

**UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE INGENIERIA**

**CALCULO DE LOSAS POR EL
METODO DE LAS LINEAS
DE FRACTURA**

JURADO EXAMINADOR

Ing. Alfonso Peralta
Ing. Mario Quirós
Ing. Miguel A. Herrero
Ing. Edmundo Kikut
Ing. Carlos Ulate

INTRODUCCION

Un nuevo método para el cálculo de losas de hormigón basado en la forma que éstas adquieren si se les carga hasta que finalmente fallen, está ganando creciente popularidad especialmente en los países escandinavos. Este método llamado de las Líneas de Fractura fue inicialmente presentado en 1943 en Dinamarca por K.W. Johansen en su tesis de doctorado ante la Universidad Técnica de ese país y ampliado más adelante en publicaciones diversas. El método aborda en forma simple y realista problemas que hasta el momento han sido resueltos por medio de considerable manipulación matemática o por medio de métodos empíricos basados en asunciones, que no se cumplen en la realidad, respecto al comportamiento de los materiales.

El ingeniero estructural, al entrar al cálculo de losas armadas en dos direcciones o de forma irregular, no encuentra en los códigos más que unas pocas reglas y coeficientes para tramos regulares. El análisis elástico de aquéllas es, en general, sumamente difícil. En comparación, el método de las líneas de fractura es directo, bastante simple y pone énfasis en las líneas de mayor esfuer

zo. Es, en suma, un método que contempla la resistencia de los materiales a la ruptura.

El calculista, al usar este método, debe escoger un factor de carga, que definiremos luego, bastante conservador mientras no haya un código que lo guíe. El análisis por líneas de fractura considera los momentos flexores únicamente; no garantiza que la resistencia al esfuerzo cortante sea adecuada ni que la rigidez al pandeo sea satisfactoria. En estos dos últimos aspectos se requiere mayor investigación. Por lo pronto podrían establecerse límites a la razón de delgadez de las losas. No obstante, el ingeniero puede usar sin temor el método de las líneas de fractura, ya que las pruebas de laboratorio indican que da una estimación de resistencia a los momentos flexores más bien del lado de la seguridad.

Si bien la teoría ha sido ampliamente verificada por pruebas de laboratorio, el método de las líneas de fractura no ha sido aun incluido en el Código del Instituto Norteamericano del Hormigón (ACI), cuyas normas seguimos generalmente en Costa Rica y es, además, poco conocido por los ingenieros fuera de algunos países europeos. Por otra parte, ha sido reconocido ya en la Gran Bretaña al incluirse en la recomendaciones del Código de Construcción en la revisión de 1957, y es también extensamente usado en los países escandinavos. Aún más, la mayor parte de los datos existentes no lo está ni en español ni en inglés, idiomas en que generalmente encontramos nuestras principales fuentes de información. Tanto así que antes de 1953 nada se había publicado al respecto en los Estados Uni-

dos.

El presente trabajo no pretende ser original. Es, por lo contrario, una recopilación y adaptación de la muy escasa literatura que en inglés fue posible conseguir. Buena parte también está inspirada en dos tesis de grado consultadas cuando el que escribe realizó estudios de posgraduado en el Royal College of Science and Technology de Glasgow, Escocia, en el curso de 1957-58; en un artículo del profesor guía de la materia y que en aquel entonces no había sido aun publicado; y finalmente en algunas notas de clase.

Como complemento necesario a la exposición principal de este trabajo se ha agregado un capítulo relativo al cálculo de los elementos de hormigón armado según los nuevos métodos de resistencia a la rotura o "resistencia final". Por último, se ha agregado un capítulo sobre algunas consideraciones relativas al factor de carga, que complementan el anterior.

Se ha eliminado, hasta donde ha sido posible, la parte matemática de las líneas de fractura y algunos desarrollos que se incluyen lo han sido más bien para ilustrar los principios del método, con la ayuda de ejemplos ilustrativos.

CAPITULO I

TEORIA DE LAS LINEAS DE FRACTURA EN LOSAS DE HORMIGON ARMADO

1.1 IDEAS BASICAS

(a) Teoría

La teoría de las líneas de fractura se basa en la teoría de la resistencia final de los elementos de hormigón armado. Según los principios allí enunciados, consideramos en general losas sub-reforzadas o sea losas con menos acero de refuerzo que el requerido para un diseño balanceado. Este principio lo explicaremos en el próximo capítulo. Como resultado de lo anterior, conforme aumenta la carga, el acero llega a su límite elástico antes de que la losa llegue a su resistencia última. Finalmente, cuando el momento flector ha sobrepasado al del punto cedente del acero, ocurrirá una falla secundaria por compresión del hormigón, produciéndose una flecha considerable.

(b) Tramos simplemente apoyados

Para una losa de un tramo y simplemente apoyada, la diferencia de cargas entre el límite elástico y la falla total puede ser de un 5% o quizás un 10%. Sin embargo, la flecha justo antes de la fa

lla será muchas veces mayor que cuando el acero llegó a su límite elástico. La relación que existe entre las flechas en ambos casos dependerá del porcentaje de acero, de la luz y del tipo de carga. Normalmente podría esperarse que la flecha en el segundo caso sea diez veces la producida en el límite elástico. Esta flecha se deberá en su mayor parte a los grandes cambios angulares que ocurren en la sección que ha cedido; la losa tenderá a doblarse alrededor de este punto como si éste constituyera una articulación de cierta rigidez, que se conoce con el nombre de gozne plástico.

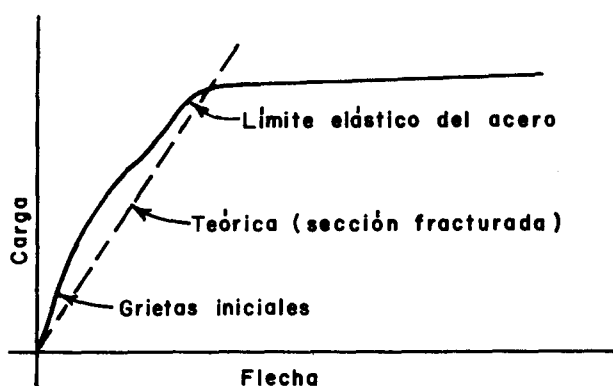


FIG. 1.1

En la figura 1.1 la línea sólida nos muestra gráficamente la acción descrita. La línea de puntos da la flecha que obtendríamos con base en el momento de inercia de la sección fracturada. La flecha inicial es mucho menor puesto que la sección no está aun fractura-

da.

(c) Tramos empotrados

En una losa estáticamente indeterminada, los cambios angulares adicionales en el caso anterior (entre el límite elástico y justo antes de la falla) causan modificaciones muy notorias en los momentos resistentes y en los esfuerzos cortantes. Un punto que cede en dicha losa marca el inicio de deformaciones mucho mayores pero no indica ello que se ha llegado a la capacidad final.

Como en una estructura indeterminada los momentos son modificados por las deformaciones en otras secciones, el cálculo de las flechas entre el límite elástico y la falla total se complica grandemente. En todo caso, la sección que ha llegado a su punto cedente actúa como una articulación que no admite momentos adicionales. Para cargas mayores, los momentos en otras secciones aumentan como si un verdadero gozne existiera allá. Este fenómeno se le conoce con el nombre de "redistribución de momentos", aunque en realidad es el momento adicional el que se distribuye diferentemente de las asunciones usuales.

Consideremos una losa armada en una dirección con carga uniformemente repartida y empotrada en sus apoyos o que forma parte de una losa continua de varios tramos. Según la teoría de la elasticidad, los momentos en los apoyos los podemos determinar con la ayuda de las propiedades geométricas del sistema; por el contrario, las condiciones de empotramiento según la resistencia final son enteramente conocidas, ya que los momentos en

los soportes dependen exclusivamente de las propiedades de las secciones de hormigón armado. La losa así empotrada llegará a su resistencia final cuando una línea de fractura se forme en la sección de momentos positivos, además de las dos producidas sobre los soportes por los momentos negativos.

(d) Losas en dos direcciones

Consideremos una losa reforzada en dos direcciones ortogonales en tal forma que los momentos finales por unidad de longitud, m , en ambas direcciones son iguales. Se puede demostrar y verificar experimentalmente que si m_x representa el momento final alrededor del eje x y m_y el momento alrededor del eje y , el momento final alrededor de un eje que hace un ángulo α con el eje x (fig. 1.2) será:

$$m_\alpha = m_x \cos^2 \alpha + m_y \cos^2 (90-\alpha) = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha \quad (i)$$

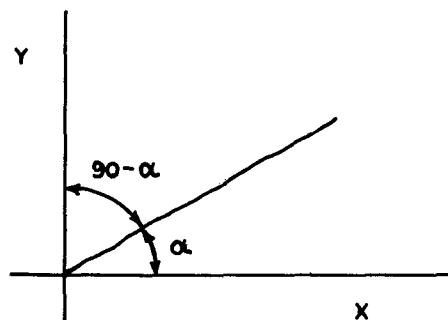


FIG. 1.2

Pero si según las condiciones iniciales $m_x = m_y = m$, entonces,

$$m_a = m (\cos^2 \alpha + \sen^2 \alpha) = m (1) = m \quad (ii)$$

Es decir, los momentos finales son iguales en cualquier dirección. Esta condición de refuerzo isotrópico, simplifica el problema considerablemente. Según Johansen, cuando el refuerzo en una dirección difiere del otro en sentido perpendicular, se pueden hacer modificaciones en las dimensiones de la losa para calcularla según el caso más sencillo. Esto lo trataremos más adelante.

1.2 CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE FRACTURA

(a) Generalidades

Si cargamos gradualmente una losa, el refuerzo comenzará a ceder en las zonas donde los momentos son mayores pero esta acción no está restringida a aquellas líneas de momentos máximos desarrolladas originalmente por las condiciones iniciales "elásticas". Conforme aumentamos la carga, se formarán líneas de fractura que se extenderán en cierto modo que llamaremos patrón de líneas de fractura o también régimen de rotura. Sería más exacto decir que se forman zonas de falla en la forma de bandas angostas en los lados de tensión, pero idealizamos dichas bandas en la forma de líneas concentradas al centro de aquellas. Mientras no se produzca un número suficiente de estas líneas hasta formar así un sistema o mecanismo completo de falla, la losa podrá soportar carga adicional. Lo mismo, para poder actuar como goznes en tal mecanismo, dichas líneas deben-

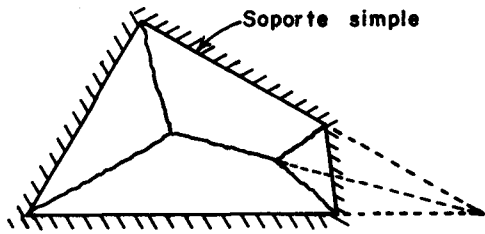
ser rectas. Al final, el momento m es constante en todas las líneas de fractura y corresponde a la resistencia del refuerzo en su límite elástico. En ese instante m es un máximo con relación a los momentos en las secciones adyacentes.

Podemos decir, por lo tanto, que las líneas de fractura dividen la losa en varias partes o segmentos y, si admitimos que las deformaciones elásticas son insignificantes en comparación con las plásticas, habrá una concentración de curvatura en la línea de fractura. Podemos así asumir razonablemente que los segmentos de losa permanecen planos, aunque inclinados, con todas las deformaciones concentradas en las líneas de fractura, y que estas deformaciones podemos considerarlas como rotaciones de los segmentos alrededor de ciertos ejes que dependen del tipo de soporte. Así podemos dar la siguiente regla:

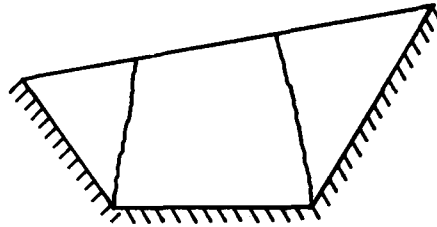
- I. Una línea de fractura entre dos segmentos adyacentes de losa debe pasar por el punto de intersección de los ejes de rotación de ambos segmentos.

En general, cada soporte lineal constituye un eje de rotación y cada soporte formado por una columna individual constituye un punto cualquiera (punto de giro) en un eje de rotación. De acuerdo con esto y la regla I podemos fácilmente estimar el patrón de fractura.

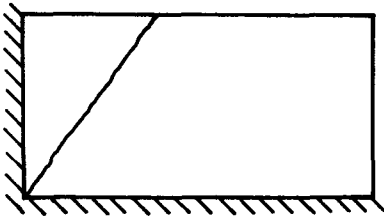
En la figura 1.3 se muestran algunos patrones de fractura típicos para losas uniformemente cargadas y soportadas en cuatro, tres y dos lados, sobre tres columnas y en combinaciones de bordes y columnas.



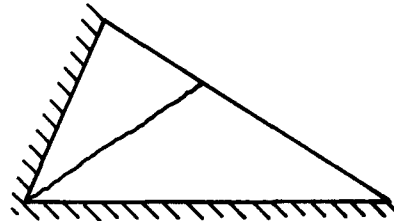
(a)



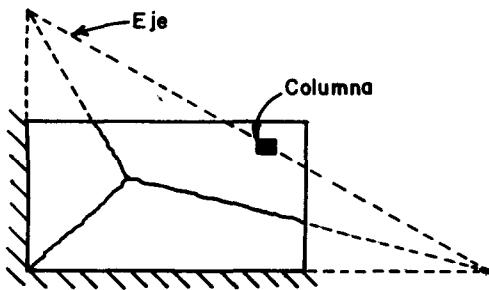
(b)



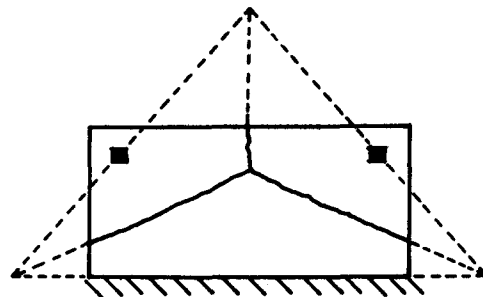
(c)



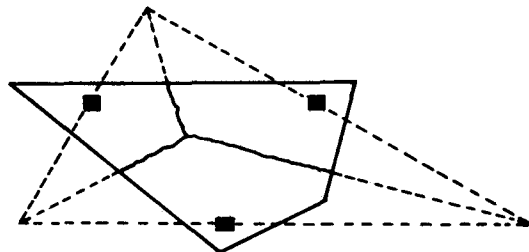
(d)



(e)



(f)



(g)

FIG. 13

(b) Esfuerzos cortantes

Para obtener el momento m y la forma definitiva del patrón de fractura usamos la condición de equilibrio de los segmentos individuales de la losa. Para esto es necesario conocer los esfuerzos cortantes a lo largo de las líneas de fractura, pero si bien nos interesa la magnitud de éstos, no así su distribución, ya que deseamos fundamentalmente la condición de equilibrio para el segmento total. Por esta razón, podemos representar esos esfuerzos cortantes por un sistema de dos fuerzas (fuerzas de esquina) concentradas en los extremos de las líneas de fractura.

En los siguientes principios sobre la construcción de líneas de fractura debe tomarse en cuenta que consideramos losas de espesor y refuerzo uniformes; éste último es, por consiguiente, igual en las dos direcciones ortogonales; pero pueden ser las losas simple o doblemente reforzadas.

Matemáticamente podemos probar las siguientes reglas:

- II. En el punto de intersección de un número cualquiera de líneas de fractura, la suma de las fuerzas de esquina es cero.

En la figura 1.4 mostramos dos líneas de fractura aa' y aa'' con momentos de rotura m' y m'' respectivamente.

Se puede probar que en un triángulo infinitesimal dA ,

$$Q_{dA} = (m'' - m') \cot \alpha$$

Basados en este principio y como extensión del mismo razonamiento podemos decir:

III. Si las líneas de fractura que se cortan en un punto dado son todas del mismo signo (positivo o negativo), las fuerzas de esquina son cero.

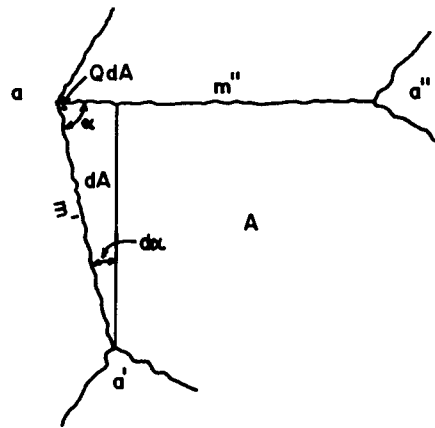


FIG. 1.4

Esta última regla puede considerarse como una extensión de la teoría elástica de las vigas según la cual el efecto cortante es nulo en los puntos donde el momento es máximo.

Si a un punto de intersección llegan dos líneas negativas y una positiva (figura 1.5), obtenemos:

$$Q_A = (m + m') \cot \beta \quad 2$$

$$Q_B = (m + m') \cot \alpha \quad 3$$

$$Q_C = -(m + m') (\cot \alpha + \cot \beta) \quad 4$$

Las fuerzas de esquina para dos líneas positivas y una negativa se obtienen cambiando los signos a las anteriores fórmulas.

Si a un punto dado llegan cuatro líneas de fractura, tres de ellas negativas, la cuarta será también negativa. Si las cuatro lí-

neas son dos positivas y dos negativas, las dos primeras tienen una misma dirección.

Las dos ideas anteriores las podemos resumir en la siguiente regla:

- IV. Si a un punto de intersección llegan varias líneas de fractura de signos contrarios, dichas líneas sólo pueden tener tres direcciones diferentes.

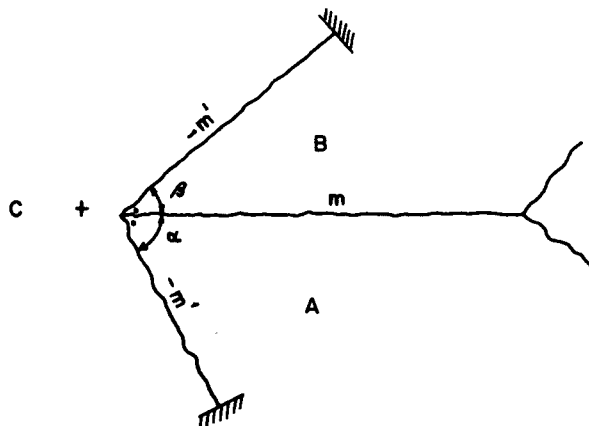


FIG. 1.5

(c) Corrección cuando una línea de fractura corta un borde libre.

En un borde libre o simplemente apoyado, tanto los momentos flexores como los de torsión son nulos teóricamente. Siendo las líneas de fractura líneas de momentos principales, deberán, según la teoría de la mecánica de los materiales, llegar perpendicularmente a aquélla. Experimentalmente se ha comprobado que esto es así, pero esta condición ocurre únicamente desde una distancia

muy corta de la orilla, fig. 1.6 b, en la cual la distancia t es pequeña comparada con las dimensiones de la losa.

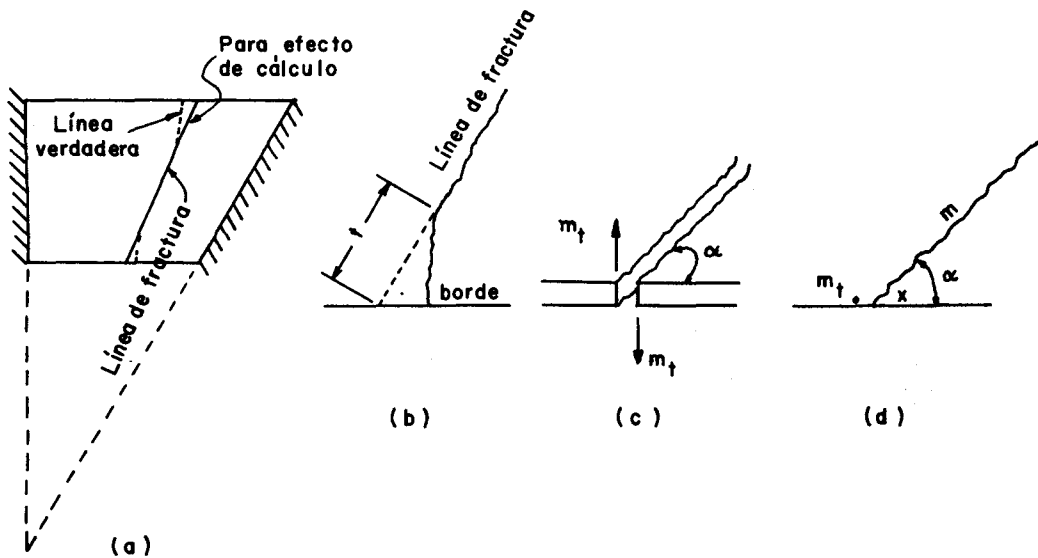


FIG. 1.6

Para efectos de cálculo podemos simplificar la situación usando la línea recta de fractura en lugar de la línea curva de puntos - (fig. 1.6 a), pero introduciendo una corrección que, para momento positivo, podemos representar por una carga vertical hacia abajo (x) en el ángulo agudo, y una carga vertical igual hacia arriba (.) en el segmento adyacente en su ángulo obtuso. Esta fuerza vertical tiene una magnitud de,

$$m_t = m \cot \alpha \quad 5$$

en donde α es el ángulo agudo. Este par de fuerzas m_t es el equivalente estático de momentos de torsión y esfuerzos cortantes in-

roducidos por la falsa línea recta. La sustitución de efectos de torsión por fuerzas de esquina es un artificio tomado de la teoría de la elasticidad la cual presenta ciertas dificultades con momentos de torsión en los bordes.

