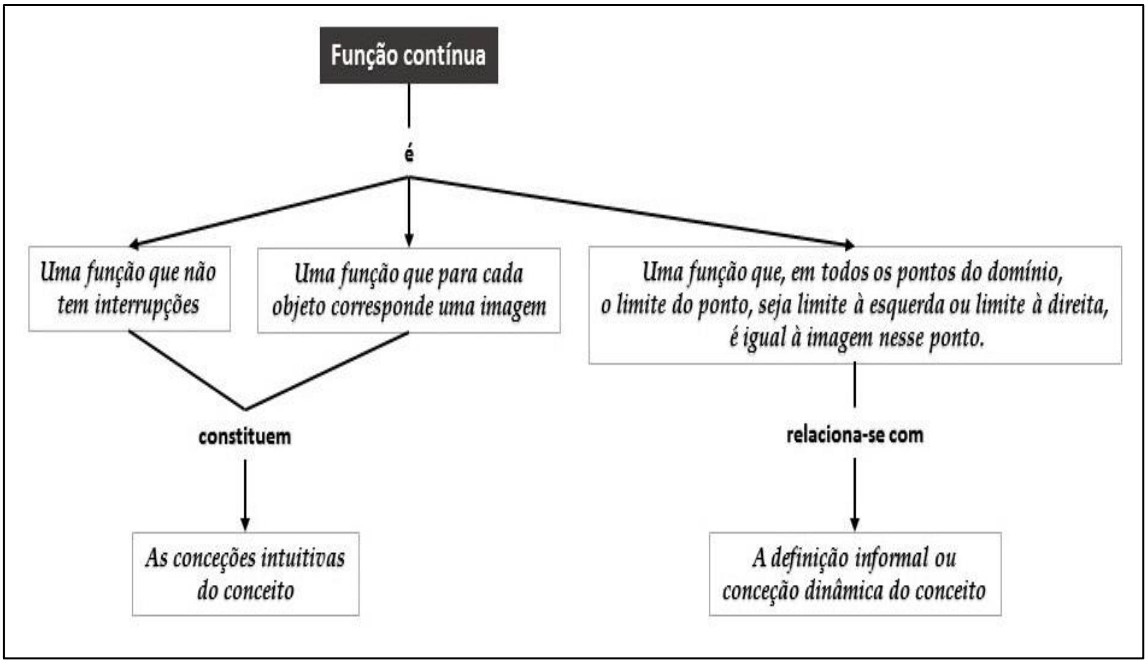


Figura 4.25 Significados atribuídos ao conceito de continuidade de uma função

4.2.2 Representação e visualização do conceito de continuidade

As ações visuais dos alunos que foram identificadas a partir da análise dos dados, no que respeita à visualização do conceito de continuidade de uma função, descrevem-se a partir de três processos: (i) a criação de representações geométricas, (ii) a conversão da representação geométrica em representação verbal, e (iii) o tratamento simbólico das condições que garantem a continuidade de uma função. A seguir apresentam-se de que forma os alunos levaram a cabo estas ações visuais.

A resolução das questões 2.1 e 2.2 da Tarefa 2, de diagnóstico, envolvia a ação visual da *criação de uma representação geométrica*, nomeadamente, o desenho de uma função que fosse contínua e outra que não o fosse. Nestas questões todos os alunos reponderam corretamente (Figura 4.26 e Figura 4.27, respetivamente), mostrando que reconhecem as caraterísticas do gráfico de uma função contínua, resultado que se relaciona com a conceção inicial evidenciada pelos alunos em que uma função contínua é uma função que "*não tem interrupções*".

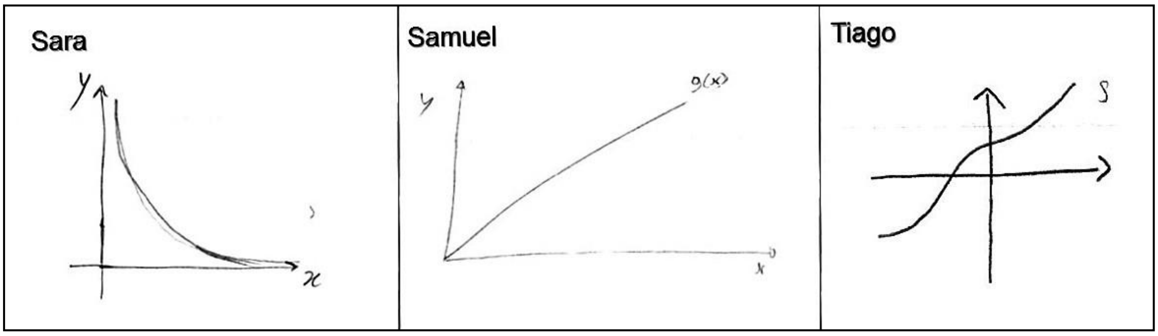


Figura 4.26 T2_ Q2.1_FD: Sara, Samuel e Tiago

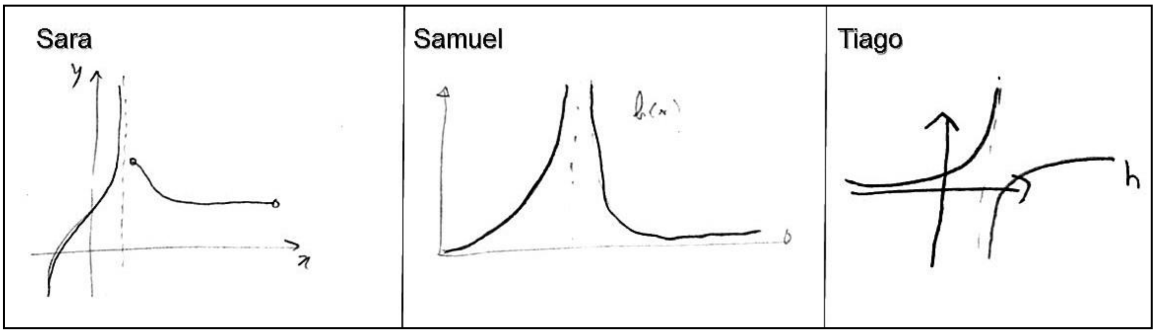


Figura 4.27 T2_ Q2.2_FD: Sara, Samuel e Tiago

Por outro lado, na questão 1.1 da Tarefa 1 de consolidação apresentam-se dois objetos visuais diferentes: o gráfico de uma função e a expressão algébrica que define uma função. No que respeita aos três gráficos apresentados, todos os alunos foram capazes de identificar se a função era ou não contínua, sendo que neste caso a ação visual dos alunos consistiu no processo de *conversão da representação geométrica em representação verbal*, *interpretando a informação do gráfico de uma função* com o propósito de determinar a continuidade de uma função e justificar as suas respostas. Nas justificações apresentadas, alguns alunos referiram o facto de para cada objeto o valor da sua imagem ser igual ao valor dos limites laterais desse objeto, enquanto outros recorrem a justificações mais intuitivas motivadas pela observação do gráfico, nomeadamente se apresenta interrupções ou se a cada objeto corresponde uma imagem. As respostas de Sara, Samuel e Tiago (Figura 4.28) são disso exemplo:

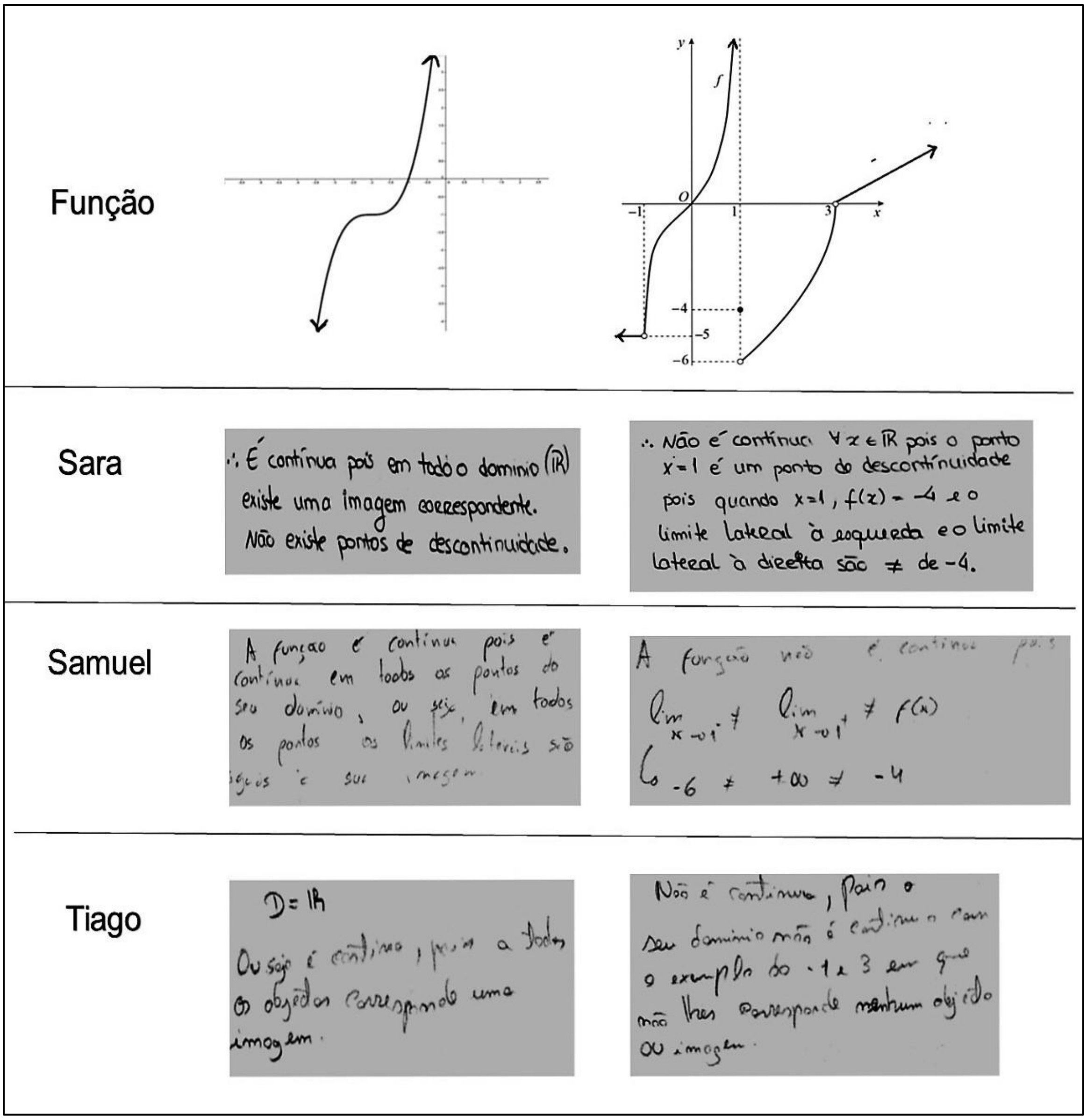


Figura 4.28 T1_ Q1.1_FC: Sara, Samuel e Tiago

Por outro lado, quando o objeto visual consistía numa representação simbólica da expressão que define a função em questão, 70% dos alunos usaram a definição para estudar a continuidade das funções, calculando o valor dos limites laterais e o valor da imagem nos casos que era preciso fazê-lo. Inclusivamente, no caso da função racional, alguns alunos indicaram que a função não era contínua em ℝ, mas sim no seu domínio. Neste caso a ação visual dos alunos consistiu n*o tratamento simbólico das condições que garantem a continuidade de uma função*, motivada pelo efeito visual de demonstrar a continuidade de uma função. Na Figura 4.29 apresentam-se exemplos de resoluções desta tarefa.

