UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICA

SEMINARIO DE GRADUACIÓN PARA OPTAR POR LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RESIGNIFICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA A PARTIR DE LA PRÁCTICA DE ACUMULACIÓN: EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE EN EL CURSO DE FUNCIONES RIEMANN INTEGRABLES DE LA CARRERA BACHILLERATO Y LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Estudiantes

Brenda Rodríguez Walker	B66145
Kimberly Rojas Castro	B66185
Tatiana Merino León-Páez	B74763

San José, Costa Rica

Abril, 2023

ACTA DE LA DEFENSA PÚBLICA (VIRTUAL O PRESENCIAL) DEL TRABAJO FINAL DE GRADUACIÓN

Acta defensa de TFG EMat-1-2023
Celebrada el 14 de abril de 2023

TABLA DE CONTENIDO

Acta defensa de TFG EMat-1-2023

Acta de la sesión N° 1-2023 celebrada por la Escuela de Matemática, el viernes 14 de abril de 2023, a las 8:00 horas, con el único propósito de proceder a la defensa pública del Trabajo Final de Graduación, modalidad Seminario de Graduación, de las Sritas. Tatiana Merino León-Páez, Brenda Rodríguez Walker y Kimberly Rojas Castro, para optar por el grado de Licenciatura en Educación Matemática.

El Tribunal Examinador está constituido por las siguientes personas:

- Dr. Rodolfo Fallas Soto, Director del Trabajo Final de Graduación.
- M.Sc. Wendolyne Ríos Jarquín, integrante del Comité Asesor, quien se conecta de manera remota vía la plataforma Zoom.
- M.Sc. Elizabeth Díaz Gutiérrez, integrante del Comité Asesor, quien se conecta de manera remota vía la plataforma Zoom.
- Dr. Jonathan Gutiérrez Pavón, miembro del Tribunal.
- Dr. Javier Trejos Zelaya, Director, Escuela de Matemática, Presidente del Tribunal.

Artículo 1.

El Presidente del Tribunal informa que el expediente de cada una de las estudiantes contiene todos los documentos que exige el Reglamento General de los Trabajos Finales de Graduación en Grado para la Universidad de Costa Rica, a saber:

1. Copia del Expediente Académico, extendida por la Oficina de Registro e Información.
2. Verificación en el Sistema de la Oficina de Administración Financiera, de que no tienen deudas con la Universidad.
3. Certificación de delincuencia extendida por el Registro Judicial.
4. Estudio académico realizado por la Comisión de Currículo sobre conclusión del plan de estudios.
5. Resumen escrito del Trabajo Final de Graduación.

El presidente del Tribunal les solicita que procedan a hacer la exposición.

Artículo 2.

Las postulantes realizan la exposición de su Trabajo Final de Graduación titulado: “Resignificación de la integral definida a partir de la práctica de acumulación: Experiencia de aprendizaje en el curso de funciones Riemann integrables de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática”.

Artículo 3.

Terminada la disertación, los miembros del Tribunal Examinador interrogan a las postulantes durante el tiempo reglamentario y una vez concluido el interrogatorio, el Tribunal se retira a deliberar.

Finalizada la deliberación del tribunal, éste considera que las respuestas a las preguntas fueron: **Satisfactorias.**

Artículo 4.

Después de discutir los méritos de las postulantes y la calidad de su trabajo, declara que el mismo es:

Aprobado por unanimidad.

Observaciones:

Por unanimidad, el Tribunal aprueba el trabajo con distinción, pues se considera sobresaliente ya que cada parte del TFG muestra gran racionalidad y coherencia, y se refleja en él un gran dominio teórico del tema. Además, el Tribunal recomienda la publicación de una síntesis del trabajo en una revisata científica.

Artículo 5.

De nuevo en la sala, la persona que preside el Tribunal Examinador comunica el resultado de la deliberación, a saber, declarar a las postulantes Licenciadas en Educación Matemática, en nombre de la Escuela de Matemática. Este acuerdo será firme cuando las postulantes hayan cumplido con los requisitos que impone el Capítulo VI del Reglamento General de los Trabajos Finales de Graduación en Grado para la Universidad de Costa Rica y con la obligación de juramentarse. Se les indica la obligación de presentarse al acto público de juramentación, al que serán oportunamente convocadas.

Se da lectura al acta la cual firman las postulantes y los miembros del Tribunal a las once horas con seis minutos.

MIEMBROS DEL TRIBUNAL EXAMINADOR

Dr. Rodolfo Fallas Soto
Director del Trabajo Final de Graduación

M.Sc. Wendolyne Ríos Jarquín
Integrante del Comité Asesor

M.Sc. Elizabeth Díaz Gutiérrez
Integrante del Comité Asesor

Dr. Jonathan Gutiérrez Pavón
Miembro del tribunal

Dr. Javier Trejos Zelaya
Director, Escuela de Matemática, Presidente del Tribunal Examinador

POSTULANTES

Tatiana Merino León-Páez

Brenda
RW

Brenda Rodríguez Walker

Kimberly R. C

Kimberly Rojas Castro

Comité Asesor

El comité asesor de este trabajo final de graduación está conformado por:

- el Dr. Rodolfo Fallas Soto, como director, actualmente profesor e investigador de la Universidad de Costa Rica;
- la M. Sc. Wendolyne Ríos Jarquín, investigadora y parte del cuerpo editorial de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa; y
- la M. Sc. Elizabeth Díaz Gutiérrez, profesora e investigadora de la Universidad de Costa Rica y coordinadora de la carrera Educación Matemática en la Sede del Sur de la Universidad de Costa Rica.

Índice

Índice de figuras y tabla

Introducción

Parte de la labor de una persona educadora matemática corresponde a la continua reflexión en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje, lo cual implica la toma de decisiones con respecto al diseño y valoración de tareas, la búsqueda de nuevas propuestas didácticas, realizar estudios de formación continua, entre otros. Derivada de nuestra experiencia, ampliando los significados asociados a la integral definida, posterior a un estudio de situaciones de cambio y variación en el curso de Ecuaciones Diferenciales; se tomó la decisión de profundizar y comprender el papel de la acumulación al estudiar fenómenos que surgen de situaciones reales. Entonces, se considera estudiar una propuesta de enseñanza en donde se aborde la integral definida desde esta perspectiva.

Posteriormente, en un conversatorio donde se presentó la Teoría Socioepistemológica, se expuso que el conocimiento es cuestionado constantemente y no solo lo construye la persona, sino que se lleva a cabo de forma conjunta en un entorno social. Lo anterior junto con sus principios permitió ver en esta teoría reflejadas algunas de nuestras creencias respecto a la forma en la que las personas aprenden y la manera en la que se pueden estudiar contenidos matemáticos.

Por ello, partiendo de la lectura reflexiva de artículos que han investigado problemáticas en relación con la integral definida, se identifica que tradicionalmente se enseña como el área bajo una curva, empleando la definición de sumas de Riemann o como límite. Este enfoque tradicional propicia el trabajo algorítmico, el uso de contextos matemáticos y no favorece la aplicación a problemas de la cotidianidad.

En la literatura se identificó otro abordaje de la integral definida, mediante la práctica de acumulación, que apoya la construcción de la integral definida. Esta nos permite diseñar una situación de aprendizaje para realizar un estudio de caso en personas educadoras matemáticas en formación. Todo esto con el propósito de documentar el actuar de las personas estudiantes al significar la noción de integral definida.

Ahora bien, la memoria de investigación que se presenta en este documento surge de la investigación realizada por las personas autoras para optar por el grado de Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, 2023. Seguidamente, se pretende brindar: En el capítulo 1 una categorización de trabajos que tratan el tema de la integral definida. En el capítulo 2 se plantean aquellos elementos que permiten llegar a la problemática planteada, así como los objetivos que se pretenden alcanzar. Por su parte, en el capítulo 3 se declaran los elementos teóricos que sirven como fundamento para el diseño de la situación de aprendizaje, la comprensión y el análisis de la información recolectada. En el capítulo 4 se exponen los aspectos metodológicos que describen todos los pasos que se seguirán a lo largo de la investigación. En el capítulo 5 se presentan reflexiones y discusiones sobre los hallazgos y, por último, en el capítulo 6 se sintetizan conclusiones, recomendaciones y prospectivas.

Capítulo 1: Antecedentes

Investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la integral definida se centran en las dificultades sobre la comprensión de esta noción que incluye el significado de otros objetos matemáticos (sumas, series numéricas, límites, derivadas, funciones) y muestran que la enseñanza tiende a ser procedimental. Particularmente, Contreras y Ordóñez (2006) afirman que los estudios relacionados con el significado de la integral definida están basados en una cierta exclusividad de la algoritmización en el cálculo, dándole un sentido algebraico del concepto.

Considerando esto, con el fin de robustecer el significado de la noción de integral definida, se buscan y estudian artículos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de este objeto. Por lo tanto, en esta sección se organizan los antecedentes respondiendo a las siguientes preguntas:

- ¿Qué aportaciones y reflexiones brindan sobre el significado y aprendizaje de la integral definida?
- ¿Qué prospectivas ofrecen para fortalecer la problemática de esta investigación?

Estas preguntas ayudaron a organizar los antecedentes en tres categorías: problema de significado asociado a la integral definida, visualización para la construcción de la integral definida y aproximación a la noción de acumulación para el significado de la integral definida. Determinar estas categorías implicó establecer indicadores sobre los principales resultados que se presentan en cada artículo estudiado. Esto se describe en el siguiente esquema (ver Figura 1):

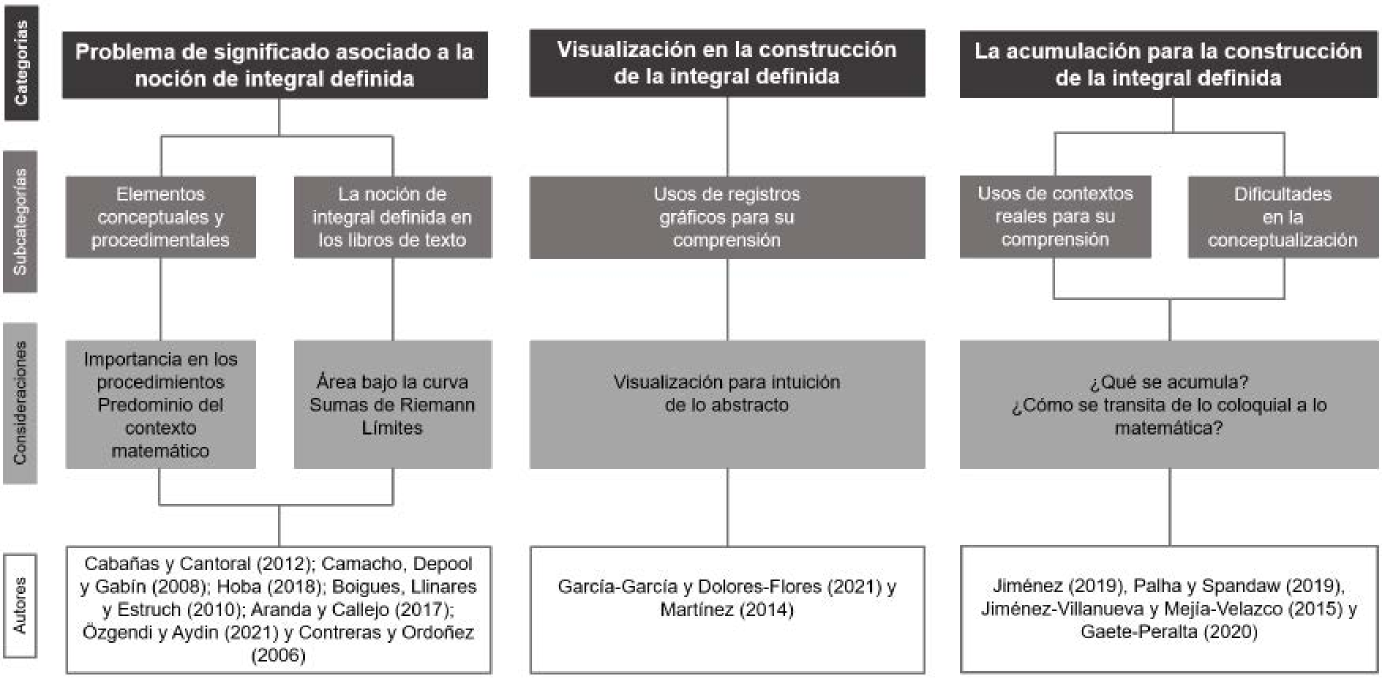


Figura 1. Esquema sobre la organización de los antecedentes.
Fuente: Elaboración propia

1.1 Problema de significado asociado a la noción de integral definida

1.1.1 Investigaciones sobre la conceptualización de la integral definida

Los investigadores Cabañas y Cantoral (2012) estudian la resignificación del concepto de integral definida, específicamente las condiciones que la permiten considerando sus usos, contextos y procedimientos matemáticos asociados a esta noción desde la conservación del área. Determinaron que los estudiantes emplean diversos métodos y sus propios recursos para explorar los usos del área. Sus argumentaciones se orientan hacia la medición, comparación, estimación y representación del área. Además, dentro de los procedimientos empleados por el estudiantado se destacan: métodos de aproximación por exceso, sumas de Riemann, métodos y técnicas de integración. Cabe destacar que se da importancia a los procedimientos analíticos, mas no se busca que se haga énfasis en estos.

Lo descrito anteriormente por Cabañas y Cantoral (2012) permite observar que es necesario explorar y emplear distintos usos, contextos y procedimientos, con el fin de significar la noción de integral definida. Por esto, en nuestra investigación se pretende ampliar el significado de la noción de integral definida, relacionándolo no sólo con el área bajo una curva, sino como aquellas acumulaciones que pueden observarse en fenómenos asociados a contextos de la vida real.

Por su parte, en la investigación de Camacho, Depool y Gabín (2008) se aborda la noción de integral definida desde la resolución de problemas, cuáles son esos elementos relevantes que deben ser identificados, la influencia que tiene un abordaje desde la perspectiva del área bajo la curva y la incidencia de la incorporación de software. En este caso, se logró observar que los estudiantes son capaces de identificar con eficiencia la información dada en el problema y emplean los distintos sistemas de representación, siempre y cuando el contexto sea matemático; situación que no sucede al presentarse otro tipo de contextos. Respecto al software *Derive*, este es de provecho en situaciones de contexto matemático, pero es un artefacto de cálculo en los otros casos.

Considerando lo expuesto anteriormente, en este trabajo se tiene en consideración efectuar exploraciones previas respecto a la idoneidad de las preguntas que se incorporan en el diseño de una situación de aprendizaje. De tal forma que se presente a las personas estudiantes cuestionamientos que los oriente a interpretar el contexto en el que se está trabajando y se encuentre estrechamente vinculado con la significación de la integral definida. Asimismo, se observa que es importante que se planteen contextos extra-matemáticos con el propósito de robustecer el significado de la integral definida, ampliando la significación de esta noción, fortaleciendo así su comprensión en un contexto matemático.

En los estudios de Hoba (2018) y Boigues, Llinares y Estruch (2010) se devela la necesidad de aportar significado a la integral definida, por tanto, abordan elementos asociados con su comprensión, posibles errores que se pueden presentar durante su aprendizaje y su desarrollo. En el caso de Hoba (2018), reflexiona que la integral involucra algunos conocimientos clave como razón de cambio, funciones, límite y derivada; aunque en su estudio no se evalúa si existe la comprensión de estos conceptos matemáticos.

Por su parte, Boigues et al. (2010) determinan que los estudiantes presentan una dificultad para relacionar la sucesión de sumas de Riemann con su dependencia de valor *n* de la partición, así como al generar el gráfico, puesto que los rectángulos dibujados no corresponden con lo especificado para cada subintervalo; además, consideran el concepto de sucesión como un listado y no como una función.

En consecuencia, en nuestra investigación se busca no solo abordar la noción de integral definida únicamente como sumas de Riemann o a partir de la noción de límite, sino robustecer el significado de esta a partir de su estudio en relación con la acumulación. Para ello, se presentan situaciones en donde se requiere para su solución el estudio de nociones base asociadas a la práctica de acumulación.

Por otro lado, Aranda y Callejo (2017) construyen el concepto de función integral en un experimento de enseñanza dirigido a estudiantes de bachillerato (entre 17 y 18 años) utilizando applets y diseñando una trayectoria hipotética de aprendizaje. Los resultados indican tres características al llevar a cabo el proceso de construcción de la función integral: 1) identificar la relación entre un extremo de un intervalo y el valor del área bajo una recta en dicho intervalo, 2) identificar esta relación como una forma de covariación simple, y 3) reconocer la covariación compleja entre la variable $x_i, x, [a, b]$, una función $f(t), t[a, x]$ y la función integral en funciones lineales.