Estudios hechos indican que este tipo de transformación tiene efectos despreciables a distancias que pueden considerarse grandes comparadas con la longitud en la cual se efectuó la transformación.

(d) Esquinas

Hasta el momento hemos asumido que las líneas de fractura entran a una esquina por el punto de intersección de los bordes soportados (Figs. 1.3 a-g). Para evitar que la esquina se levante por las fuerzas que se originan según la ecuación 5, necesitaremos una fuerza vertical que para el caso de la figura 1.7a es,

$$V = m (\cot \alpha + \cot \beta) \quad 6$$

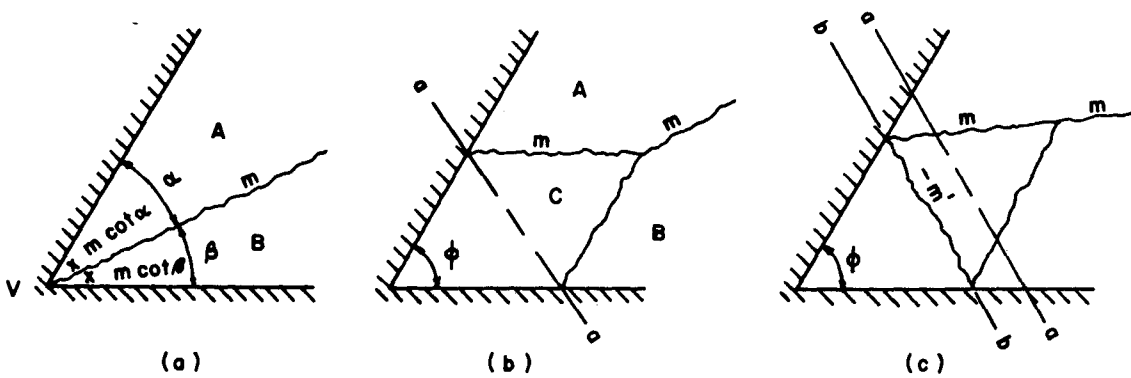


FIG 1.7 Condiciones en una esquina

Si esta fuerza vertical de anclaje no existe y no podemos entonces mantener la esquina firmemente sujeta, la línea diagonal de fractura se dividirá en dos ramas formando una especie de Y, como se muestra en la figura 1.7b. Esto formará un segmento esquinero adicional C que gira alrededor del eje a-a. Si sujetamos las esquinas pero no proporcionamos refuerzo adecuado, tendremos líneas de fractura (goznes) similares, pero además se formará otra fractura a lo largo del eje a-a. Si colocamos algún refuerzo negativo, la nueva línea se correrá en la forma de un gozne plástico hacia un punto más cercano a la esquina, tal como el eje b-b (fig. 1,7c). Si finalmente tenemos acero de refuerzo negativo en cantidad suficiente, el eje de giro se traslada a la esquina y tendremos entonces la diagonal sencilla del caso (a). Esto nos demuestra la necesidad de tener refuerzo adicional en losas armadas en dos direcciones. (Esto ha sido contemplado en el párrafo 709b de las especificaciones del ACI, reporte 318-56).

Según las fórmulas anteriores, podemos calcular el valor m' que nos da la línea de fractura sencilla. Este valor es:

$$- m' = \frac{1}{2} m (\cot \alpha + \cot \beta) \cot \frac{1}{2} \phi \quad 7$$

Consideremos un cuerpo libre formado por uno de estos segmentos esquineros (fig. 1.8):

La longitud h nos la da la ecuación:

$$h = \sqrt{\frac{6(m+m')}{w}} \quad 8$$

(ver ejemplo 11, página 48). Es decir, la longitud de h es independiente de x , la anchura del segmento, y aumenta con la relación de la suma aritmética de los momentos de fractura negativos y positivos con respecto a w .

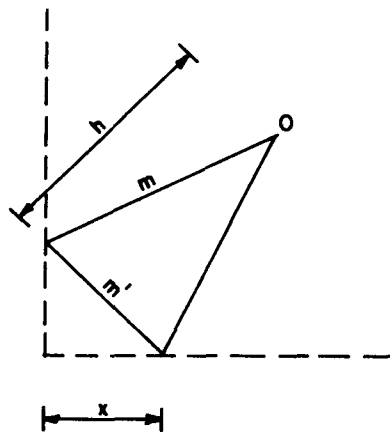


FIG. 1.8

Si en una losa dada la relación de momentos y carga establecen una distancia h mucho menor que la diagonal de fractura a lo largo de la cual se halla, el patrón esquinero se formará, reduciendo la capacidad de soporte de la losa. Si el valor calculado de h es lo suficientemente grande para llevar la intersección de la Y fuera de los límites de la diagonal, quiere decir que el segmento de esquina no se formará. Valores intermedios de h indican que el elemento esquinero rige, pero que tiene un efecto menor en la carga final de la losa o en la necesaria resistencia a flexión. En una losa cuadrada, la aparición de segmentos esquineros pue-

de reducir la capacidad de la losa en un 9%. En una losa triangular, fig. 1.3 d, sin embargo, este efecto puede ser de un 20% a un 35%.

Según Johansen, en la práctica es más sencillo no considerar primeramente los segmentos esquineros y luego aplicar ciertas correcciones para las cuales él desarrolló ecuaciones generales. Para el caso de una losa simplemente apoyada, la corrección está dada por la ecuación (ver fig. 1.9):

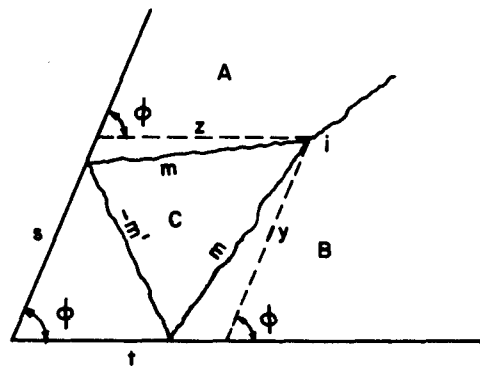


FIG. 1.9

$$C = \frac{m \cdot x}{\text{sen } \phi} \left(\sqrt{\frac{z}{y}} + \sqrt{\frac{y}{z}} - 2 \sqrt{1 + \frac{m'}{m}} \cdot \text{sen } \frac{\phi}{2} \right)^2 \quad 9$$

en donde x es la flecha en el punto i. Esta expresión es siempre positiva y el momento de fractura aumenta cuando se forma un segmento de esquina. No hay segmento de esquina cuando C=0.

1.3 LA CONDICION DE EQUILIBRIO

(a) Los segmentos de losa como cuerpos libres

Hasta el momento hemos discutido las condiciones geométricas de las líneas de fractura y hemos visto que el patrón formado depende de los ejes de rotación y de las relaciones entre las rotaciones de los segmentos. La determinación final del patrón de fractura la hacemos con la ayuda de las condiciones de equilibrio de cada parte.

Un cuerpo libre de un segmento debe estar en equilibrio por 1) las cargas aplicadas, 2) los momentos en cada línea de fractura, 3) las reacciones de los soportes. Debido a que las líneas de fractura se forman donde los momentos son máximos (principales), los momentos de torsión y los cortantes son nulos a lo largo de ellas. Es decir, sólo el momento m por unidad de longitud actúa perpendicularmente a estas líneas. El momento resultante para un segmento individual lo podemos encontrar por suma de vectores.

En otros casos, como vimos, los esfuerzos cortantes y los momentos de torsión los reemplazamos por las fuerzas de esquina equivalentes.

Los momentos en las líneas de fractura determinan, pues, la carga que cada segmento puede soportar, como se indica en la figura 1.10.

Para una losa uniformemente cargada, la línea intermedia de fractura debe dividirla de tal modo que cada segmento soporte la misma carga última, w_u . Si para ciertos valores conocidos de

m_1 , m_2 y m_3 y para una posición tentativa de la línea de fractura, obtenemos valores de w_u diferentes para cada segmento, la línea debe cambiarse de posición. La posición verdadera debe ser tal que reduzca el tamaño del segmento en el cual el valor calculado de w_u es más pequeño y aumentar el tamaño en donde el valor calculado de w_u es mayor. La localización correcta es única para las cargas dadas.

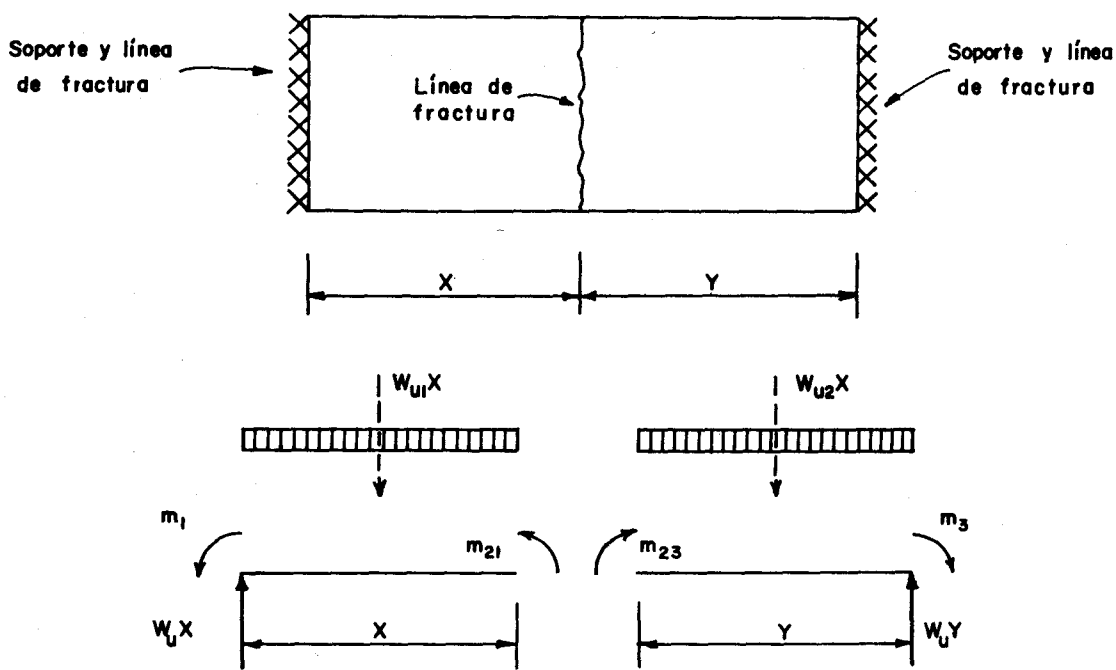


FIG. 1.10

Para efectos de diseño es conveniente tomar como cantidades conocidas las cargas multiplicadas por sus factores de carga. Entonces, con los segmentos como cuerpos libres se pueden calcular

los momentos de fractura. En una línea dada, el momento así encontrado para un segmento debe ser igual al del segmento adyacente; por ejemplo m_{2-1} debe ser igual a m_{2-3} ; de lo contrario la línea de fractura está incorrectamente localizada.

Cuando sólo se necesita localizar una línea de fractura, se puede establecer una ecuación algebraica que nos dé la posición deseada, pero en casos más complicados esto puede no ser tan sencillo como una aproximación sucesiva por tanteos.

(b) La ecuación del trabajo

Johansen ha demostrado que en ciertas circunstancias la solución de las ecuaciones de equilibrio puede simplificarse aplicando el principio del trabajo virtual.

Si asumimos que conocemos el patrón de fractura, conoceremos también la posición de los ejes de rotación lo mismo que la relación entre las rotaciones de los diferentes segmentos de la losa. Sin embargo, como no hay movimiento vertical relativo entre los segmentos, los cortantes realizan trabajo que se anula al considerar la losa en su totalidad. El trabajo de los momentos de fractura en cada parte es el producto de la rotación por las componentes de los momentos en la dirección del eje de rotación. Así podemos poner la expresión:

$$M_i \theta = M_x \theta_x + M_y \theta_y \quad 10$$

Con las fuerzas externas obtenemos una expresión semejante, en la cual M_e es el momento con respecto al eje de rotación.

Este trabajo lo podemos expresar como $M_e \theta$.

Para el total de la losa, el trabajo de las fuerzas internas más el trabajo de las cargas externas es igual a cero, y el trabajo de las reacciones es nulo puesto que actúan en los ejes de rotación. Esto lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\Sigma (M_i \theta) + \Sigma (M_e \theta) = 0 \quad 11$$

Recordemos que para encontrar el trabajo efectuado por una fuerza F actuando a lo largo y en la dirección de una línea recta, escribimos la expresión para el trabajo hecho mientras la fuerza actúa en una distancia elemental dS ,

$$dW = F dS$$

y la suma de estas cantidades por integración nos da el trabajo total,

$$W = \int F dS = \int F(x) dx$$

Entonces podemos transformar la ecuación 11 en:

$$\Sigma (M_i \theta) + \Sigma \iint w \theta dx dy = 0 \quad 12$$

en la cual θ es la flecha correspondiente a las rotaciones y las integraciones se hacen en los segmentos individuales y las sumas en la losa completa. Con respecto al primer término de la ecuación 12, recordemos el principio de que el trabajo de un par durante un desplazamiento pequeño es igual al par multiplicado por el desplazamiento angular.

Puesto que M_i es proporcional al momento de fractura m , la ecuación 12 puede usarse para determinar m para una carga dada w si conocemos el patrón de fractura. Una vez transformada la losa en un "mecanismo" por medio de líneas de fractura que actúan como articulaciones, una carga dada comunica cierta energía que desarrolla ciertos momentos en los goznes. Ningún momento menor sería adecuado para resistir esa carga. De este modo, el mecanismo más severo, y que es el que se forma en la realidad, es aquél que requiere el mayor momento resistente. Podemos, pues, resumir diciendo que cualquier mecanismo que ensayemos establece un límite inferior del momento de fractura requerido.

El mismo procedimiento podemos usarlo para determinar la carga última si conocemos los momentos de fractura. Un mecanismo cualquiera establece un límite superior de la carga última. La verdadera es la más pequeña que podemos obtener de todos los mecanismos posibles.

Los cálculos por los métodos de segmentos y del trabajo son procedimientos alternativos; uno puede usarse para corroborar el otro y cada uno tiene sus ventajas según cada situación particular. El segundo, sin embargo, es poco sensible a pequeños cambios en el patrón de fractura.

De acuerdo con la discusión anterior, podemos establecer la siguiente regla:

V. El patrón de fractura corresponde al valor máximo posible del momento de fractura.

(c) El método de cálculo

Si bien es cierto que el análisis de losas por el método de esfuerzos últimos se reduce a operaciones algebraicas y de geometría sencillas en comparación con las complejas ecuaciones diferenciales que resultan de la teoría de la elasticidad, la solución de las ecuaciones de equilibrio puede ser en algunos casos bastante laboriosa. Deseamos, por lo tanto, un procedimiento que reduzca este trabajo al mínimo.

El problema más corriente en diseño es la estimación de los momentos de fractura necesarios, m , cuando conocemos las cargas últimas, las dimensiones de la losa y las condiciones de apoyo. El valor correcto de m es el máximo que resulta del patrón de fractura correcto y que satisface las condiciones de equilibrio. Puede demostrarse entonces, que la aplicación del principio del trabajo virtual a patrones de fractura no muy apartados del correcto, dará momentos de fractura ligeramente más pequeños que el buscado.

De acuerdo con lo anterior, asumimos un patrón de fractura conforme a las condiciones de apoyo y calculamos el valor necesario de m por medio de la ecuación del trabajo virtual, ecuación 12. Desde que, para un patrón correcto, todos los valores de m deberían ser iguales, podemos corroborar el patrón asumido calculando el valor de m para cada segmento por medio de las ecuaciones de equilibrio. Si los valores de m así obtenidos difieren

considerablemente entre sí, ello nos indica cómo debemos alterar el patrón; y por comparación de esos valores con la primera estimación de m hecha por medio de la ecuación 12, deducimos cuánto debemos cambiarlos. Con alguna experiencia se puede llegar a obtener rápidamente patrones de fractura que sólo varían del correcto por un pequeño porcentaje.

1.4 EJEMPLOS

Ejemplo 1.- Se tiene una losa continua, cargada uniformemente y reforzada de tal modo que los momentos de fractura son como se indica en la figura 1.11. Obtener expresiones para el momento de fractura m y para x , la posición de la línea de fractura.

La losa llegará a su resistencia última cuando se forme, además de las dos líneas de fractura negativas sobre los apoyos, una línea de fractura en la región de momentos positivos. El equilibrio de cada una de las partes nos da,

$$A.- \quad m + m_1 = \frac{w x^2}{2} \quad (i)$$

$$B.- \quad m + m_2 = \frac{w (L - x)^2}{2} \quad (ii)$$

Llamando $i_1 = \frac{m_1}{m}$ e $i_2 = \frac{m_2}{m}$ y dividiendo (i) entre (ii), nos queda,

$$\frac{1 + i_1}{1 + i_2} = \frac{x^2}{(L - x)^2}$$

Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación an

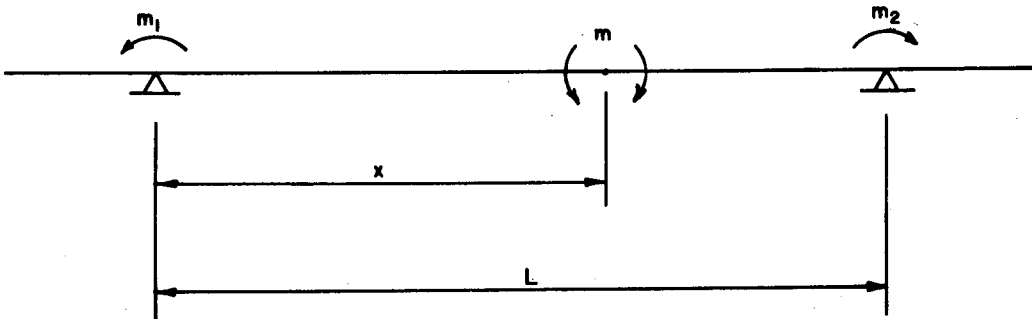
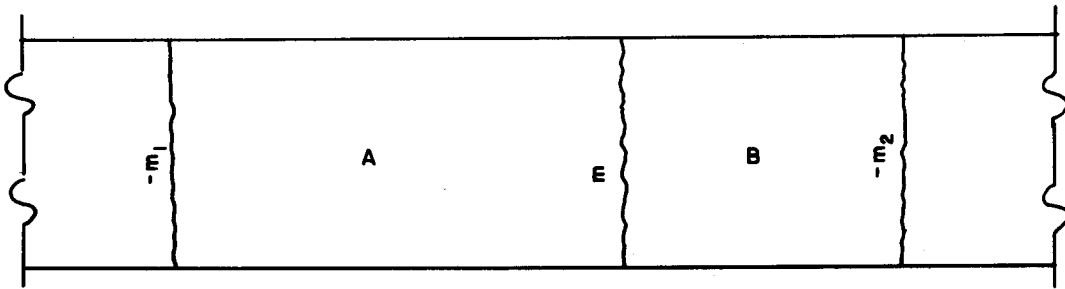


FIG. 1.11

terior y despejando x , nos queda,

$$x = \frac{L \sqrt{1 + i_1}}{\sqrt{1 + i_1} + \sqrt{1 + i_2}} \quad (\text{iii})$$

Expresando en las ecuaciones (i) y (ii) los valores de m_1 y m_2 en términos de los factores i_n , poniendo $1 + i_n = (\sqrt{1 + i_n})^2$ y restando esas ecuaciones obtenemos, transportando términos,

$$m = \frac{wL}{2} \cdot \frac{2x - L}{(\sqrt{1 + i_1} + \sqrt{1 + i_2})(\sqrt{1 + i_1} - \sqrt{1 + i_2})} \quad (\text{iv})$$

Por otra parte, de (i) y (ii) obtenemos:

$$\sqrt{1 + i_1} = x \sqrt{\frac{w}{2m}} \quad (\text{v})$$

$$\sqrt{1 + i_2} = (L - x) \sqrt{\frac{w}{2m}} \quad (\text{vi})$$

Sumando y restando respectivamente (v) y (vi), dividiendo la suma entre la resta y transportando términos nos da,

$$2x - L = \frac{L (\sqrt{1 + i_1} - \sqrt{1 + i_2})}{(\sqrt{1 + i_1} + \sqrt{1 + i_2})} \quad (\text{vii})$$

Sustituyendo (vii) en (iv) nos da finalmente,

$$m = \frac{w L^2}{2 (\sqrt{1 + i_1} + \sqrt{1 + i_2})^2} \quad (\text{viii})$$

* * *

Ejemplo 2.- Una losa triangular con carga uniformemente reparti

da, w , está simplemente apoyada en sus bordes. Calcular el momento de fractura. De acuerdo con la fig. 1.3, el patrón de fractura será como se muestra en la fig. 1.12.