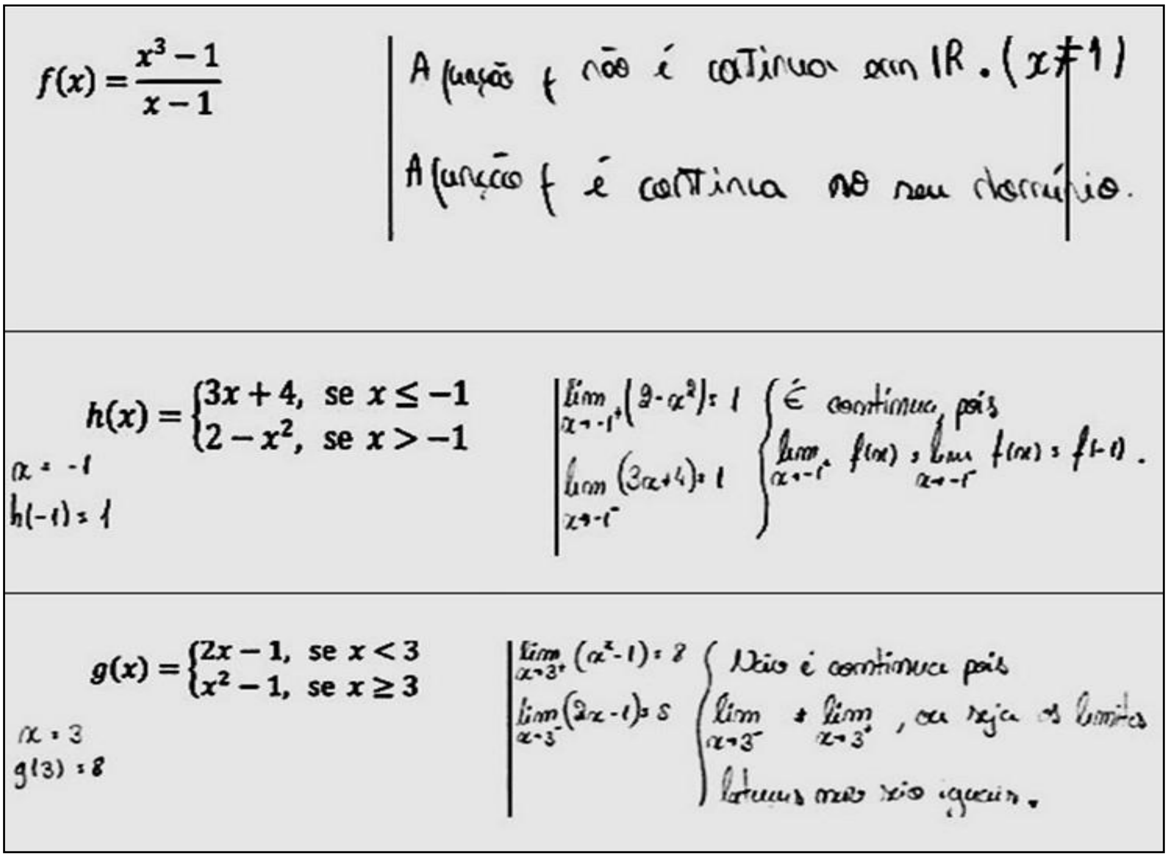


Figura 4.29 T1_ Q1.1_FC: exemplo de respostas

Durante a resolução das tarefas que envolvem o conceito de função contínua, os alunos utilizam os três distintos sistemas de representação e estabelecem relações e conexões entre eles. Deste modo, através da representação geométrica são capazes de identificar se a função é contínua, mediante as representações simbólicas formulam os problemas e realizam os respetivos cálculos e, através das representações verbais exprimem a definição de continuidade e justificam as suas respostas.

Em resumo, os dados revelam que é através do gráfico de uma função que os alunos mostram ter maior domínio na identificação da continuidade de uma função, quer num ponto quer em todo o seu domínio. Não obstante, é quando articulam esta representação com as representações simbólicas que são capazes deapresentar justificações matemáticamente aceitaveis para determinar a continuidade de uma função. Na Figura 4.30 apresentam-se os principais processos de visualização envolvidos na resolução das tarefas.

Objeto visual	Ação visual	Efeito visual
O gráfico de uma função.	*A conversão da representação geométrica em representação verbal através da leitura e da interpretação da informação do gráfico de uma função.*	*Determinar a continuidade de uma função.* *Justificar as respostas.*
Definição simbólica de uma função.	*Análise e tratamento simbólico das condições que garantam a continuidade de uma função*	*Aplicar a definição de função contínua num ponto.* *Demostrar a continuidade de uma função.*
	Criação de uma representação geométrica.	*Desenhar o gráfico de uma função contínua.*

Figura 4.30 Representações e visualização do conceito de continuidade de uma função

4.2.3 Dificuldades de aprendizagem associadas à compreensão do conceito de continuidade

A análise das resoluções das tarefas permitiu identificar que, implícitamente e ligada com a compreensão do conceito de função contínua, a única dificuldade dos alunos é *reconhecer quando se deve aplicar a definição de continuidade de uma função num ponto*, no sentido de identificar em que pontos é necessário estudar a continuidade através do cálculo dos limites laterais da função nesse ponto e da verificação da igualdade entre eles e a imagem do ponto em questão. Por exemplo, na questão 1.1 da Tarefa 1 de consolidação, esta dificuldade é posta em evidência mediante as justificações erradas ou incompletas de alguns alunos. Para um deles, foi suficiente determinar que o domínio da função é $\mathbb{R}$ para confirmar que a função é contínua (Figura 4.31); Para Sara, uma função definida por ramos é contínua se as funções que definem cada ramo forem contínuas (Figura 4.32). Assim, em ambos os casos os alunos não reconheceram que deviam de recorrer à definição de continuidade de uma função num ponto.

$g(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x < 3 \\ x^2-1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$	$D = \{x \in \mathbb{R} : (\mathbb{R} \wedge x < 3) \vee (\mathbb{R} \wedge x \geq 3)\}$ $= \mathbb{R}$ Se o domínio é $\mathbb{R}$, então é contínua

Figura 4.31 T1_ Q1.1_FC: exemplo de resposta errada

$g(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x < 3 \\ x^2-1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$	$\therefore$ É contínua pois a função é composta por 2 funções polinomiais contínuas (afim e quadrática) em todo o domínio ($\mathbb{R}$).

Figura 4.32 T1_ Q1.1_FC: Sara

Tal como foi referido acima, esta foi a única dificuldade identificada, não quer dizer o único erro, pois esta dificuldade manifesta-se de diferentes formas nas ações e resoluções incorretas dos alunos, assim como se exemplificou nos dois casos anteriores. Não obstante, por exemplo no caso de Sara, esta dificuldade foi ultrapassada, na entrevista ela evidencia ter noção do estudo analítico que deve fazer-se para determinar a continuidade de uma função.

4.2.4 Síntese

De acordo com a análise dos dados e os resultados que foram apresentados, em termos gerais, os alunos evidenciam ter uma compreensão instrumental sobre o conceito de continuidade de uma função. Esta compreensão carateriza-se por um processo de formalização, no qual é atribuído ao conceito as condições que permitem justificar formalmente quando é que uma função é contínua.

Não obstante, é importante salientar o facto das conceções intuitivas que os alunos têm sobre o conceito de continuidade, permite-lhes ter uma sensação de controlo e domínio do conceito, no sentido de que são capazes de responder corretamente às questões das tarefas que solicitam determinar a continuidade de uma função através da visualização do gráfico da função. No entanto, mostram dificuldades quando são solicitados a determinar a continuidade de uma função definida algebricamente. Deste modo, esta sensação de controlo, dificulta ao aluno reconhecer quando deve aplicar a definição de continuidade de uma função, pois as suas conceções intuitivas deixam de ter sentido quando não tem a representação do gráfico da função.

Por outro lado, estas conceções intuitivas são modificadas até o ponto do aluno ter uma definição correspondente à conceção dinâmica do conceito de continuidade e é capaz, assim, de aplicar essa definição na resolução das tarefas e na justificação das suas respostas. Samuel e Sara são exemplo de alunos que evidenciaram este processo evolutivo na compreensão deste conceito. Contudo, Tiago manteve uma conceção incompleta até o final do estudo, não conseguindo incorporar na sua estrutura cognitivo o novo conhecimento apresentado sobre o conceito de continuidade de uma função nem articulá-lo com o seu conhecimento prévio.

Capítulo 5

Conclusões e reflexões finais

Neste último capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo. De seguida, levando as principais conclusões do estudo à luz dos resultados obtidos no que diz respeito à compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função, em função das questões da investigação. Finalmente, faço também uma reflexão pessoal sobre o significado deste estudo para mim enquanto professor e investigador, bem como as potencialidades do estudo, os possíveis contributos para a comunidade profissional dos professores de Matemática e apresento algumas recomendações para futuros estudos.

5.1 Síntese do estudo

Dentro de uma rede complexa de processos cognitivos associados ao pensamento matemático avançado, encontram-se os conceitos de limite e continuidade de uma função (Fernández-Plaza et al., 2013; Jaffar & Dindyal, 2011; Tall, 1991) que têm sido considerados de difícil compreensão pelos alunos, atendendo às dificuldades e obstáculos de aprendizagem que enfrentam (Cornu, 1991; Moru, 2009; Tall, 1992). Por isso, os conceitos de limite e continuidade têm sido alvo de investigação em Educação Matemática com diversos fins, de que são exemplo os estudos focados em abordagens didáticas para o ensino destes conceitos (Fernández-Plaza et al., 2013; Prezenioslo, 2004) ou sobre as distintas conceções ou significados que os alunos lhes atribuem e as suas conexões com outros conceitos (Domingues, 2003; Juter, 2006; Nair, 2010; Tall & Vinner, 1981). Outros estudos têm-se também focado em aspetos envolvidas na compreensão dos conceitos por parte do aluno, como as representações (Karatas et al. 2011; Pons et al., 2011; Tall, 1992) ou a visualização destes entes matemáticos (Natsheh & Karsenty, 2014).