La propuesta tiene sentido dentro de un contexto real de la matemática como área bajo la curva. No obstante, desde nuestro trabajo se quiere "romper" con este único significado, esto nos permitirá al menos trabajar un diseño exploratorio utilizando otro contexto situacional real donde se estudie la acumulación.

1.1.2 La noción de la integral definida en los libros de texto

En los trabajos de Özgendi & Aydin (2021) y Contreras y Ordoñez (2006) se realiza un análisis de libros de texto utilizados para la enseñanza y aprendizaje de la integral. Los hallazgos de los primeros revelaron similitudes sustanciales entre tres libros de texto de Cálculo, en cuanto al nivel de competencia exige alto nivel de comunicación, símbolos, formalismo; y bajo nivel en el diseño de estrategias, representación, razonamientos y argumentos. Por su parte, Contreras y Ordoñez (2006) indican que se hace más complejo para los estudiantes dar sentido a la integral definida, pues en los textos predomina el uso indiscriminado de afirmaciones generalizadas y casos particulares, lo cual aunado a la complejidad notacional, provoca que no sea tarea sencilla significar esta noción.

Estos resultados muestran la tradición escolar para la enseñanza de la integral definida; por lo que, en nuestra investigación, se tratará de diseñar tareas que permitan el entendimiento conceptual de la integral definida con apoyo de la interacción social. Además, realizar un abordaje de esa complejidad notacional respecto a este contenido y que las tareas que se propongan en un marco investigativo tengan plena consciencia de ese sentido intensivo y extensivo de los objetos asociados a la integral definida.

En otro punto, para complementar la síntesis de estudios donde se analizan libros de texto, con el fin de identificar la forma en la que se aborda la noción de integral definida, se hizo una revisión de algunos libros de texto que se suelen colocar en la bibliografía recomendada del curso de Funciones Riemann Integrables, en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica. Se evidenció que en los libros de Apostol (1967), Bartle (1980), Spivak (1994) y Purcell, Varberg y Rigdon (2007) se aborda la integral definida a partir de la suma de áreas de rectángulos con el propósito de sistematizar la noción de área bajo la curva, la cual se define luego formalmente como las sumas de Riemann.

En particular, en el libro de Apostol (1967) se aborda esta noción a partir del estudio de funciones escalonadas, así como del uso de representaciones gráficas como apoyo visual. Asimismo, en dicho libro se presenta un apartado de aplicaciones de la integral definida donde se trabaja para calcular el área de regiones delimitadas entre curvas. Por su parte, se observó que no se prioriza la visualización en la construcción de la integral definida, pues se muestran pocas representaciones gráficas en relación con el cálculo de áreas bajo curvas.

Resumiendo lo anterior, se identifica que el problema de significado de la integral definida se asocia a situaciones de contexto matemático donde mayoritariamente se trabaja con la noción de área bajo la curva, en algunos casos sistematizada a partir de la suma de áreas de rectángulo como antesala de la noción de sumas de Riemann. Ahora bien, en nuestro Seminario el propósito es trabajar con la acumulación, entendida esta como el elemento preliminar de la noción de cambio variacional y de la integral definida.

1.2 Visualización en la construcción de la integral definida

Los trabajos de García-García & Dolores-Flores (2021) y Martínez (2014) estudian cómo el uso del registro gráfico permite explicar la integral definida. En el caso de los primeros, identifican conexiones matemáticas vinculadas al trabajo con gráficas de funciones derivadas y antiderivadas; consideran que estas son resultado de determinadas creencias de los sujetos, por la formación que han recibido sus profesores y por la influencia marcada de los libros de texto. Además, destacan que las formas más frecuentes para el estudio de la integral definida, en un escenario escolar, son: área bajo la curva, sumas de Riemann y límites.

Ahora bien, en cuanto a la investigación de Martínez (2014), desde la visualización en matemáticas, muestra algunos métodos visuales de integración en el que se utilizan la simetría de las funciones, relación visual entre las funciones inversas y el uso del concepto de subtangente para la computación visual de áreas. Hace un llamado a utilizar la visualización para acompañar la construcción de la integral definida y lograr una intuición de lo abstracto, haciendo que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea más intuitivo. De lo anterior, la reflexión generada es que la visualización permite estudiar la acumulación del área bajo una curva para la comprensión de la integral definida.

1.3 La acumulación para la construcción de la integral definida

En las investigaciones de Jiménez (2019), Palha & Spandaw (2019), Jiménez-Villanueva y Mejía-Velazco (2015) y Gaete-Peralta (2020) se estudia cómo por medio de la acumulación se significa la noción de integral definida. No obstante, en cada una de ellas se aborda esto enfatizando elementos distintos; por ejemplo, unas enfatizan las construcciones o procesos mentales asociados que se presentan durante este proceso de dotar de sentido, o desde la evidencia bibliográfica existente en torno al tema.

En los trabajos de Jiménez-Villanueva y Mejía-Velazco (2015) y Gaete-Peralta (2020) se proponen investigar los procesos mentales asociados a la integral definida por medio de la función de acumulación. En el primero se determinan cuáles son esas construcciones mentales que sirven de base para el desarrollo de esta noción, destacan que la determinación de ese sentido generalmente proviene de lo que proponen los libros de texto, donde enfatizan que frecuentemente se presenta por medio de la suma de Riemann en un intervalo definido y que hasta la incorporación del Teorema Fundamental del Cálculo se establece un vínculo con la función de acumulación. Estos mismos investigadores también señalan que para la construcción del esquema de integral definida en un intervalo cerrado, es necesario que el sujeto tenga conocimiento de sucesión, límite de una sucesión y función.

Respecto a Gaete-Peralta (2020), este indica que es parte de la tradición escolar estudiar la integral definida desde las sumas de Riemann y la perspectiva conceptual que establecen Riemann y Cauchy, empleando la definición de Newton-Leibniz; cuando se hace cálculo integral se emplean métodos elementales. Inclusive se ha llegado a consensuar que este tipo de contenidos debe ser estudiado como la aproximación de un área bajo la curva mediante el uso de rectángulos y la sumatoria de sus áreas.

Ahora bien, Jiménez (2019) menciona que, en el enfoque habitual para enseñar Cálculo Integral, se introduce la integral indefinida como la operación inversa a la derivación, la antiderivada, luego se presenta el Teorema Fundamental del Cálculo y finalmente algunas aplicaciones de esta. Debido a que su trabajo se centra en un acercamiento dinámico a la integral definida por medio de la acumulación, expone que existen una serie de problemáticas asociadas a la comprensión de la idea de acumulación; principalmente el identificar qué es lo que se está acumulando, el transitar de esa comprensión coloquial a una matematizada, el manejo algebraico que representa a esa acumulación y su respectivo significado. Además, Palha & Spandaw (2019), tras una revisión de otras investigaciones, destacan lo complicado que es para el estudiantado crear imágenes mentales de un objeto en movimiento en relación con la acumulación y la integral, en particular se presentan dificultades para interpretar y relacionar el área bajo la curva con fenómenos en desplazamiento.

Considerando estas investigaciones, algunos elementos que pueden aportar a nuestra problemática es hacer uso de contextos extra-matemáticos que sean familiares para la persona estudiante, tener en cuenta la existencia de deficiencias en cuanto a un abordaje por medio de la acumulación para la noción de integral definida, con el propósito de buscar minimizarlos. También se debe prestar especial atención al tratamiento que se haga con las funciones continuas y efectuar una ampliación de la definición de integral definida donde no se limite a la tradicional Riemann-Cauchy, y se establezcan mecanismos para acercar al estudiante a las otras formas de definirla.

Capítulo 2: Problemática

2.1 Contexto institucional de la integral definida

Tradicionalmente, el objeto de integral definida es parte de la malla curricular de la formación de docentes. Según lo que se establece en el Plan de Estudios de Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática de la Resolución VD-R-9454-2016[1], en el que se estipula que, el primer encuentro de esta noción se da en el curso de Funciones Riemann Integrables MA0019. De acuerdo con lo que se expone en el programa de esta asignatura, el tratamiento que se hace de este objeto y sus relaciones está regulado por los ejes de formación y tienen el objetivo de que las personas estudiantes sean capaces de comprender, interpretar y deducir analíticamente resultados del cálculo integral. Además, que empleen estos resultados para el cálculo de volúmenes, longitudes de arco y área de sólidos de revolución (Departamento de Educación Matemática, 2021).

Retomando los ejes de formación, estos orientan el cómo se abordan los contenidos matemáticos y el enfoque con el que se trabajan. Corresponden a conceptos, procedimientos y actitudes que se estudian y desarrollan, de forma vertical y horizontal, dentro y fuera de los espacios de clase, a lo largo de toda la formación universitaria. Particularmente, en el curso MA0019 (Departamento de Educación Matemática, 2021), se da énfasis en los siguientes ejes:

- *Didáctico matemático:* Se enfatiza por medio del establecimiento de conexiones entre los objetos matemáticos a través de la exposición de ideas y la justificación formal. Además, se enriquece a través de espacios de discusión donde las personas estudiantes presentan ejercicios y deben explicitar el proceso de solución, recalcando la ruta que abordaron, los procedimientos y elementos teóricos que justifican su actuar.
- *Recursos tecnológicos:* Se incluyen herramientas de edición de texto y video para elaborar recursos gráficos, con el propósito de potenciar la visualización y apoyar la comprensión de los objetos matemáticos y sus relaciones.
- *Aplicaciones de la matemática:* Se explicitan diversas aplicaciones de los elementos teóricos, enfatizando en aquellos vinculados a elementos probabilísticos.

Desde nuestra experiencia como estudiantes de la carrera, en el curso de Funciones Riemann Integrables, la integral definida se trabaja a partir de la suma de áreas de rectángulos, asociándola al área bajo la curva de funciones escalonadas. Luego, se formaliza con las sumas

[1] La Resolución muestra un error con respecto al nombre. Debe leerse correctamente: “integrables”.

de Riemann; incluso se realizan aproximaciones con polinomios de Taylor. También, se aplica la integral para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, longitudes de arco, áreas de superficies de revolución, aplicaciones en Economía, Medicina y Física.

Posterior al curso de Funciones Riemann Integrables, en los cursos de Estadística y Probabilidad II, Funciones en Varias Variables y Ecuaciones Diferenciales, se aborda la integral definida como herramienta para la resolución de tareas matemáticas. En la Tabla 1, se detallan las siglas y los ciclos en los que se ubican los cursos.

Tabla 1. Ubicación de los cursos Funciones Riemann Integrables, Estadística y Probabilidad II, Funciones en Varias Variables y Ecuaciones Diferenciales en el plan de estudios de la carrera de Educación Matemática.

Nombre del curso	Sigla	Ciclo
Funciones Riemann Integrables	MA0019	VI Ciclo
Estadística y Probabilidad II	MA0023	VII Ciclo
Funciones en Varias Variables	MA0032	VIII Ciclo
Ecuaciones Diferenciales	MA0030	IX Ciclo

Fuente: Elaboración propia con base en la malla curricular de la carrera.

Respecto al curso de Estadística y Probabilidad II, la integral definida se asoció con las funciones de densidad, distribuciones muestrales y de probabilidad. En Funciones en Varias Variables, se trabajó la integral en dos y tres variables, así como el cálculo y cambio de variables de integrales dobles y triples. Se relacionó también con el área bajo la curva, sumas de áreas de rectángulos, áreas entre curvas y de superficies de revolución, y el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

En resumen, los cursos mencionados anteriormente y en concordancia con algunas investigaciones descritas en los antecedentes, se abordó la noción de integral definida utilizando los métodos y técnicas más comunes y tradicionales. Eso se evidenció al hacer una revisión de algunas referencias bibliográficas ofrecidas en el programa del curso Funciones Riemann Integrables. Por ejemplo, en los libros de Apostol (1967), Bartle (1980), Spivak (1994) y Purcell, Varberg y Rigdon (2007) se estudia a partir de la suma de áreas de rectángulos con el propósito de sistematizar la noción de área bajo la curva, la cual se define luego formalmente como las sumas de Riemann.

Finalmente, en el curso de Ecuaciones Diferenciales, se interpretó la integral definida de forma distinta, pues se estudiaron fenómenos cuyo contexto es situacional real, en los cuales esta noción se asoció a una acumulación. Fue en este curso donde se logró evidenciar una resignificación de la integral definida, pues se amplió el panorama de interpretaciones o significaciones vinculadas a este objeto matemático al enfrentarse a distintas tareas matemáticas enmarcadas en diversos contextos.

2.2 Problemática de investigación

La integral definida ha sido un concepto que tuvo su origen en la necesidad de resolver problemas concretos. En la actualidad, se considera como una herramienta que ayuda a modelar y resolver problemas que tienen aplicaciones en distintos ámbitos, ya sean intra o extra-matemáticos. Es por esto que, en los currículum de carreras como ingeniería, estadística, física, ciencias de la salud, etc.; se estudia esta noción. Incluso, en otras latitudes se incorpora la integral definida en el currículum de secundaria.

Tradicionalmente, se ha enseñado la integral definida a partir de la noción de área bajo la curva, como suma de Riemann y como un límite, según se identificó en los estudios de Cabañas y Cantoral (2012), Özgendi & Aydin (2021) y Contreras, Ordoñez (2006), García-García & Dolores-Flores (2021), Martínez (2014), Gaete-Peralta (2020), Jiménez (2019). Ahora en lo que refiere a los contextos de las tareas, estas suelen estar enmarcadas en situaciones matemáticas, donde se favorece la manipulación y representación algebraica (Camacho, Depool y Gabín, 2008).

Producto de este tratamiento los autores Hoba (2018), Boigues, Llinares y Estruch (2010), Cabañas y Cantoral (2012), Camacho, Depool y Gabín (2008), Özgendi & Aydin (2021) y Contreras, Ordoñez (2006) García-García & Dolores-Flores (2021) y Martínez (2014) identifican una serie de limitaciones, aunque no se enfatiza en cómo se podrían subsanar, dentro de estas encontramos las siguientes:

- Predominio de tareas cuyo contexto es intra-matemático.
- Abordar la integral solamente como área bajo la curva.
- Limitar la definición exclusivamente a la dada por Riemann-Cauchy.
- El predominio de funciones no continuas.
- No se suelen realizar diagnósticos con el fin de identificar los conocimientos previos de las personas estudiantes.
- Predominio del tratamiento algorítmico, empleando representaciones algebraicas.

Dado lo expuesto anteriormente, donde se retoman elementos abordados en los antecedentes, pueden determinar ciertas estrategias para robustecer el significado de la integral definida. Una de ellas es el diseño de tareas que permitan el entendimiento conceptual de esta noción, que tengan una relación con un contexto situacional real que se propone en los trabajos de Cabañas y Cantoral (2012), Camacho, Depool y Gabín (2008), Jiménez (2019), Palha & Spandaw (2019), Jiménez-Villanueva y Mejía-Velazco (2015) y Gaete-Peralta (2020). Esto porque se les permite a las personas estudiantes explorar situaciones cercanas a su realidad personal o profesional, en donde se deba utilizar la integral definida y evidenciar cómo se emplea esta noción en su quehacer.

La tendencia tradicional de su enseñanza se observó en el curso Funciones Riemann Integrables tal y como se ha descrito previamente, esto desde la experiencia de las ponentes, así como de la revisión de las referencias bibliográficas del programa del curso. Lo anterior, presentado en la sección *2.1 Contexto institucional de la integral definida*.

Particularmente, entendiéndose a la acumulación como la práctica que evidencia el aumento progresivo de cierta cantidad, Cordero (2003) sugiere diseñar situaciones de aprendizaje que enfoquen más la atención en aquellas que se caractericen por ser específicas, donde se involucre a la noción de acumulación y no directamente a conceptos como sumas de Riemann. Por su parte, Morales et al. (2012) indican que existen estudios socioepistemológicos que trabajan la construcción de la integral, dentro de situaciones de variación continua, y se centran en entender la acumulación en contextos reales. Lo anterior puede ponerse en práctica al plantear tareas cuyo objeto sea el estudio de fenómenos donde la acumulación es la acción de agrupar datos relacionados con la evolución de este, conforme transcurre el tiempo.