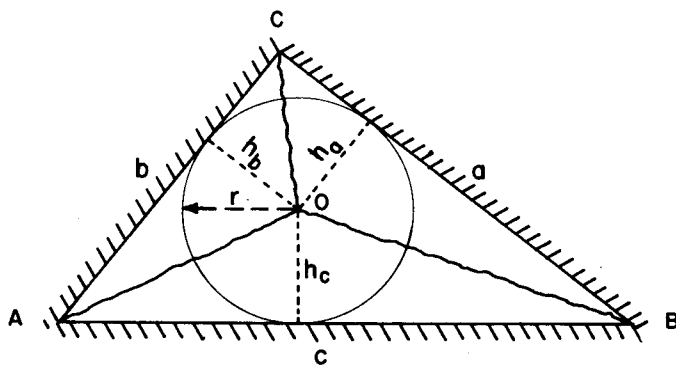


FIG. 1.12

Consideremos el segmento a . A lo largo de la línea de fractura OB actúa el momento $m \overline{OB}$ y a lo largo de la línea OC , el momento $m \overline{OC}$. En el segmento completo, el momento es $m(\overline{OB} + \overline{OC}) = m \overline{BC} = m a$, puesto que tomamos componentes con respecto a BC . Los momentos con respecto a BC nos dan la condición de equilibrio:

$$m a = \frac{1}{2} w a h_a \left(\frac{h_a}{3} \right)$$

$$m = \frac{w h_a^2}{6}$$

Para los otros segmentos obtenemos similarmente:

$$m = \frac{w h_b^2}{6} \quad ; \quad m = \frac{w h_c^2}{6}$$

Por lo tanto, $h_a = h_b = h_c = r$, donde r es el radio del círculo inscrito. El momento de fractura es,

$$m = \frac{w r^2}{6}$$

Para todo polígono que circunscribe un círculo con radio r , -
fig. 1.13 a, podemos demostrar igualmente que,

$$m = \frac{w r^2}{6}$$

Para un cuadrado, figura 1.13 b cuyo lado es a ,

$$m = \frac{w a^2}{24}$$

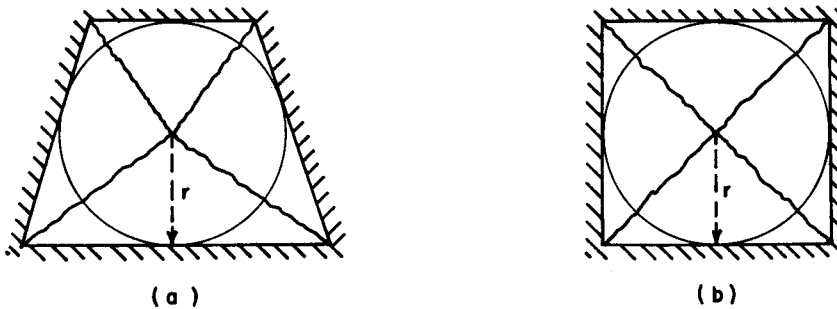


FIG. 1.13

Ejemplo 3.- Una losa en forma de triángulo rectángulo, con carga uniformemente repartida y con igual refuerzo en ambos sentidos, está simplemente apoyada en sus dos catetos. Calcular el momento de fractura.

Los ejes de rotación deben pasar por los lados soportados y la línea de fractura es como se indica en la figura 1.14.

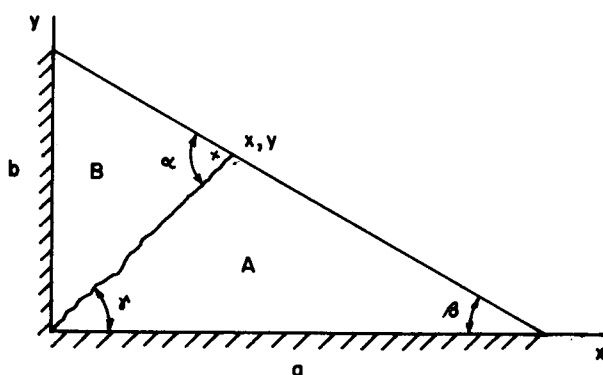


FIG. 1.14

En el punto (x, y) de la hipotenusa obtenemos, de la ecuación 5, - pág. 11, la fuerza de esquina $m \cot \alpha$. Las ecuaciones de momentos ^cson respecto a los ejes a y b para los segmentos A y B respectivamente son:

$$mx + m \cot \alpha (y) - \frac{w a y^2}{6} = 0 \quad (i)$$

$$my - m \cot \alpha (x) - \frac{w b x^2}{6} = 0 \quad (ii)$$

Tenemos también que: $\alpha = \beta + \gamma$ y $\cot \alpha = \cot (\beta + \gamma)$;

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} ; \operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{x} ; \cot \alpha = \frac{\cot \beta \cot \gamma - 1}{\cot \beta + \cot \gamma}$$

Por lo tanto,

$$\cot \alpha = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} - 1}{\frac{a}{b} + \frac{x}{y}} = \frac{ax - by}{ay + bx} \quad \text{Dividiendo por } ab,$$

$$\cot \alpha = \frac{\frac{x}{b} - \frac{y}{a}}{\frac{y}{b} + \frac{x}{a}}$$

Por triángulos semejantes tenemos:

$$\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a} ; \quad \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a} ; \quad \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

Por lo tanto, $\cot \alpha = \frac{x}{b} - \frac{y}{a}$ (iii)

De (i) tenemos:

$$x + y \cot \alpha = \frac{w a y^2}{6 m} \quad \text{Multiplicando por } b/y^2 ,$$

$$\frac{xb}{y^2} + \frac{b \cot \alpha}{y} = \frac{w a b}{6m} ; \quad \frac{\frac{x}{y} + \cot \alpha}{\frac{y}{b}} = \frac{w a b}{6m} \quad \text{(iv)}$$

Similarmente, de (ii) obtenemos, multiplicando por a/x^2 ,

$$\frac{\frac{y}{x} - \cot \alpha}{\frac{x}{a}} = \frac{w a b}{6m} \quad \text{(v)}$$

También de (i) obtenemos:

$$m \cot \alpha = \frac{w a y}{6} - \frac{m x}{y} \quad \text{Sustituyendo en (ii) tenemos,}$$

$$m y - \frac{w a y}{6} x - \frac{m x^2}{y} = \frac{w b x^2}{6} \quad \text{de donde,}$$

$$\frac{y^2 + x^2}{x y} = \frac{w}{6m} (bx + ay)$$

Pero obtuvimos anteriormente, $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$, de donde, $bx + ay = ab$.

$$\text{Por lo tanto, } \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{w a b}{6m} \quad (\text{vi})$$

Sustituyendo (vi) en (iv) e igualando en (iii), tenemos,

$$\cot \alpha = \frac{y}{b} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) - \frac{x}{y} = \frac{x}{b} - \frac{y}{a}$$

Efectuando la multiplicación, trasladando términos y multiplicando por x/y nos da finalmente,

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{b} + \frac{x}{a}$$

Pero demostramos anteriormente que el segundo miembro de la ecuación es igual a 1. Por lo tanto,

$$\frac{x^2}{y^2} = 1, \text{ y consecuentemente } x = y.$$

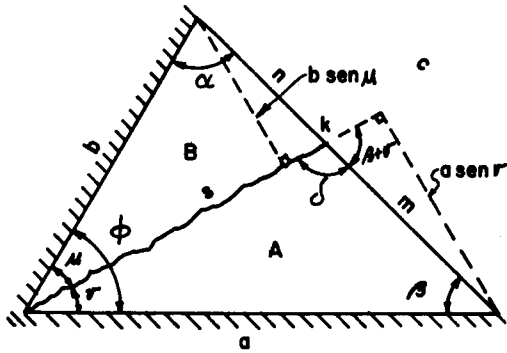
Es decir, la línea de fractura bisecta el ángulo recto y el momento de fractura es, de (vi),

$$m = \frac{w a b}{12} = \frac{W}{6}$$

* * *

Ejemplo 4.- Se tiene una losa de forma triangular, figura 1.15,

igualmente reforzada en dos sentidos, con carga uniformemente repartida y simplemente apoyada en dos de sus bordes y libre en el tercero. Calcular el momento de fractura.



$$\theta = 180 - (\beta + v)$$

FIG. 1.15

Por el teorema de los senos, la longitud s de la línea de fractura es,

$$s = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta + v)} \quad (i)$$

Si consideramos una flecha unitaria en el punto k , las rotaciones son:

$$\theta_A = \frac{1}{s \operatorname{sen} v} \quad , \quad \theta_B = \frac{1}{s \operatorname{sen} u}$$

Las proyecciones del momento de fractura con respecto a los ejes de rotación a y b son respectivamente,

$$m s \cos v \quad \text{y} \quad m s \cos u$$

Los trabajos de las cargas externas con respecto a los mismos ejes y para la flecha unitaria en k son, respectivamente,

$$\frac{1}{2} w a s \operatorname{sen} v \left(\frac{1}{3} \right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} w b s \operatorname{sen} u \left(\frac{1}{3} \right)$$

La ecuación 11 del trabajo nos da, por lo tanto,

$$m \left(\frac{s \cos v}{s \operatorname{sen} v} + \frac{s \cos u}{s \operatorname{sen} u} \right) = \frac{1}{6} w s (a \operatorname{sen} v + b \operatorname{sen} u)$$

$$= m (\cot v + \cot u) = \frac{w s}{6} (a \operatorname{sen} v + b \operatorname{sen} u) \quad (\text{ii})$$

De la figura obtenemos:

$$n = \frac{b \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} (\beta + v)} \quad \text{y} \quad m = \frac{a \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} (\beta + v)}$$

y puesto que $c = n + m$, nos da:

$$a \operatorname{sen} v + b \operatorname{sen} u = c \operatorname{sen} (\beta + v) \quad (\text{iii})$$

Trigonométricamente obtenemos:

$$\cot v + \cot u = \frac{\operatorname{sen} (u + v)}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} = \frac{\operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} (\phi - v) \operatorname{sen} v} \quad (\text{iv})$$

Sustituyendo (i), (iii) y (iv) en (ii), obtenemos:

$$m = \frac{w a c \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} v}{6} \left[\frac{\operatorname{sen} (\phi - v)}{\operatorname{sen} \phi} \right] \quad (\text{v})$$

Pero $c = \frac{b \operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} \beta}$. Sustituyendo este valor en (v), resolviendo el paréntesis redondo y efectuando multiplicaciones obtenemos:

$$m = \frac{w a b}{6} (\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} v \cos v - \cos \phi \operatorname{sen}^2 v) \quad (\text{vi})$$

Pero, $\operatorname{sen}^2 v = \frac{1 - \cos 2v}{2}$ y también

$$\text{sen } 2v = 2 \text{ sen } v \text{ cos } v \quad ;$$

sustituyendo estos valores en (vi) y ordenando términos tenemos:

$$m = \frac{w a b}{12} (\text{cos } \phi \text{ cos } 2v + \text{sen } \phi \text{ sen } 2v - \text{cos } \phi)$$

$$m = \frac{w a b}{12} [\text{cos } (\phi - 2v) - \text{cos } \phi]$$

Según la regla V, m debe ser un máximo y para esto derivamos el momento m con respecto al ángulo v, dm/dv, y obtenemos fácilmente que $v = \phi/2$. Igual que en el ejemplo anterior, la línea de fractura bisecta el ángulo formado por los apoyos y el momento de fractura depende únicamente de la carga y de este ángulo. Por lo tanto,

$$m = \frac{w a b}{12} (1 - \text{cos } \phi) \quad \text{(vii)}$$

Usando $W = \frac{w a b \text{ sen } \phi}{2}$, en donde W es la carga total en el área del triángulo, y sustituyendo en (vii), obtenemos finalmente ,

$$m = \frac{W}{6} \text{tg } \frac{\phi}{2}$$

* * *

Ejemplo 5.- Se tiene una losa rectangular, uniformemente cargada y simplemente apoyada en sus cuatro bordes, figura 1.16. Obtener expresiones para m y x. Por simetría, $d = \frac{1}{2} b$.

De la ecuación 12 del trabajo (pág. 19) y para una flecha unitaria en la línea c, obtenemos:

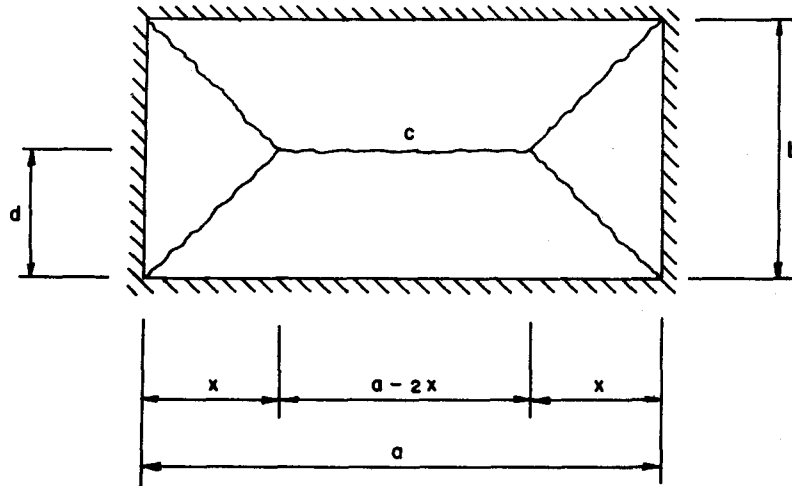


FIG. 1.16

$$m a \left(\frac{1}{\frac{1}{2} b} \right) (2) + m b \left(\frac{1}{x} \right) (2) = w b \left(\frac{1}{2} x \right) \left(\frac{1}{3} \right) (2) + w (a - 2x) \left(\frac{1}{2} b \right) \left(\frac{1}{2} \right) (2) + w x \left(\frac{1}{2} b \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) (4)$$

Simplificando y transportando términos,

$$m = \frac{w b^2 x (3a - 2x)}{12 (2ax + b^2)}$$

Para obtener el valor de x , hacemos $dm/dx = 0$. Por el método normal obtenemos,

$$x = \frac{b^2}{2a} \left[\sqrt{\frac{b^2 + 3a^2}{b^2}} - 1 \right]$$

Para este caso, si: $b = a$, $x = \frac{1}{2} a = 0,500 a$

$$b = \frac{1}{2} a, \quad x = 0,326 a$$

Ejemplo 6.- Una losa rectangular, uniformemente cargada, -

está empotrada en sus cuatro bordes, figura 1.17. Encontrar el momento m .

Según la teoría de la elasticidad, para solucionar el caso de extremos fijos se necesitan ciertas condiciones geométricas en los bordes.

En la teoría de las líneas de fractura, sin embargo, el momento en un extremo fijo depende primordialmente de la cantidad de refuerzo negativo. Podemos colocar diferentes cantidades de refuerzo en los bordes de modo que $m_1 = i_1 m$, $m_2 = i_2 m$, etc., en las cuales m es el momento positivo. Un apoyo sencillo corresponde a $i = 0$.

Las líneas de fractura son como se indica en la figura y el equilibrio de las cuatro partes nos da:

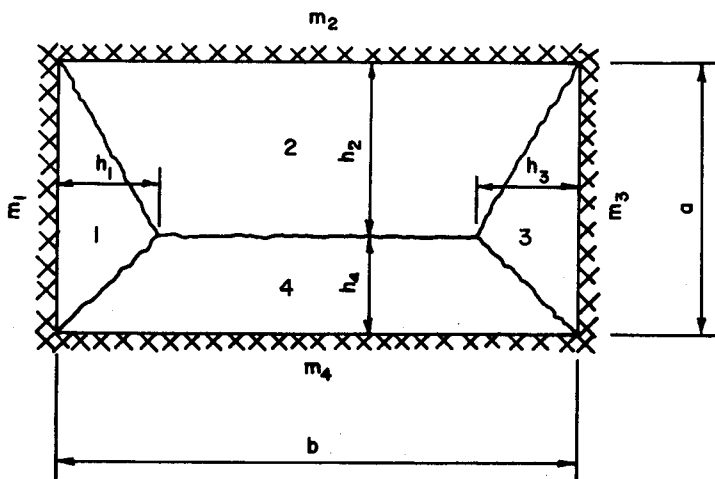


FIG. 1.17

$$\text{I. } m a (1 + i_1) = \frac{w a h_1^2}{6}$$

$$\text{II. } m b (1 + i_2) = \frac{w h_1 h_2^2}{6} + \frac{w h_3 h_2^2}{6} + \frac{w (b - h_1 - h_3) h_2^2}{2}$$

$$\text{III. } m a (1 + i_3) = \frac{w a h_3^2}{6}$$

$$\text{IV. } m b (1 + i_4) = \frac{w h_1 h_4^2}{6} + \frac{w h_3 h_4^2}{6} + \frac{w (b - h_1 - h_3) h_4^2}{2}$$

De estas cuatro ecuaciones y del hecho que $a = h_2 + h_4$, es posible determinar m , h_1 , h_2 , h_3 y h_4 como funciones de a , b y los cuatro valores de i . Ingerslev encontró que,

$$m = \frac{w a_r^2}{24} \left[\sqrt{3 + \left(\frac{a_r}{b_r} \right)^2} - \frac{a_r}{b_r} \right]^2 \quad (\text{i})$$

en la cual a_r y b_r están dadas por :

$$a_r = \frac{2 a}{\sqrt{1+i_2} + \sqrt{1+i_4}} \quad (\text{ii})$$

$$b_r = \frac{2 b}{\sqrt{1+i_1} + \sqrt{1+i_3}} \quad (\text{iii})$$

Para una losa simplemente apoyada ($i = 0$), $a_r = a$ y $b_r = b$. Si en este caso $a = b$ (losa cuadrada), la ecuación (i) se reduce a,

$$m = \frac{w a^2}{24}$$

que es lo que obtuvimos en el ejemplo 2.

Finalmente, si la losa es bastante más larga que ancha de modo que $b \rightarrow \infty$,

$$m = \frac{w a_r^2}{8}$$

y la ecuación (i) se reduce a la ecuación (viii) del ejemplo 1.

* * *

Ejemplo 7.- Una losa continua, figura 1.18, es capaz de resistir los siguientes momentos últimos: $m_a = -4.000$ lbs-pie/pie, $m_b = -5.000$ lbs-pie/pie y un momento positivo $m_c = 3.000$ lbs-pie/pie. Calcular la carga uniforme que la losa puede soportar en una luz de 12 pies.