Estes estudos, na sua maioria, têm sido feitos ao nível do ensino universitário, portanto, este estudo envolve participantes de uma escola secundária, porque constitui a etapa inicial de transição entre o pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado, na qual os alunos enfrentam procedimentos que já não se levam a cabo através da aritmética ou álgebra simples, pelo que a sua compreensão destes conceitos implica um processo analítico, no qual se articulam as distintas representações, a visualização e os significados que formam parte da identidade dos conceitos.

Portanto, com este estudo procuro analisar que compreensão evidenciam os alunos do 12.º ano sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, querendo dar resposta, em particular, a três questões: (1) Quais os significados que os alunos atribuem a estes conceitos? (2) Como os alunos utilizam as diferentes representações e a visualização destes conceitos para obter significados e resolver tarefas que os envolvem? (3) Quais os principais erros e dificuldades que os alunos manifestam na compreensão destes conceitos e na resolução de tarefas que os envolvem?

A partir disto, de forma abrangente, considero que a compreensão de um conceito matemático está cercada por diferentes posições e teorias que têm sido consideradas por vários autores. Deste modo, no enquadramento teórico deste estudo reconhece-se que a compreensão relacional de um conceito matemático (Skemp, 1976) evolui desde o mundo personalizado até ao mundo formal (Tall, 2004), incluindo o uso de diferentes representações para o tratamento do mesmo conceito (Duval, 2006; Tall, 1992), tendo em conta a ambiguidade dessas representações e a sua conceção como processos ou conceitos, o que levam ao desenvolvimento de um pensamento proceptual (Gray & Tall, 1994). Este pensamento pode descrever-se em função de um esquema de ações, processos e objetos (Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1991) que surge da interação entre a visualização e as representações (Natsheh & Karsenty, 2014), constituindo um marco mental no indivíduo – conceito-imagem – que esteja disponível quando ele se encontre perante uma situação de aprendizagem (Tall & Vinner, 1981).

A metodologia da investigação segue, em termos gerais, o paradigma interpretativo com uma abordagem qualitativa. Preliminarmente, foi aplicado um estudo exploratório com o fim de obter informação que pudesse contribuir para a seleção e elaboração de tarefas e para o estabelecimento de um quadro conceptual que permita analisar a compreensão que evidenciam os alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, com o propósito da planificação do Estudo Principal da investigação. O Estudo Principal foi levado a cabo numa turma de 12.º ano de uma Escola Secundária situada nos arredores de Lisboa, no ano letivo 2015/2016, durante o desenvolvimento dos objetivos e conteúdos curriculares referentes ao Tema II *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do Programa de Matemática A para 12.º ano (ME, 2002b). O principal procedimento de recolha de dados foi a recolha documental das produções escritas dos alunos nas resoluções de um conjunto de tarefas que foram propostas em sala de aula, além da realização de observações de aula e de uma entrevista. Os dados foram analisados de forma descritiva e interpretativa considerando três dimensões de análise que se articulam com as questões do estudo: i) significados; (ii) representações e visualização; e (iii) dificuldades de aprendizagem.

5.2 Principais conclusões do estudo

A seguir, apresento e organizo as conclusões a partir das questões do estudo, procurando respondê-las através dos resultados obtidos na análise dos dados e a sua articulação com os resultados identificados noutros estudos referidos no enquadramento teórico desta investigação; e, assim, mostrar que compreensão evidenciam os alunos de 12.º ano sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função

5.2.1 Quais os significados que os alunos atribuem aos conceitos de limite e continuidade de uma função?

Segundo a análise de dados, posso concluir que os significados que os alunos atribuem aos conceitos de limite e continuidade de uma função podem classificarem-se em duas classes: (i) os *significados intuitivos*, que se referem às conceções que os alunos têm sobre os conceitos a partir das suas experiências pessoais, iniciais e intuitivas, referidas por Cornu (1991) como conceções espontâneas; (ii) os *significados formais*, que estão mais próximos da conceção dinâmica dos conceitos, desde o ponto de vista matemático e curricular, que pelo geral, são atribuídos pelos alunos após das experiências de aula.

Significados intuitivos do conceito de limite de uma função

Com respeito ao conceito de limite, os alunos atribuem o significado de valor, ou seja, o limite é um valor que, intuitivamente, para alguns corresponde ao valor de um ponto e para outros ao valor de um elemento das ordenadas que se obtém a partir da interpretação do gráfico da função. Neste último caso, alguns alunos consideram que este valor nunca pode ser atingido pela função e outros que corresponde ao valor da imagem, pelo que a função o alcança. Deste modo, posso concluir que assim como foi identificado nos estudos de Juter (2007) e Prezenioslo (2004), neste estudo estes significados intuitivos que evidenciam ter os alunos sobre o conceito de limite os conduzem a questionar a existência do limite consoante a função está ou não definida no ponto e, consequentemente, a determinar o valor do limite a partir do valor da imagem do objeto correspondente.

Por outro lado, de acordo com Tall e Vinner (1981), concluo que o *conceito-imagem* que evidenciam ter os alunos sobre o limite de uma função é produto das suas experiências prévias. Por exemplo, no estudo das funções, conceber o limite como a imagem do objeto; no estudo com as assíntotas de uma função, tal como foi identificado no estudo de Nair (2010), os alunos estabelecem conexões entre o conceito de assíntota com o conceito de limite, nomeadamente, relacionar o limite quando x tende para infinito com o valor correspondente à assíntota horizontal da função, e com isto concebê-lo como um valor que a função não alcança. A partir disto e tendo em conta a classificação de Domingos (2003) sobre os três níveis do *conceito-imagem*, considero que estes significados intuitivos que os alunos atribuem ao conceito de limite situam-se no primeiro nível – *conceito-imagem incipiente* – pois são conceções muito incompletas, que fazem referência a caraterísticas notórias do objeto em casos particulares, por exemplo, quando o limite coincide com o valor da imagem do objeto ou com o valor da assíntota da função.

Finalmente, tendo em conta o facto destes significados mostrarem que os alunos baseiam os seus resultados na sua experiência com casos particulares de limites e que os processos que usam para determinar limites relacionam-se com outros conceitos, como o conceito de imagem ou de assíntota, considero que ainda os alunos não têm atribuído ao conceito de limite uma identidade própria como objeto e/ou processo matemático; portanto considero que estes significados situam-se no *mundo personalizado/personificado*, segundo a classificação de Tall (2004a, 2004d).

Significados formais do conceito de limite de uma função

Os significados formais que os alunos atribuem ao conceito de limite sobrepõem-se aos significados intuitivos, mas refletem a compreensão das condições que garantem a existência e a unicidade do conceito de limite, sendo estas duas propriedades fundamentais na compreensão deste conceito. Estes significados evoluem durante o decorrer das aulas, chegando a considerar o limite como um valor obtido mediante um processo dinâmico de aproximação, tendo em conta que a aproximação pela esquerda e a aproximação pela direita do objeto, ou seja os limites laterais, devem ser iguais para garantir a existência do limite e determinar o seu valor.

Neste sentido, posso concluir que, tal como foi identificado nos resultados do estudo de Cotrill et al. (1996) e tendo em conta a teoria APOE (Ações-Processos-Objetos-Esquemas) (Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1991), neste estudo o objeto – *o limite* – é encapsulado a partir de uma dupla de processos coordenados que são produto das ações de aproximar os objetos ao valor de x indicado no limite ao mesmo tempo de aproximar as respetivas imagens; assim estes processos levam ao aluno identificar e quantificar o limite.

Por outro lado, o *conceito-imagem* sobe ao seguinte nível – *conceito-imagem instrumental* – (Domingos, 2003), pois o aluno já considera propriedades intrínsecas do objeto, que o levam a contruir novos conceitos, por exemplo a formulação do conceito de função contínua que surgiu da discussão das condições que garantam a existência de um limite. Aliás, até em alguns casos, por exemplo no caso de Samuel, considero que o conceito-imagem transcende o *conceito-imagem relacional*, já que este aluno evidencia ter uma abordagem mais estrutural do objeto fazendo distinção sobre o que é o limite como conceito e o que é o limite como processo. Na verdade, para Samuel, o limite como conceito não é a imagem do objeto nem a assíntota da função, pelo contrário, o limite tem a sua própria identidade, enquanto processo, para este aluno, o limite é o valor que resulta das aproximações laterais serem iguais.

Como consequência, estes indícios de que os alunos consideram, implicitamente, o limite como conceito e como processo, leva-me concluir que estes significados tem evoluído até o *mundo proceptual* (Tall, 2004a, 2004d), caraterizado pelo facto de que através das experiências com os processos o conceito é concebido, além de que a comprovação da existência e do valor do limite se faz através da articulação do cálculo numérico, da manipulação algébrica e da análise gráfica.

Significados intuitivos do conceito de continuidade de uma função

No caso do conceito de continuidade de uma função, os significados intuitivos que os alunos atribuem-lhe são principalmente dois: uma função é contínua se não tem interrupções, dito pelos alunos, se for possível percorrer o gráfico da função sem nunca levantar a caneta; ou se para cada objeto corresponde uma imagem.

Estas conceções formam parte do *conceito-imagem* que os alunos têm sobre o conceito de continuidade de uma função, e são produto das suas experiências na interpretação do gráfico de funções contínuas e do uso coloquial do termo continuidade, no sentido de ser algo que *não pára*, como é referido no estudo de Tall e Vinner (1981). Deste modo, pelo facto de que a partir destes significados os alunos referirem apenas algumas das caraterísticas mais notórias de uma função contínua mas que não traduzem o conceito de continuidade, posso concluir que estas conceções constituem o *conceito-imagem incipiente* (Domingos, 2003) e encontram-se no *mundo personalizado/personificado* (Tall, 2004a; 2004d).