Por lo tanto, esta investigación radica en un problema de significación de la integral definida, en la cual se construye una experiencia de aprendizaje por medio del estudio de contextos situacionales reales, de tal forma que se pueda robustecer dicha noción a partir de la práctica de acumulación. Lo descrito anteriormente se sintetiza en la Figura 2 que se muestra a continuación:

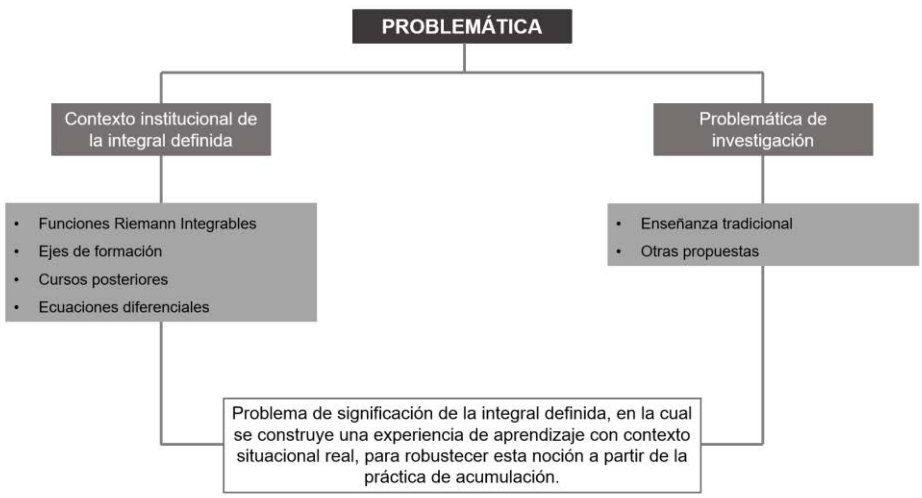


Figura 2. Esquema sobre la construcción de la problemática.

Fuente: Elaboración propia.

La ruta para diseñar y valorar tal experiencia de aprendizaje se puntualiza a partir de los objetivos de investigación.

2.3 Objetivos

2.3.1 Objetivo General

Examinar el actuar de las personas educadoras matemáticas en formación vinculado con la significación de la integral definida tras vivir una experiencia de una situación de aprendizaje basada en contextos situacionales reales de la práctica de acumulación.

2.3.2 Objetivos Específicos

1. Caracterizar la práctica de acumulación, con el fin de identificar y explicar aquellas acciones, actividades y prácticas involucradas en el estudio de la integral definida.
2. Diseñar e implementar una situación de aprendizaje a partir de la adaptación de tareas matemáticas que permitan significar la noción de integral definida a partir de la práctica de acumulación, en contextos situacionales reales.
3. Caracterizar los significados que se asocian a la noción de integral definida a partir de la práctica de acumulación, antes y después de la implementación de la situación de aprendizaje.

Capítulo 3: Marco Teórico

Como punto de partida en esta investigación, se identifica un problema de significado alrededor de la integral definida, por lo que es necesario diseñar tareas matemáticas con el fin de examinar el actuar de las personas al dar distintos significados a la integral definida a partir de la acumulación, de acuerdo con los contextos en los que se enmarca cada una de las tareas. Lo primero que se debe considerar para llevar a cabo lo expuesto, es reflexionar sobre el énfasis que se suele dar al objeto matemático (integral definida) cuando se estudian fenómenos asociados con la acumulación. No obstante, para experimentar este cambio en relación con dicho conocimiento, es necesario estudiarlo desde distintos escenarios escolares; es decir, se "propone que no solo se enseñen contenidos matemáticos, sino que se debe propiciar un desarrollo del pensamiento matemático, usando y desarrollando aquellas prácticas trabajadas en el estudiante desde su realidad" (Fallas-Soto, 2019).

De acuerdo con lo anterior, se reconoce la pertinencia de enmarcar la problemática desde la Teoría Socioepistemológica del Conocimiento Matemático (TSCM), dado que esta cuenta con elementos teóricos que ayudan a responder ante la problemática. Por ejemplo, la forma de intervenir en el sistema educativo para trabajar el significado de la integral definida es a partir de una situación de aprendizaje construida desde un contexto situacional real y un contexto de significancia centrado en prácticas (Reyes-Gasperini, 2016). Para este último, se necesitan tener prácticas que se logran con una descentración del objeto (Cantoral, 2019) y, por supuesto, debe considerarse la visión de los principios de la TSCM y la personalización de la problematización del saber matemático para con este trabajo.

Por lo anterior, se estructura el marco teórico, según los elementos enunciados, en la Figura 3:

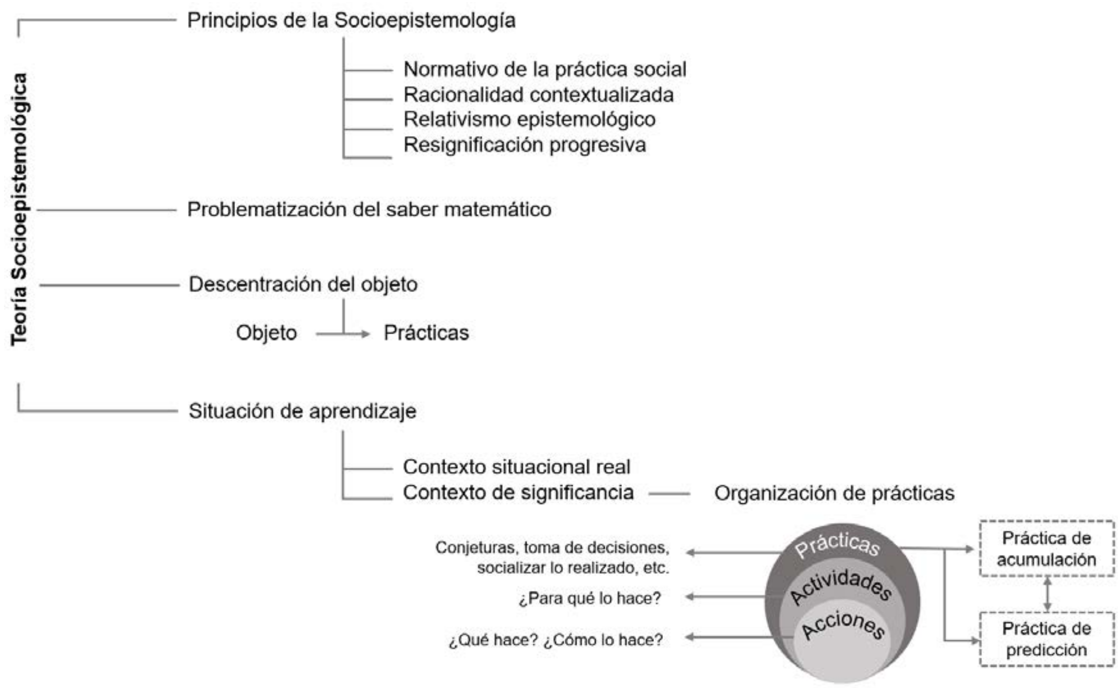


Figura 3. Esquema del marco teórico.

Fuente: Elaboración propia.

3.1 Principios de la Teoría Socioepistemológica

Sobre los principios de la TSCM, también conocida como la Socioepistemología, Cantoral (2019) menciona que actúan siempre de forma articulada en la construcción social del conocimiento, la constitución del saber. El objetivo de mencionar estos principios es brindar un acercamiento hacia las bases que fortalecen la teoría y, además, conformarán “el lente” que ayudará a realizar el análisis de los datos obtenidos para el apartado de resultados y conclusiones de esta investigación. Cantoral, Montiel y Reyes–Gasperini (2015) realizan una caracterización de estos principios, la cual será la base de esta exposición.

Principio normativo de la práctica social: Las prácticas sociales son las generadoras del conocimiento, la base fundamental de la Socioepistemología. Estas dotan de identidad cultural a la persona o a un grupo humano y regulan su comportamiento. Dichas prácticas no son estáticas, son cambiantes dada la evolución en el tiempo de los seres humanos.

Principio de la racionalidad contextualizada: El contexto determina el tipo de racionalidad con la que una persona o grupo humano construye el conocimiento, significándolo y poniéndolo en uso, de acuerdo con la realidad en la que se sitúa el sujeto o el grupo.

Principio del relativismo epistemológico: Se reconoce la existencia de diversas maneras de construir, significar y utilizar el conocimiento. Es decir, lo que se comprende por saber es relativo al grupo humano que lo construye (Fallas-Soto, 2021).

Principio de la resignificación progresiva: Las acciones de una persona sobre un objeto inciden sobre el significado que se construya, ya que este depende del escenario contextual donde se producen dichas acciones (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). En síntesis, el saber se resignifica progresivamente dada la evolución del grupo humano y de su interacción con distintos contextos. Lo anterior, permite robustecerlo y dotarlo de nuevos significados.

Estas relaciones entre los principios expuestos anteriormente se resumen en la Figura 4.

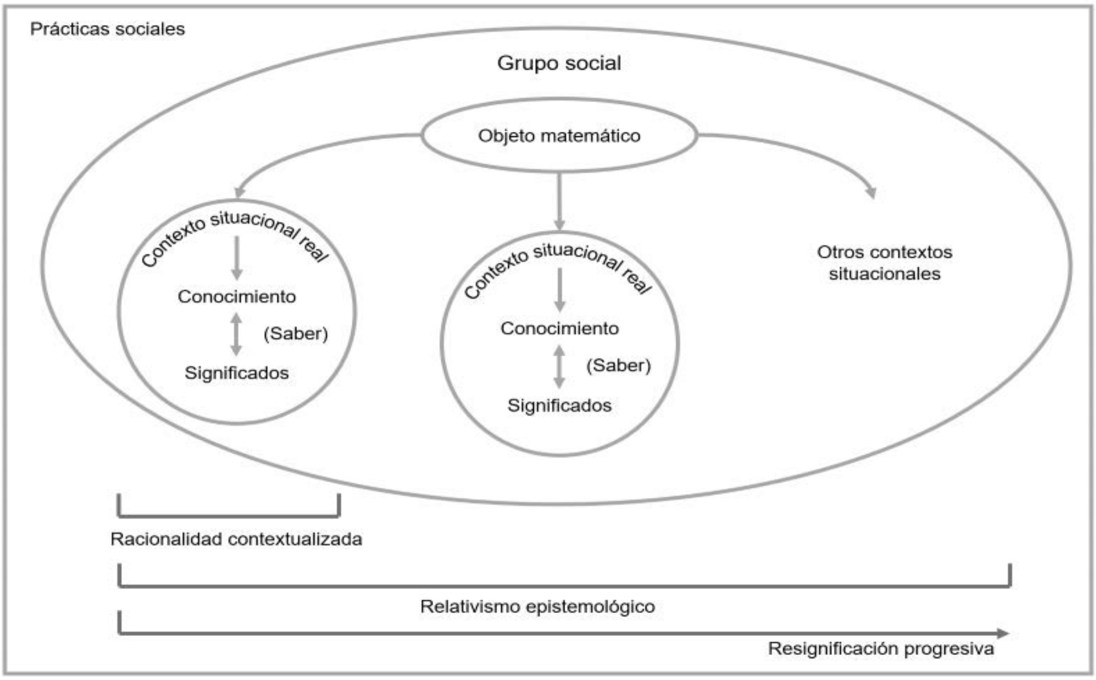


Figura 4. Síntesis de modelo, principios y funciones.

Fuente: Elaboración propia con base en Reyes–Gasperini (2011, citado por Peralta, 2019, p. 20).

3.2 Problematización del saber matemático

Desde la postura de la Socioepistemología, la problematización del saber tiene el propósito de que las personas aprendan con base en la construcción social del conocimiento. Por su parte, pretende dotar a las personas educadoras de espacios de reflexión y cuestionamiento de los saberes que les permitan potenciar y acompañar a las personas estudiantes en dicho proceso (Cantoral, 2013). En particular, la problematización del saber matemático “[...] consiste en estudiar un conocimiento matemático en uso desde uno o varios escenarios de un saber técnico, popular o científico; situado contextual y temporalmente, el cual ayuda a confrontar los conocimientos institucionalizados en la matemática escolar” (Fallas–Soto, 2021, p. 249).

En la problematización se dialoga y confronta a la matemática escolar, haciendo notar que el saber se conserva culturalmente de una época a otra; “la textura didáctica del saber también se historiza y dialectiza, se problematiza, se configura una dinámica de confrontación del antes, el ahora con el después” (Cantoral, 2013, p. 147). Es por esto que desde la Socioepistemología la problematización del saber matemático nunca acaba, sino que se robustece cada vez más, agregando o modificando elementos que la persona educadora matemática considere necesario junto con las nuevas aportaciones de la comunidad.

3.3 Descentración del objeto

Desde los principios de la Socioepistemología, se asume que es posible cuestionar el saber matemático e incentivar el desarrollo del pensamiento matemático, tomando y usando aquellas prácticas que son empleadas en la realidad del estudiante. Estas prácticas son de utilidad en la construcción de conocimiento desde diferentes saberes (técnico, popular y culto), influyendo en la forma de ver el conocimiento. Esto es aceptar un cambio de relación con el saber matemático: dejar de centrarse en el objeto matemático que tiene asociadas prácticas que son opacadas por el mismo discurso matemático escolar, tal y como se muestra en la Figura 5. Dicho de otro modo, es conveniente centrarse en las prácticas que el individuo posee como herencia cultural y que permiten construir los objetos matemáticos con una diversidad de significados, de acuerdo con la racionalidad del sujeto (Reyes–Gasperini, 2016).

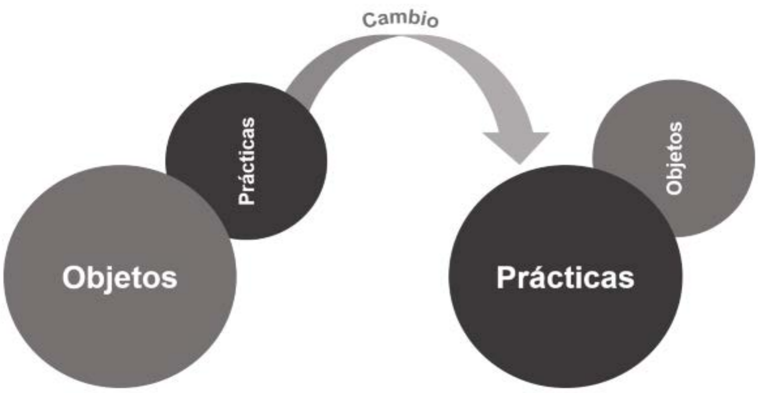


Figura 5. Descentración del objeto.

Fuente: Reyes–Gasperini (2016).

3.3.1 Organización de prácticas

Las prácticas socialmente compartidas son la base de la teoría Socioepistemológica, por lo que se ve normado o regulado el comportamiento de los individuos o grupos humanos. Cuando estos se enfrentan a un problema al cual deben responder, el primer acercamiento que tienen frente a este corresponde a un conjunto de acciones en el cual se trabaja de forma independiente. Luego, estos proceden a compartir con otros sus hallazgos y a organizar las acciones realizadas. Esto se lleva a cabo de forma sistematizada y se conoce con el nombre actividades, las cuales, posteriormente, se consolidan como prácticas socialmente compartidas (ver Figura 6). Dicho de otro modo, todo aquello que fue discutido y organizado de forma conjunta se institucionaliza como saber (Cantoral, 2001).

Figura 6. Organización de prácticas.

Fuente: Fallas–Soto (2021, p. 54).

3.4 Situación de Aprendizaje

La forma en la que los investigadores en Socioepistemología intervienen en el escenario escolar, con el fin de que las personas estudiantes construyan conocimiento, es por medio de la implementación de una *situación de aprendizaje*. La cual consiste en “un conjunto de momentos en un escenario real o hipotético, en el cual el individuo inhibe el uso exclusivo de recursos mnemotécnicos o técnicas, para empezar a cuestionar, razonar, argumentar; a tal punto que hace más evidente el uso de prácticas” (Fallas, 2021).

Una situación de aprendizaje se caracteriza por:

1) Dar importancia a la contextualización real o artificial, vinculada con otras ciencias y la vida cotidiana. Por esto, es necesario incorporar tareas donde el *contexto situacional* sea *real*, caracterizándose por considerar el entorno que da significado al objeto con el que se está trabajando. Es decir, aquellos contextos que son propios del quehacer científico, técnico y popular, en donde se usan los conocimientos con el fin de significarlos (Cantoral, 2013).

2) Enfrentar a la persona en un escenario en el cual debe movilizar el conocimiento que se requiere.

3) Emplear la matemática como herramienta para la toma de decisiones.

4) Privilegiar las diversas argumentaciones, considerando como válidas aquellas que son coherentes con su racionalidad (Simón, 2018). En relación con esto, Cantoral (2013) resalta la importancia del *contexto de significancia*, el cual estudia cómo las prácticas, a través del trabajo colaborativo, promueven una construcción social del conocimiento.