La solución algebraica es sencilla, basada en los diagramas de cuerpos libres de la figura 1.18 b.

$$\Sigma M_A = -4000 - 3000 + \frac{wx^2}{2} = 0, \quad \therefore w_A = \frac{14.000}{x^2}$$

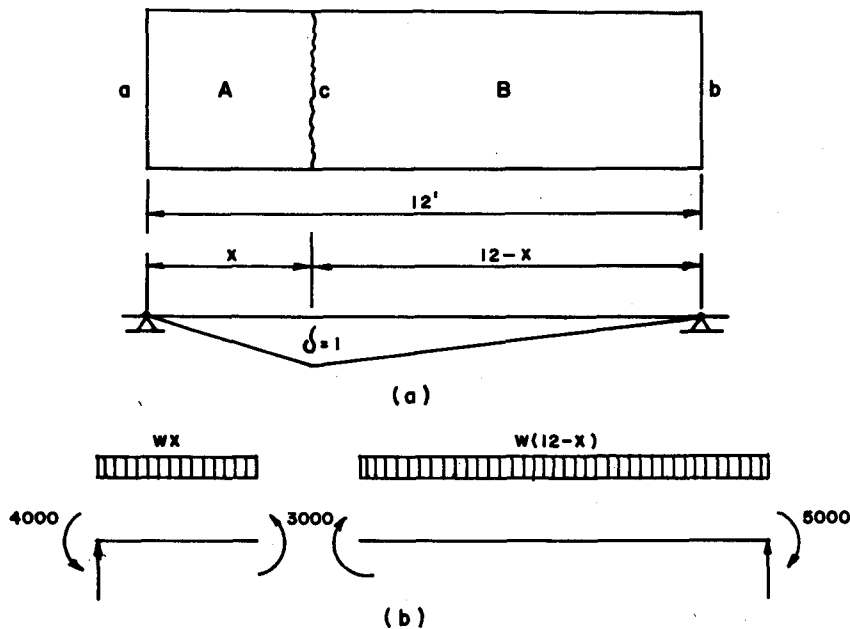


FIG. 1.18 Losa en una dirección: (a) Mecanismo fractura, (b) Diagramas de cuerpos libres

$$\Sigma M_B = + 3000 + 5000 - \frac{w (12-x)^2}{2} = 0, \quad \therefore w_B = \frac{16.000}{(12-x)^2}$$

Puesto que $w_A = w_B$, tenemos:

$$\frac{14.000}{x^2} = \frac{16.000}{(12-x)^2}$$

Por lo tanto, $x = 5,80$ pies y $w = 416$ lbs/pie cuad.

La solución por trabajo virtual es también factible, usando la fig. 1.18a. Para una flecha unitaria en el gozne y para un pie de losa, la energía de las cargas es $W \bar{\delta}$, donde $\bar{\delta}$ es la flecha al centro de gravedad de éstas, es decir,

$$w x \left(\frac{1}{2}\right) + w (12-x) \left(\frac{1}{2}\right)$$

El trabajo efectuado por los momentos en los goznes es $m \theta$, donde θ es el ángulo de rotación (para ángulos pequeños, $\theta = \text{tg } \theta$).

Debido a la rotación de A: $(4000 + 3000) 1/x$

Debido a la rotación de B: $(3000 + 5000) 1/(12-x)$

Igualando, tenemos:

$$\frac{w x}{2} + \frac{w (12-x)}{2} = \frac{7000}{x} + \frac{8000}{12-x}$$

Simplificando,

$$6 w = \frac{7000}{x} + \frac{8000}{12-x}$$

Para w mínima, $dw/dx = 0$

$$6 \left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{-7000}{x^2} + \frac{8000}{(12-x)^2} = 0$$

Esta ecuación es equivalente a la resuelta en el procedimiento an-

terior y que nos dio $x=5,80$ pies. Si sustituimos este valor en la ecuación de la energía, tenemos:

$$6 w = \frac{7000}{5,80} + \frac{8000}{6,20} = 1206,9 + 1290,3 = 2497,2$$

$$w = 416 \text{ lbs/pie cuad.}$$

* * *

Ejemplo 8.- En la losa de la figura 1.19 introduzcamos algunas complicaciones adicionales, que nos servirán para hacer énfasis en el hecho de que los momentos son cantidades vectoriales y como tales debemos resolverlos en sus componentes. La carga uniforme última la calcularemos basados en las dimensiones indicadas y en los siguientes valores : $m_a = -4000$ lbs-pie/pie (o simplemente lbs), $m_b = -5000$ lbs. y $m_c = +3000$ lbs., (longitudinalmente y transversalmente éste último).

Las líneas negativas de fractura ocurren sobre los soportes y estos ejes de rotación se interceptan en O. La línea positiva intermedia, extendida, debe también pasar por O. Con valores iguales de m_c longitudinalmente y transversalmente, m_c es el mismo para toda orientación de la línea de fractura, según nos lo da la fórmula (i) del párrafo 1.1 d, pág. 4. Si el refuerzo transversal fuera menor que el longitudinal, el momento de fractura tendría un valor específico, m_a , para cada inclinación de la línea de fractura. El valor variable de m sería una complicación adicional. Aquí consideraremos el caso isotrópico y buscaremos la solución por tanteos ,

por ser el procedimiento más sencillo.

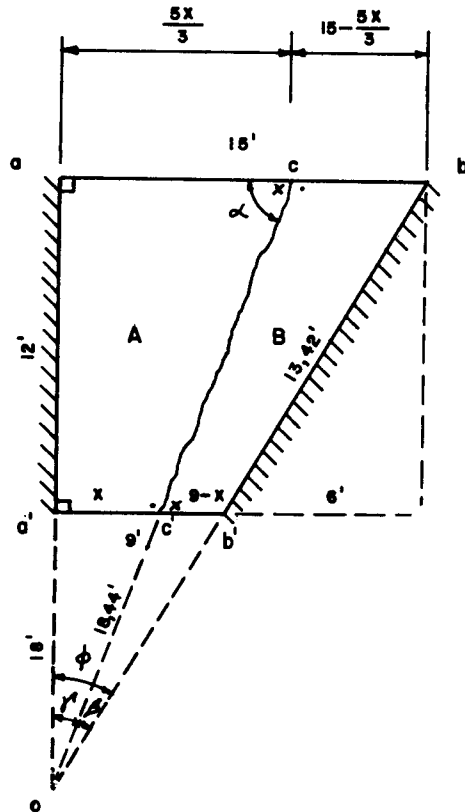


FIG. 1.19

El segundo aspecto que debemos considerar es el de que la línea intermedia de fractura cruza ambos bordes libres formando ángulos menores de 90° . La corrección m_t , hacia abajo en los ángulos agudos, es:

$$m_t = m \cot \alpha = m \left(\frac{x}{18} \right) = \frac{mx}{18}$$

Como dijimos anteriormente, estas fuerzas verticales intervienen

en el análisis por segmentos, pero no en la ecuación del trabajo. Usemos primero el método de segmentos.

Asumamos $x = 4, 2'$, lo cual nos da las dimensiones indicadas en la figura 1.20 a.

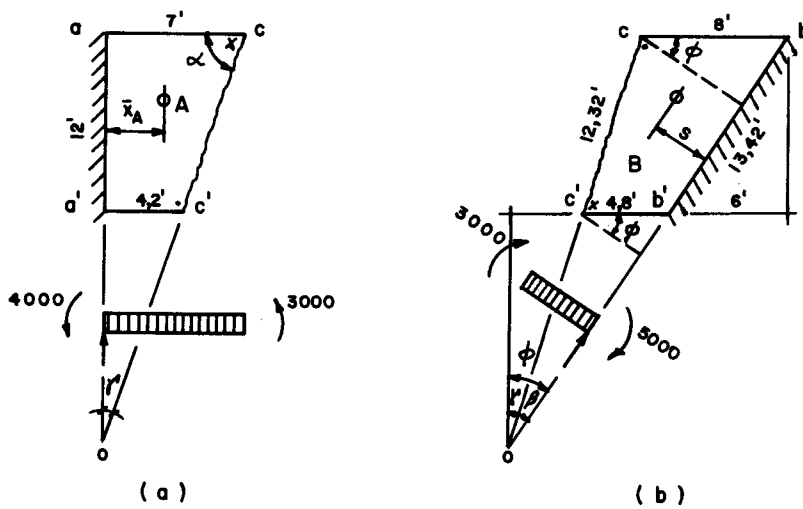


FIG. 1.20

La proyección del momento de fractura que actúa en la línea cc' sobre el eje de rotación aa' es 12 m. También,

$$m_t = \frac{3000(4, 2)}{18} = 700 \quad ; \quad x_A = 2, 86' \quad (\text{ver apéndice})$$

$$\Sigma M_{aa'} = -4000(12) - 3000(12) - 700(4, 2) + 700(7) + w(4, 2+7, 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(12)(2, 86) = 0$$

$$- 48.000 - 36.000 - 2.940 + 4.900 + 192, 2 w = 0$$

$$w_A = \frac{82.040}{192, 2} = 427 \text{ lbs /pie cuad.}$$

La componente del momento de fractura en la línea cc' con respecto

al eje bb' es, $m (\text{long. } cc') \cos \beta$. El ángulo β es,

$$\beta = \phi - \gamma = \text{arc. tg. } \frac{9}{18} - \text{arc. tg. } \frac{4,2}{18}$$

$$= 26^{\circ} 34' - 13^{\circ} 08' = 13^{\circ} 26'$$

$$\cos \beta = 0,9726 \quad ; \quad \cos \phi = 0,8944$$

Para obtener el momento de las cargas externas con respecto al eje bb' podría descomponerse la figura $cbb'c'$ en una serie de triángulos y por las propiedades de éstos, obtener el resultado deseado (véase referencia 6 de la bibliografía). Sin embargo el método resulta bastante laborioso y es preferible considerar la figura como tal y usar las fórmulas del apéndice para calcular su centro de gravedad; luego por geometría analítica se puede obtener la perpendicular de éste al eje bb' . Tomando b como el origen de un sistema de coordenadas y calculando el centro de gravedad del segmento según las dimensiones de la fig. 1.20 b:

$$\bar{x} = \frac{4,8(4,8+12) + 8,0(8,0+4,8+6,0)}{3(4,8+8,0)} = 6,02'$$

$$\bar{y} = \frac{12(9,6+8,0)}{3(8,0+4,8)} = 5,50'$$

De la figura 1.21 y por geometría analítica obtenemos las ecuaciones de la línea bb' y la de la perpendicular a ésta que parte del centro de gravedad del segmento B.

$$\text{Ecuación línea } bb' : \quad y = 2x$$

$$\text{Ecuación línea perp. :} \quad y = -\frac{1}{2}x - 8,51$$

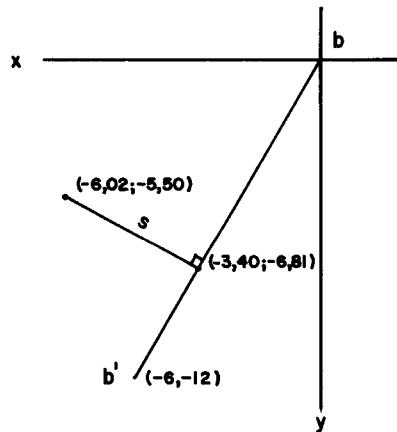


FIG. 1.21

Igualando estos valores obtenemos las coordenadas del punto de intersección, que nos resultan: $x = -3,40$; $y = -6,81$. Con estos valores obtenemos la distancia s como,

$$s = \sqrt{(-6,02 + 3,40)^2 + (-5,50 + 6,81)^2} = \sqrt{8,58} = 2,93'$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{bb'} &= 3000(12,32)(0,973) + 5000(13,42) - 700(4,8)(0,894) \\ &+ 700(8,0)(0,894) - w(4,8 + 8,0)\left(\frac{1}{2}\right)(12)(2,93) = 0 \\ &+ 36.000 + 67.100 - 3.000 + 5.000 - 225,0 w = 0 \end{aligned}$$

$$w_B = \frac{105.100}{225} = 467 \text{ lbs/pie cuad.} > w_A = 427 \text{ lbs/pie cuad.}$$

Este resultado nos indica que el valor de x lo tomamos un poco pequeño. En general, para un primer tanteo, no podría esperarse un resultado tan aproximado como el obtenido, producto éste de tanteos preliminares. Para éstos podría inclusive hacerse uso de dimen-

siones a escala.

Por el método del trabajo virtual, usando las mismas figuras anteriores, y asumiendo una flecha unitaria en c , podemos decir,

Energía absorbida, $M \theta$:

$$E_A' = 4000 (12) (1/4, 2) + 3000 (12) (1/4, 2) = 20.000$$

$$E_B' = 5000 (13, 42) (1/4, 8 \times 0, 894) + 3000 (12, 32) (0, 973) (1/4, 8 \times 0, 894) = \frac{24.000}{44.000}$$

Energía disponible, $W \theta$:

$$E_A'' = w (4, 2 + 7, 0) \left(\frac{1}{2}\right) (12) (2, 86/4, 2) = 45, 76 w$$

$$E_B'' = w (4, 8 + 8, 0) \left(\frac{1}{2}\right) (12) (2, 93/4, 8 \times 0, 894) = \frac{52, 45 w}{98, 21 w}$$

Por lo tanto, $w = \frac{44.000}{98, 2} = 448 \text{ lbs/pie cuad.}$

Una carga última de 450 lbs/pie cuad. sería una buena respuesta, basada más bien en los cálculos de equilibrio de los segmentos A y B que en el método del trabajo, por ser éste menos sensible a pequeños cambios de dimensiones. En todo caso, resultados por ese método son siempre iguales o mayores que la verdadera carga final. Desde luego, podemos repetir los cálculos presentados usando un valor de x un poco menor hasta obtener el verdadero valor de w, pero lo consideramos innecesario para un ejemplo ilustrativo como éste.

* * *

Ejemplo 9.- Una losa rectangular, igualmente reforzada y simplemente soportada como se ilustra en la figura 1.22, lleva una carga uniforme de 150 lbs/pie cuad. y cargas lineales de - 100 lbs/pie, según se indica. Calcular m.

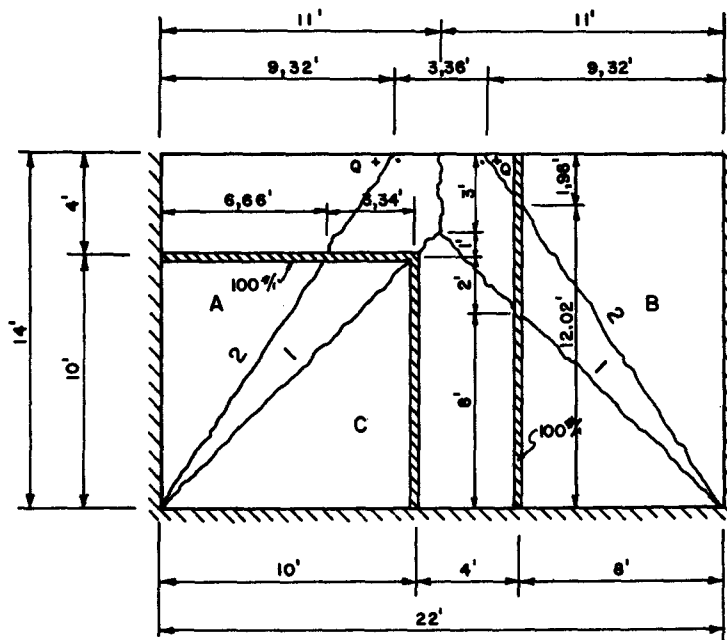


FIG. 1.22

Primer tanteo, asumiendo el patrón de fractura N^o 1 :

Según la regla III, pág. 9, siendo las tres líneas de fractura positivas, las fuerzas de esquina son nulas en la intersección de éstas. Las ecuaciones de equilibrio nos dan :

$$\begin{aligned}
 \text{A.- } m(14) &= 150 (3+14) (11/2)(4,31) + 100(10^2/2) \\
 &= 60.400 + 5.000 = 65.400 \quad ; \quad m = 4670 \text{ lbs.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{B.- } m(14) &= 60.400 + 6(100)(8) \\
 &= 60.400 + 4.800 = 65.200 \quad ; \quad m = 4660 \text{ lbs.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{C.- } m(22) &= 150(22)(11/2)(11/3) + 100(10^2/2) + 100(8^2/2) \\
 &= 66.600 + 5.000 + 3.200 = 74.800 \quad m = 3.400 \text{ lbs.}
 \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos nos demuestran que debemos disminuir - los segmentos A y B y aumentar C. Como guía, calculemos lo anterior por el método del trabajo.

Debido a que todos los segmentos sufren la misma rotación según las dimensiones dadas y a que las flechas de las diferentes cargas también son proporcionales a esa rotación (1/11), podemos escribir directamente :

$$m(14)(2) + m(22) = 65.400 + 65.200 + 74.800 = 205.400$$

$$m = \frac{205.400}{50} = 4108 \text{ lbs.}$$

Podemos decir que este valor es bastante aproximado al correcto. Modifiquemos el patrón de fractura y obtengamos uno del tipo de la fig. 1.3 b con fuerzas de esquina en la intersección de las líneas - con el borde libre. Como los momentos en A y B nos dieron casi idénticos, podemos asumir que el patrón de fractura es prácticamente simétrico. Hagamos $x = 9,32'$ en la fig. 1.22

$$m_t = m \cot \alpha = m (9,32/14) = 0,666 m$$

Las ecuaciones de momentos son entonces :

$$\text{A.- } m(14) = 150(14)(9,32^2/6) + 100(6,66^2/2) + 0,666m(9,32)$$

$$7,79 m = 30.400 + 2.200 = 32.600 \quad m = 4180 \text{ lbs.}$$

$$\text{B.- } m(14) = 30.400 + 100(1,98)(8) + 6,21 m$$

$$7,79 m = 30.400 + 1.600 = 32.000 \quad m = 4110 \text{ lbs.}$$

$$\begin{aligned}
C.- \quad m(9,32)(2) &= 150(3,36+22)(14/2)(5,28) + 100(3,34)(10) \\
&+ 100(10^2/2) + 100(12,02^2/2) - 2(0,666m)(14) \\
37,29m &= 140.600 + 3.300 + 5.000 + 7.200 = 156.100 \\
& \qquad \qquad \qquad m = 4190 \text{ lbs.}
\end{aligned}$$

Los tres resultados son sumamente aproximados y podemos considerarlos correctos para efectos prácticos.

La ecuación del trabajo nos da, con $\theta = 1$ en la intersección de las líneas de fractura con el borde libre :

$$\theta_A = \theta_B = 1/9,32 \qquad ; \qquad \theta_C = 1/14$$

$$\begin{aligned}
14m(1/9,32)(2) + 9,32m(1/14)(2) &= 32.600/9,32 + 32.000/9,32 \\
&+ 156.100/14
\end{aligned}$$

$$3,00m + 1,33m = 3.500 + 3.400 + 11.200$$

$$4,33m = 18.100 \qquad \qquad \qquad m = 4180 \text{ lbs.}$$

Las ecuaciones del trabajo en este ejemplo las hemos obtenido multiplicando por θ las ecuaciones de momentos y sumándolas, omitiendo las fuerzas de esquina puesto que no efectúan trabajo - cuando se considera el total de la losa.

* * *

Ejemplo 10.- Se tiene una losa empotrada en tres de sus bordes y armada de tal manera que la cuantía de acero negativo es igual a la positiva, o sea que $m' = m$. El otro borde está simplemente apoyado, o sea que $m' = 0$. También se ha dejado una abe

tura con bordes libres para admitir una escalera. Véase la figura 1.23. La carga uniforme es $w = 200$ lbs/pie cuad.; una pared produce una carga lineal de 250 lbs/pie, y la escalera una carga también lineal de 1000 lbs/pie. (Estas cargas son las cargas útiles ya multiplicadas por el factor de carga).

Un análisis elástico de esta losa sería sumamente difícil, aun con la ayuda de métodos aproximados.

Asumamos el patrón de fractura N° 1 y calculemos m para cada segmento por equilibrio de momentos.