Significados formais do conceito de continuidade de uma função

Quanto aos significados formais, os alunos evidenciam substancialmente uma evolução das suas conceções iniciais após da formalização do conceito, atribuindo o significado de continuidade a uma função que, em cada ponto do seu domínio, o valor do limite é igual ao valor da sua imagem. Deste modo, posso concluir que o conceito de continuidade, como objeto segundo a teoria APOE (Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1991), é encapsulado a partir do processo que está implicado na determinação da continuidade de uma função num ponto, que inclui o processo dinâmico de aproximação para determinar o limite de uma função num ponto e a sua relação com o valor da imagem do objeto, o que permite que o aluno conceba, implicitamente, a continuidade como processo e como conceito. Portanto, estes significados já se encontram no *mundo proceptual* (Tall, 2004a; 2004d).

Por outro lado, esta conceção da continuidade de uma função não só passa a formar parte do *conceito-imagem* que têm os alunos, senão também conforma o seu *conceito-definição*, no sentido de que é usada para definir o conceito e determinar a continuidade de uma função. Além disto, os resultados revelam que alguns alunos, por exemplo o Samuel, alcançam o nível de *conceito-imagem relacional*, na medida que abordam o conceito de maneira estrutural, fazendo justificações a partir da definição e verificando os seus resultados não só através da observação do gráfico da função, senão também comprovando o cumprimento das condições mediante o cálculo algébrico.

5.2.2 Como os alunos utilizam as diferentes representações e a visualização destes conceitos para obter significados e resolver tarefas que os envolvem?

Quanto à obtenção de significados através do uso das representações, posso concluir que da forma como é referido por Gray e Tall (1991), estes objetos matemáticos – o limite e a continuidade de uma função – são considerados *procept* no sentido de que a sua representação simbólica apela à aplicação de um processo, seja algorítmico, operacional ou analítico, envolvido na determinação de um limite ou da continuidade de uma função, mas também o simbolismo faz referência ao conceito em si próprio. Por exemplo, assim como foi identificado no trabalho de Gray e Tall (1994), neste estudo revela-se que a partir do simbolismo utilizado para representar um limite os alunos atribuem-lhe o significado de tender ou aproximar-se (processo) e o significado de valor (definição do conceito). No caso do conceito de continuidade, a própria definição recorre ao uso de representações simbólicas que, por sua vez, expressam o processo que o aluno deve seguir para determinar se a função é contínua.

Ainda no pressuposto teórico destes autores, a compreensão destes conceitos está ligada com a flexibilidade com que eles usam as representações simbólicas no sentido de considerar a sua ambiguidade, ou seja, a sua capacidade de manipular o simbolismo como processo e conceito, dando lugar ao *pensamento proceptual* (Gray & Tall, 1994). Deste modo posso concluir que alguns alunos, por exemplo Sara e Samuel, evidenciam o desenvolvimento deste pensamento ao longo das suas experiências de aula e da realização das tarefas.

Por outro lado, durante a resolução de tarefas que envolvem os conceitos de limite e continuidade, os alunos essencialmente estabelecem relações entre um sistema de representação e outro, fazendo uso da estrutura extrínseca de cada representação (Goldin, 1998) e dando lugar a constantes conversões (Duval, 2006). Por exemplo, a conversão da representação geométrica em representação simbólica, quando o aluno traduz a informação do gráfico da função em símbolos numéricos e algébricos para determinar limites, mas ao mesmo tempo a conversão para as representações verbais – linguagem natural – para justificar e comunicar as suas ideias e respostas. Deste modo, conforme é referido em Tall

(1992) a compreensão dos alunos evidencia-se segundo a utilização que eles dão às várias representações do conceito no simultâneo.

De acordo com a definição de Arcavi (2003) sobre a visualização, posso concluir que a visualização como *capacidade* apresenta-se principalmente nos momentos de leitura e interpretação do gráfico de uma função, quer para determinar limites ou a continuidade de uma função. Como *processo*, a visualização acontece durante as conversões de um sistema de representação noutro; e a visualização como *produto* evidencia-se na criação de imagens, principalmente, na construção do gráfico de uma função. Assim, é neste sentido, que ao considerar as representações como objetos visuais, podem identificar-se distintas ações e efeitos visuais que os alunos desenvolvem durante a resolução de tarefas.

Portanto, posso concluir que o nível de visualização, segundo a classificação de Rivera (2011), que mostram ter os alunos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função é o *nível formativo* caraterizado pelo facto dos alunos conseguirem estabelecer os conceitos e os processos envolvidos, a partir dos objetivos curriculares preestabelecidos, ou seja, revelam serem capazes de visualizar os conceitos (como capacidade, processo e produto) de acordo com as convenções matematicamente formais que são solicitadas na sala de aula. Deste modo, a criação de objetos visuais tem um papel explicativo subordinado ao discurso formal, concluindo então que a função que os alunos dão às imagens é uma *função ilustrativa* (Gómez-Chacón, 2014).

Contudo, considero que é importante salientar que no episódio de aula indicado nos resultados aconteceu o que Rivera (2011) chama de *Cenário de Visualização*, tomando lugar um momento no qual os objetos visuais, neste caso o gráfico de funções, tiveram uma *função heurística* (Gómez-Chacón, 2014), pois o gráfico foi usado pelos alunos para raciocinar, conjeturar e justificar as suas ideias em relação à formulação da definição formal de função contínua. A partir disto posso concluir que o nível de visualização alcançado neste episódio de aula foi o *nível transformacional* (Rivera, 2011), caraterizado pelo facto dos alunos darem sentido às suas ações visuais. Além disto, posso acrescentar que pelas caraterísticas deste episódio, existiram possibilidades para os alunos desenvolverem o *raciocínio visual inferencial conceitual*, no sentido de Natsheh e Karsenty (2014), pois os alunos levantaram inferências a partir do gráfico da função que os levou consolidar o conceito de continuidade de uma função.

Em resumo, os resultados evidenciam que as representações e a visualização dos conceitos de limite e continuidade são utilizadas pelos alunos na atribuição de significados e na resolução de tarefas através do desenvolvimento de dois tipos de pensamento: o pensamento proceptual e o pensamento visual.

5.2.3 Quais os principais erros e dificuldades dos alunos na compreensão destes conceitos e na resolução de tarefas que os envolvem?

Com respeito ao conceito de limite de uma função, tal como foi identificado noutros estudos (Juter, 2007; Moru, 2009; Prezenioslo, 2004; Tall, 1992) os alunos mostram ter a conceção errónea de atribuir o significado de imagem ao conceito de limite de uma função num ponto, e consequentemente, têm dificuldades em determinar a existência de um limite e em reconhecer a unicidade do valor do limite. Estas dificuldades manifestam-se, por exemplo, através do erro de dar o valor da imagem ao limite quando o limite não existe, ou quando o aluno atribui dois valores ao limite de uma função num ponto, ou também quando indica que o limite não existe porque a função não está definida no ponto em questão. Estes erros, pelo geral acontecem quando o aluno está a interpretar a informação do gráfico de uma função e a traduz numericamente para dar o valor ao limite em questão. Segundo a classificação dos erros propostos em Seah (2005), posso concluir que estes erros são de tipo *conceitual*, no sentido de que correspondem a manifestações erradas ligadas à falta de compreensão do conceito, das suas caraterísticas e propriedades. Além disto, considero que também é possível que por trás destas dificuldades esteja o obstáculo epistemológico referido por Cornu (1991): vincular a geometria com números.

Os resultados também evidenciam que existe uma outra dificuldade associada ao facto de considerar se o valor do limite é alcançado ou não pela função, pois para os alunos que consideram o limite a partir da imagem da função, o limite é um valor que a função alcança, mas para os alunos que consideram o limite como o valor da assíntota horizontal de uma função, o limite é um valor que nunca atinge a função. Esta dificuldade, muitas vezes, é produto da própria natureza do conceito ou do uso quotidiano de termos específicos como *limite, ultrapassar, alcança, tende* e *aproximar-se* (Fernández-Plaza et al., 2013; Jaffar & Dindyal, 2011). Esta problemática é considerada por Cornu (1991) como um dos obstáculos epistemológicos do conceito de limite de uma função: alcançou-se ou não se alcançou o limite?

Por outro lado, tal como os alunos que participaram noutros estudos (Domingos, 2003; Juter, 2005a; 2007; Tall, 1992), neste os alunos revelaram dificuldades relacionadas com a utilização de procedimentos algébricos, nomeadamente, as estratégias algébricas utilizadas para levantar indeterminações e o uso dos limites notáveis durante o cálculo de limites. Esta dificuldade é manifestada através de diferentes erros, alguns deles *erros procedimentais,* por exemplo quando o aluno não aplica o método ou algoritmo adequado para levantar a indeterminação de um limite; ou *erros técnicos*, quando o aluno esqueceu-se de um número ou fez algum cálculo numérico errado, segundo a classificação de Seah (2005).

Quanto ao conceito de continuidade, os resultados deste estudo mostram que, à semelhança do observado no estudo de Karatas et al. (2011), os alunos justificam a continuidade de uma função num ponto observando se a função está ou não está definida nesse ponto. Esta conceção errónea, que muitas vezes se mantém fixa na estrutura cognitiva do aluno, leva-o a ter dificuldade em reconhecer quando se deve aplicar a definição de continuidade de uma função num ponto, que se manifesta quando o aluno não faz a análise do comportamento dos limites laterais e a sua relação com o valor da imagem e justifica a continuidade da função a partir dos seus significados intuitivos.

5.2.4 Síntese

De acordo com a definição de Skemp (1976), os alunos participantes neste estudo evidenciam uma *compreensão instrumental* dos conceitos de limite e continuidade de uma função, embora se possa identificar duas formas diferentes de desenvolver esta compreensão. Primeiramente, desenvolvem uma compreensão instrumental de caráter mais intuitiva pois os alunos resolvem tarefas a partir de experiências particulares mais próximas das suas próprias conceções do que da formalidade matemática, sem ter domínio do conceito em si mesmo. Por exemplo, o facto dos alunos reconhecerem o gráfico de funções contínuas sem saber a definição formal de função contínua. No entanto, depois do estudo das caraterísticas, propriedades, processos e definições dos conceitos, os alunos evidenciam uma compreensão instrumental de caráter mais formal, caraterizado pela aplicação de regras e estratégias pré-estabelecidas pelas convenções matemáticas da sala de aula, a visualização dos conceitos através de diferentes representações, o uso e articulação de diferentes sistemas de representação, e a formulação de significados mais próximos da conceção dinâmica dos conceitos. Contudo, os alunos ainda mantêm conceções iniciais no seu conceito-imagem, mas agora mostram o domínio de elementos formalmente aceites para resolver tarefas e justificar as suas respostas.