Además, se afirma que una persona está en una situación de aprendizaje si entra en conflicto y el mismo diseño le hace percatarse de ello (Reyes, 2011, como se citó en Simón, 2018). Es por esto que se estudia el actuar de una persona o un grupo en la construcción del conocimiento, en una situación donde se transforma la organización tradicional de los contenidos.

3.5 Práctica de acumulación

En algunas situaciones reales es necesario realizar cálculos sumando distintas cantidades a un valor total. La diferencia en la estrategia que se emplea radica en si las cantidades son discretas o continuas. Estas últimas se caracterizan por estar asociadas con fenómenos donde el proceso de acumulación de una variable en particular es continuo, conforme transcurre el tiempo. En consecuencia, el Cálculo Integral tiene el propósito de estudiar aquellos fenómenos en los que se suman o acumulan cantidades infinitesimales (Universidad Nacional de La Plata, 2016).

Aunado a lo anterior, en los casos en los que la tasa de acumulación varía respecto al tiempo, se requiere de una herramienta elaborada que permita realizar el cálculo de la cantidad acumulada. Dicho de otro modo, es necesario determinar una estrategia que permita sumar a "una cantidad muy grande de contribuciones [otras] muy pequeñas"; a esta se le conoce como integración (Universidad Nacional de La Plata, 2016, p. 2). En particular, se considera la noción de integral definida para realizar este tipo de estudios en un determinado intervalo de tiempo. Por su parte, dentro del marco de la Socioepistemología, la acumulación se concibe como una práctica, la cual se puede ver reflejada en el estudio de fenómenos cinemáticos en los cuales se estudia el cambio de estos, con respecto al tiempo.

3.5.1 Acumulación y valor acumulado

En el cálculo integral se encuentran dos nociones: acumulación y valor acumulado. La primera se refiere a aquello que se concentra, es la "suma de efectos locales que permiten reconocer un efecto total" (Gaete-Peralta, 2019, p. 38); y la segunda a lo que se va agregando, en donde "a partir de un estado inicial se le suma una acumulación total para conocer un estado superior" (Gaete-Peralta, 2019, p. 39). Es decir, ese valor acumulado es el que posibilita efectuar predicciones. Además, este mismo autor indica que la variación permite realizar predicciones de una situación pues describe cómo es que varía. Por ejemplo:

se tiene $\int_a^b F'(x)dx$ donde:

- $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$ refiere a la acumulación y
- $F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)dx$ refiere al valor acumulado

Además, se tiene:

- La relación funcional: $F(t)$, que corresponde a la cantidad desconocida.
- El estado final: $F(t_n)$, que es el valor acumulado.
- La diferencia entre el estado inicial y el final: $F(t_n) - F(t_0)$, que remite a la acumulación.

Ahora bien, en los fenómenos variacionales, es posible realizar una construcción del concepto por medio del estudio comparativo de dos estados. Al respecto Gaete-Peralta (2020) indica que en este tipo de situaciones el instrumento a emplear son las cantidades que varían de manera continua y el argumento viene a ser la predicción, con lo cual se significa el concepto como una relación entre el flujo, el movimiento, la acumulación o el estado permanente.

Detallando la predicción, esta es una práctica social en donde se amalgaman procesos de cambio vinculados a efectos locales acumulados en un determinado intervalo de variación, que Ortiz-Corredor (2013) considera como práctica de referencia. Este enlace es el que permite regular procesos de cambio que dotan de significado a la acumulación de efectos locales que pone en acción el objeto matemático de integral definida. Éstas se pueden presentar en situaciones donde se estudia el cambio y la variación, donde se usan gestos, lenguaje natural, conocimientos y argumentos racionales que provienen de las referencias de los saberes populares, técnicos y científicos; ante la imposibilidad humana de viajar al futuro se desarrollan estrategias para efectuar predicciones. Entonces, se tiene que "la predicción como práctica aparece en las estrategias funcionales emergentes para nuestra adaptación al medio" (Cantoral, 2013, p. 157).

3.5.2 Cambio y variación

Dentro de la Teoría Socioepistemológica se encuentra la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional, que se caracteriza por brindar "puentes entre la investigación y la realidad en el aula" (Cantoral y Farfán, 1998, p. 355). Además, favorece una articulación entre las prácticas sociales y la investigación, siendo las primeras elemento central de la matemática variacional y la modificación de los sistemas didácticos.

Al respecto, la variación es más que la cuantificación del cambio. De acuerdo con Caballero-Pérez (2018), esta es algo no observable, sino una inferencia, que se calcula, cuantifica y construye. Esa variación pone de manifiesto las relaciones existentes entre las variables que se estudian o que están involucradas en el estudio de un fenómeno y permiten enterarse de la evolución que tienen en los diferentes estados en los que se pueden presentar. Entonces, el cambio es una acción donde se transita de un estado a otro, donde se realiza una modificación.

Siguiendo con lo anterior, otro elemento por considerar es el carácter estable del cambio, que se refiere a una característica de la predicción de fenómenos variacionales, como se mencionó anteriormente. Se le describe como aquello que permite entender la dinámica de las variables y las variaciones que siguen, en donde se requiere determinar alguna regularidad o patrón en ese comportamiento variacional.

Capítulo 4: Descripción metodológica

Dada la naturaleza del trabajo, se busca profundizar en el estudio de la práctica de acumulación y en el conocimiento de la teoría socioepistemológica. El propósito es efectuar una exploración que nos aproxime a la problemática que mencionamos en secciones anteriores, esto a través del estructuramiento de actividades que permitan recopilar información respecto al objeto de estudio (Rodríguez, Piña y Seife, 2012). Por ello, a continuación, se describe el tipo de investigación, la población con la que se trabajó y cada una de las etapas y fases de la ruta metodológica. En esta última, se alude a las técnicas e instrumentos empleados para recabar información y se detalla la forma en la que esta se estudiará.

4.1 Tipo de investigación

El estudio que se lleva a cabo se enmarca dentro del *paradigma metodológico del enfoque cualitativo experimental*. Este se caracteriza, en términos de Baumgartner et al. (2003, citado por Briceño y Buendía, 2015), por combinar de manera empírica las teorías de aprendizaje con la investigación educativa. En donde destaca el recolectar datos que suelen pasar desapercibidos y estos aportan información para la comprensión de los fenómenos, porque considera “las expresiones, los gestos, las interacciones entre pares y profesor, los trabajos escritos y todas aquellas acciones que realiza el estudiante” (Briceño y Buendía, 2015, p. 67).

Particularmente, se efectúa un estudio de caso, “una investigación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo en su contexto real, donde los límites entre el fenómeno y el contexto no se muestran de forma precisa, y en el que múltiples fuentes de evidencia son utilizadas” (Yin, 1989, como se citó en Jiménez, 2012, p. 142). En lo que refiere a su diseño, tiene un propósito descriptivo y comparativo, pues se centra en indagar acerca de su particularidad, en lo que lo caracteriza y le es propio en, al menos, dos momentos del tiempo; de forma que para ello el estudio de caso simple es el adecuado (Kröll, 2013). Este último se caracteriza por ser análogo a un experimento, en el cual “el objetivo es capturar circunstancias y condiciones del día a día o situaciones comunes [...] Las lecciones aprendidas de estos casos se asumen como informativas sobre experiencias de una persona promedio o institución” (Yin, 2003, pp. 39-41). Lo anterior se resume en el esquema de la Figura 7:

Figura 7. Esquema del estudio de caso simple.

Fuente: Elaboración propia.

Lo anterior permite caracterizar los significados que las personas estudiantes asocian a la noción de integral definida, antes y después de la implementación de una situación de aprendizaje, en la cual se enfrentan a tareas donde deben responder a cuestiones en las que emerge la acumulación, con el fin de realizar predicciones y comprender mejor un determinado fenómeno que surge de una situación cuyo contexto es real. Es a partir de la información recolectada por medio de sus intervenciones, interacciones o producciones escritas que es posible contrastar sus concepciones al estudiar el mismo objeto (la integral definida) en distintos momentos y contextos intra y extra-matemáticos.

4.2 Participantes

En este Seminario de Graduación se trabajó con personas estudiantes de Bachillerato en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, matriculados en el curso MA0019 Funciones Riemann Integrables, en el II Ciclo 2021, en modalidad virtual. Cabe destacar, que MA0019 se ofrece regularmente de manera presencial, no obstante, dadas las medidas sanitarias por la Covid-19, durante la investigación, éste se ofreció de manera virtual, situación que limitó hasta cierto punto la realización de actividades de manera presencial.

La población participante estuvo constituida por 6 personas estudiantes. Todas contaban con conexión a Internet, computadora y celular; elementos necesarios para participar en la situación de aprendizaje que se les aplicó.

4.3 Ruta metodológica

Este estudio está compuesto de 4 etapas, como se muestra en la Figura 8:

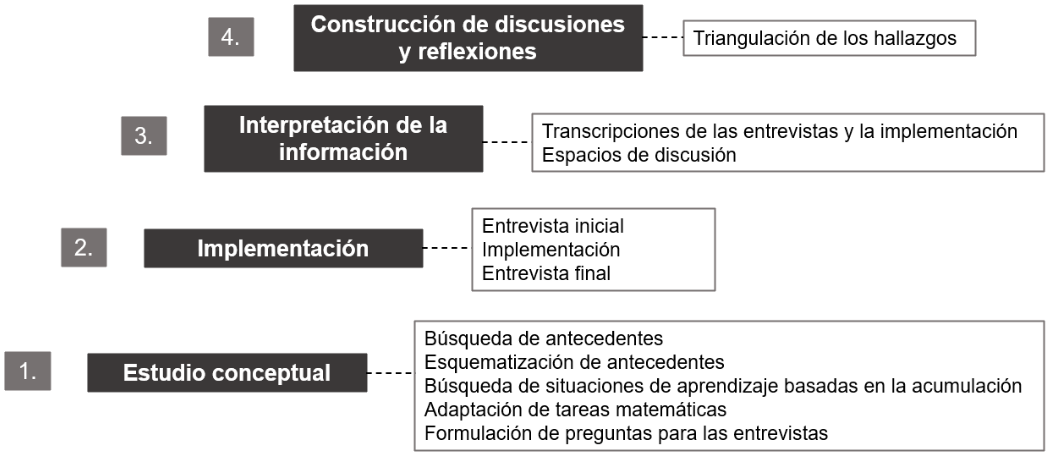


Figura 8. Etapas y fases de la ruta metodológica.

Fuente: Elaboración propia.

Seguidamente, se describe cada una de las etapas y fases que las componen.

4.3.1 Etapa 1: Estudio conceptual

Fase 1: Búsqueda de antecedentes

En la primera fase, en lo que refiere a la problematización del saber matemático, tras una revisión de textos sobre la integral definida, se identifica que: tradicionalmente se enseña como el área bajo la curva, empleando la definición de sumas de Riemann o como límite. Este enfoque tradicional propicia el trabajo algorítmico, el uso de contextos matemáticos y no favorece la aplicación de este conocimiento a problemas de la cotidianidad. En este punto, es menester efectuar una aclaración, conforme se avanza en cada etapa del trabajo, se sigue problematizando la integral definida; es decir, se aporta información que la nutre, por lo cual se puede caracterizar como un proceso acumulativo.

Entonces, se realiza una consulta de diferentes estudios y textos en donde se aborde la integral definida, algunos de ellos de manera general y otros específicamente mediados por la práctica de acumulación. De esta manera, se filtran los textos y se estudian en profundidad los que se vinculan directamente con la problemática por estudiar.

Fase 2: Esquematización de los antecedentes

Posterior a esta lectura, se seleccionan los escritos que aportan de manera significativa respecto a los puntos detallados anteriormente y se establecen tres categorías que resumen las temáticas que se abordan en los antecedentes y destacan estos aspectos centrales que nutren la problemática de la práctica de acumulación para la significación de la integral definida. Estos tres grandes bloques corresponden a: 1) los problemas de significado asociados a la integral definida, 2) la visualización en la construcción de la integral definida y 3) la acumulación para la construcción de la integral definida.

Fase 3: Búsqueda de situaciones de aprendizaje basadas en la acumulación

En esta fase se efectuó una consulta bibliográfica de trabajos en donde se estudian tareas que ya se han propuesto e implementado, las cuales favorecen la construcción de la integral definida por medio de la acumulación. Las tareas matemáticas provienen de la tesis de Marcía-Rodríguez (2020) (ver Anexo 1). Estas se seleccionaron porque buscan construir significados alrededor de la noción de la integral definida a través de la acumulación, y se encuentran enmarcadas dentro de lo que se postula en la teoría socioepistemológica. Además, se toma en consideración que las mismas estaban dirigidas a una población semejante con la que se trabajó.

Fase 4: Adaptación de tareas matemáticas

Para el rediseño de la situación de aprendizaje, tras seleccionar las tareas matemáticas, se procede a adaptarlas con el propósito de que la redacción, contenido e intencionalidad estén acorde con la población y el objetivo de este trabajo. Asimismo, se realizó una búsqueda de otras fuentes bibliográficas para contextualizar la situación de manera que las personas estudiantes tuvieran un referente que les permitiera comprender mejor el fenómeno a estudiar. Para ello, la fuente principal corresponde a la tesis de maestría de Huincahue (2011), en donde explica detalladamente el contexto de los ácaros. Da una descripción morfológica, explica el ciclo y control biológico, así como el crecimiento del ácaro *Brevipalpus chilensis*.

Posteriormente, se secuencian las tareas de tal manera que en ellas se articulen los cuatro elementos que caracterizan a una situación de aprendizaje, con el objetivo de favorecer la significación de la noción de integral definida a partir de la acumulación. Esto se logra al trabajar con el contexto de consumo de grados-días de los ácaros, el cual es real, describe un fenómeno y es necesario para dar sentido a lo efectuado. De tal manera que requiera que la persona estudiante emplee elementos matemáticos y movilice el conocimiento que se desea significar para resolver lo que se le plantea.

Además, estas características se fomentan pues se plantean momentos en donde se propician espacios de discusión y reflexión donde se busca que las personas estudiantes realicen una construcción social del conocimiento. En esta situación de aprendizaje estas se evidencian al emplear la práctica de predicción para otorgar un sentido a la acumulación y a la vez ligarla como la antesala de la noción de integral definida. Para ello, se acordó realizar la distribución de las tareas en cinco momentos, que se describen a continuación (ver Anexo 3):

- *Momento I: ¿Cómo interpreto la integral definida?*
  En este primer momento, se solicita determinar posibles valores para los límites de integración, dado el resultado de una integral definida.
- *Momento II: Crecimiento de un ácaro*
  En el segundo momento, inicialmente se hace una descripción sobre el contexto de las tareas propuestas; es decir, se da una breve explicación en relación con el crecimiento de un ácaro llamado *Brevipalpus chilensis.* Lo que se pretende estudiar es el cálculo de grados-días que acumulan estos organismos. Por ello, se solicita graficar e interpretar el consumo de grados-días de un ácaro en una semana.
- *Momento III: Crecimiento de un ácaro*
  En este tercer momento, se realiza el cálculo de grados-días que consumirá un ácaro en un lapso determinado, con el propósito de tomar medidas preventivas. Asimismo, se solicita una o más estrategias que permitan lograr una mayor precisión al realizar dichos cálculos.
- *Momento IV: Crecimiento de un ácaro*
  En el cuarto momento, además de calcular la cantidad de grados-días consumidos por el ácaro, se solicita determinar la cantidad de grados-horas. Lo anterior, con el propósito de realizar predicciones más acertadas.
- *Momento V: ¿Cómo interpreto la integral definida?*
  Se retoman las tareas realizadas en el Momento I, con el fin de que éstas se resuelvan nuevamente utilizando las estrategias de cálculo empleadas en los momentos anteriores.

Ahora bien, en cada una de las tareas propuestas, se tiene la intención de que se empleen representaciones gráficas, con el fin de que no se utilicen únicamente las algebraicas. Para ello, se promueve el uso de la herramienta GeoGebra. Además, la distribución se efectúa por momentos para que las personas estudiantes vayan al mismo ritmo y nadie se adelante. Es por esto que se entregan cada uno de los momentos hasta que se finalice el anterior.

En los primeros cuatro momentos, se solicita a las personas estudiantes explicar o describir las estrategias utilizadas para responder las preguntas. Esto con el propósito de que, en el Momento V, se retorne a la tarea planteada en el Momento I, con el fin de que las personas estudiantes lo resuelvan nuevamente, incorporando el uso de dichas estrategias. Nuevamente, la intención es que se utilice una representación visual, con el fin de que apoyaran sus explicaciones y que las vinculen con el significado que ellos tienen del área bajo una curva.