Las fuerzas de esquina en B y C con:

$$m_t = m \cot \alpha = m (4/5) = 0,800 m$$

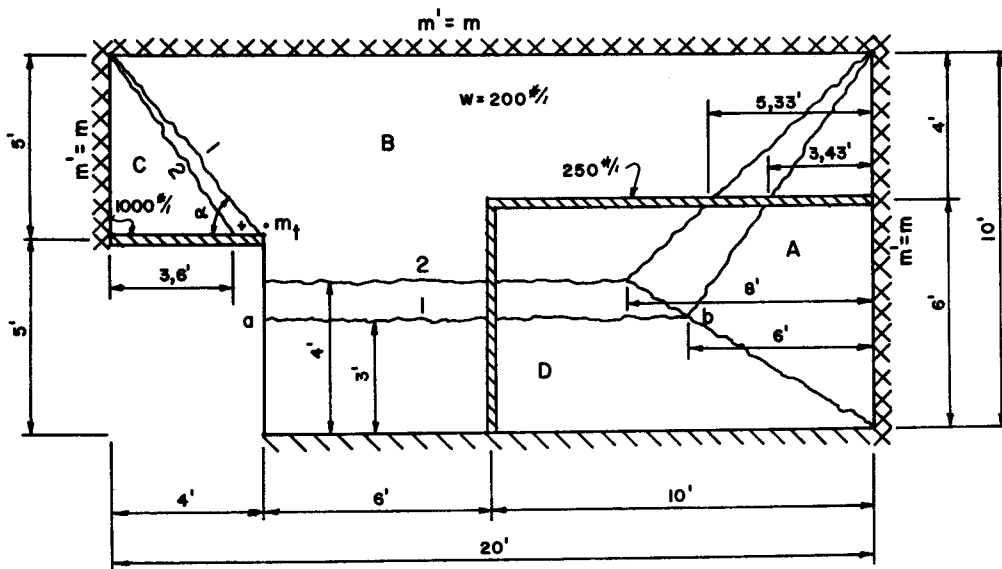


FIG. 1.23

$$\begin{aligned} \text{A. - } 10(m+m) &= 200(10)(6^2/6) + 250(3,43^2/2) \\ 20 m &= 12.000 + 1.470 = 13.470 \quad m_A = 674 \text{ lbs.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B. - } 20(m+m) &= 200 [(6)(7^2/6) + (10)(7^2/2) + (4)(5^2/6)] \\ &+ 250 [(6,57)(4) + (3)(5,50)] - 0,800 m(5) \\ 44 m &= 62.130 + 10.700 = 72.830 \quad m_B = 1655 \text{ lbs.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C. - } 5(m+m) &= 200(5)(4^2/6) + 1000(4^2/2) + 0,800 m(4) \\ 6,8 m &= 2670 + 8000 = 10.670 \quad m_C = 1569 \text{ lbs.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D. - } 16(m+0) &= 200 [(10)(3^2/2) + (6)(3^2/6)] + 250(3^2/2) \\ 16 m &= 10.800 + 1.130 = 11.930 \quad m_D = 746 \text{ lbs.} \end{aligned}$$

Usando la ecuación del trabajo y asumiendo una flecha unitaria en la línea de fractura ab, tenemos:

$$\theta_A = 1/6 \quad ; \quad \theta_B = 1/7 \quad ; \quad \theta_C = 5/(4)(7) \quad ; \quad \theta_D = 1/3$$

$$W_i = m(20/6 + 40/7 + 10/5,6 + 16/3) = 16,15 m$$

$$W_e = 13.470/6 + 72.830/7 + 10.670/5,6 + 11.930/3 = 18.530$$

$$m_1 = 18.530/16,15 = 1147$$

Es aparente entonces que precisa aumentar las áreas A y D y disminuir las B y C. Asumimos entonces el patrón N° 2, que nos da, por un proceso similar al anterior: $m_A = 1244$ lbs.; $m_B = 1183$ lbs.; $m_C = 1166$ lbs.; y $m_D = 1192$ lbs. La ecuación del trabajo correspondiente nos da, $m_2 = 1194$ lbs.

En este caso los cuatro valores de m son casi iguales y para efectos prácticos, $m = 1194$ lbs. es un buen valor de diseño. En

general, puede usarse una variedad grande de combinaciones de hierro, para lo cual el ingeniero debe contar con mayor libertad de escogencia que la aquí propuesta. Por ejemplo, parecería razonable usar menos hierro en el sentido longitudinal que en el transversal- (caso no isotrópico) y m' no debe ser necesariamente igual a m . La escogencia de estos elementos debe hacerse de manera tal que se satisfagan las ecuaciones de equilibrio y se contemple un criterio económico que signifique un mínimum de refuerzo en la losa. Sin embargo, estas consideraciones prácticas no las discutiremos aquí, puesto que nos interesan fundamentalmente principios básicos.

* * *

Ejemplo 11.- Encontrar la carga uniforme última para una losa cuadrada continua de 16' de lado si el momento último positivo es 3000 lbs-pie/pie y el negativo 4000 lbs-pie/pie, iguales en ambas direcciones, (a) asumiendo un patrón de fractura sencillo, (b) investigando para segmento esquinero. Ver la figura 1.24

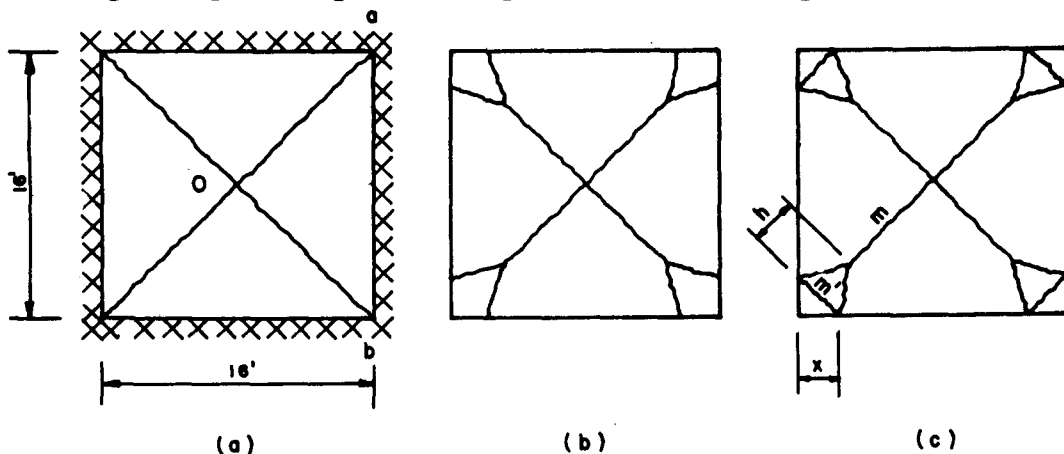


FIG. 1.24 (a) Patrón sencillo. (b) Con esquinas no sujetadas (c) Con esquinas sujetadas pero sin refuerzo negativo

El patrón de fractura lo obtenemos por simetría, con segmentos triangulares girando alrededor de cada apoyo según la fig. 1.24a.

Por la ecuación de equilibrio,

$$16 (4000 + 3000) = w (16) (8^2/6)$$

$$112.000 = 170,66 w \quad ; \quad w = 656 \text{ lbs/pie cuad.}$$

Excepto por algún efecto de esquina, esta solución es exacta y no necesitamos tanteos. Por la ecuación del trabajo, asumiendo una flecha unitaria en 0 :

$$16 (4000 + 3000) (1/8) = w (16) (8) (\frac{1}{2}) (1/3)$$

$$14.000 = 21,33 w \quad ; \quad w = 656 \text{ lbs/pie cuad.}$$

Investiguemos un segmento esquinero, fig. 1.25.

$$\Sigma M_{ab} = -1,414 x m' - 1,414 x m + w (1,414 x) (h^2/6) = 0$$

Por lo tanto,

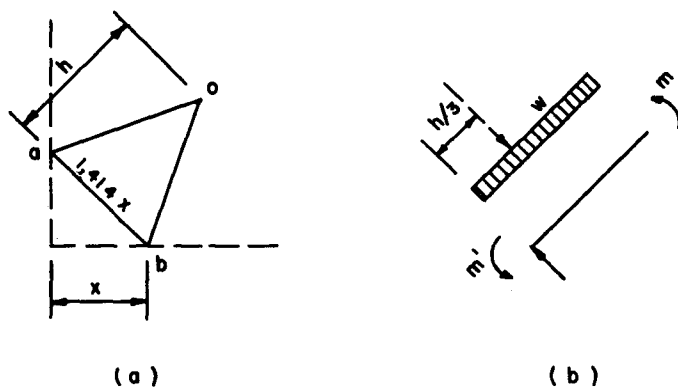


FIG. 1.25

$$h = \sqrt{\frac{6(m+m')}{w}}$$

que es la fórmula 8 de la pág. 13. Según el párrafo 1.2 d, pág.12, podemos esperar un 9% de reducción en la carga permisible de esta losa debido a la posible aparición de segmentos esquineros, es decir, $w = 0,91(656) = 597$, digamos 600 lbs/pie cuad. Para nuestros datos,

$$h = \sqrt{\frac{6(3000+4000)}{600}} = 8,37'$$

La diagonal completa de un segmento es $1,414(8) = 11,31'$. Por esta razón, es probable que el segmento esquinero se forme. Como tenemos momentos que no son cero en los bordes, las fuerzas de esquina no son necesarias en este ejemplo. Probemos el patrón mostrado en la fig. 1.26 a, usando el método del trabajo y una flecha unitaria en el centro de la losa. Como el patrón es simétrico, usaremos solamente un segmento A y otro B.

La flecha del punto C es: $(8,37 + 0,50)(1/11,31) = 0,784$.

La energía suministrada es:

$$E_A = w(16)(8)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - 2w(0,707)(6,27)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{0,784}{3}\right) = 20,17 w$$

$$E_B = w(1)(8,37)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{0,784}{3}\right) = \frac{1,09 w}{21,26 w}$$

La energía absorbida en los goznes es:

$$E_A = (4000+3000)(16-0,707 \times 2)\left(\frac{1}{8}\right) = 12.770$$

$$E_B = (4000 + 3000)\left(\frac{0,784}{8,37}\right) = \frac{660}{13.430}$$

$$w = \frac{13.430}{21,26} = 632 < 656 \text{ de la solución primera.}$$

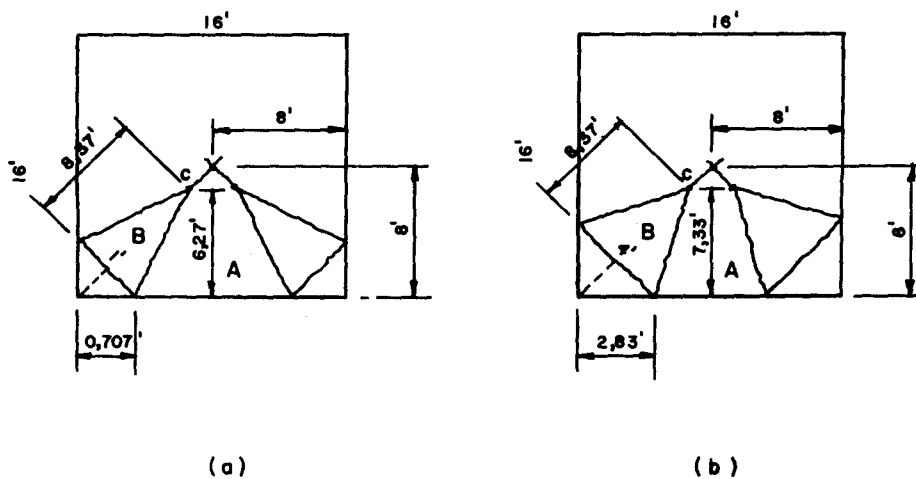


FIG. 1.26

Esta comparación prueba que el segmento esquinero se forma. Un nuevo tanteo, fig. 1.25 b, nos da $w = 605$. Como el valor de h usado lo basamos en un valor de w bastante próximo al calculado, podemos asumir que la carga última es 600 lbs/pie cuad., como estimamos originalmente.

Hognestad derivó para el caso de losa cuadrada, simplemente apoyada y con esquinas sujetadas, las siguientes ecuaciones en las cuales el momento negativo en el segmento esquinero es $m' = im$ y donde i varía entre 0 y 1. La condición verdadera para obtener $m = wa^2/24$ es cuando la esquina se mantiene firmemente sujetada y hacemos $m' = m$, es decir, no se forma segmento esquinero.

$$h = \sqrt{\frac{6m(1+i)}{w}} \quad (i)$$

$$m(a-2x) - w \left[\frac{a^3}{24} - \frac{2x}{6} \left(\frac{x}{2} + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{ii})$$

$$x = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m}{w}} \left[\sqrt{21 + 3i} - \sqrt{12(1+i)} \right] \quad (\text{iii})$$

La solución algebraica de las ecuaciones anteriores es bastante laboriosa, pero por aproximaciones sucesivas podemos obtenerla con relativa facilidad. Inicialmente podemos poner $m/w = a^2/24$, con este valor calculamos h y x de las ecuaciones (i) y (iii), y de la ecuación (ii) obtenemos un nuevo valor de m/w ; éste lo usamos de nuevo en (i) y (iii) y así sucesivamente.

De las fórmulas anteriores podemos hacer la siguiente tabla :

$i = m'/m$	x	h	m/w
0	0, 159 a	0, 523 a	$a^2/22, 0$
$\frac{1}{4}$	0, 110 a	0, 571 a	$a^2/23, 0$
$\frac{1}{2}$	0, 069 a	0, 619 a	$a^2/23, 6$
1	0	--	$a^2/24, 0$

* * *

Ejemplo 12.- Investigar la capacidad última de una losa de 12' x 20' continua en todos sus bordes, que tiene momentos últimos de 3000 lbs. para positivo y 4000 lbs. para negativo, ambos uniformes en cada dirección. Véase la figura 1.27a.

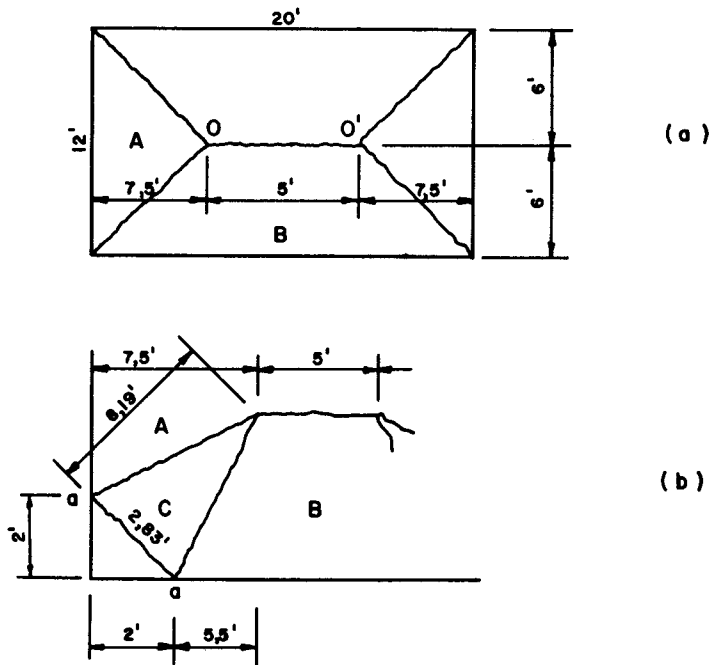


FIG. 1.27

Por simetría, la línea de fractura horizontal irá al centro de la losa. Por tanteos preliminares, establezcamos el punto 0 a - 7,5' del borde vertical. Las ecuaciones de equilibrio nos dan :

Segmento A. -

$$12 (3000 + 4000) = w (12) (7,5^2/6)$$

$$w (112,50) = 84.000 \quad ; \quad w_A = 747 \text{ lbs/pie cuad.}$$

Segmento B. -

$$20 (3000 + 4000) = w (20 + 5) (6) (\frac{1}{2}) (2,40)$$

$$w (180) = 140.000 \quad ; \quad w_B = 778 \text{ lbs/pie cuad.}$$

Estos resultados son suficientemente próximos y los compro-

baremos por el método del trabajo, asumiendo una flecha unitaria a lo largo de $00'$ y por conveniencia usando la mitad de la losa.

Energía suplida:

$$A: \quad w (12)(7,5) \left(\frac{1}{2}\right) (1/3) \quad = \quad 15 \quad w$$

$$B: \quad w (20 + 5) (6) \left(\frac{1}{2}\right) (2,40/6) \quad = \quad \frac{30 \quad w}{45 \quad w}$$

Energía absorbida :

$$A: \quad 12 (3000 + 4000) (1/7,5) \quad = \quad 11.200$$

$$B: \quad 20 (3000 + 4000) (1/6) \quad = \quad 23.300$$

$$34.500$$

$$w = \frac{34.500}{45} = 767 \text{ lbs. /pie cuad.}$$

Podemos asumir que la posición del punto 0 es lo suficiente - mente correcta.

Investigaremos ahora la condición de segmentos esquineros. Para equilibrio de éstos, si tomamos $w=700$ (reduciendo los valores obtenidos),

$$h = \sqrt{\frac{6(3000 + 4000)}{700}} = 7,74'$$

La diagonal tiene una longitud de $\sqrt{7,5^2 + 6,0^2} = 9,60'$. Por lo - tanto habrá un segmento esquinero que probablemente llegue hasta el punto 0. Usemos el método del trabajo en la mitad de la losa y una flecha unitaria en 0. Después de diversos tanteos escojamos las dimensiones de la fig. 1, 27 b.

Energía suplida:

$$\begin{aligned}
 A : w (8)(7,5)\left(\frac{1}{2}\right) (1/3) &= 10,00 w \\
 B : w (16 + 5) (6) \left(\frac{1}{2}\right) (2,48/6) &= 26,04 w \\
 C : w (2)(6) \left(\frac{1}{2}\right) (2) &= 12,00 w \\
 &w (2) (7,5)\left(\frac{1}{2}\right) (2) = 15,00 w \\
 - w (2)(2)\left(\frac{1}{2}\right) (2) &= -4,00 w \\
 \hline
 &23,00 w (1/3) = \frac{7,66 w}{43,70 w}
 \end{aligned}$$

Energía absorbida :

$$\begin{aligned}
 A: 8 (3000 + 4000) (1/7,5) &= 7.470 \\
 B: 16 (3000 + 4000) (1/6) &= 18.670 \\
 C: 2,83 (3000 + 4000) (1/8,19) (2) &= \frac{4.840}{30.980}
 \end{aligned}$$

$$w = \frac{30.980}{43,70} = 709 \text{ lbs/pie cuad.}$$

Se pueden calcular numerosas variaciones del patrón de fractura para asegurarse de que la peor condición se ha obtenido ; se notarán así también las pequeñas variaciones que resultan en el valor de w . De un estudio de esa naturaleza obtenemos que un valor de 710 lbs/pie cuad. es aproximadamente el correcto.

1.5 LOSAS DESIGUALMENTE REFORZADAS

Los análisis de losas armadas en dos direcciones presentados hasta el momento han considerado el caso de igual momento de fractura en cualquier dirección. Tal refuerzo isotrópico es a menudo antieconómico y por lo tanto resulta conveniente tener métodos de análisis para refuerzo anisotrópico. Johansen ha demostrado que

podemos analizar losas con momentos de fractura diferentes en las dos direcciones ortogonales reduciéndolas al caso isotrópico. En una losa podemos tener momentos m y $m' = im$ en una dirección, um y $um' = ium$ en la dirección ortogonal, que podemos reducir al caso isotrópico ($u = i$) con momentos m y m' si las dimensiones lineales en la dirección de m las dividimos entre \sqrt{u} , permaneciendo la carga uniforme igual. Cargas concentradas y la carga total de la losa deben también dividirse entre \sqrt{u} . Cargas lineales deben ser divididas entre $\sqrt{u \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$, en donde α es el ángulo entre la carga lineal y la dirección m .