5.3 Reflexão final

A realização deste estudo, inserida na minha formação profissional no mestrado, constituiu um importante momento de aprendizagem para mim. Primeiramente, como investigador na área da Educação Matemática, tive a possibilidade de refletir a partir da minha experiência como professor e levantar questões dentro de uma das áreas mais relevantes da Matemática - o Cálculo Infinitesimal, e a partir dessas questões levar a cabo um estudo que permitisse respondê-las. Deste modo, através de todo o processo envolvido entre a formulação dessas questões e as suas respostas fui levado a mergulhar-me num mar de dados com o propósito de descobrir a compreensão que têm os alunos de uma turma de 12.º ano sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. Assim, este estudo permitiu-me experienciar as diversas fases e, inclusive as dificuldades intrínsecas à realização de uma investigação - a formulação de questões de investigação, a elaboração um plano de investigação, a análise de literatura, a seleção da metodologia que mais se ajusta às caraterísticas e objetivos do estudo e a definição dos procedimentos e elaboração dos instrumentos para a recolha de dados. Além disso, ainda me permitiu viver experiências que considero foram as mais complexas ao longo do estudo, relacionadas com a organização e a análise de dados, de forma a extrair os resultados mas significativos e a apresentá-los de modo que facilitasse a leitura da informação e a busca de resposta às questões iniciais.

Por outro lado, como professor de Matemática, suscitou-me particular interesse a leitura de várias e distintas investigações, que me ajudaram a refletir sobre o ensino e a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de uma função desenvolvidas noutros contextos educativos e com outras estratégias metodológicas, e que sem dúvida veio enriquecer o meu conhecimento e a minha prática docente. Além disto, a articulação das várias posições teóricas sobre o ensino e a aprendizagem destes conceitos com os dados recolhidos no Estudo Exploratório, permitiu-me elaborar um quadro formado por três dimensões (significados, representações e visualização, e dificuldades de aprendizagem) que me possibilitou analisar, já no Estudo Principal, a compreensão que têm os alunos sobre estes entes matemáticos.

Não obstante, nesta etapa de análise de dados, a definição das categorias para analisar os dados foi a maior dificuldade que senti na realização deste estudo, pois pela sua natureza estas três dimensões estão muito ligadas entre si, sendo difícil a organização e inclusão dos dados nessas categorias. Por exemplo, um mesmo dado que surgiu da resolução de uma tarefa pode evidenciar o significado que o aluno atribui ao conceito, mas esse significado pode consistir numa conceção errónea que conduz o aluno a cometer um erro que eventualmente pode estar ligado a uma dificuldade de aprendizagem e, além disso, pôr em manifesto o uso das representações e da visualização na estratégia de resolução do aluno. Portanto, esta situação gerou uma grande quantidade de dados que nem sempre foi fácil de gerir.

Por outro lado, este estudo constituiu, sem dúvida, uma grande valia para o meu desenvolvimento profissional e académico, por exemplo, o facto de coordenar o trabalho junto com a minha orientadora e com a professora titular da turma, permitiu-me crescer como investigador e professor através das aprendizagens que tive com elas. Semelhantemente, a sala de aula na qual foi levada a cabo o estudo consistiu numa porta de entrada ao sistema educativo português, permitindo-me refletir sobre a realidade do sistema educativo do meu país Costa Rica, surgindo em mim o interesse e desejo de que através desta experiência possa contribuir para o melhoramento do ensino e aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade no contexto costarriquenho.

Além disto, aumentou a minha curiosidade para promover uma compreensão mais profunda da aprendizagem dos alunos noutros temas, para assim os poder orientar também a desenvolver uma maior compreensão da Matemática, pois a partir de agora o meu olhar das produções escritas dos alunos ou das suas intervenções na sala de aula vai mudar, no sentido de que agora vou ver a compreensão que eles desenvolvem sobre os conceitos através de três lentes específicas: (i) as que permitem identificar os significados que os alunos atribuem aos conceitos; (ii) as que permitem identificar as formas dos alunos usarem as representações e como está envolvida a visualização dos conceitos nas suas ações; e (iii) as que permitem identificar os erros e as dificuldades de aprendizagem que manifestam os alunos.

Apesar dos resultados obtidos neste estudo não poderem ser generalizados a partir de uma experiência com uma turma de 12.º ano, nem era esse o seu objetivo, considero que esta investigação contribui para o aumento do conhecimento da compreensão que os alunos evidenciam sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. Deste modo, pode resultar de interesse para professores de Matemática e investigadores em Educação Matemática. O estudo mostra o perfil de saída de alunos de secundária em relação à compreensão destes conceitos, nomeadamente, a evolução dos significados que lhes atribuem; o uso que dão às representações durante a resolução de tarefas e as conexões que fazem com outros conceitos matemáticos, como seja a notável relação entre assíntota e limite; as conceções intuitivas que têm sobre os conceitos baseadas nas suas experiências pessoais e o uso quotidiano de termos específicos usados no ensino destes conceitos, como por exemplo a conceção de que o que o contínuo é algo que nunca pára. Também evidencia as dificuldades que obstruem a compreensão destes conceitos, considerando-as parte intrínseca da natureza complexa do processo de aprendizagem destes conceitos. Além disto, considero que outra potencialidade desta investigação é uso, num outro contexto, de uma proposta teórica que se manifestou útil para analisar a visualização matemática a partir de três componentes envolvidos principalmente na resolução de tarefas: os objetos visuais, as ações visuais e os efeitos visuais.

O estudo também permite refletir sobre as abordagens de ensino destes conceitos, levando-me a questionar o seguinte: *Será que o ensino dos conceitos de limite e continuidade de uma função ainda continua a ser um ensino tradicional, caraterizado por seguir uma técnica em espiral, identificada por Tall e Vinner em 1981, baseada em exemplos particulares e experiencias intuitivas, que pouco a pouco formalizam a definição do conceito?* Verificando-se isto, tanto professores como futuras investigações deverão ocupar-se em procurar estabelecer e aplicar estratégias de intervenção que proponham uma abordagem diferente destes conceitos. Os resultados deste estudo sugerem que essas novas intervenções devam ter em conta a natureza complexa destes conceitos, e que por isso, devam ser apresentados desde o início com uma identidade própria, quer dizer, que através de um processo de exploração inicial o aluno seja orientado a definir os conceitos de limite e continuidade a partir da conceção dinâmica. Pois tal como os resultados revelam, as experiencias iniciais carentes de uma formalização do conceito, levam a criar uma definição de limite ou de continuidade ligada com outros conceitos ou objetos matemáticos, como a assíntota, a imagem ou o gráfico de uma função.

Além disso, será desejável que essas abordagens considerem as experiências pessoais que os alunos têm com o uso quotidiano dos termos específicos envolvidos na aprendizagem destes entes matemáticos como pontos de partida para a formalização matemática dos conceitos. Este estudo propõe, também, que os professores de Matemática proponham tarefas aos seus alunos que envolvam distintas representações e oportunidades de agir visualmente, de modo a promover a compreensão destes conceitos através da articulação dos significados, as representações e os processos de visualização. Considerando neste ponto que o bom uso da tecnologia na sala de aula favorece a visualização dinâmica dos conceitos.

Referências

Anderson, G., & Arsenault, N. (2002). *Fundamentals of educational research* (2nd ed.). London: The Falmer Press.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics***,** *52*, 215–241.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In *Research in Collegiate mathematics education II*. *CBMS issues in mathematics education* (Vol. 6, pp. 1–32). Providence, RI: American Mathematical Society.

Becker, H., & Geer, B. (1957). Participant observation and interviewing: A comparison. *Human Organization*, *16*(3), 28–35.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487-500.

Biza, I., Diakoumopoulos, D., & Souyoul, A. (2007). Teaching analysis in dynamic geometry environments. In *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (*CERME5) (pp. 1359-1368). Larnaca, Cyprus.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behaviour*, *15*, 167-192.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas, Teoria e Prática*. Coimbra: Edições Almedina.

Denscombe, M. (2003). *The Good Research Guide: for small-scale social research projects*. Buckingham: Open University Press.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A matemática no início do superior* (Tese de doutoramento,, Universidade Nova de Lisboa, Portugal).

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, In D. Tall. (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), 9*(1), 143-168.

Elia, A., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(4), 765-790.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la ensenanza. In M. Wittrock (Ed.), *La investigación de la ensenanza, II: Métodos cualitativos y de observación.* Madrid: Padiós Ibérica. (trabalho original em inglês, publicado em 1896).

Fernández-Plaza, J., Ruiz-Hidalgo, J., & Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos: Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), 16*(1), 131-146.

Gay, L. R., Mills, G. E., & Airasian, P. (2006). *Educational research: Competencies for analysis and applications* (8th ed.). Upper Saddle River: Pearson.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Gómez-Chacón, I. (2014). Visualización y razonamiento: Creando imágenes para comprender las matemáticas. *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 5-28). Braga, Portugal: APM.

Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (vol. 2, pp. 72-79). Assis, Itália: PME.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 115- 141.

Gray, E., & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 23–40.

Henriques, A., & Ponte, J. 2014. As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *Bolema*, *28*(48), 276-298.

Jaffar, S. M., & Dindyal, J. (2011). Language-related misconceptions in the study of limits. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the AAMT-MERGA Conference* (pp. 390-397). Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.

Juter, K. (2005a). Limits of functions: How do students handle them? *Pythagoras, 61*, 11-20.

Juter, K. (2006). *Limits of functions university students' concept development* (Tese de doutoramento Luleå University of Technology, Sweden).

Juter, K. (2007). Students' concept development of limits. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5)* (pp. 2320-2329). Larnaca, Cyprus.

Karatas, I., Guven, B., & Cekmez, E. (2011). A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concept. *Bolema, 24*(38), 245-264.

López, M., González, J., & Llinares, S. (2013). Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función: Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje. *Union, 36*, 89-107.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. 2012. Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, 21*(2), 81-110.

Ministério da Educação (2002a). *Programa de Matemática A para 11.º ano.* Lisboa: ME.

Ministério da Educação (2002b). *Programa de Matemática A para 12.º ano*. Lisboa: ME.

Ministério da Educação e Ciência (2014). *Programa e metas curriculares de Matemática A do Ensino Secundário.* Lisboa: MEC.

Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 431-454.

Nair, G. (2010). *College students' concept images of asymptotes, limits, and continuity of rational functions* (Tese de doutoramento, Universidade de Ohio, Estados Unidos da América).

Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. *ZDM Mathematics Education, 46*(1),109-122.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Pons, J., Valls, J., & Llinares, S. (2011). Coordination of aproximations in secondary school students' understanding of limit concept. In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. *3*, pp. 392-400). Ankara, Turquia: PME.

Pons, J., Valls, J., & Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435 - 445). Jaén, España: SEIEM.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções, 22*, 196-216.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching Mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of Mathematics: Past, present and future* (pp. 205-236). Rotterdam, The Netherlands.

Prezenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103-132.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. In J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Eds.) *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. New York, NY: Springer.

Sajka, M. (2003). A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 229-254.

Santos, H. (2010). *Limite: um estudo sobre manuais escolares e exames, em Portugal* (Tese de mestrado, Universidade do Minho, Portugal).

Seah, E. K. (2005). Analysis of Students' Difficulties in Solving Integration Problems. *The Mathematics Educator, 9*(1), 39-59.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1- 36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. In Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.124-154). Barcelona: ICE/Horsori.

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics,76*, 265-280.

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of ICME* (vol. 7, pp. 13-28).

Tall, D. (2004a). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 23*(3), 29–33.

Tall, D. (2004b). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (vol. 4,* pp. 281–288). Bergen, Norway.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13,* 438-445.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.

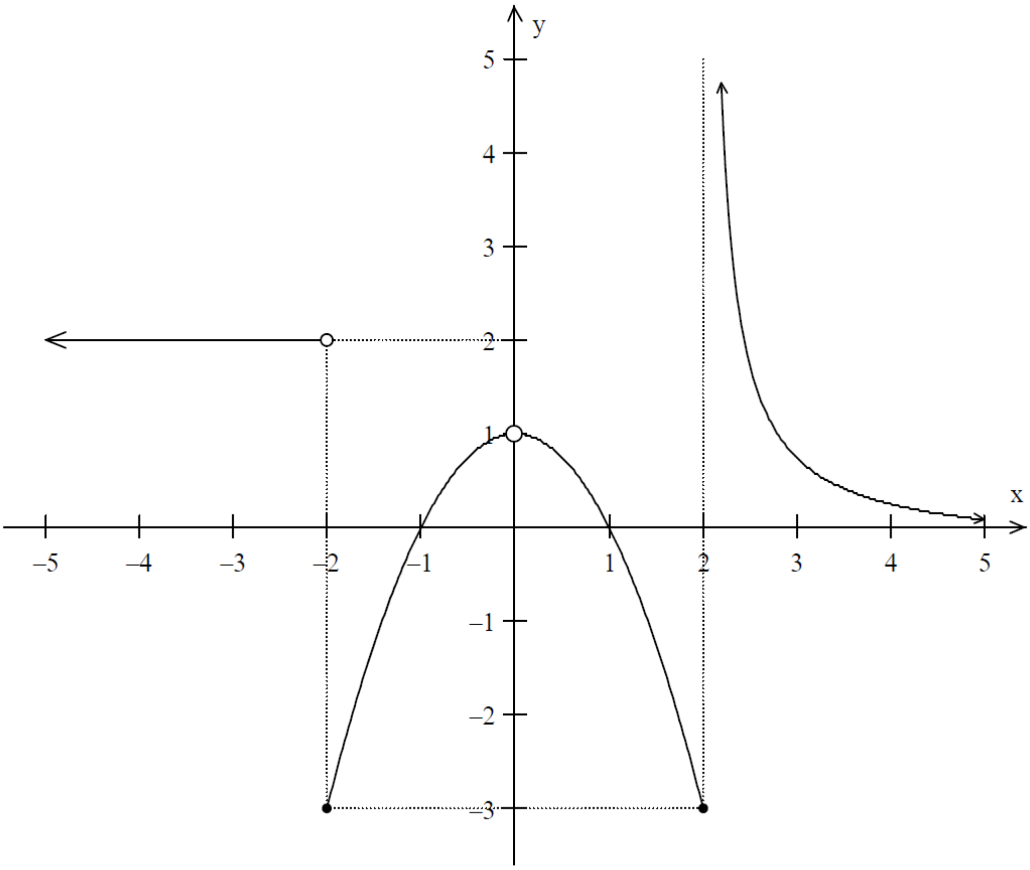
ANEXOS

Anexo 1

FICHA DE TAREFAS DO ESTUDO EXPLORATÓRIO

Tarefa 1

Na figura seguinte está representado o gráfico da função f.



1. Determina o valor dos limites seguintes, a partir do gráfico.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$		$\lim_{x\to 2^-} f(x)$	
$\lim_{x\to-4} f(x)$		$\lim_{x\to 2^+} f(x)$	
$\lim_{x\to-2} f(x)$		$\lim_{x\to 2} f(x)$	
$\lim_{x\to 0} f(x)$		$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	

2. Indica se a função f é contínua em cada um dos seguintes pontos, justificando a tua resposta.

$x = 0$	
$x = 4$	
$x = -2$	

Tarefa 2

O número (em milhões) de microrganismos duma colónia, no instante t (em horas) pode ser determinado pela expressão

$$N(t) = \frac{at}{10 + t}, \text{ com } t \geq 0$$

Se o tamanho limite da colônia for de $1{,}24 \times 10^6$ milhões de microrganismos, qual será o tamanho da colônia no instante de 3 horas. Explica o teu raciocínio.

Tarefa 3

Considere a seguinte função

$$g(x) = \begin{cases} 3x + 1, & se\ x < 1 \\ x^2 + 3, & se\ 1 < x \leq 3 \\ 4x + 3, & se\ x > 3 \end{cases}$$

Determine, quando possível, o valor das expressões seguintes. Justifique a sua resposta.

$g(1)$	
$\lim_{x \to 1} g(x)$	
$\lim_{x \to 3} g(x)$	
$g(3)$	
$\lim_{x \to 0} g(x)$	

Tarefa 4

Represente, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função f que satisfaça as seguintes condições:

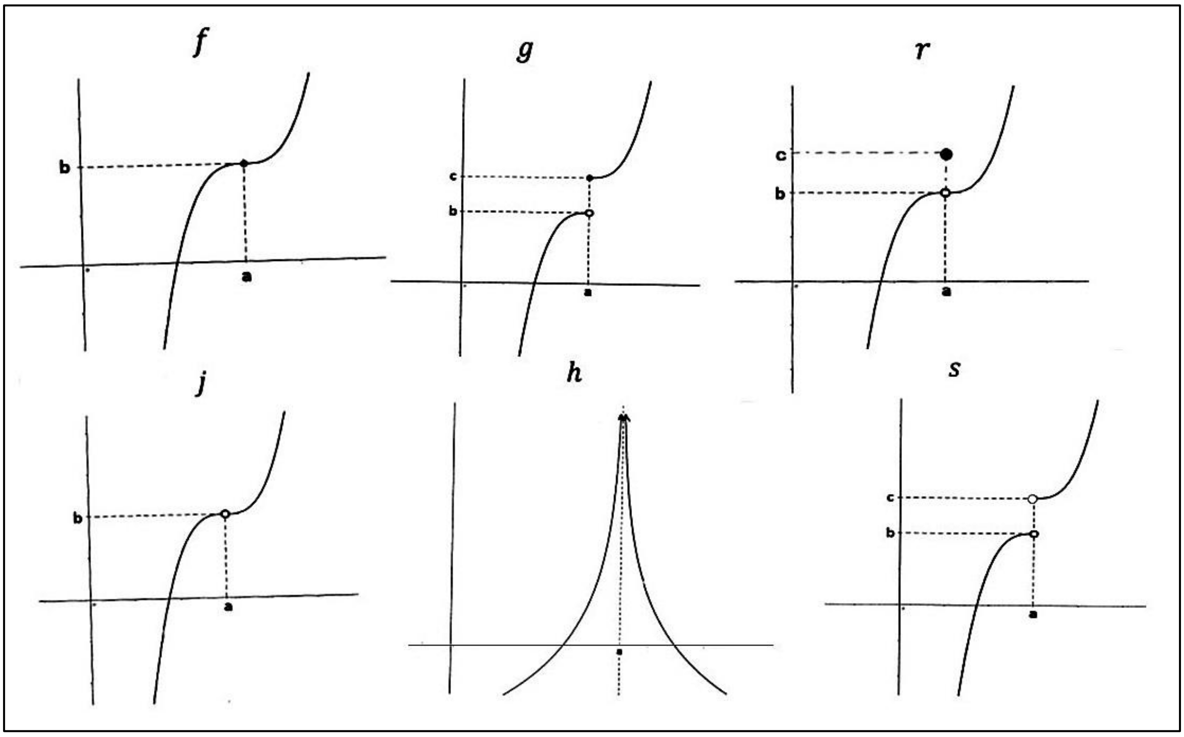
- f é contínua em $]-\infty, -5[$, $]-5, -2[$, $]-2,3[$ e $]3, +\infty[$
- $f(-3) = -5$
- $f(0) = -2$
- $f(-2) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to -5^-} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to -5^+} f(x) = -1$
- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -2} f(x) = -1$

Anexo 2
ENTREVISTA

1. Explica o que entendes por limite de uma função num ponto.

2. Que condições são necessárias para garantir a existência de limite de uma função num ponto?

3. Quais das seguintes funções tem limite no ponto a. Em caso de existir indica o valor do limite e em caso de não existir indica porque não existe.



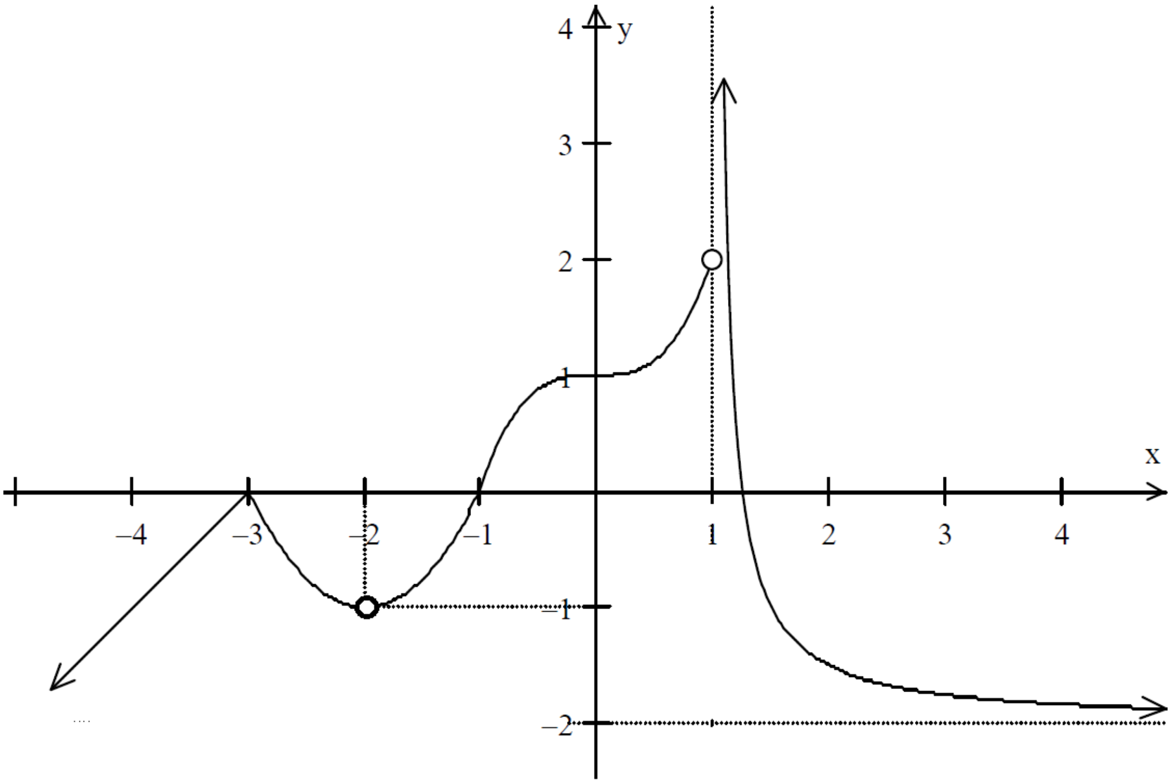
4. Explica o que entendes por função contínua.