Por otro lado, algunas de las preguntas planteadas tienen el propósito de que las personas estudiantes empleen distintas unidades de medida. Con esto se busca que, por medio de la acumulación al determinar valores acumulados, se evidencie que entre más pequeña sea la partición, se obtiene una mejor aproximación al calcular una integral definida.

Fase 5: Formulación de preguntas para las entrevistas

En una fase posterior, se formulan las preguntas que orientan las entrevistas. Para ello, se consideran aspectos provenientes de los antecedentes, marco teórico, el estudio y adaptación de las tareas matemáticas, de las que se habla en la fase anterior, que vayan en concordancia con los objetivos propuestos en el trabajo. De estos elementos, se extraen consideraciones vinculadas a la significación de la integral definida, donde destaca el indagar el cómo se concibe, la representación que se le asigna y algunas de sus aplicaciones.

Respecto a su naturaleza, se considera efectuar *entrevistas semiestructuradas*, pues se parte de un conjunto de preguntas previamente establecidas, pero que, durante la entrevista, se ajustan a las respuestas que brindan las personas estudiantes. Particularmente, en este estudio se realizó una entrevista antes de la implementación y otra posterior a esta (ver Anexo 2).

4.3.2 Etapa 2: Implementación

En esta segunda etapa, se detalla cómo se llevaron a cabo las entrevistas iniciales; posteriormente, la implementación de la situación de aprendizaje y, por último, las entrevistas finales.

Fase 1: Entrevista inicial

La entrevista inicial se aplicó de forma virtual por medio de la plataforma Zoom el 03 de noviembre de 2021. Cada una de las integrantes del trabajo entrevistó a 2 personas estudiantes, de forma individual. Aproximadamente, la duración fue de entre 15 a 20 minutos por persona.

Fase 2: Implementación

La implementación de la situación se efectuó el 09 de noviembre, de forma virtual por medio de la plataforma Zoom. Para ello, se compartió con las personas estudiantes documentos con los enunciados de los diversos momentos de la situación y se les facilitó un espacio de mensajería a través de la plataforma Telegram para hacer entrega de los productos.

En este caso, la duración fue de aproximadamente 2 horas y 30 minutos, en donde no hubo recesos.

Fase 3: Entrevista final

La entrevista final se aplicó de forma virtual por medio de la plataforma Zoom el 09 de noviembre de 2021, inmediatamente después de la implementación de la situación de aprendizaje. Cada una de las investigadoras entrevistó a 2 personas estudiantes, de forma individual. Aproximadamente, la duración fue de entre 15 a 20 minutos por estudiante.

Cabe destacar que las entrevistas y la implementación fueron videograbadas con el propósito de efectuar transcripciones de estas en una fase posterior.

4.3.3 Etapa 3: Interpretación de la información

Fase 1: Transcripción de las entrevistas y de la implementación

Al efectuar la interpretación de la información se recurrió a la evidencia recolectada en las entrevistas y durante la implementación de la situación de aprendizaje. Para ello, inicialmente, se escuchó cada una de las videograbaciones y se escribió lo que las personas estudiantes enunciaron de manera textual. Posteriormente, se estableció un sistema de codificación, que tiene como objetivo resguardar la identidad de las personas participantes, asignando el código I# para referirse a las personas implementadoras y E# para las personas estudiantes.

En esta fase, se complementó las explicaciones orales de las personas estudiantes con imágenes, de sus producciones escritas o al utilizar el software GeoGebra, que contienen aspectos a los que aluden durante su exposición (ver Anexo 10). Esto se hace con el propósito de nutrir, complementar y ampliar la información, obteniendo así una mejor comprensión de lo enunciado.

Durante este proceso, se identificaron, de forma preliminar, algunos elementos vinculados con los objetivos del trabajo; es decir, aquella información que aporta a la comprensión de la noción de integral definida y la práctica de acumulación. Esto se realiza al mismo tiempo que se transcribe, no siendo este el único momento en el cual se busca establecer estas relaciones. Lo anterior, corresponde a los inicios de lo que posteriormente se expondrá y detallará en la fase de triangulación de los hallazgos.

Fase 2: Espacios de discusión

Tras efectuar las transcripciones y al realizar una primera lectura de las mismas, se identificó que no se establecieron relaciones significativas entre la noción de integral definida y la práctica de acumulación. Debido a esto, se tomó la decisión de establecer un espacio de discusión con una persona experta, con el propósito de ordenar las ideas provenientes de los hallazgos obtenidos al estudiar las transcripciones. Para ello, el Comité Asesor recomendó buscar acompañamiento de un especialista en Educación Matemática cuyo campo de estudio se centra en la Socioepistemología, específicamente en las prácticas de acumulación y predicción.

En dichos espacios de discusión grupal se abordaron los siguientes aspectos:

- Limitaciones y ventajas de la exploración realizada tras implementar la situación de aprendizaje.
- Discusión de los hallazgos generados tras estudiar las transcripciones de las entrevistas y la implementación.
- Problematización de la práctica de acumulación a partir del estudio de referencias. Experiencias obtenidas durante la exploración.

Con lo anterior, se sintetizaron en conjunto los hallazgos obtenidos, resaltando cuáles son las concepciones de las personas educadoras matemáticas en formación respecto a la integral definida y la práctica de acumulación, y cuáles son algunos elementos que las caracterizan. Además, se reflexionó en torno a posibles lineamientos que orienten el diseño de tareas matemáticas, donde se busca construir significados alrededor de la integral definida, a partir de la práctica de acumulación.

4.3.4 Etapa 4: Construcción de discusiones y reflexiones

Fase 1: Triangulación de los hallazgos

En esta fase se realizó una triangulación de los hallazgos (ver Figura 9), la cual alude al contraste entre los datos e información de diferentes fuentes, todos orientados a un mismo problema, con el propósito de acercarse y estudiarlo con mayor imparcialidad y objetividad (Kröll, 2013). Para ello, se realizan una serie de discusiones respecto a ciertos episodios tomados de las transcripciones de las entrevistas y la implementación, para luego proceder a reflexionar sobre estos, estableciendo vínculos con algunas de las ideas centrales expuestas en la sección de antecedentes.

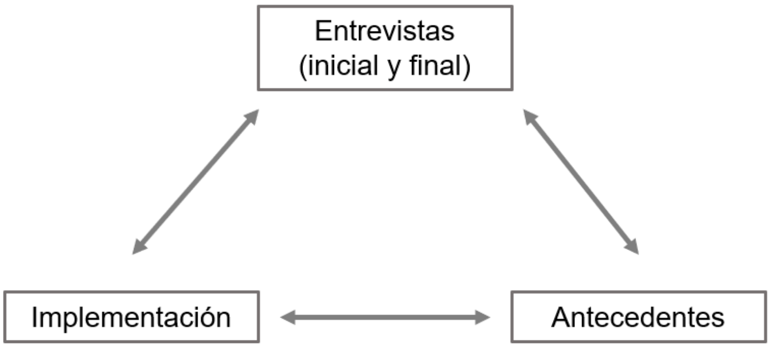


Figura 9. Triangulación de los hallazgos.

Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, para sintetizar los hallazgos provenientes de las entrevistas y la implementación de la situación de aprendizaje, se tomaron algunos del análisis temático. Este último permite organizar y analizar temas a partir de una lectura y relectura de la información recolectada, con el fin de "inferir resultados que propicien la adecuada comprensión/interpretación del fenómeno en estudio" (Braun y Clarke, 2006; citado en Mieles, Tonon y Alvarado, 2012, p. 217).

En concordancia con lo anterior, los pasos que orientaron el análisis temático de este trabajo son los siguientes:

1. *Familiarización con los datos:* Se efectúo la lectura transcripciones de las entrevistas e implementación de la situación de aprendizaje. En este momento, se estableció una primera esquematización de las concepciones que poseen las personas estudiantes de la integral definida.

2. *Extracción de ideas centrales:* Se realizó una síntesis de aquellas ideas centrales que se repiten o difieren del resto, dentro del discurso y producciones escritas de las personas estudiantes.

3. *Búsqueda de temas:* En este caso, se identificaron temas que son más amplios que las ideas centrales, pues engloban diversas características que poseen ciertos elementos en común.

4. *Revisión de temas:* Se realizó un estudio y discusión de las ideas centrales establecidas, con el propósito de identificar elementos no concordantes y caracterizar los temas previamente establecidos.

5. *Definición y denominación de temas:* Se focalizó el trabajo en refinar los temas, establecer sus definiciones y relaciones. Además, se procedió a confeccionar un mapa mental que resume la información, enfatizando en sus relaciones y principales características.

Un elemento que es central para efectuar un acercamiento a los datos, y posteriormente ser referente en la creación de categorías de análisis, que en este caso se denominan ejes temáticos, son los principios de la socioepistemología. El principio normativo de la práctica social orienta en cuanto al considerar las interacciones entre las personas como las acciones que van a generar un conocimiento propio de un determinado grupo que posee características específicas y que se desarrollan en circunstancias muy específicas.

Por su parte, el principio de la racionalidad contextualizada permite tener en cuenta el uso que dan las personas estudiantes al contexto para atribuir un sentido a lo que realizan, utilizar conocimiento y a la vez construir o dotar de un nuevo significado a los ya existentes. El referente al relativismo epistemológico posibilita considerar que existen diversas maneras de afrontar una tarea, emplear los conocimientos, significarlos y construirlos. Justamente de esta variedad determina que la comprensión que se posee de una situación es propia de un determinado contexto y características del grupo humano que construye ese conocimiento mediante el intercambio de ideas y la generación de resultados en conjunto.

Finalmente, el principio de la resignificación progresiva orienta en cuanto al tener presente que las personas estudiantes vienen de un determinado contexto en el cual han construido un cierto significado de la integral definida; el cual se busca ampliar mediante la situación de aprendizaje que se les aplica. Sin embargo, esta resignificación que se realice va a estar ligada a un determinado momento y circunstancias, pero va a ampliar la noción que ya se posee de este objeto matemático.

Como resultado de este proceso, considerando lo expuesto en relación a los principios de la socioepistemología, y posterior a una nueva lectura de los antecedentes, las transcripciones, las entrevistas y la implementación de la situación de aprendizaje, se efectuó una síntesis de las ideas centrales vinculadas con las categorías enunciadas en la Figura 1. A partir de ello, se identifican 3 ejes temáticos respecto al cómo se aborda el estudio de la integral definida: concepciones, representaciones y aplicaciones. Seguidamente, se procede a describir cada uno de ellos:

1) *Concepciones*: Corresponden a aquellas ideas, intuiciones o significados que poseen las personas estudiantes en relación con la definición de integral definida. Lo anterior

considerando la situación de aprendizaje implementada y las experiencias previas vividas en el curso Funciones Riemann Integrables.

2) *Representaciones*: Alude al compendio de representaciones y registros, las relaciones establecidas entre ellos e incluye los usos que se les dieron al llevar a cabo tareas matemáticas vinculadas con la integral definida.
3) *Aplicaciones*: Refiere a las formas en las que se emplea y significa la integral definida al resolver problemas en distintos contextos, tanto extra como intra-matemáticos.

Capítulo 5: Discusiones y reflexiones

En este capítulo se discute en torno a los hallazgos obtenidos al estudiar la información extraída directamente de las transcripciones de la entrevista inicial, la implementación de la situación de aprendizaje y la entrevista final. Para ello, se realiza una triangulación, donde se identifican 3 ejes temáticos: concepciones, representaciones y aplicaciones (ver Figura 10). Estos se entrelazan entre sí por medio de las relaciones que denotan el cómo las concepciones que poseen las personas estudiantes y la comprensión del contexto de la situación dada interfieren en el conocimiento de las posibles aplicaciones de la integral definida e inciden en las construcciones y usos de las representaciones.

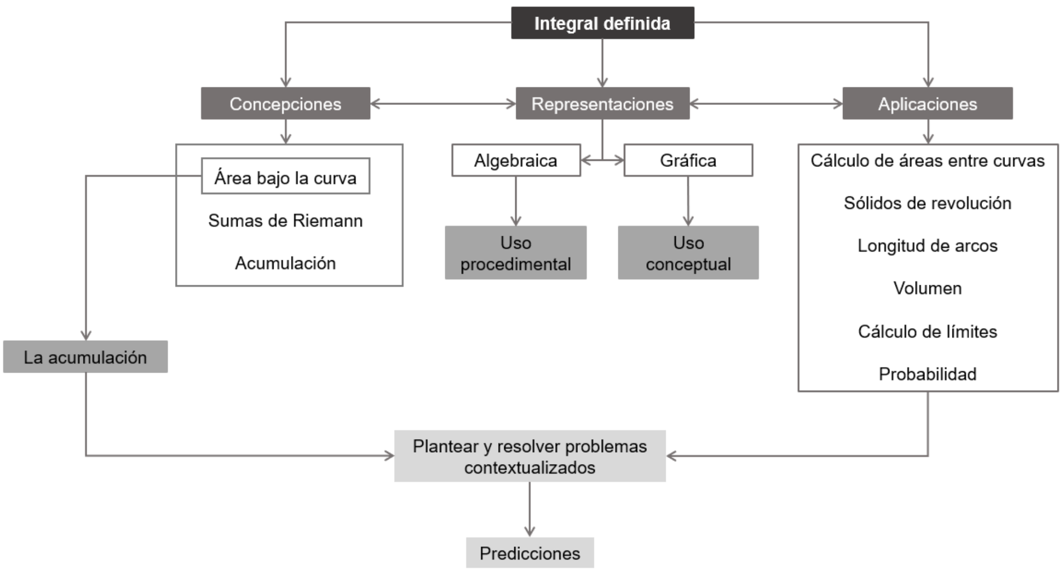


Figura 10. Ejes temáticos.

Fuente: Elaboración propia

Seguidamente, se realiza una caracterización general de los principales aspectos que representan cada uno de los ejes temáticos mencionados anteriormente. Además, se incluyen episodios provenientes de las transcripciones de las entrevistas iniciales, finales y la implementación, con el propósito de ejemplificar las aseveraciones efectuadas.

5.1 Concepciones

Las formas más frecuentes de concebir la integral definida, según los autores García-García & Dolores-Flores (2021), son: área bajo la curva, sumas de Riemann y límites. De estas, las primeras dos corresponden a las concepciones que posee la mayoría de las personas estudiantes respecto a la noción asociada a este objeto matemático.

Lo anterior, se asemeja a la manera en la que se expone la integral definida en Apostol (1967), Bartle (1980), Spivak (1994) y Purcell, Varberg y Rigdon (2007), donde se busca sistematizar la noción de área bajo la curva, la cual se define luego formalmente como sumas de Riemann. En relación con este último punto, E4 expuso que:

> *[...] es como una suma infinita de algo, entonces empezamos con sumas de Riemann para poder definirla. Entonces, siento que es como una… una suma infinita.*[2]

Siguiendo con lo anterior, cabe destacar que la concepción de área bajo la curva la relacionan solo con funciones positivas y en el caso de que fuesen negativas, se efectúa una manipulación algebraica para que el área sea positiva. Tal y como lo expusieron E1 (a) y E5 (b), respectivamente:

> (a) *[...] la integral definida, cumpliendo la condición de que la función es positiva, se puede llegar a interpretar como el área bajo la curva de la función.*[3]
>
> (b) *La integral definida, para mí, al menos cuando la función es positiva, la integral la interpreto como esa área que está bajo esa curva o esa función digamos. Ya cuando es negativa, ahí sí me cuesta un poco más interpretar qué representa, entonces lo que hago es como que me la imagino como el valor absoluto y nuevamente esa área.*[4]

Por su parte, E6 mencionó que la integral definida se puede estudiar como una acumulación, a pesar de que no comprendía esta idea:

> *[...] vi varios videos de YouTube y también se hablaba como de algo relacionado a acumulación o a, no sé, es que no recuerdo muy bien de qué trataba el video, entonces no lo podría explicar muy bien. Pero creo que por ahí andan esas dos intuiciones para comprender la integral como la acumulación, que la verdad no lo manejo tan bien, y la de área bajo una curva de una función positiva, que es con la que me siento como más*

[2] Tomado de la entrevista inicial de E4, intervención 7 (Anexo 7).
[3] Tomado de la entrevista inicial de E1, intervención 8 (Anexo 4).
[4] Tomado de la entrevista inicial de E5, intervención 6 (Anexo 8).

cómoda, podría decirlo, con la que he trabajado más y se ha trabajado más en el curso.[5]

En el extracto anterior se evidencia que la persona estudiante tiene la noción de que existen diversas maneras de significar la integral definida. Esto se vincula con lo expuesto en la sección de Antecedentes, pues la construcción de significados alrededor de la integral definida a partir de la práctica de acumulación se considera como una forma innovadora. Sin embargo, da indicios que permiten identificar que el abordaje es tradicional, pues se enseña y se aprende que la integral definida se asocia con el área bajo una curva, que posteriormente se formaliza como sumas de Riemann o límites.