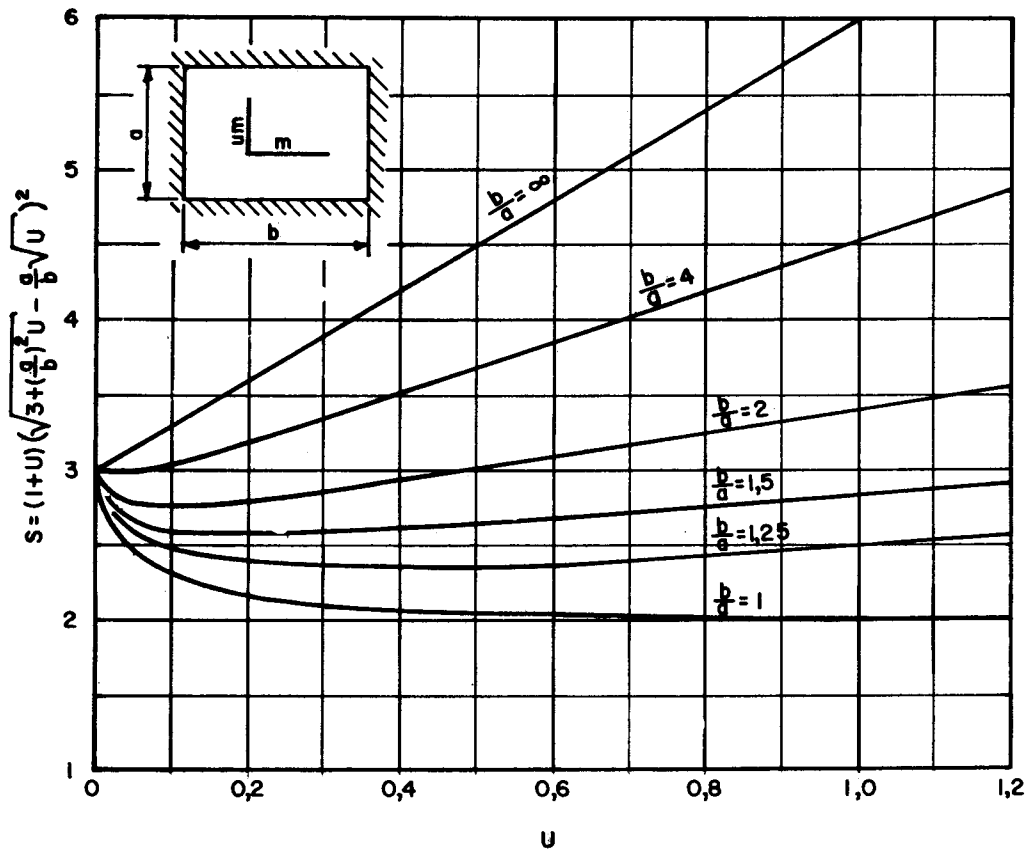


FIG. 1.28 - Porcentaje de refuerzo necesario

Hognestad encuentra que la cantidad total de hierro en una losa es proporcional a un factor S (ver figura 1.28), y que la distribución económica de ese hierro en una losa armada en dos direcciones se obtiene cuando S es mínima. La figura anterior corresponde a S como función de u . Por ejemplo, para una losa cuadrada ($b/a = 1$), una S mínima se encuentra para $u = 1,0$, es decir, la mitad del refuerzo debe colocarse en cada dirección. Para una losa infinitamente larga, $b/a = \infty$, una S mínima corresponde a $u=0$, esto es, todo el refuerzo debe colocarse paralelo a la dirección corta. El costo de las losas aproximadamente cuadradas es prácticamente independiente de la distribución del refuerzo tal como lo expresa el factor u , mientras que para valores grandes de b/a , el costo de refuerzo uniforme es considerablemente mayor que el que corresponde a la distribución económica. Por lo tanto, para relaciones de b/a mayores de 2 no debe colocarse en el sentido longitudinal más refuerzo que el necesario para distribución de cargas y efectos de temperatura.

1.6 CARGAS CONCENTRADAS

Para cargas concentradas, el patrón de fractura en muchos casos lo forma una línea curva negativa de la cual parte un infinito número de líneas positivas que llegan radialmente a la carga (figura 1.29).

Tal patrón lo podemos considerar que consiste en un número infinito de triángulos infinitesimales. Por medio de la ecuación del

trabajo podemos demostrar que el patrón de fractura correcto corresponde al valor máximo de $m + m'$. Este valor es,

$$m + m' = \frac{P}{2\pi} \quad 13$$

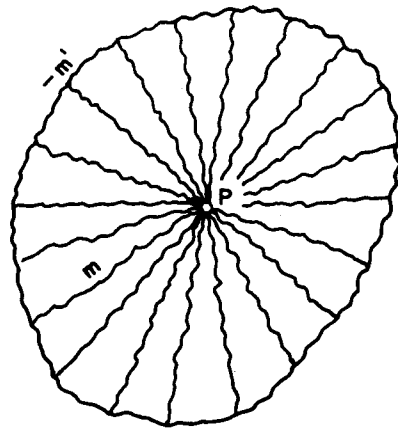


FIG. 1.29

El radio r que da la dimensión del patrón circular es indefinido, resultado éste de considerar la carga P aplicada en un punto. Si la consideramos repartida en una área circular pequeña de radio ϕ , obtenemos:

$$m + m' = \frac{P}{2\pi} \left(1 - \frac{2\phi}{3} \right) \quad 14$$

en la cual $(m + m')$ aumenta con r . Para una losa empotrada en sus bordes, el círculo de fractura es tangente al perímetro de la losa, puesto que esa condición produce el radio mayor y consecuentemente el valor máximo de $(m + m')$. Cuando r es pequeño, se puede usar la ecuación 13 sin error apreciable.

Podemos citar, a modo de sugerencia, algunos otros patrones de fractura (figura 1.30), para losas cuadradas simplemente soportadas.

- (a) Losa cuadrada simplemente soportada en los cuatro bordes.-

Si las esquinas no están firmemente sujetadas, el valor de x es,

$$x = \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) (a - r) \quad (i)$$

y el valor P lo da la ecuación,

$$P = 8m \left(\frac{1}{1 - r/a} - 3 + 2\sqrt{2} \right) \quad (ii)$$

Si las esquinas están ancladas, las líneas de fractura pasan por las esquinas, $x = 0$, y,

$$P = 8m \left(\frac{1}{1 - r/a} \right) \quad (iii)$$

(b) Si se coloca una cantidad diferente (mayor) de hierro bajo la columna, m_1 será mayor que m en el resto de la losa. La ecuación (ii) debe modificarse a,

$$P = 8m \left(\frac{1}{1 - r/a} - 3 + 2\sqrt{2} + \frac{\frac{m_1}{m} - 1}{\frac{a}{r} - 1} \right) \quad (iv)$$

- (c) Soporte en dos bordes opuestos.-

$$P = 4m \frac{1}{1 - r/a} \quad (v)$$

- (d) Soporte en las cuatro esquinas.-

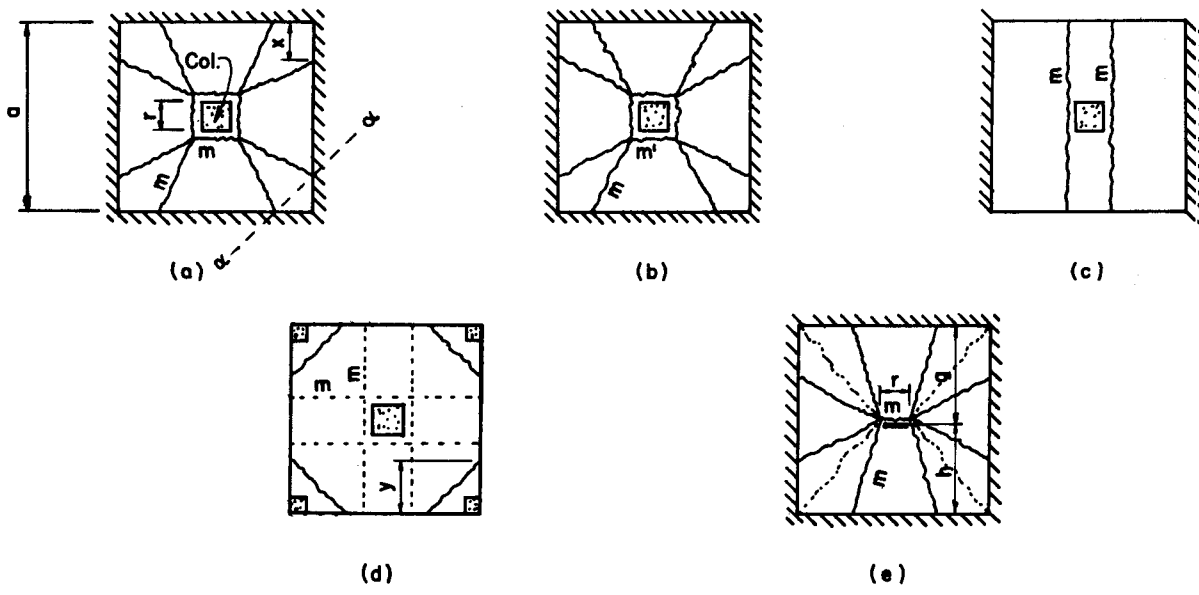


FIG. 1.30

Dos patrones de fractura son posibles. Si las líneas se forman diagonalmente a las esquinas (línea continua en la figura),

$$P = 8 m, \quad \text{para } r \geq a/2 \quad (\text{vi})$$

Para el patrón indicado en línea interrumpida en la figura, obtenemos,

$$P = 4 m \left[1 + \frac{1}{(a/r) - 1} \right] \quad \text{para } r \leq a/2 \quad (\text{vii})$$

Rige, por lo tanto, la ecuación que dé el valor menor de P.

(e) Carga excéntrica.-

Si la eccentricidad es $r/2$, se puede considerar la carga como lineal al borde de la columna. La solución matemática es bastante compleja si se mantienen libres las esquinas. Una solución a -

proximada se obtiene considerando las esquinas sujetadas, línea de puntos en la figura 1.30 e. Luego se puede introducir un factor de corrección igual al cociente de la ecuación (ii) dividido entre la (iii). Para las esquinas empotradas tenemos,

$$P = m a [1/h + 1/g + 4/(a-r)] \quad (\text{viii})$$

CAPITULO II

TEORIA DE LA RESISTENCIA A LA RUPTURA DE LOSAS DE HORMIGON ARMADO

2.1 IDEAS BASICAS

Los términos "cálculo por resistencia a la ruptura" o "cálculo por resistencia final" indican un método de cálculo basado en la resistencia final (o última) de una sección de hormigón ya sea ésta sometida a flexión simple, a flexión combinada con carga axial, esfuerzos cortantes o de adherencia, todo basado en la acción inelástica de estas fuerzas. En este capítulo nos limitaremos al cálculo de las secciones de losas; en cuanto a la evaluación de fuerzas y momentos externos, ya lo tratamos en el capítulo anterior.

Debemos aclarar que la carga última tal como se usaría en un diseño es un múltiplo de la carga máxima a que una estructura estaría sometida. Debe ser considerablemente mayor que las cargas normales de uso y deben exceder, con un margen de seguridad adecuado, las cargas a que pueda ser sometida la estructura ocasional o inesperadamente. En modo alguno se contempla el cálculo -

de las estructuras para que con las cargas útiles obtengamos deformaciones en el límite de plasticidad, puesto que éstas se mantendrían permanentemente. Debemos, en este punto, considerar el significado de la palabra "plástico". Diversos autores la usan indistintamente para significar un efecto a largo plazo (flujo plástico) como consecuencia de cargas permanentes, o simplemente el fenómeno que ocurre cuando una carga de intensidad tal produce esfuerzos superiores a los de la zona elástica del material, hasta llegar a la resistencia última.

Si bien el análisis de estructuras progresa y mejora constantemente, no ha ocurrido lo mismo en cuanto a métodos para proporcionar (diseñar) los miembros estructurales. Conforme se han ido evidenciando las deficiencias de la teoría elástica, los códigos de construcción, y entre ellos el del ACI, han incluido ajustes arbitrarios para tomar en cuenta estas discrepancias. El resultado es la inconsistencia de calcular miembros por el método elástico para casos de flexión, por el método de carga última para carga axial (columnas), y por una combinación de ambos cuando existe hierro de compresión.

En un miembro en flexión, excepto cuando está sometido a esfuerzos sumamente bajos, los esfuerzos unitarios en el hormigón no varían, ni aproximadamente, en forma proporcional a la carga. Los resultados de las investigaciones más recientes indican que en miembros sujetos a flexión y carga axial, la capacidad calculada por el método elástico puede diferir hasta en un 100% menos de la capacidad real. Lo mismo podría decirse de ca-

si todos los miembros de una estructura sujetos a fuerzas que más o menos producen una combinación como la anotada antes.

Cabe notar, a este respecto, que hay un sinnúmero de estructuras indeterminadas de hormigón armado, tales como vigas continuas, marcos y arcos, que poseen una gran resistencia de reserva debida al fenómeno de redistribución, proceso por el cual una sección sobreesforzada descarga parte de sus esfuerzos en zonas próximas menos esforzadas. La ventaja de esta propiedad no se puede utilizar si no es aplicando la teoría de esfuerzos últimos.

Por las razones anteriores, la teoría elástica generalmente no produce resultados consistentes o satisfactorios.

Reconocidas las fallas de los criterios actuales de diseño, queda entonces buscar el mejor método para corregir esta condición. Algunos proponen modificaciones adicionales a la teoría elástica. Esto implicaría, sin embargo, correcciones arbitrarias para cada resistencia del hormigón y una familia de tales correcciones para las diferentes resistencias de los aceros. En contraste con lo anterior, el método por resistencia última parece ser tanto útil como exacto.

Un método aceptable de diseño debe incluir un procedimiento común de cálculo para todos los miembros de hormigón, ya se encuentren éstos sometidos a carga axial, flexión, o a una combinación de ellas, con o sin hierro de compresión. Las fórmulas de diseño último satisfacen este objetivo. El método, además, debe proporcionar un factor de seguridad uniforme en todas las partes

de la estructura. La teoría elástica no nos da los mismos resultados cuando se trata de miembros individuales que cuando éstos han sido integrados a una estructura. Como los métodos de carga última predicen la capacidad con bastante exactitud, todos los miembros pueden ser diseñados de acuerdo con los factores de carga que se deseen. Una consistencia así logra obtener una distribución de esfuerzos de acuerdo con los análisis, sin que ocurran mayores deformaciones y redistribuciones.

Reconociendo que las dos incertidumbres básicas en un diseño son la capacidad última real de un miembro estructural y la carga máxima que tendrá que soportar en un momento dado, parecería ventajoso operar con cada elemento separadamente y no asignar un sólo factor para cubrir todos los datos inciertos.

El diseño de miembros de hormigón por el método de esfuerzo último debe estar basado en los resultados de la investigación experimental. Para cierto tipo de miembros tales como vigas en flexión y columnas con carga axial, las expresiones para carga última han sido claramente establecidas ya después de numerosas pruebas. Aunque con un número menor de experimentos, las expresiones para flexión combinada con carga axial también han sido bien comprobadas. Para casos más complejos, tales como fallas por esfuerzos cortantes, los conocimientos actuales son limitados y consecuentemente las ecuaciones correspondientes no han sido aún bien establecidas; por esta razón, por el momento, debemos hacer uso en este respecto de la teoría elástica, si bien ello

nos deja sin suficientes elementos de juicio para interpretar debidamente cuál es el factor de seguridad verdadero contra la falla. En suma, que un conocimiento exacto del comportamiento del hormigón constituye la información fundamental para establecer debidamente los factores de carga y demás requisitos de un código.

Podemos resumir las ventajas del diseño por esfuerzos últimos de la siguiente manera:

a) Conforme se aproxima la carga última, los esfuerzos y deformaciones no son proporcionales. Por lo tanto, la teoría elástica no predice adecuadamente la resistencia última de la sección.

b) La carga muerta es una cantidad generalmente bien definida y que no varía durante la vida de la estructura. Por el contrario, las cargas vivas son menos predecibles. No parece razonable, por consiguiente, usar los mismos factores de cargas vivas y muertas. El diseño por carga última permite el uso de diferentes factores, lo cual resulta en un factor de seguridad más consistente y uniforme para carga viva.

c) El método de carga última resulta en un procedimiento más consistente de diseño para todo tipo de miembros.

d) Permite una mejor evaluación de la relación crítica entre momento y empuje para miembros sujetos a flexión y carga axial.

e) En el caso de hormigón preesforzado, los esfuerzos no varían linealmente debido a las grandes cargas usadas. La

teoría lineal no es aplicable y debemos usar la teoría de carga última para poder predecir los verdaderos factores de seguridad.

Dos grandes grupos de opinión se han manifestado en cuanto a la filosofía del diseño. Un grupo de autores opina que la estructura ideal resulta de un diseño realmente balanceado, que se caracteriza por el hecho de que varios modos de falla son igualmente probables si la estructura es accidentalmente sobrecargada. Otro grupo opina que ciertos tipos de falla deben ser muy poco probables, y para este efecto deben hacerse los ajustes correspondientes en las ecuaciones. De este modo, si una estructura es sobrecargada accidentalmente, se producirán fallas de tipo dúctil, es decir, grietas que anuncian el comienzo de daños serios acompañados de pandeos excesivos, pero no se produciría un colapso total de la estructura y se haría posible efectuar las reparaciones del caso. El ACI apoya este segundo punto de vista.

El proporcionamiento de los diversos miembros de hormigón se lleva a cabo en los cuatro pasos siguientes:

1. Evaluación de las cargas útiles.- Cargas muertas de diseños preliminares y cargas vivas de un estudio de aquéllas que puedan esperarse durante la vida de la estructura. Para casos corrientes pueden usarse las que dan los códigos actuales.

2. Evaluación de momentos y fuerzas últimas.- Las cargas muertas y vivas son multiplicadas por sus correspondientes factores de carga. Estos dependen del tipo de estructura, tipo y probabilidad de cargas, y de lo estricto de las normas con que se

efectúan los planos y la construcción, etc. La determinación de momentos y fuerzas se lleva a cabo por medio de la teoría de las estructuras tal como se aplica en la teoría elástica.

3. Proporcionamiento de las secciones.- La sección de los diferentes miembros estructurales se obtiene de las ecuaciones de diseño último.

4. Desempeño bajo cargas de diseño.- El diseño de la estructura debe comprobarse para asegurar que la estructura llenará las funciones para las que se construirá. Deben considerarse pandeos, flujo plástico, grietas, etc.

Como limitaciones a la teoría de esfuerzos últimos en su estado actual podemos citar las siguientes:

1. No ha desarrollado métodos en cuanto al cálculo por esfuerzos cortantes y adherencia. Por lo tanto, esta parte del diseño debemos basarla en la teoría elástica.

2. Los momentos y fuerzas debemos obtenerlos por los métodos del análisis elástico de las estructuras. Este aspecto está siendo investigado actualmente.

3. Debe darse mayor atención a los pandeos. La teoría actual es escasamente satisfactoria para hormigón armado.

2.2 DISTRIBUCION DE LOS ESFUERZOS DE COMPRESION.

En una viga de hormigón armado, los esfuerzos de compresión varían de cero en el eje neutro hasta un máximo en o cerca de la fibra extrema. Cómo ocurre esa variación y dónde que

da el eje neutro dependen tanto de la carga como de la forma en que ha sido cargada la viga previamente. Esta variación es el resultado de varios factores: (1) Del espaciamiento y magnitud de las grietas de tensión, que dependen de si la viga ha sido cargada antes y cuánto; (2) De los esfuerzos de contracción y flujo, que son factores importantes con relación a la distribución de esfuerzos, muy difíciles de incluir en un análisis; (3) Más importante aun, de la curva de esfuerzos-deformación para hormigón armado, que no es una línea recta.

Debido a estas complicaciones no es posible más que estimar la magnitud aproximada de los esfuerzos debidos a las cargas de trabajo; éstos escasamente se asemejan a los verdaderos si los hemos calculado por la teoría de la línea recta (figura 2.1). Afortunadamente podemos predecir la resistencia última de las vigas de hormigón con bastante exactitud.

En 1956 el ACI incorporó en su código de construcción la autorización para diseñar por el método de resistencia última como procedimiento alternativo al de línea recta. Esta autorización nació como consecuencia de un reporte conjunto de la ASCE y el ACI en 1955 en que se estudió el diseño por esfuerzos últimos. El reporte no especifica la forma exacta de distribución de los esfuerzos de compresión, pero permite emplear un rectángulo, trapecoide, parábola o cualquiera otra forma que resulte en esfuerzos últimos que concuerden con pruebas de laboratorio. La siguiente discusión está basada en la distribución rectangular originalmente iniciada -

en los Estados Unidos por Charles S. Whitney.

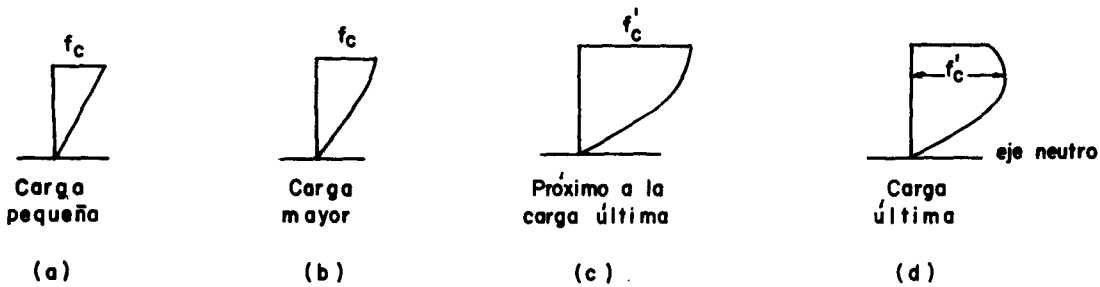


FIG. 2.1 Patrón variable de esfuerzos por incremento de momento hasta falla por compresión, desestimando la tensión en el hormigón.

2.3 EL ANALISIS DE WHITNEY

La simplificación introducida por Whitney consiste en reemplazar la distribución de esfuerzos, para efecto de cálculo, en un bloque de esfuerzos uniformes de intensidad $0,85 f'_c$ y altura a (figura 2.2), que da la misma localización de la resultante C .