5. Que condições são necessárias para garantir a continuidade de uma função num ponto?

Anexo 3
FICHA DE TAREFAS DO ESTUDO PRINCIPAL

Ficha de Tarefas de Diagnóstico
Tarefa 1

Na figura seguinte está representado o gráfico da função f.



1.1 Determina o valor dos limites seguintes, a partir do gráfico.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$		$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$	
$\lim\limits_{x \to -3} f(x)$		$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$	
$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$		$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	
$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$		$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	

1.2 Explica o que entendes por limite de uma função num ponto.

1.3 Que condições são necessárias para garantir a existência de limite de uma função num ponto?

1.4 Explica o que entendes por limite de uma função quando a variável tende para infinito.

1.5 Em que outros contextos, fora da sala de aula de Matemática, tens ouvido falar do termo "limite"? Qual o seu significado nesses contextos?

Tarefa 2

2.1 Represente, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função g que seja contínua.

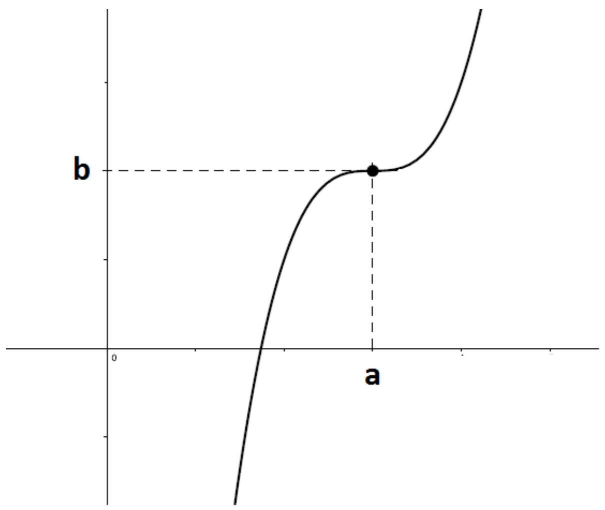
2.2 Represente, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função h que **não** seja contínua.

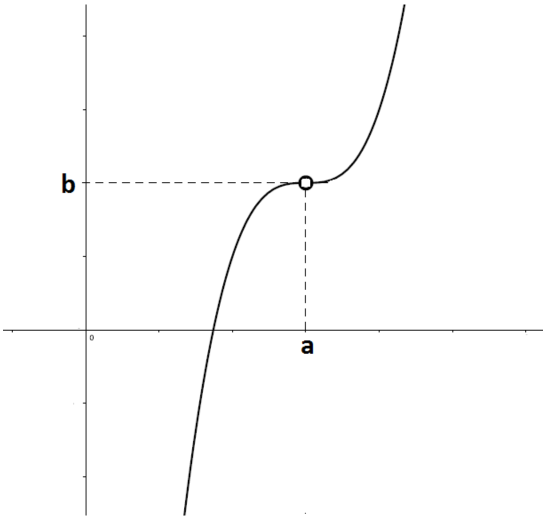
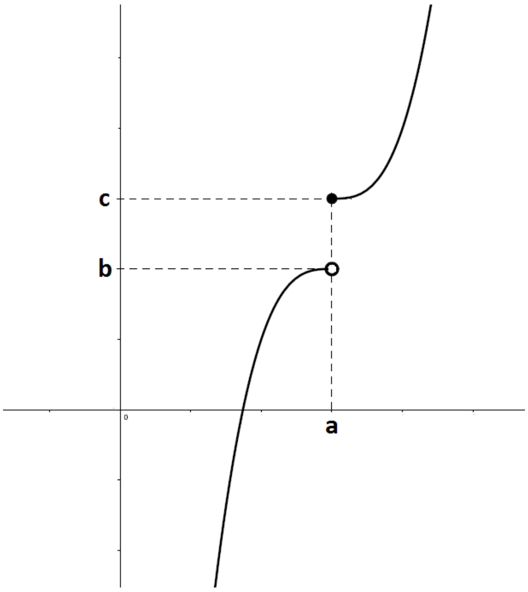
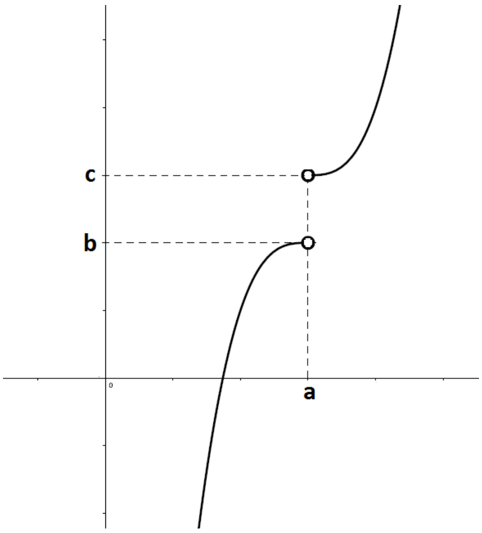
2.3 O que significa uma função ser contínua? Explica.

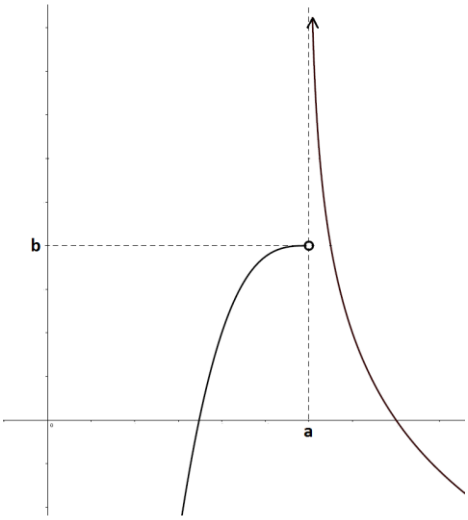
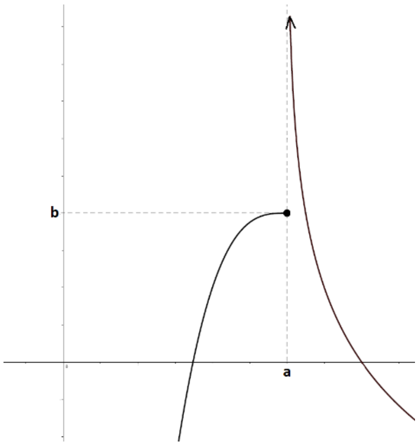
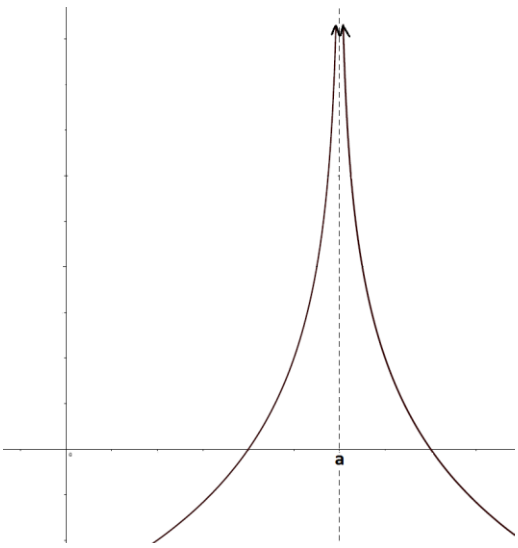
2.4 Em que outros contextos, fora da sala de aula de Matemática, tens ouvido falar do termo "continuidade" ou "contínuo (a)"? Qual o seu significado nesses contextos?

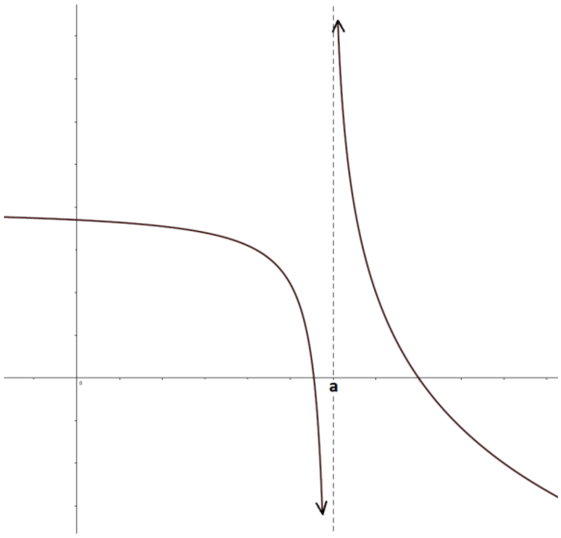
Tarefa 3

A seguir estão representados os gráficos de oito funções. Para cada um deles analisa se a função tem limite no ponto a. Em caso de existir indica o valor do limite e em caso de não existir indica porque não existe.