Análogamente, posterior a la implementación, se identifica que se puede concebir la integral definida como la acumulación de valores obtenidos al estudiar un cierto fenómeno. Respecto a esto, E1 menciona lo siguiente:

> *[...] logré hacer como esa relación entre esa idea de ir acumulando o ir sumando verdad, lo anterior súmelo, o agréguele la siguiente medida, digamos, sume el anterior más otro poco, etc. Entonces creo que la integral definida puede tener varias interpretaciones. O sea, al inicio, digamos, la sigo viendo como área bajo la curva, en el sentido que fue la primera interpretación que me dieron, etc. pero ahora veo esta nueva interpretación que también considero que es válida y que tiene cierto isomorfismo con el área bajo la curva. Entonces siento que se pueden tener varias interpretaciones y esa acumulación podría ser una.*[6]

Este mismo episodio pareciera evidenciar que el significado que se asocia a la palabra acumulación es el que se emplea en contextos cotidianos, donde refiere a agregar elementos a un conjunto. No obstante, posteriormente en la resolución de algunas tareas propuestas en la implementación de la situación de aprendizaje, las personas estudiantes refirieron a elementos vinculados con la acumulación y valor acumulado. Las evidencias de ello se detallan a continuación.

5.1.1 El papel de la acumulación y el valor acumulado

Durante la implementación de la situación de aprendizaje, a lo largo de la mayoría de los momentos, se presentan tareas que requieren determinar la cantidad de grados-días consumidos por un ácaro durante un determinado lapso. Para solucionarlas se observa que se

[5] Tomado de la entrevista inicial de E6, intervención 6 (Anexo 9).
[6] Tomado de la entrevista final de E1, intervención 2 (Anexo 11).

consideró agregar los datos nuevos a los ya existentes para obtener dicho resultado. Al respecto, E1 enuncia cómo lo efectuó:

> *[...] tengo que ir sumando lo que comió desde el día 1 hasta el día 7 para saber lo que consumió en una semana. Así fue como yo interpreté la instrucción de cuántos grados-días consume en una semana.*[7]

De lo anterior, se muestra que el uso dado a la adición de valores se emplea para determinar la solución de tareas que requieren conocer cuál es el total de incrementos, que se asocia a un proceso recursivo. Por ejemplo, E6 explica cómo emplea la suma para solventar una tarea de este tipo:

> *lo que yo hice fue sumar, entonces… ok. Acá eh… lo que hice fue aplicar la fórmula que nos dieron, en cada caso, y sumar; y así obtuve ya como esa respuesta.*[8]

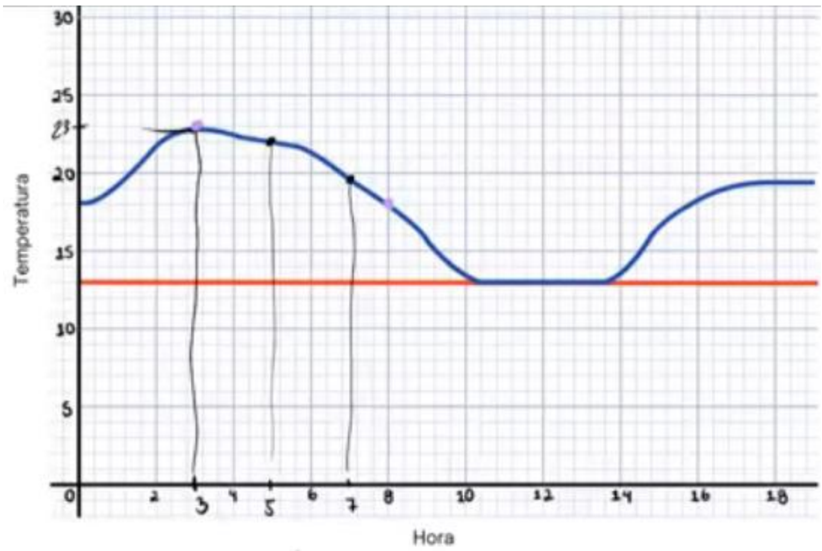
Del mismo modo, E1 indica:

> *Y aquí, yo lo que hice… como un proceso recursivo, ahí de ir sumando a la cantidad anterior el siguiente valor. Eso fue lo que expresé, como… como se ve más que todo explícito en esta parte, como que al martes es lo del lunes más otra cantidad, el miércoles es lo del martes más otra cantidad, y así.*[9]

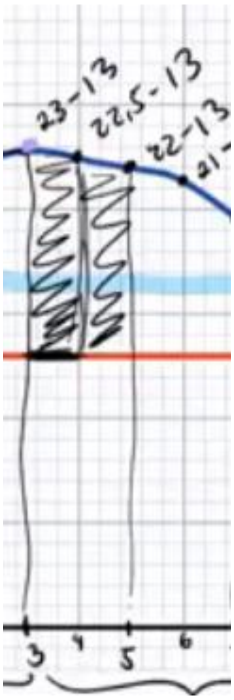
Posteriormente, en el momento V, al indicar cuáles fueron las estrategias que se utilizaron en los momentos anteriores, se obtienen las siguientes intervenciones por parte de las personas estudiantes:

E5 *[...] Por ejemplo aquí (señala la gráfica del momento anterior),*

[7] Tomado de la implementación, intervención 26 (Anexo 10).
[8] Tomado de la implementación, intervención 82 (Anexo 10).
[9] Tomado de la implementación, intervención 90 (Anexo 10).



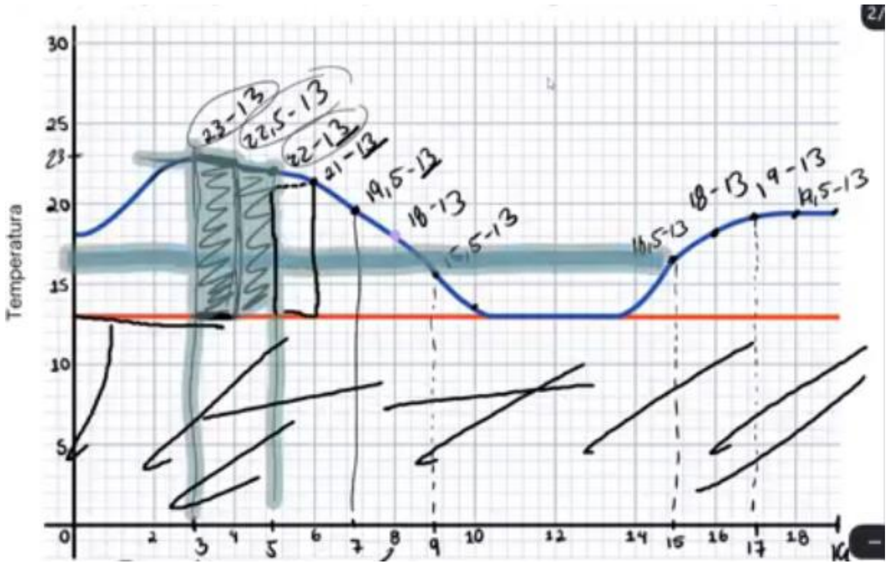
o sea nosotros íbamos como a cada uno de estos puntos sumando y sumando y sumando. Entonces, digamos el área de aquí (señala el área de 3 a 4) y el área de aquí (señala el área de 4 a 5), yo creería que se calcula distinto porque sería … es que no sé.



Yo veo que se calcula como distinto a como lo fuimos calculando, porque por ejemplo, aquí lo fuimos haciendo día a día, entonces era en este punto, en este punto y así, entonces digamos sería como un rectángulo, como un trapecio más bien, porque nosotros sólo tomamos, o sea no esta curvita sino esta parte pero no estoy seguro.

I3 *Ok, ¿qué opinan ahí?*

E5 *Creo que ahí, al tomar como el último valor es como similar cuando uno está en ese tema digamos cuando integrales que nos den lo hace con sumas o calculando por encima o por debajo y que no es una aproximación como tan exacta, entonces no sé si estoy equivocado pero siento que aquí lo que estamos agarrando es por ejemplo este de aquí (dibuja un rectángulo) y estamos obviando este pedacito de arriba. Bueno ahí si, la parte de 22 - 13 es porque estamos quitando todo esto (señala el área debajo de la línea roja)*



E2 *Sí digamos, tiene razón, porque lo que estaría haciendo es como aquí, tomando como este rectángulo y aquí tomando como este rectángulo, o sea con la altura de la izquierda básicamente, y la medida de la base sería 1 porque vamos de uno en uno.*[10]

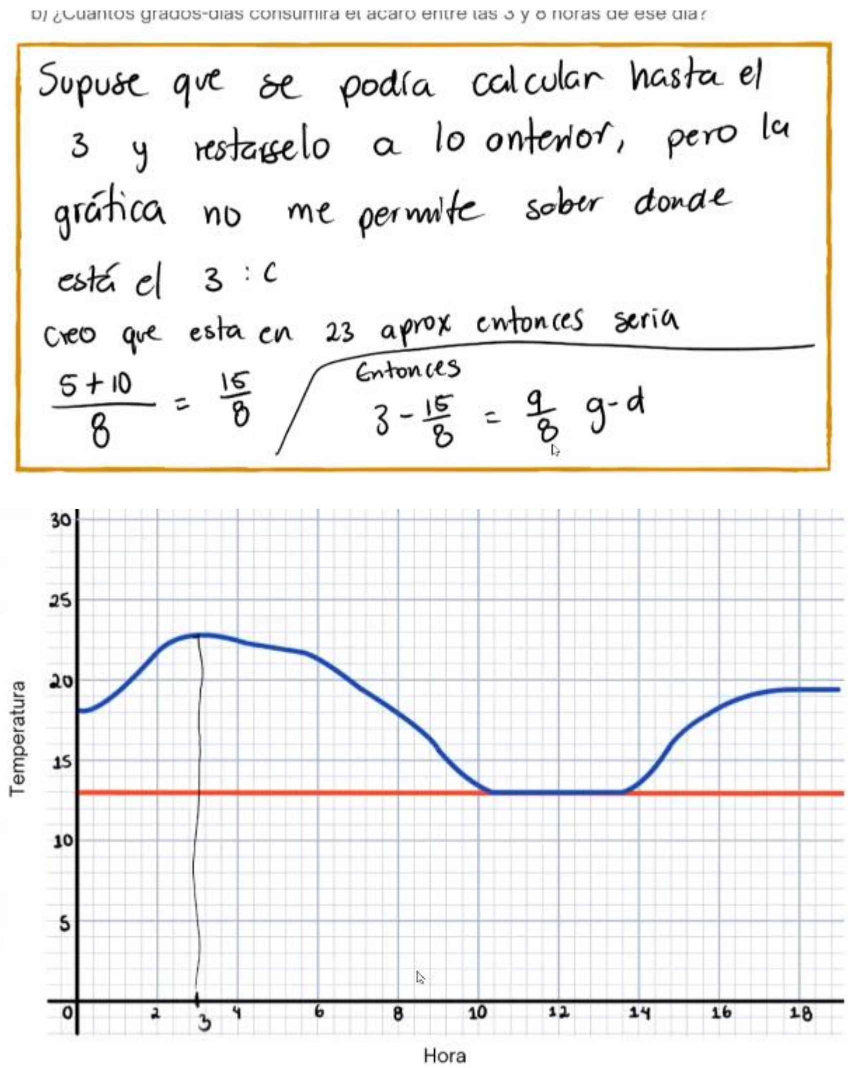
En este episodio se muestra el uso de la suma de valores y su vínculo con la suma de áreas de rectángulos. Esto evidencia cómo la acumulación es la antesala de nociones asociadas a la integral definida; en este caso, las sumas de Riemann. No obstante, aunque las áreas de rectángulos reflejan la adición de elementos, en particular se observa que el área total buscada corresponde al valor acumulado y cada uno de esas áreas aluden a lo que se acumula.

Este tratamiento y las relaciones establecidas se asemejan a lo que exponen Cabañas y Cantoral (2012) respecto al cómo se estudia tradicionalmente la integral definida, donde se transita primero por las sumas de Riemann hasta llegar al establecimiento formal del objeto matemático. No obstante, se observa que se involucran las nociones de acumulación y valor acumulado como elementos previos a las sumas de Riemann.

[10] Tomado de la implementación, intervenciones 313-316 (Anexo 10).

Aunque la mayoría de las personas estudiantes efectuaron sumas, como se mencionó previamente, hubo algunas de ellas que realizaron restas. Lo anterior se evidencia con lo que expone E1:

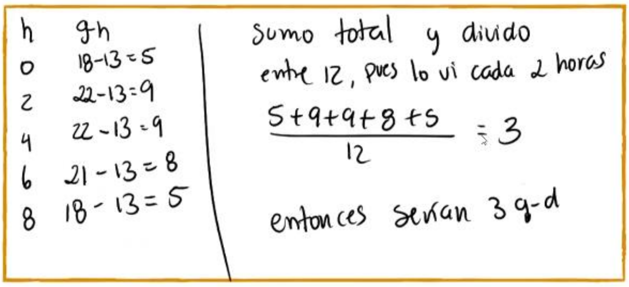
Supuse que se podía calcular hasta el 3 y restárselo a lo anterior, pero la gráfica no me permite saber dónde está el 3 [...], entonces $3 - \frac{15}{8} = \frac{9}{8}$ *grados-días.* [11]



Si subimos (traza la línea), ojalá recto, está muy cerca de 23, entonces lo que yo hice fue, bueno calculamos cada tres horas, hora 0 y hora 3, lo sumamos y lo dividimos entre 8 y eso me da que consumiría, en la hora 3, que consumiría 15 grados-días. Entonces, al resultado anterior (pregunta a), que a mi me dio 3 que así fue como lo hice, le resté eso para saber cuánto era, 3 a 8.

[11] Tomado de la implementación, intervención 170 (Anexo 10).

a) ¿Cuántos grados-días consumirá el ácaro entre las 0 y 8 horas de ese día?



Asimismo, E4 expresa lo siguiente:

Yo en esa parte tengo un dilema de primero, y lo que hice en realidad no fue ir sumando, fue ir restando… Porque hago yo, el máximo es el punto (7, 42), ahí fue cuando dije: son valores discretos, pero es que… Desde las sesiones que estamos dando en didáctica venimos con eso; entonces, hago yo, los días son valores discretos, entonces, voy a poner puntos. Porque según yo iba a poner una, un segmento, ¿verdad? Entonces hago yo, mejor para poner los puntos recuerdo la gráfica que tengo y voy restando de 6 en 6 hasta llegar a (1, 6).[12]

De lo mencionado se desprende que las ideas anteriores se vinculan con lo expuesto en la tesis de Marcía-Rodríguez (2020), donde se establece que la suma corresponde al valor acumulado y la resta a la acumulación, tal y como se muestra en la Figura 11:

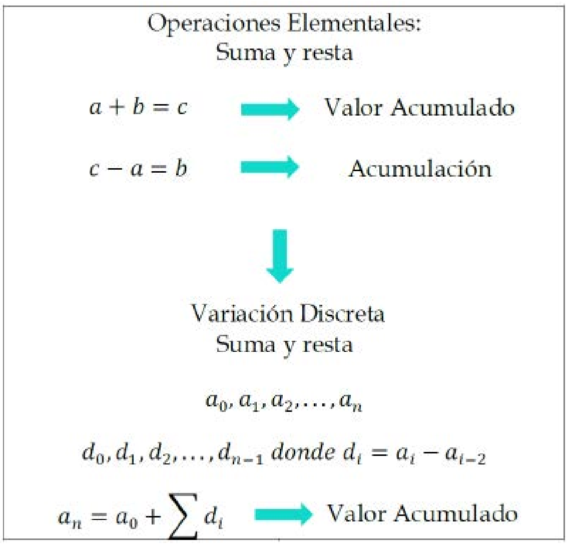


Figura 11. Operaciones vinculadas con acumulación y valor acumulado.

Fuente: Marcía-Rodríguez (2020, p. 129)

[12] Tomado de la implementación, intervención 54 (Anexo 10).