Whitney encuentra que para una viga balanceada (en la cual el hormigón llega a su esfuerzo último de compresión al mismo tiempo que el acero llega a su punto cedente) y para hormigones con valores de $f'_c = 3000$ ó más, la resistencia última la obtenemos con ,

$$M_{\text{últ.}} = 0,333 f'_c b d^2 \quad 15$$

en la cual b es el ancho de la viga y d la profundidad al centro del acero. También experimentalmente él determinó que $a=0,537 d$.

El valor de fórmula 15 lo obtenemos así:

$$jd = d - a/2 = d - \frac{1}{2}(0,537 d) = 0,732 d$$

$$C = 0,85 f'_c b (0,537 d) = 0,456 f'_c b d$$

$$M = Cjd = 0,456 f'_c b d(0,732 d) = 0,333 f'_c b d^2$$

También,

$$p = \frac{A_s}{b d} \quad , \quad A_s = T/f_y = C/f_y \quad , \quad \text{puesto que } T = C, \text{ de donde,}$$

$$p = \frac{C}{f_y b d} = \frac{0,456 f'_c b d}{f_y b d} = 0,456 f'_c / f_y \quad 16$$

Para vigas con menos acero que el necesario para una sección balanceada, es decir, vigas sub-reforzadas, y puesto que $C=T$, obtenemos:

$$0,85 f'_c a b = A_s f_y \quad , \quad y$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0,85 f'_c b} = \frac{p f_y d}{0,85 f'_c} \quad 17$$

en donde $p = A_s / b d$. El brazo entre C y T es $d - a/2$. Por lo tanto,

$$M_u = T jd = A_s f_y (d - a/2) \quad 18$$

Whitney también encuentra, para este caso, que,

$$\frac{a}{d} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2,35 M_u}{f'_c b d^2}} \quad 19$$

Whitney asume que vigas sobrerreforzadas, o sea con proporciones de hierro mayores que las necesarias para una sección balanceada, son incapaces de desarrollar el límite elástico del exceso de hierro y por lo tanto sólo dan la resistencia de una sección balanceada

da,

$$M_u = 0,333 f'_c b d^2$$

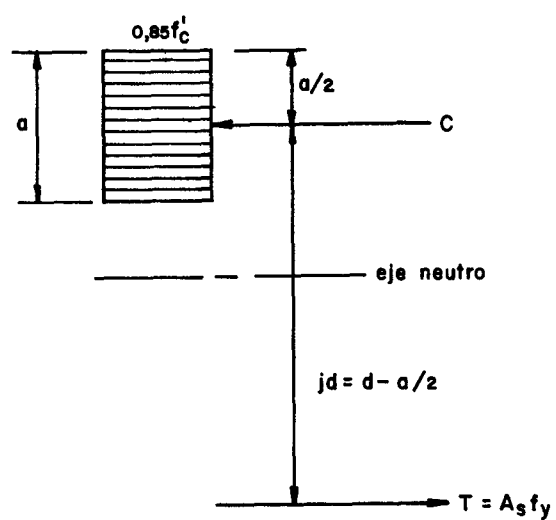


FIG. 2.2 Distribución de esfuerzos según Whitney

2.4 RECOMENDACIONES DEL INSTITUTO NORTEAMERICANO DEL HORMIGON (ACI)

El informe del comité conjunto de la ASCE y el ACI impone dos limitaciones no incluidas en las proposiciones originales de Whitney.

Primeramente, el punto cedente máximo del acero, f_y , no debe exceder de 60.000 lbs./pulg. cuad. El propósito de esto es limitar el tamaño de las grietas de tensión dentro del límite de las cargas de trabajo. En segundo lugar, el porcentaje máximo de acero queda limitado a $p = 0,40 f'_c / f_y$, siendo el coeficiente 0,40 reducido en 0,025 por cada 1000 lbs/pulg. cuad. de exceso sobre 5000 lbs./pulg. cuad. en la resistencia del hormigón. La proporción menor de hierro permitida aquí en comparación con la sección balanceada, lo es con el objeto de evitar la falla súbita que resulta cuando ésta ocurre por compresión del hormigón; por el contrario, se obtiene así que las fallas por flexión lo sean por deformación gradual del acero.

El reporte da la fórmula para el momento último en la siguiente forma:

$$M_u = A_s f_y d \left(1 - \frac{0,59 p f_y}{f'_c} \right) \quad 20$$

$$M_u = f'_c b d^2 q (1 - 0,59 q) \quad 21$$

en la cual $q = p f_y / f'_c$, con un valor máximo de $q = 0,40$.

Si usamos el valor máximo de p o q , obtenemos:

$$M_u \text{ máximo} = 0,306 f'_c b d^2 \quad 22$$

y la correspondiente profundidad del bloque de compresión es,

$$a = 0,471 d.$$

El reporte también agrega que debe prestarse especial atención al pandeo de los miembros, especialmente cuando la proporción $p - p'$ (proporción del acero en tensión menos proporción del acero en compresión) o simplemente p , exceden $0,18 f'_c / f_y$. Para este último valor,

$$M_u = 0,161 f'_c b d^2 \quad 23$$

$$a = 0,212 d \quad 24$$

Esto no debe interpretarse como que los pandeos carecen de importancia cuando se diseñan miembros con menos acero. Losas con grandes luces, voladizos y miembros de poca profundidad, cualquiera que sea el método de cálculo que se emplee, requieren especial atención en cuanto al pandeo. El reporte simplemente indica que éste adquiere mayor importancia cuando p es mayor de $0,18 f'_c / f_y$.

Para vigas con acero en compresión consideraremos separadamente los casos de análisis y de diseño.

Para análisis, según se indica en la figura 2.3, el acero en tensión se subdivide en dos partes, $A_{s2} = A'_s$ y $A_{s1} = A_s - A_{s2}$, y el momento total es el correspondiente a la suma de las partes M_2 y M_1 .

Si se desea considerar el hormigón desplazado por A'_s , se reemplaza $A_{s2} = A'_s$ por la igualdad $A_{s2} f_y = A'_s (f_y - 0,85 f'_c)$, lo

cual hace A_{s2} ligeramente menor que A'_s .

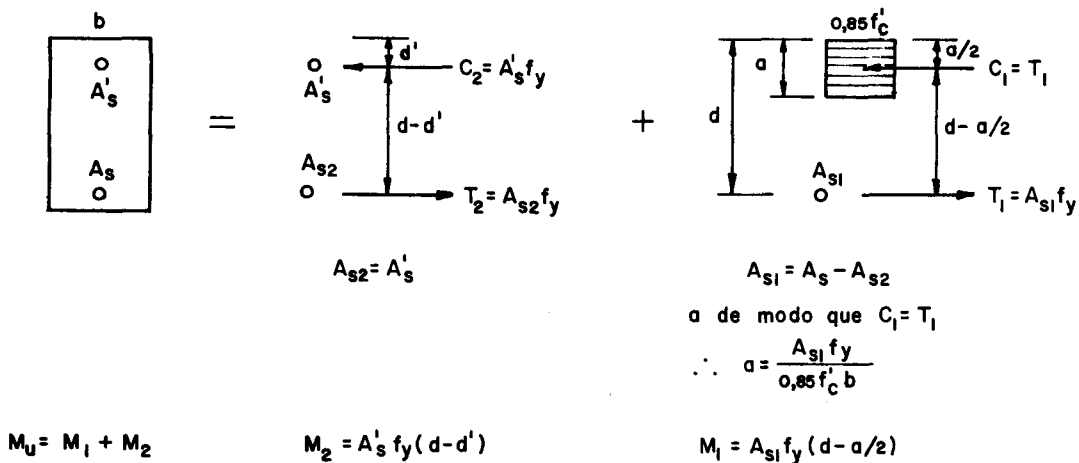


FIG. 2.3 Análisis de una viga doblemente reforzada

Para diseño, figura 2.4, se asume que el par M_1 es el máximo permitido en una viga rectangular, es decir, $M_1 = 0,306 f'_c b d^2$. El resto del momento $M_2 = M_u - M_1$ es soportado por el acero adicional de tensión A_{s2} y el acero de compresión A'_s , cada uno trabajando a f_y ; o si consideramos el hormigón desplazado por A'_s , se calcula A'_s a un esfuerzo efectivo de $f_y - 0,85 f'_c$.

Debe prestarse especial atención al pandeo cuando $p_1 = p - p'$ excede $0,18 f'_c / f_y$.

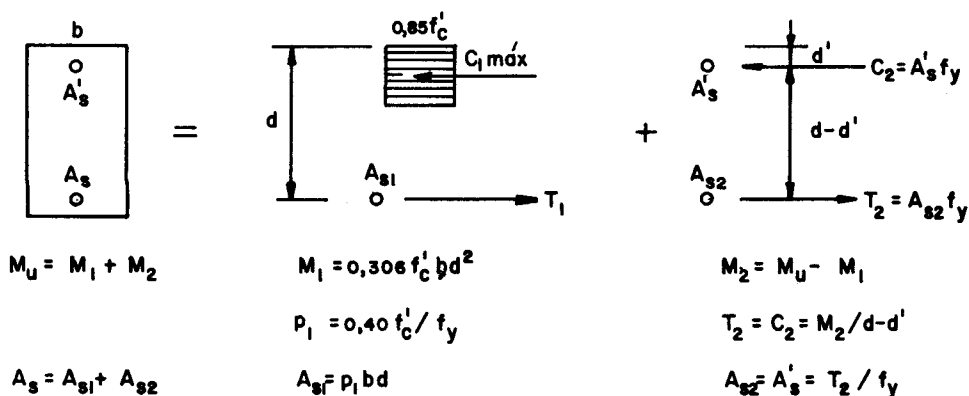


FIG. 2.4 Diseño de una viga doblemente reforzada

2.5 EJEMPLOS

Ejemplo 13.- Una viga rectangular tiene las siguientes características: $b = 11''$, $d = 20''$, $A_s = 3 \text{ N}^08$, $f'_c = 3000$, $f_y = 40.000$.

(a) Calcular su capacidad última.

$$T_{\text{últ.}} = A_s f_y = 2,37 (40.000) = 95.000 \text{ lbs.} = C$$

$$95.000 = 0,85 f'_c b a = 0,85 (3000) (11) (a)$$

$$a = 3,38'' < 0,471 d = 9,42''$$

$$jd = d - a/2 = 20 - 3,38/2 = 18,31''$$

$$M_u = T jd = 95.000 (18,31) (1/12.000) = 145 \text{ ft-k.}$$

El hecho de que la tensión rige en este caso podría también comprobarse por otros dos métodos: (1) mostrando que $p < 0,40 f'_c / f_y$; (2) mostrando que $M_u < 0,306 f'_c b d^2$. Como $a < 0,212 d = 4,24''$, el pandeo probablemente no constituye un problema serio.

(b) Si en el caso anterior sustituimos el hierro por 5 N^o 11, calcular el momento último y el f_s correspondiente.

$$T_{\text{últ.}} = A_s f_y = 7,80 (40.000) = 312.000 \text{ lbs.} = C$$

$$312.000 = 0,85 (3.000) (11) (a)$$

$$a = 11,1'' > 0,471(20) = 9,42'' \quad \text{Excesiva}$$

Estos resultados no son adecuados puesto que exceden los límites- aceptados por el ACI. Podríamos calcular M_u usando C basada en una máxima a de 9,42'', pero podemos obtenerlo directamente,

$$M_u = 0,306 (3.000) (11) (400) (1/12.000) = 337 \text{ ft-k}$$

$$jd = 20 - 9,42/2 = 15,29''$$

$$\text{En } M_u, f_s = M_u / A_s jd = 337.000(12) / (7,80) (15,29) = 33.900 \text{ lbs/in}^2.$$

El pandeo puede ser apreciable puesto que $p > 0,18 f'_c / f_y = 0,0135$

En la parte (a), ¿cuánto hierro se podría usar como máximo y cuál sería M_u ?

$$\text{Como } p_{\text{máx.}} = 0,40 f'_c / f_y,$$

$$A_s = pbd = 0,40 (3.000) (11) (20) (1/40.000) = 6,60 \text{ in}^2$$

$$M_u = 0,306 (3.000) (11) (400) (1/12.000) = 337 \text{ ft-k}$$

$$\text{Alternativamente, } a_{\text{máx.}} = 0,471 d = 9,42''$$

$$C = 0,85 (3.000) (11) (9,42) = 264.000 \text{ lbs.}$$

$$A_s = T / f_y = C / f_y = 264.000 / 40.000 = 6,60 \text{ in}^2.$$

$$M_u = Cjd = 264 (20 - 9,42/2) (1/12) = 337 \text{ ft-k}$$

* * *

Ejemplo 14.- Calcular una viga rectangular de profundidad $mí$

nima para un momento de trabajo de 100 ft - k, usando $b = 11''$,

$f'_c = 3000$, $f_y = 40.000$ y un factor de carga de 2.

$$M_u = 100 (2) = 200 \text{ ft - k}$$

$$M_u = 0,306 f'_c b d^2$$

$$200.000(12) = 0,306(3000)(11)(d^2)$$

$$d = 15,40 \text{ in.} \quad ; \quad a = 0,471(15,40) = 7,25 \text{ in.}$$

$$40.000 A_s = C = 0,85(3000)(11)(7,25)$$

$$A_s = 5,09 \text{ in}^2$$

Solución alterna:

$$jd = 15,40 - 7,25/2 = 11,78 \text{ in.}$$

$$T = M/jd = 200(12)/11,78 = 204 \text{ k}$$

$$A_s = T/f_y = 204/40 = 5,08 \text{ in}^2$$

Si en el caso anterior usamos $d=16''$, encontrar A_s .

$$T = 40.000 A_s = C = 0,85(3.000)(11)(a)$$

$$a = 1,426 A_s$$

$$M_u = 200.000(12) = T (d - a/2) = 40.000 A_s (16 - 1,426 A_s/2)$$

$$2.400.000 = 640.000 A_s - 28.500 A_s^2$$

$$A_s = 4,78 \text{ in}^2$$

Prueba:

$$a = 1,426(4,78) = 6,82 \text{ in.}, \quad jd = 16 - 6,28/2 = 12,59 \text{ in.}$$

$$M = 4,78(40.000)(12,59)(1/12.000) = 200 \text{ ft - k}$$

Una solución alterna para A_s por aproximaciones sucesivas se

ría como sigue:

$$\text{Probemos } a = 6 \text{ in.}, \quad d - a/2 = 16 - 3 = 13 \text{ in.}$$

$$A_s \text{ aprox.} = T/f_y = M/13 f_y = 200.000(12)/(13)(40.000) = 4,62 \text{ in}^2$$

$$a = 1,426 A_s = 1,426(4,62) = 6,57 \text{ in.}$$

$$d - a/2 = 16 - 3,28 = 12,72 \text{ in.}$$

$$A_s = 200.000 (12)/12,72(40.000) = 4,72 \text{ in}^2$$

$$a = 1,426(4,72) = 6,72 \text{ in.} ; \quad d - a/2 = 16 - 3,36 = 12,64 \text{ in.}$$

$$A_s = 4,72(12,72)/12,64 = 4,76 \text{ in}^2.$$

Ejemplo 15.- Calcular una viga rectangular para un momento de trabajo de 100 ft-k, usando $b = 11''$, $f'_c = 3000$, $f_y = 40.000$ y un factor de carga de 2. Hacer la profundidad tal que p es aproximadamente $0,18 f'_c / f_y$ con el objeto de reducir el pandeo.

$$\text{Para } p = 0,18 f'_c / f_y, \quad M_u = 0,161 f'_c b d^2$$

$$\text{Momento de dise\~no, } M_u = 100(2) = 200 \text{ ft - k.}$$

$$200.000(12) = 0,161(3000)(11)d^2 \quad ; \quad d = 21,2 \text{ in.}$$

Usar $b = 11''$, $d = 22''$

Estimando $jd = 21''$,

$$A_s = M/f_y jd = 200.000(12)/(40.000)(21) = 2,87 \text{ in}^2.$$

$$a = (2,87)(40.000)/(0,85)(3000)(11) = 4,08 \text{ in.}$$

$$jd = 22 - 4,08/2 = 19,96 \text{ in.}$$

$$\text{Probando } jd = 19,80'', \quad A_s = 200.000(12)/(40.000)(19,80) = 3,03 \text{ in}^2.$$

$$a = 3,03(40.000)/(0,85)(3000)(11) = 4,32 \text{ in.}$$

$$jd = 22 - 4,32/2 = 19,84'' \approx 19,80''.$$

Úsese $A_s = 3,03 \text{ in}^2$.

Como esta es una viga sub-reforzada, podemos, alternativa - mente, hacer uso de la fórmula 19, pág. 71 y,

$$\frac{a}{d} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2,35(200.000)(12)}{3000(11)(484)}} = 0,196$$

$$a = 0,196(22) = 4,31 \text{ in.}$$

* * *

Ejemplo 16 .- Una viga rectangular tiene las siguientes características : $b = 11''$, $d = 20''$, $A_s = 5 N^0 11 = 7,80 \text{ in}^2$, $f_c' = 3000$, $f_y = 40.000$, $A_s' = 2 N^0 11 = 3,12 \text{ in}^2$, $d' = 2''$. Calcular el momento último.

Desestimando el hormigón desplazado por A_s' , consideremos $A_{s2} = A_s' = 3,12 \text{ in}^2$.

$$M_2 = A_s' f_y (d-d') = 3,12(40.000)(20-2)/12.000 = 187 \text{ ft-k.}$$

El resto del acero de tensión, $A_{s1} = A_s - A_{s2} = 7,80 - 3,12 = 4,68 \text{ in}^2$ se combina con el hormigón como en una viga rectangular para desarrollar el momento último M_1 . Como $T_1 = C_1$,

$$4,68(40.000) = 0,85(3000)(11)(a)$$

$$a = 6,70'' < 0,471 d = 9,42''$$

$$jd = 20 - 6,70/2 = 16,65 \text{ in.}$$

$$M_1 = A_{s1} f_y jd = 4,68(40.000)(16,65)/12.000 = 260 \text{ ft-k}$$

$$M_u = M_1 + M_2 = 260 + 187 = 447 \text{ ft-k.}$$

$$(p-p') \text{ permisible} = 0,40(3000)/40.000 = 0,030$$

$$p = 7,80/(11)(20) = 0,0355$$

$$p' = 3,12/(11)(20) = \underline{0,0142}$$

$$p - p' = 0,0213 < 0,030, \text{ aunque el pandeo podría ser apreciable.}$$

Ejemplo 17.- Una viga rectangular doblemente reforzada tiene $b = 11''$, $d = 20''$, $f'_c = 3000$, $f_y = 40.000$ y debe soportar un momento por carga muerta de $116,7 \text{ ft-k}$ y un momento por carga viva de 150 ft-k . Calcular el acero necesario si los factores de carga son $1,2$ para carga muerta y $2,4$ para carga viva.

$$M_u = 116,7 (1,2) + 150(2,4) = 500 \text{ ft-k}$$

Considerando una viga rectangular sin A'_s , el acero máximo A_{s1} está limitado por $p_1 = 0,40 f'_c / f_y$, que da:

$$M_1 = 0,306(3000)(11)(400)/12.000 = 336 \text{ ft-k}$$

$$A_{s1} = 0,40(3000)(11)(20)/40.000 = 6,60 \text{ in}^2, \text{ o también}$$

$$jd = d - a/2 = 20 - 0,471(20)/2 = 15,29 \text{ in}$$

$$A_{s1} = M_1 / f_y jd = 336.000(12) / (40.000)(15,29) = 6,60 \text{ in}^2$$

$$M_2 = M_u - M_1 = 500 - 336 = 164 \text{ ft-k}$$

$T_2 = C_2 = M_2 / (d - d') = 164.000(12) / 18 = 109.000 \text{ lbs.}$, asumiendo que el centro de A'_s está a $2''$ de la cara de compresión de la viga.

$$A_{s2} = T_2 / f_y = 109.000 / 40.000 = 2,72 \text{ in}^2$$

$$A'_s = C_2 / f_y = A_{s2} = 2,72 \text{ in}^2$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 6,60 + 2,72 = 9,32 \text{ in}^2$$

Si se desea considerar el hormigón en compresión desplazado por

A'_s :

$$f'_s \text{ efectivo} = f_y - 0,85 f'_c = 40.000 - 0,85 (3000) = 37.450$$

$$A'_s = 109.000 / 37.450 = 2,91 \text{ in}^2$$

$$p - p' = (9,32 - 2,91)/(11)(20) = 0,0292$$

$$(p-p') = \text{perm.} = 0,40(3000)/40.000 = 0,030$$

El pandeo puede ser apreciable puesto que $p - p' > 0,18 f'_c / f_y = 0,0135$

* * *

Ejemplo 18.- Una losa continua con una luz neta de 9'- 4" lleva una carga viva de 130 lbs./pie cuad. Calcular el espesor de la losa y los aceros positivo y negativo si $f'_c = 3000$, $f_y = 40.000$ y los factores de carga son 1,2 para carga muerta y 2,4 para carga viva. Para momentos, úsense los coeficientes ACI 318-56 del análisis elástico.

$$\text{Carga viva, } 130(2,4) = 312$$

$$\text{Asumiendo losa de } 2\frac{3}{4}'' , 34(1,2) = \frac{41}{353 \text{ lbs/pie cuad.}}$$

$$+ M = \frac{wL^2}{16} = \frac{353(87,0)(12)}{16} = 23.000 \text{ lbs-in.}$$

$$- M = \frac{wL^2}{11} = \frac{353(87,0)(12)}{11} = 33.500 \text{ lbs-in.}$$

Para refuerzo balanceado,

$$M = 0,306 f'_c b d^2 = 33.500$$

$$d = \sqrt{\frac{33.500}{0,306(3000)(12)}} = 1,74''$$

$$h = 1,74 + 0,75 + 0,25 = 2,74'' \quad \text{Usar } 2\frac{3}{4}''$$

$$-A_s = \frac{0,40 f'_c b d}{f_y} = \frac{0,40(3000)(12)(1,74)}{40.000} = 0,63 \text{ in}^2/\text{ft.}$$

Para momento positivo (sub-reforzado),

$$\frac{a}{d} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2,35(23.000)}{3000(12)(1,75^2)}} = 1 - 0,714 = 0,286$$

$$a = 1,75 (0,286) = 0,50''$$

$$+A_s = \frac{M}{f_y (d-a/2)} = \frac{23.000}{40.000 (1,75 - 0,25)} = 0,38 \text{ in}^2/\text{ft.}$$

Por el método convencional obtendríamos : $d = 2,41''$, $-A_s = 0,38$ y $+A_s = 0,26$. También, la losa calculada por esfuerzo último es bastante más delgada que la de $3\frac{1}{2}''$ que resultaría con el límite de $L/t = 32$ impuesto por el código del ACI (1928).