Gráfico	**Resposta**
3.1 	

3.2 	
3.3 	
3.4 	

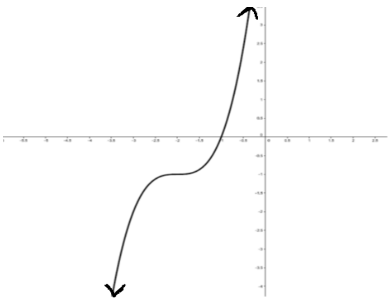
3.5 	
3.6 	
3.7 	

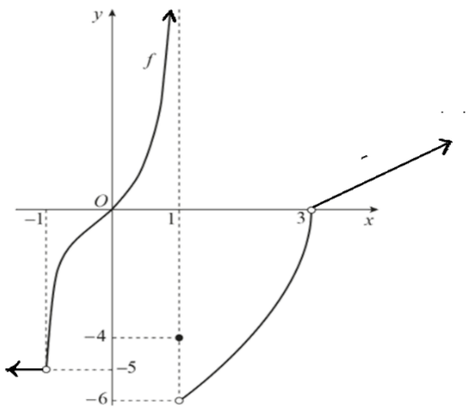
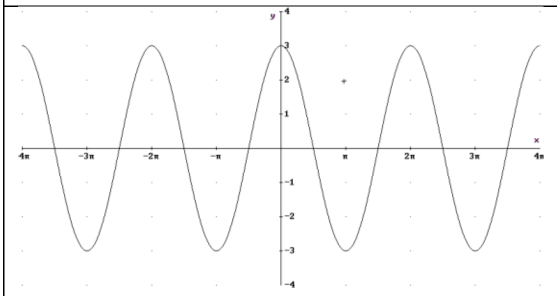
3.8 	

Ficha de Tarefas de Consolidação

Tarefa 1

1.1 Considera as seguintes funções e indica se são ou não são contínuas $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Justifica a tua resposta.

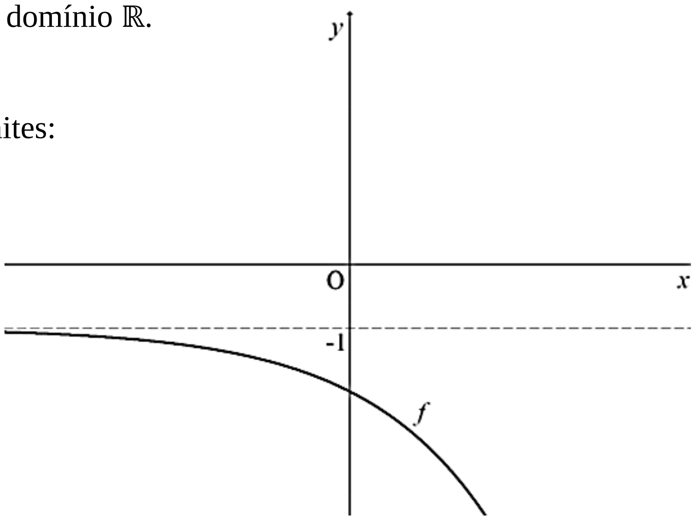
$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$	
	
$g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x < 3 \\ x^2 - 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$	

	
$h(x) = \begin{cases} 3x+4, & \text{se } x \leq -1 \\ 2-x^2, & \text{se } x > -1 \end{cases}$	
	

1.2 Tomando em conta os seus resultados anteriores: Defina o que é uma função contínua?

Tarefa 2

Considera o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$.



Determina o valor dos seguintes limites:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{f(x)}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{5}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) + \frac{2x-3}{x-1}\right)$

Tarefa 3

Considera a seguinte informação das funções f e g.

a) O domínio de f e g é $[0, +\infty[$

b) A reta $y = 2$ é assintota horizontal do gráfico de f.

c) f não tem zeros.

d) $g(x) = \frac{e^{-x}-2}{f(x)}$

Determina a assíntota horizontal do gráfico de g.

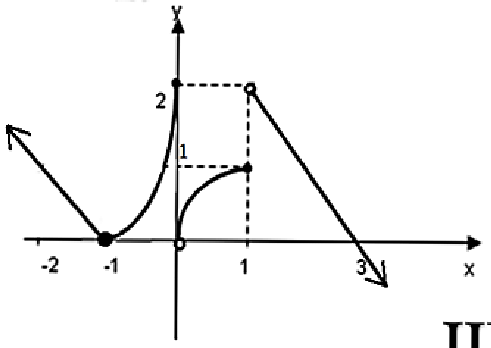
Tarefa 4

4.1 Considera a seguinte informação sobre a função h:

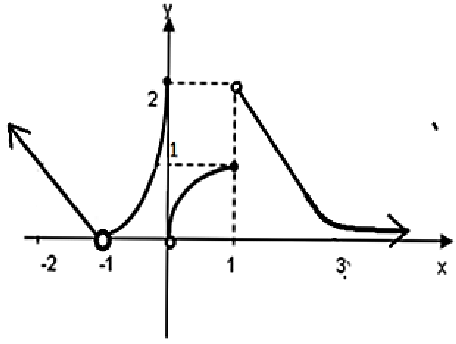
- Quando x tende para menos infinito a função tende para mais infinito.
- Quando x tende para mais infinito a função se aproxima a 0.
- Quando x se aproxima a 1 pela direita a função se aproxima a 2.
- Quando x se aproxima a 1 pela esquerda a função alcança o valor de 1.
- -1 não pertence ao domínio da função.
- Quando x se aproxima a -1 a função se aproxima a 0.

De acordo com a informação, determina qual das opções seguintes corresponde ao gráfico de h.

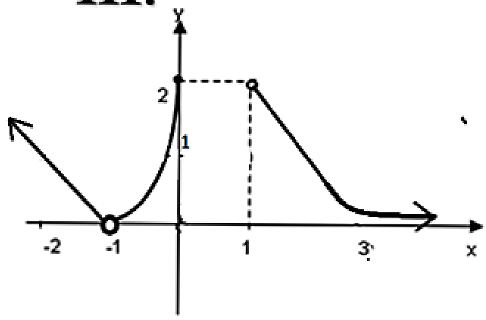
I.



II.



III.



4.2 Representa, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função f que satisfaça as seguintes condições:

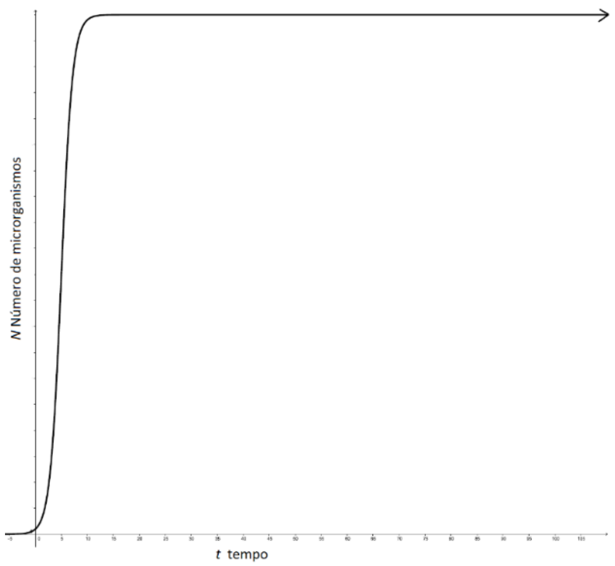
- Quando x se aproxima a -2 pela esquerda a função tende para mais infinito.
- Quando x se aproxima a -2 pela direita a função tende para menos infinito.
- Quando x tende para menos infinito a função tende para mais infinito.
- Quando x tende para mais infinito a função se aproxima a 1.
- 3 não pertence ao domínio da função.
- Quando x se aproxima a 3 a função se aproxima a -2.

Tarefa 5

O número (em milhões) de microrganismos duma colónia de bactérias que se reproduzem em um recipiente com água, no instante t (em horas) pode ser determinado pela expressão

$$N(t) = \frac{100}{1 + 99e^{-0,92t}}$$

Na figura está representado o gráfico que modela esta situação.



De acordo com a informação:

5.1 Determina o número inicial de microrganismos que tinha o recipiente com água.

5.2 Calcula o número de microrganismos que tem a colônia de bactérias após de ter transcorrido 5 horas.

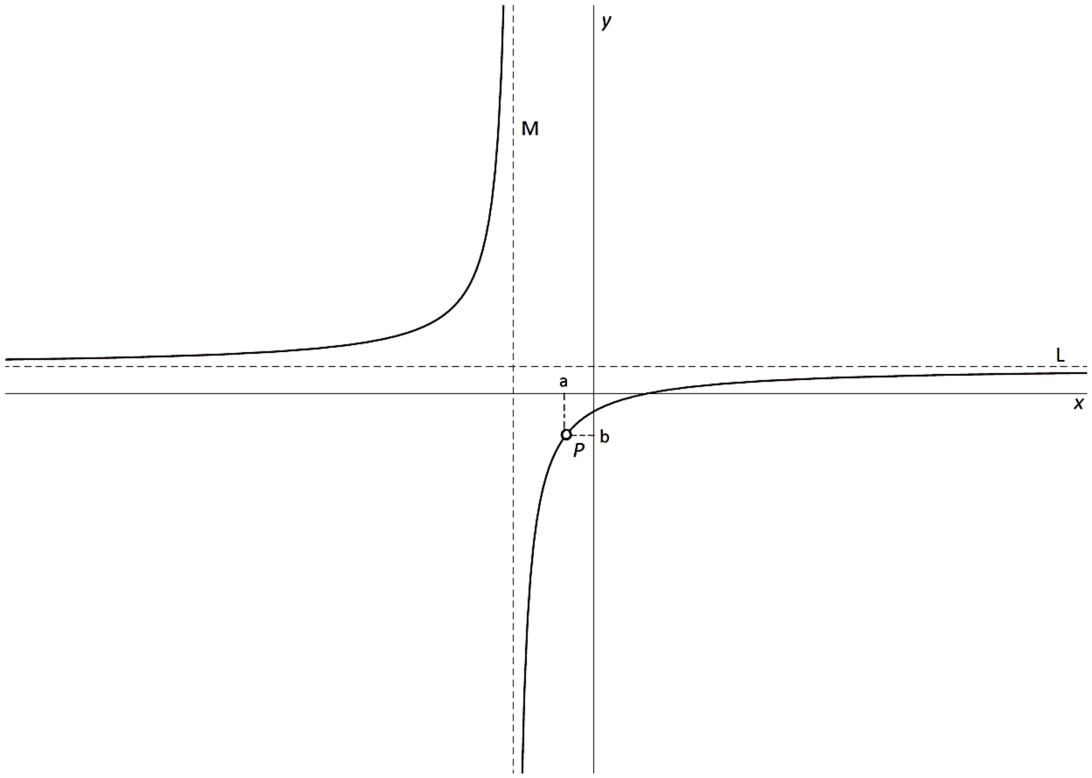
5.3 Calcula o $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$ e interpreta o resultado segundo o contexto da situação.

Tarefa 6

Considera a função g definida por

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$$

Na seguinte figura está representado o gráfico de g.



6.1 Determina a equação da reta L.

6.2 Determina a equação da reta M.

6.3 Determina as coordenadas do ponto P.

6.4 Existe o $\lim_{x \to a} g(x)$? No caso de existir, qual é o seu valor? Justifica a tua resposta.

6.5 A função é contínua em P? Justifica a tua resposta.