5.2 Representaciones

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de integral definida suelen emplearse recursos visuales al incorporar elementos gráficos, en donde se busca complementar la idea de sumas de áreas para, posteriormente, establecer una relación con la representación algebraica de la integral y su cálculo. De esta forma, se establece un nexo entre lo conceptual y procedimental, reforzando la noción de integral definida como un área bajo una curva. Esto se relaciona con lo que Cabañas y Cantoral (2012) mencionan respecto al uso de recursos para explorar las áreas, de los cuales se encuentran la medición, comparación, estimación y representación del área de forma gráfica. Tal y como lo expuso E1:

> *Siento que la parte gráfica fue como [...] la que más me ha ayudado, verdad. La idea de ok, eh… comencemos con funciones a trozos, entonces el profe, al inicio, eran demasiados dibujos. Digamos, yo los dibujos los paso al cuaderno con papel cuadriculado y tengo un montón porque ah ok, la gráfica a trozos, entonces ¿cómo puedo sacar el área?, ¿qué pasa si la función hace así o así?; entonces como que uno va generando la idea de esa aproximación a partir de, digamos, de columnas y después hacer ya con lo matemático que ya sabíamos anteriormente, ver que esas columnas fueran base infinitamente pequeña para poder dar el área bajo la curva. Entonces siento que la parte gráfica es como lo que más me ha ayudado.*[13]

Se destaca que en los procesos de resolución de ciertas tareas matemáticas es frecuente el uso de graficadoras como GeoGebra o la elaboración de representaciones gráficas a mano alzada. Sin embargo, en los siguientes extractos se observa que este tipo de recursos no aseguran ser completamente efectivos en el estudio de una situación, pues en ocasiones su manipulación resulta complicada para obtener un determinado resultado. No obstante, esto no le resta mérito como herramienta que permite efectuar exploraciones para determinar nuevos elementos asociados a una determinada tarea. Por ejemplo, en las siguientes intervenciones realizadas por E5 (a) y E6 (b), respectivamente, se observa cómo estos elementos conviven de manera simultánea.

> (a) *Em… Bueno, en realidad lo que pensé, yo de manera analítica cuando lo resolví en la primera parte cuando llegué a una ecuación, pensé que el valor que me dé ese ya va a ser, aunque sea como feillo ése es el número. Pero cuando comencé con el deslizador, me decía 32, lo movía y me decía 29.5, y lo movía… Al inicio me frustraba un poquillo porque no lograba que me diera 30. Ya después encontré dos valores que*

[13] Tomado de la entrevista inicial de E1, intervención 28 (Anexo 4).

sí me dieron 30; pero me costó más hacer que el GeoGebra calzara en el 30 que resolver, digamos, la ecuación.
Eso fue mi percepción, digamos.
¿No sé si a los demás les pasó algo parecido?[14]

(b) *Creo que yo topé con suerte porque el valor que yo fijé en a fue 0 y el valor que me dieron en b fueron dos números enteros. Entonces, cuando yo llegué al GeoGebra puse el valor de a y los dos valores que me dieron en b y pude ver el 30 explícitamente; sin tener que probar con algunos otros valores que yo no conociera. Eso fue como lo que pude hacer con el GeoGebra, como verificar el caso específico que yo me di.*[15]

Ahora bien, aunque se inserte una graficadora como recursos en la resolución de tareas, en algunas de las personas estudiantes se observa un predominio en el uso de representaciones algebraicas y una tendencia a trabajar números enteros. Evidencia de ello se muestra en el siguiente episodio, donde la persona estudiante, a pesar de que se le solicitaba emplear la graficadora GeoGebra, no recurre a este y procede a efectuar un cálculo algebraico.

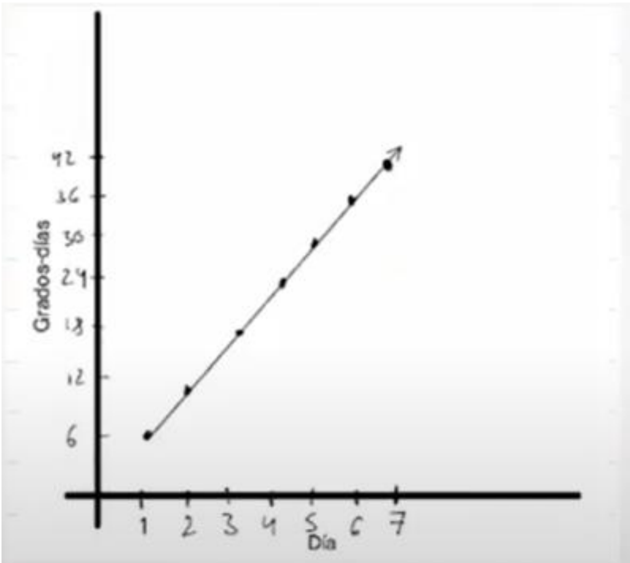
Bueno yo, yo…. Yo fijé valores. Entonces lo que yo pensé fue como ok, tengo que hacer que la integral me dé 30. Pero si integro así como está, voy a quedar con una ecuación en dos variables donde solo tengo una ecuación, que no me va a funcionar. Entonces tengo que fijo uno, tengo una ecuación en una variable, en donde voy a poder encontrar los valores.
Eso fue lo que yo pensé, digamos. Eso fue lo que pasó por mi mente. Entonces, si integramos a como estaba no podía resolver la ecuación. Pero si ya fijaba un valor sí iba a poder resolver la ecuación.[16]

Por otra parte, centrando la atención en las representaciones gráficas realizadas a mano alzada por las personas estudiantes, se observa una serie de regularidades en los productos elaborados. Respecto a la confección de gráficas empleando un sistema de coordenadas, predomina el uso de puntos para remarcar el consumo de grados-días en un momento específico. Sin embargo, no existe consenso en relación con si estos se encuentran unidos o no por un segmento. Para ilustrarlo, considere los siguientes extractos por parte de E3 (a), E5 (b), E1 (c), E2 (d) y E6 (e):

[14] Tomado de la implementación, intervención 8 (Anexo 10).
[15] Tomado de la implementación, intervención 9 (Anexo 10).
[16] Tomado de la implementación, intervención 17 (Anexo 10).

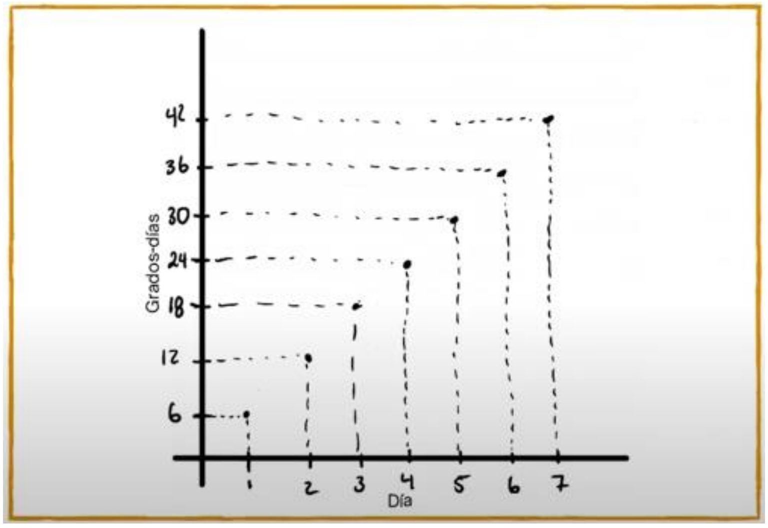
(a) *Este, tengo problemas de enviárselo, pero ya iba a enviar y ahora que vi el de E1 lo hice muy similar; de hecho lo hice en puntos y como… Sí, hasta el día 7 ahí fui como… Incluso hice el eje y de 6 en 6, como para ir… Bueno… como para no hacer tanta cosa y llegar a este. Entonces, sí me quedó como lineal y en puntos. Y yo llegué a que a la semana eran 42, no sé exactamente qué 42. Pero así quedé.*[17]

(b) *Al menos al inicio no lo había entendido muy bien. Entonces, según yo iba a dibujar el consumo de grados-días semana a semana. Pero, vi que el, los ejes abajo decían días; entonces, vi que no era el consumo como de semana 1, semana 2, semana 3. Entonces, me dije que es acumulativo; entonces igual hice similar. Solo que ahora que veo la de E1 hice un segmento en lugar de puntos. Pero sí, eso.*[18]

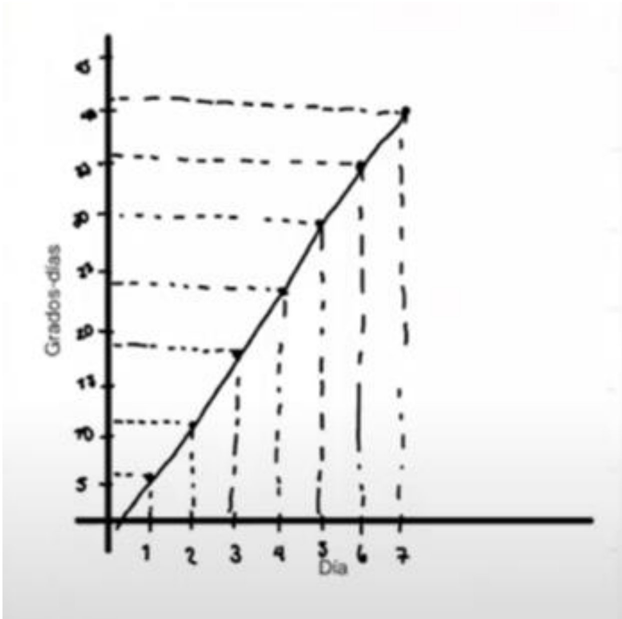


(c) *Yo puse punto porque, no sé, pensé que, que digamos día 1 y día 2. Lo vi como, eh bueno la idea es como el día 1 tanto, el día 2 tanto y el día 3 tanto. No como, y como consumo se dice al día, entonces no pensé como que el 1.5, digamos, hubiera algo, por ejemplo. Porque la idea es, ok, un día 6, otro día 6. En dado caso, la tuve que haber hecho como por partes, como la función parte entera, iba por ahí el estilo. Pero pensé en puntos por eso. No sé los demás.*[19]

[17] Tomado de la implementación, intervención 29 (Anexo 10).
[18] Tomado de la implementación, intervención 31 (Anexo 10).
[19] Tomado de la implementación, intervención 33 (Anexo 10).



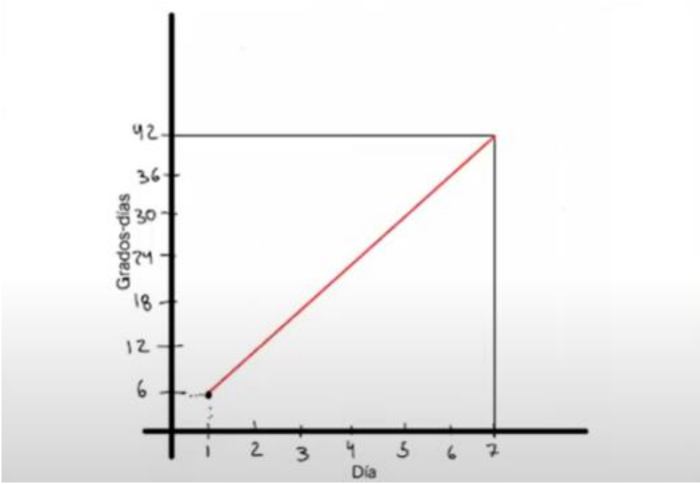
(d) *Ah sí, yo lo hice con segmento, es no sé… Me puse a cuestionar de que qué había entre un día y otro, y lo vi como un proceso. Como que iba transcurriendo, transcurriendo así progresivamente durante el día hasta llegar hasta 6. Entonces, por eso puse como la… la… el segmento. Más que todo, pero no sé si está bien, ¿verdad?*[20]



(e) *Bueno, yo en lo personal, puse segmento, pero ahorita que lo estaba pensando, creo que puse segmento por maña. No sé cómo, pero a veces uno es como que está mal acostumbrado a que está trabajando con este, no sé, con, con intervalos o algo por el estilo. Pero con lo que dijo E2, creo que sí le*

[20] Tomado de la implementación, intervención 35 (Anexo 10).

vería sentido a verlo con segmento. Pero no sé, digamos, si el ácaro hace solo una comida diaria, sí le vería más sentido solo con puntos.[21]



Así, lo que determinó que se conectaran entre sí los puntos es la interpretación que realizan las personas estudiantes respecto al cómo es el consumo, si es lineal o no. Se observa que quienes consideraron que el consumo sucedía en un momento puntual solamente hicieron uso de puntos para denotar.

Aquellos que interpretaron que los grados-días se iban consumiendo durante todo el lapso y que en un determinado momento se obtenía una lectura específica, fueron quienes emplearon un segmento de recta. De esta forma, se manifiesta cómo en este tipo de representaciones el total de grados-días que se registraron en un tiempo específico corresponde a la acumulación del consumo que se ha venido efectuando desde el momento inicial.

Siguiendo lo anterior, complementando la idea de que el efectuar una representación continúa se asocia a una determinada comprensión de cómo es el consumo de grados-días y cómo es que se registra, se presenta la siguiente participación. En ella se observa cómo es que se asocia esa medición a una acumulación de ingesta energética, que es el caso cuando se considera que es posible modelarlo de forma continua.

Sí, en realidad, eh… se hace la suma porque eh… No sé cómo explicarlo utilizando otras palabras. Es que es la acumulación de la comida que hace la persona. En la gráfica que ustedes ponen es constante, que cada día come 6. No sé qué comen, ¿qué comen, perdón? Es que digo que comen pero no sé qué comen.[22]

---

[21] Tomado de la implementación, intervención 37 (Anexo 10).
[22] Tomado de la implementación, intervención 49 (Anexo 10).

Sin embargo, efectuar representaciones gráficas de un fenómeno requiere determinar la idoneidad de las unidades de medida con las que se trabaja, de tal forma que se busca brindar mayor precisión en los datos; es decir, efectuar mejores aproximaciones. El realizar cambios en las unidades de medida es válido, pero requiere que las personas estudiantes trasladen la comprensión que poseen de lo que modela esa gráfica y sean capaces de trasladarla a las nuevas que generen. Considerando las intervenciones de E1 (a), E2 (b) y E5 (c), se observa lo que se menciona anteriormente:

> (a) *Yo creo, a lo que entendí en esa parte, es como que bueno… me dan una gráfica de la temperatura a lo largo de las primeras 18-19 horas del día y la idea es como que se puede tener otra unidad, que en vez de ser por día, sea por hora; entonces que… yo supuse que se utilizaba la misma fórmula que en la anterior que era temperatura menos 13, pero que diay… esos grados-horas se convertían a grados-días dividiendo como viene acá, entre 12 o 24, dependiendo de la medida que yo tome. Si lo veo cada dos horas, entonces entre 12, si lo veo cada 8, entonces… entre 3 y así, no sé.*[23]
>
> (b) *Yo tenía una duda, bueno ahora que me acuerdo. Ahora que hemos pasado como por todos los momentos, al final, bueno no sé si estará bien, pero los grados días y los grados horas ¿vienen a ser lo que es, el área bajo esas gráficas que hemos venido haciendo? No sé si concluir eso la verdad, pero no sé lo estaba viendo así, que al final los grados horas y grados días, eran como esa área debajo de la curva, o cómo se comportaban los ácaros digamos, en un día o en una semana, pero no sé. No sé qué piensan los demás.*[24]
>
> (c) *Ah ok, si ya me acordé. Yo cuando leí eso como que entendí, este, digamos por ejemplo, si pasan dos horas, entonces yo tomo la temperatura en la hora número 2, y la convierto a por ejemplo a grados-días, si sólo quisiera la temperatura de la hora 0 a la hora 2. Luego, si quiero la temperatura de la hora 2 a la hora 4, tomo la temperatura de la hora 4 y lo divido entre 12 también, eso fue lo que entendí yo. Por eso digamos yo dije, bueno voy a tomar este la hora la temperatura de la hora 8 y la voy a dividir entre la cantidad de bloques.*[25]

En las participaciones anteriores, se identifica que se buscan efectuar mejores aproximaciones del consumo del ácaro. Para llegar a esto, las personas estudiantes transitan

[23] Tomado de la implementación, intervención 133 (Anexo 10).
[24] Tomado de la implementación, intervención 307 (Anexo 10).
[25] Tomado de la implementación, intervención 197 (Anexo 10).

a través de una cadena de datos y procesos donde asocian el consumo y la acumulación registrada en grados-días para efectuar las conversiones necesarias y determinarlo en una unidad distinta. Un elemento central de destacar es que en este proceso se conserva la idea de que ese registro corresponde a la acumulación de datos y que la zona que se encuentra en la parte inferior de la curva muestra esa adición de valores. Dicho de otro modo, se hereda la idea que el área bajo la curva corresponde al consumo y que, al cambiar la unidad, se sigue tratando de una acumulación de ingesta energética.