Con los factores de carga aquí usados, el método de carga última nos da secciones más delgadas, pero deberá esperarse la revisión del código de modo que incluya cálculos por pandeo y elimine las relaciones arbitrarias entre la luz y el espesor. También debe considerarse el factor costo, puesto que secciones no exactamente balanceadas pueden resultar más económicas.

CAPITULO III

EL FACTOR DE CARGA

3.1 GENERALIDADES

De acuerdo con los métodos corrientes para el cálculo de miembros de hormigón armado, se escoge una carga útil máxima como carga de diseño, se determinan los esfuerzos internos por medio de la teoría elástica tomando como límites los máximos permisibles establecidos. De tal modo que en este método el margen de seguridad se provee únicamente en los esfuerzos permisibles, no haciéndose especial tolerancia para cargas anormalmente altas.

En el método de diseño último tratamos con resistencias últimas en lugar de esfuerzos permisibles. Para proporcionar el margen de seguridad y especialmente para tomar en cuenta cargas especialmente altas, es necesario que las cargas útiles sean multiplicadas por factores de carga y estos productos usados en el diseño. Las consideraciones que determinan la escogencia de estos factores de carga y algunos valores de ellos es lo que trataremos en los próximos párrafos.

La experiencia con estructuras existentes demuestra que muchas de ellas son capaces de soportar cargas muy superiores a las de diseño sin que se produzcan daños apreciables, o, en algunos casos, produciéndose daños únicamente en partes limitadas de algunas estructuras. Raras veces, relativamente hablando, estructuras sobrecargadas han fallado totalmente. Esta capacidad adicional, usualmente grande aunque no uniforme, ha conducido a la idea de que debe hacerse provisión para sobrecargas en una forma más lógica. El propósito fundamental del diseño último es el de obtener factores de sobrecarga más uniformes cuando la estructura es cargada cerca de su resistencia última.

Los factores de carga sirven una segunda función como es la de asegurar que las deformaciones bajo cargas de trabajo no sean tan grandes que se produzca un agrietamiento excesivo.

Para llegar a una correcta determinación de los márgenes de seguridad, debemos primeramente mencionar las razones para ellos. Sabemos que dichos márgenes de seguridad se requieren primordialmente como previsión por las incertidumbres en las cargas usadas, pero también por otros factores ajenos a las cargas. Las razones para usar los factores de carga podemos esbozarlos en tres secciones:

A. Incertidumbres en las cargas.

1) Inexactitud en las cargas de diseño. Estas pueden ser excedidas en la realidad.

2) Asunciones en cuanto a la distribución de las cargas .

Esta puede variar en la realidad .

3) Posible cambio en el tipo de las cargas asumidas.

4) Frecuencia de las cargas.

B. Factores ajenos a las cargas.

1) Inexactitud de los métodos de análisis actualmente usados.

2) No uniformidad en la resistencia de los materiales. Se considera generalmente que la resistencia del hormigón no es tan constante como la del acero, aunque con los métodos modernos de proporcionamiento las diferencias son menos apreciables que antes.

3) Posibilidad de deterioro.

C. Aspectos que afectan el margen de seguridad deseado.

1) Importancia y uso a que se destina una estructura. Esto determina el mayor o menor margen de seguridad.

2) Gravedad de una posible falla. Una columna continua en varios pisos puede requerir un margen mayor de seguridad que una columna en un solo piso.

3) Rapidez de una falla. Una columna zunchada es más resistente que una columna con estribos aislados y da suficientes evidencias de falla inicial antes del colapso total. Por lo tanto, puede asignársele un margen de seguridad menor.

4) Economía en dar seguridad adicional. Engrosando una losa puede obtenerse mayor rigidez con el uso de menor cantidad-

de refuerzo.

Los criterios apropiados para desarrollar un método que dé margenes de seguridad adecuados son: a) que sea correcto, es decir, que dé márgenes adecuados a todas las partes de la estructura bajo condiciones críticas; b) simplicidad; c) adaptabilidad, es decir, que sea flexible en su aplicación y que permita al diseñador hacer ajustes según sus necesidades particulares.

Los métodos actuales ponen el margen de seguridad solamente en los esfuerzos permisibles. Una de las desventajas de este sistema consiste en que no da una capacidad uniforme a sobrecargas en todas las partes y tipos de estructuras debido, primordialmente, a la no proporcionalidad de los esfuerzos a las deformaciones en la zona plástica. Otra objeción al sistema, y tal vez la principal, es la que recalcan los favorecedores del diseño balanceado y es el hecho de que produce el mismo margen de seguridad para cargas viva y muerta. Como la carga muerta en una estructura varía poco, la reserva de resistencia para carga muerta puede bien utilizarse para aumentos adicionales de la carga viva. De modo que la capacidad de una estructura para soportar excesos de carga viva depende de la relación de carga muerta a carga viva, lo cual a su vez resulta en una capacidad variable para soportar excesos de la última. Esto ha significado algunas veces la falla de porciones de estructuras con relaciones pequeñas de carga muerta a carga viva. Al mismo tiempo, otras partes de tales estructuras son a veces innesariamente fuertes. El remedio más directo a esto es colocar el mar

gen de seguridad deseado en las cargas a que pertenece.

3.2 VARIABILIDAD DEL FACTOR DE CARGA

Primeramente, los factores de carga son en general diferentes para diversas clases de cargas: carga muerta, carga viva, cargas de impacto, cargas por efectos de temperatura y cargas laterales tales como viento y temblor. En segundo lugar, los factores pueden variar según la combinación que se haga de esas cargas. En tercer lugar, los factores pueden variar según la naturaleza de la carga, ya sea ésta del tipo dinámico o vibratorio. En cuarto lugar, los factores pueden variar con el tipo de estructura, ya sea ésta un puente, un edificio, una torre o un tanque elevado.

Las variables anteriores son primordialmente funciones de las cargas mismas; por lo tanto, se pueden tomar en cuenta especificando diferentes factores de carga. Hay, sin embargo, otros factores, mencionados anteriormente, que no tienen relación con las cargas y pueden expresarse más directamente en función de la resistencia. Esto hace deseable colocar algún margen de seguridad en las fórmulas de resistencia última y no exclusivamente en los factores de carga (véase cap. II, párrafos 1 y 4.).

Para muchos defensores del método de resistencia última, el margen de seguridad debería colocarse únicamente en el factor de carga, usándose las resistencias últimas reales en el cálculo. Sin embargo, después de cuidadosos estudios, otras autoridades consideran que las pruebas no son lo suficientemente consistentes como para usar esos valores en diseño y que por lo tanto tales valo

res deben ser transformados a "resistencias últimas permisibles".

Debemos recordar que cuando hablamos de diseño último estamos en realidad diseñando una estructura para su punto crítico de falla si fuera sometida a cargas excesivas, remotas o imaginarias. Ese punto de falla es una consideración importante. Podría tratarse del colapso total de un edificio, o simplemente del agrietamiento de un tanque de almacenamiento. Muy a menudo, el solo pandeo excesivo de ciertas partes de una estructura puede marcar el límite de lo que el ingeniero definiría como falla. Es por estos diferentes requisitos que no podemos marcar como criterio único de diseño la falla total de una estructura, puesto que mucho antes que esto ocurriera, la estructura estaría inutilizada.

3.3 ALGUNOS FACTORES DE CARGA PROPUESTOS

a) Carga muerta.

Podemos asumir, con relativa certeza, que debido a la variación en la densidad de los materiales y en las dimensiones de las estructuras, incluyendo los efectos de distribuciones adversas, la carga muerta real no excederá, en general, en un 10% ó 15% a la carga de diseño. Considerando todos los factores, una asignación de 20% probablemente cubra toda incertidumbre, incluyendo la posibilidad de un aumento futuro en la carga muerta. De modo que puede aceptarse 1,20 como el factor de carga muerta.

b) Carga viva.

Se ha comprobado que sólo en raras ocasiones ha aumentado

la carga viva en una estructura en más de un 100%. Datos obtenidos en puentes indican que los posibles aumentos en los esfuerzos máximos corresponden a posibles aumentos en las cargas actuales de diseño en un 80%. Por lo tanto un factor de 2 para carga viva podría considerarse suficientemente conservador. Este factor de 2 es esencialmente para puentes y edificios, pero se cree que podría ser igualmente adecuado para muchos otros tipos de estructuras.

c) Cargas por deformación.

Para cargas por deformación tales como efectos de temperatura, un factor de carga de 1,5 se considera aceptable.

d) Cargas de viento.

Se sugiere un factor de 1,5.

3.4 RECOMENDACIONES DEL ACI

El comité conjunto ASCE-ACI recomienda factores de carga de 1,2 para carga muerta, 2,4 para carga viva e impacto y 2,4, para cargas de viento y temblor. Los criterios de seguridad que deben satisfacer los factores de carga están involucrados en las siguientes fórmulas (véase el párrafo A604 del código 318-56):

1. Para estructuras en las cuales, debido a su colocación y a sus proporciones, pueden desestimarse los efectos de viento y temblor:

$$U = 1,2 B + 2,4 L$$

$$U = K (B + L)$$

2. Para estructuras en las cuales debe considerarse el efecto de viento:

$$U = 1,2 B + 2,4 L + 0,6 W$$

$$U = 1,2 B + 0,6 L + 2,4 W$$

$$U = K (B + L + W / 2)$$

$$U = K (B + L/2 + W)$$

3. Para aquellas estructuras en las cuales debe considerarse el efecto de temblor, sustitúyase W por E en las ecuaciones anteriores.

Los términos usados los podemos definir así:

U = Resistencia última de la sección

B = Efecto de carga muerta

L = Efecto de carga viva más impacto

W = Efecto de carga de viento

E = Efecto de temblor

K = Factor de carga, igual a 2 para columnas y miembros sometidos a flexión y carga axial, e igual a 1,8 para vigas sometidas a flexión únicamente.

Existen gráficos, que no damos aquí, que simplifican la elección entre las ecuaciones anteriores.

3.5 FACTORES DE CARGA BASADOS EN UN PROMEDIO COMPENSADO DE LAS CONDICIONES PROPUESTAS

Por medio de estructuras existentes que han desempeñado satisfactoriamente, se ha determinado que un factor de seguridad adecuado es de 1,25 a 2. Estos límites son usuales para estructuras típicas

sencillas (véase referencia 10 de la bibliografía).

Los valores del factor de carga pueden determinarse haciendo una evaluación de la importancia relativa (o valor relativo, R) de las consideraciones dadas en la tabla I y aplicando la fórmula,

$$F = \frac{\Sigma R}{10} + 1$$

TABLA I

Condiciones que regulan la escogencia de un factor de seguridad

Consideraciones	Valor de R para las condiciones más adver- sas.
(1) Falla con resultados graves (humanos o económicos).	4, 0
(2) Mano de obra	2, 0
(3) Condiciones de carga	2, 0
(4) Importancia del miembro en la estructura	0, 5
(5) Aviso de falla	1, 0
(6) Reducción de resistencia	0, 5
	<hr style="width: 100px; margin: 0 auto;"/>
	$\Sigma R = 10, 0$

En otras palabras,

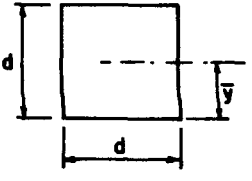
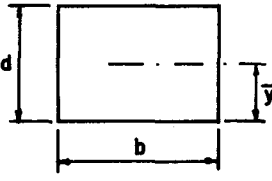
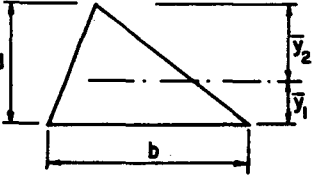
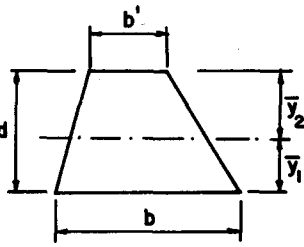
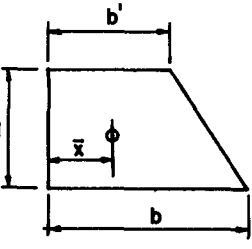
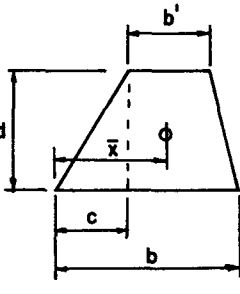
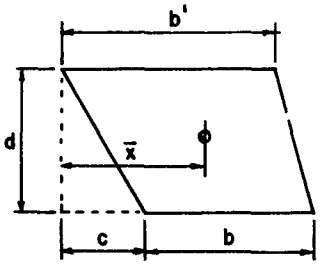
$$\text{Factor de carga (seguridad)} = \frac{\text{carga última}}{\text{carga de trabajo}}$$

Las tablas siguientes indican cómo podría determinarse el factor de seguridad en el caso de un hangar con marcos de hormigón-armado según diferentes condiciones de construcción.

Condiciones	Valores de R (véase tabla siguiente)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
(1) Resultado de una falla	4,0	4,0	1,0	1,0	4,0	4,0	1,0	1,0
(2) Mano de obra	2,0	2,0	2,0	2,0	0,5	0,5	0,5	0,5
(3) Condiciones de carga	2,0	1,0	1,0	2,0	2,0	1,0	1,0	2,0
(4) Importancia del miembro en la estructura.	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
(5) Aviso de falla	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
(6) Reducción de resistencia.	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
ΣR	10,0	9,0	6,0	7,0	8,5	7,5	4,5	5,5
F	2	1,9	1,6	1,7	1,85	1,75	1,45	1,55

Columnas en tabla anterior	Material	Posición	Uso
1	Hormigón armado fabricado en sitio	Expuesta	Reunión ocasional de público
2	ídem	Resguardada	ídem
3	ídem	Resguardada	Almacenaje de materiales no averiados
4	ídem	Expuesta	ídem
5	Hormigón prefabricado	Expuesta	Reunión ocasional de público
6	ídem	Resguardada	ídem
7	ídem	Resguardada	Almacenaje de materiales no averiados
8	ídem	Expuesta	ídem

APENDICE

 $A = d^2$ $\bar{y} = \frac{d}{2}$	 $A = db$ $\bar{y} = \frac{d}{2}$
 $A = \frac{bd}{2}$ $\bar{y}_1 = \frac{d}{3}$ $\bar{y}_2 = \frac{2d}{3}$	 $A = \frac{d(b+b')}{2}$ $\bar{y}_1 = \frac{d(b+2b')}{3(b+b')}$ $\bar{y}_2 = \frac{d(2b+b')}{3(b+b')}$
 $A = \frac{d(b+b')}{2}$ $\bar{x} = \frac{b(b+b') + b'^2}{3(b+b')}$	 $A = \frac{d(b+b')}{2}$ $\bar{x} = \frac{b(b+c) + b'(b'+b+2c)}{3(b+b')}$
 $A = \frac{d(b+b')}{2}$ $\bar{x} = \frac{b(b+2c) + b'(b'+b+c)}{3(b+b')}$	

CONTENIDO

Página

INTRODUCCION	i
CAPITULO I. TEORIA DE LAS LINEAS DE FRACTURA EN LOSAS DE HORMIGON ARMADO.....	1
<p>Teoría. Tramos simplemente apoyados. Tramos empotrados. Losas en dos direcciones. Construcción de las líneas de fractura. Esfuerzos cortantes. Corrección cuando una línea de fractura corta un borde libre. Condición en las esquinas. La condición de equilibrio. La ecuación del trabajo. El método de cálculo. Ejemplos. Losas desigualmente reforzadas. Cargas con centradas.</p>	
CAPITULO II. TEORIA DE LA RESISTENCIA A LA RUP - TURA DE LOSAS DE HORMIGON ARMADO..	62
<p>Ideas básicas. Distribución de los esfuerzos de compresión. El análisis de Whitney. Recomendaciones del Instituto Norteamericano del Hormigón (ACI). Ejemplos.</p>	
CAPITULO III. EL FACTOR DE CARGA	84
<p>Generalidades. Variabilidad del factor de carga. Algunos factores de carga propuestos. Recomendaciones del ACI. Factores de carga basados en un promedio compensado de las condiciones propuestas. Ejemplo.</p>	
APENDICE.	95
OBRAS CONSULTADAS.	97

OBRAS CONSULTADAS

1. Arild Berg, "The Theory of the Lines of Fracture of Reinforced Concrete Slabs", Tesis de Grado, The Royal College of Science and Technology, Glasgow, Escocia, 1955.
2. Ramji Khanna, "An Experimental Investigation of Ultimate Load Conditions for Hipped Plate Construction in Reinforced Concrete", Tesis de Grado, The Royal College of Science and Technology, Glasgow, Escocia, 1956.
3. A. R. Dykes, "Folded Plate Construction: an Investigation of Collapse Conditions," inédito, The Royal College of Science and Technology, Glasgow, Escocia, 1958.
4. Eivind Hognestad, "Yield-Line Theory for the Ultimate Flexural Strength of Reinforced Concrete Slabs," ACI Journal, V. 24, N^o 7, marzo de 1953; Proceedings V. 49, págs. 637-656.
5. Richard C. Elstner y Eivind Hognestad, "Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs," ACI Journal, V. 28, N^o 1, julio de 1956; Proceedings V. 53, págs. 55-57.
6. Phil M. Ferguson, "Reinforced Concrete Fundamentals," John Wiley & Sons, Nueva York, 1a. ed., 1958, págs. 17-21, 45-58, 251-277, 438-441.
7. Leo H. Corning, "Introduction to Ultimate Load Design" y otros artículos, ACI Journal, V. 23, N^o 10, junio de 1952, Proceedings V. 48, págs. 797-900.
8. ACI-ASCE, Comité 327, Leo H. Corning Presidiendo, "Ultimate Strength Design," ACI Journal, V. 27, N^o 5, enero de 1956, Proceedings V. 52, págs. 505-524.
9. Charles S. Whitney y Edward Cohen, "Guide for Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete," ACI Journal, V. 28, N^o 5, noviembre de 1956, Proceedings V. 53, págs. 455-490.

10. A.L. Baker, "The Ultimate-Load Theory Applied to the Design of Reinforced and Prestressed Concrete Frames," Concrete Publications Ltd., Londres, 1a. ed., 1956, págs. 1-8.