5.3 Aplicaciones

Inicialmente, se destaca la utilización de la integral definida para el cálculo de áreas entre curvas, tareas asociadas a sólidos de revolución, longitud de arcos, cálculo de límites y probabilidad. De esta manera, se emplea este objeto como una herramienta para resolver problemas cuyo contexto es meramente matemático, en donde prima el trabajo procedimental. Por ejemplo, E2 destacó su funcionalidad al calcular áreas y volúmenes:

> *[...] para cálculos de áreas, eh… también para lo que es el volumen de, ¿cómo se llama?, superficies de revolución.* [26]

En la misma línea, E4 indicó que en:

> *El cálculo de límites, creo que fue lo que vimos [...] se puede medir la longitud de la función.* [27]

Como se observa en las líneas anteriores, el tipo de tareas en las cuales se emplea la integral definida para su resolución suelen ser aquellas donde se busca determinar un valor numérico. Sin embargo, no se muestra que se requiera hacer una interpretación de los datos o el resultado para dar respuesta a lo solicitado, es decir, desde la TSCM se necesita esa interpretación dado el contexto en el cual se trabaja y no sólo la parte numérica.

Asimismo, las personas estudiantes identifican que las tareas matemáticas pueden aludir a situaciones reales, pues posibilita estudiar más en detalle el significado de lo que se efectúa y su coherencia dentro del contexto en el que se enmarca. No obstante, resaltaron que sólo se les enseñó dentro de un contexto matemático, como lo expresó E1:

> *[...] bueno siento que, a como nos lo enseñaron, tiene un contexto sumamente matemático. [...] pero con esta otra interpretación digamos, se abren un montón de*

[26] Tomado de la entrevista inicial de E2, intervención 12 (Anexo 5).
[27] Tomado de la entrevista inicial E4, intervención 15 (Anexo 7).

posibilidades. De hecho, esto de los ácaros yo ni siquiera la había relacionado con la integral hasta que usted lo dijo. Entonces supongo que ahora hay muchas interpretaciones que se pueden dar para poner, digamos, el tema en contexto, como ese de los ácaros y supongo que deben haber muchos más que desconozco en este momento.[28]

Lo anterior evidencia que las personas estudiantes reconocen la existencia de otro tipo de contextos en los que surge la noción de integral definida, como lo menciona E6:

[...] contextos que se relacionan con el paso de los días o este… también como de horas o cualquier unidad de tiempo, o incluso, tal vez, como de unidad de volumen, no sé, se me ocurre. Tal vez como acumulación de algún tipo de mililitros en algún medicamento; tal vez como por ahí.[29]

pero sólo recurren a lo visto en clase:

Entonces si me quedo más con las ideas más concretas que hemos visto en el curso, pero como que todo esto si da pie a que haya aplicaciones que sean como aparte de las que son tan propiamente matemáticas.[30]

Ahora bien, a pesar de que las personas estudiantes estaban familiarizadas a trabajar con situaciones con contextos en su mayoría matemáticos; indicaron que el uso de situaciones con contexto real, como el de los ácaros, les permite dar otra interpretación a la integral definida.

Además, afirman tener un panorama más amplio respecto a situaciones que posibilitan estudiar la integral definida y sus aplicaciones. Esto se relaciona con lo que menciona Jiménez (2019) respecto a que las situaciones de contexto real requieren que la persona estudiante transite entre lo coloquial y lo matemático para poder solucionar la tarea. Al respecto, E6 menciona que

Exactamente. Sí, siento como que lo amplié un poquito más; como que tal vez es como… otra manera de introducirla y no únicamente como: ok, es acumulación, sino que en procesos y también como esa parte de aplicaciones, también se puede este… aplicar este concepto de integral definida.[31]

[28] Tomado de la entrevista final de E1, intervención 4 (Anexo 11).
[29] Tomado de la entrevista final de E6, intervención 16 (Anexo 14).
[30] Tomado de la entrevista final de E6, intervención 14 (Anexo 14).
[31] Tomado de la entrevista final de E2, intervención 12 (Anexo 12).

Del mismo modo, E1 externa que

> *Bueno, ahora tomando en cuenta esto que vimos, siento que se podría traer problemas como más contextualizados como este, a diferencia de bueno tenemos esta función entonces inmediatamente calcule usted el área bajo la curva, eso es lo que nos dicen; y después nos dicen, bueno eso se llama integral. Sino como ir descubriendo esa idea intuitiva, a partir de la acumulación, y haciéndolo justo como esto digamos, que yo no había relacionado la integral y después de que me dijo pues ya pude como anidar todo.*[32]

En los extractos anteriores se evidencia que las personas participantes consideran la necesidad de introducir el tema de integrales definidas con problemas contextualizados, cercano a la realidad del estudiantado. Porque esto permite un acercamiento al objeto de estudio, en donde no prima un tratamiento únicamente formal, alejado de la naturaleza en la cual surge esta noción y sus aplicaciones.

Por otro lado, la predicción tiene un rol fundamental en la práctica de acumulación, pues brinda fundamento a las decisiones que se toman. En la implementación se pueden identificar ciertos indicios sobre la predicción, como lo menciona E6:

> *Yo creo que sí ayuda como a tomar una decisión más informada que intuitiva [...] Ya ahorita sabiendo que hay un estudio que me dice que es a partir de cierto momento, entonces va a tener como un efecto mejor esa decisión que se está tomando.* [33]

Lo anterior evidencia que la predicción se vincula con la toma de mejores decisiones a posteriori, pues se cuenta con información que brinda un panorama de lo que podría suceder en un determinado escenario. Esto permite decantarse a elegir opciones "más informadas".

[32] Tomado de la entrevista final de E1, intervención 14 (Anexo 11).
[33] Tomado de la implementación, intervención 126 (Anexo 10).

Capítulo 6: Conclusiones y recomendaciones

Seguidamente, se exponen las conclusiones que provienen de la realización de este Seminario de Graduación; se destacan aprendizajes y limitaciones que surgieron durante este proceso. Además, se incluyen recomendaciones vinculadas a la ejecución de este, con el propósito de incluir aspectos que se puedan tomar como elementos a considerar y mejorar cuando se elaboren trabajos similares al efectuado.

En cuanto a los aprendizajes del trabajo, consideramos la propuesta de resignificación de la integral definida a partir de la práctica de acumulación potencia los siguientes tres ejes de formación de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática: didáctico matemático, recursos tecnológicos y aplicaciones de la matemática. El primero se ve reflejado al buscar otro significado de la integral definida, diseñar tareas que requieren que las personas estudiantes participen en los espacios de discusión donde se compartan las estrategias empleadas, la comprensión que tienen de los sucesos y las reflexiones que se generaron a lo largo de su resolución.

Respecto al eje de aplicaciones de la matemática este se evidencia a lo largo de la situación de aprendizaje pues muestra cómo un fenómeno real es modelado y estudiado a partir de elementos matemáticos, que en este caso resultan centrales para efectuar predicciones del mismo. Por último, el eje de recursos tecnológicos se promueve mediante la inclusión de la herramienta GeoGebra como recursos para elaborar representaciones gráficas que apoyan el estudio del contexto con el que se trabajó.

Continuando con los aprendizajes del trabajo, el diseñar una situación de aprendizaje e implementarla pone en evidencia elementos teóricos de la organización de prácticas que se detallaron en el marco teórico. Particularmente en lo que refiere a la acción, ésta se observó durante la implementación de la situación de aprendizaje, en los espacios de trabajo individual donde las personas estudiantes resolvían diversas tareas matemáticas.

Respecto a la actividad, ésta se mostró en los espacios de discusión, momentos en los cuales las personas estudiantes socializaron las consideraciones que extrajeron al efectuar las tareas matemáticas de forma individual. Finalmente, en lo que refiere a la práctica socialmente compartida, se evidenció en la discusión por parte de las personas estudiantes en torno a diversos aspectos provenientes de la fase de trabajo individual, de tal forma que se tomaron en consideración las opiniones, se analizó la idea central de ellas y entre todas las personas estudiantes generaron conclusiones o resultados finales producto de una articulación de diversos puntos de vista.

Lo anterior, pone en evidencia que la articulación existente entre las diversas prácticas y su organización, como se expone en la sección de marco teórico, permiten a la persona transitar y enlazar los resultados provenientes de cada fase. De tal forma que se parte de un trabajo independiente, cuyo propósito es que una fase posterior se comparta el trabajo realizado con las demás personas para encontrar similitudes y diferencias, en relación con las respuestas, las estrategias y los razonamientos empleados.

Por otra parte, al implementar la situación de aprendizaje y las entrevistas, se evidenció que las personas estudiantes tienen la concepción de que la integral es el área bajo la curva, tal y como lo mencionan Özgendi & Aydin (2021) y Contreras y Ordoñez (2006), y como se puede observar en Apostol (1967), Bartle (1980), Spivak (1994) y Purcell, Varberg y Rigdon (2007). Del mismo modo, el estudiantado expone que en las clases hay un predominio del contexto matemático, y en la implementación fue evidente que no estaban acostumbrados a trabajar con un contexto más cercano a la vida cotidiana. También, al trabajar con este tipo de situaciones es necesario interpretar los resultados que se obtienen; no obstante, algunos estudiantes presentaron dificultad en esta parte.

Ahora bien, respecto a qué es lo que se está acumulando, de forma similar a lo que menciona Jiménez (2019), se encuentra una dificultad para transitar entre la noción intuitiva de lo que se está acumulando y qué es lo que significa a nivel matemático. Esto se observa pues, a pesar de que las personas estudiantes identificaron que se iban agregando sucesos de un evento, no fue intuitivo emplear esta información para solucionar tareas que requerían interpretar ese valor acumulado y efectuar predicciones.

Otro elemento a destacar, con respecto a los aprendizajes, dado que se trabajó con una situación de aprendizaje, era esperado que surgieran momentos de confrontación. Se presentaron cuatro eventos donde esto sucedió, el primero de ellos ocurrió durante la revisión de tareas matemáticas, donde se necesitaba entenderlas, identificar el sentido de las preguntas que se formularon y discriminar el tipo de información que buscaban recolectar y qué se relaciona directamente con la práctica de acumulación y la significación de la integral definida.

En un segundo momento, la confrontación se presentó por parte de las personas estudiantes al implementarse la situación de aprendizaje, pues se enfrentaron al contexto con el que debían trabajar, a las tareas que se les plantearon y lo que se les solicitó efectuar. El tercer momento surge por parte de las implementadoras, porque al observar e identificar que las personas estudiantes estaban afrontando ese nuevo contexto y las tareas que se les formularon, se vieron en la necesidad de enfrentarse por sí mismas la situación de aprendizaje que estaban implementando y las complejidades que surgían durante la ejecución.

Finalmente, la confrontación se vuelve a presentar cuando empieza el análisis, esto porque puso en jaque la comprensión que se tenía acerca de la práctica de acumulación y de la predicción. Además, se entró en incertidumbre respecto a cuáles eran esos elementos que permitían caracterizar la noción de acumulación que se obtuvieron tras las entrevistas y la implementación de la situación de aprendizaje.

Como se ha mencionado anteriormente, al implementar esta situación, al observar que no se estaba comprendiendo lo que se quería estudiar, y posteriormente al evaluar la implementación, nosotras tuvimos un momento de confrontación, por lo que se considera que también entramos en una situación de aprendizaje. Esto porque nos encontramos en una posición donde de primera entrada no fue posible comprender a cabalidad el objeto matemático involucrado; de tal forma que para su comprensión requirió la exploración de diversos aspectos de la situación, crear espacios de discusión donde se enunciaron los distintos puntos de vista y generar conclusiones en conjunto.

En este punto es necesario considerar que posterior a realizar las entrevistas y la implementación de la situación de aprendizaje, se evidenció que no estábamos comprendiendo qué es y para qué sirve la práctica de acumulación; es decir, su rol en la construcción de significados de la integral definida. Por ello, es que se inició un grupo de discusión, donde se reflexionó respecto a lo implementado, las evidencias obtenidas, el diseño de tareas matemáticas basadas en la acumulación, el rol de la predicción al estudiar la acumulación, el vínculo de la acumulación (sumas/incrementos) con la integral definida, entre otros. Esto permitió que pudiéramos entender y significar la integral definida a partir de la acumulación y posibilitó efectuar un análisis reflexivo de las evidencias provenientes de la información recopilada.

No obstante, se decide continuar con este fenómeno, pues permite mostrar cómo la acumulación se presenta en un contexto real, efectuar predicciones y posibilita relacionarlo con el área bajo la curva. Es por esto que lo consideramos idóneo para caracterizar los significados asociados a la noción de integral definida a partir de la práctica de acumulación de las personas estudiantes involucradas. Pues al estudiar fenómenos cinemáticos, es posible evidenciar el papel de valores acumulados o incrementos, los cuales le dan un sentido al área bajo la curva que se observa en una representación gráfica, lo que, posteriormente, puede asociarse con las sumas de Riemann.

Por otra parte, en lo que respecta a las limitaciones que se presentaron durante el desarrollo de este Seminario de Graduación, se considera que una de las principales es la escasez de literatura que trata acerca de la práctica de acumulación. Aunque existen aportaciones teóricas, son poco explícitas y no profundizan en detalles. Esto mismo sucede en relación con el material académico sobre el diseño de situaciones de aprendizaje, principalmente enmarcado dentro de un enfoque socioepistemológico. Por lo cual, no existe una estructura previa que oriente la ruta que debe seguirse al realizar un trabajo vinculado con el estudio del papel de la acumulación en la construcción de la noción de integral definida desde la Teoría Socioepistemológica.

Ahora bien, detallando algunas limitaciones en el diseño de la situación de aprendizaje, lo que se efectúa en este trabajo es una adaptación de tareas matemáticas; sin embargo, esta labor no fue sencilla. Se considera compleja porque parte de elementos previamente diseñados por terceros, en donde se desconoce a cabalidad la intención de la persona al formular las preguntas, la razón por la cual selecciona un determinado contexto. No se llega a poseer toda esta información, pues la persona que diseña la tarea no siempre hace explícito en sus escritos los motivos de estas selecciones.

No obstante, para solventar lo anterior, se realizó una adaptación de las tareas de tal forma que se articulara la situación de aprendizaje y estuviese dotada de una intención didáctica. Es decir, que la forma en la que se estructuró permitiera observar y estudiar el actuar de las personas estudiantes y de sus producciones. Particularmente, se considera que el contexto acerca del consumo de grados-días de un ácaro, empleado en las tareas matemáticas adaptadas, no favoreció comprender el fenómeno que se estaba estudiando. Es importante indicar que tanto nosotras como las personas estudiantes tuvimos dificultades para comprenderlo. Esto porque las explicaciones del fenómeno no son intuitivas, no se efectúo una exploración detallada del contexto y no era tan cercano a nuestra realidad.

La situación anterior dio paso a que se presentaran dificultades y obstáculos al estudiar en detalle la información recolectada durante la implementación. Principalmente porque, como se mencionó anteriormente, no se conoce en totalidad la intención de todas las preguntas de las tareas matemáticas y el contexto de las mismas no era del todo comprendido.

Además, recomendamos como medida para solventar este tipo de carencias elaborar un material que informe del fenómeno, explique su contexto y se detallen algunos de sus principales elementos asociados. Con esto se busca que las personas estudiantes posean una mayor comprensión de lo que se está estudiando.

Relacionado con elementos del diseño de la situación de aprendizaje, consideramos tras una constante reflexión que, en algunas de sus tareas matemáticas, se observa una conexión forzada entre la integral definida y la noción de acumulación; esto porque se enfatiza mucho en observar la tarea desde la acumulación. Entonces, consideramos que no se debe forzar a las personas estudiantes a efectuar estas asociaciones con la noción de integral definida; sino que se debe propiciar un espacio donde este sea un resultado que se obtenga de forma intuitiva.

Una limitación en la implementación de la situación de aprendizaje es que, para solucionar las diversas tareas matemáticas adaptadas, hay que hacer una inversión de tiempo considerable. Dada la población y la modalidad que trabajamos, la implementación fue de larga duración, lo cual resultó un tanto agotador para nosotras como implementadoras y para la mayoría de las personas estudiantes. El requerir de bastante tiempo para poder efectuar una serie de actividades resulta desgastante; debido a ello, es trascendental tener en consideración la duración total de una situación de aprendizaje y procurar que no sea excesiva, pero que de igual manera permita recopilar la información necesaria.

Siguiendo con lo anterior, nuestra recomendación es efectuar sesiones de trabajo en días diferentes para implementar una situación de aprendizaje. Consideramos que de esta manera las personas estudiantes poseen más tiempo para solucionar las tareas asignadas, lo que les permite tener más espacio de autoevaluar la comprensión de lo que se está realizando. Además, posibilita brindar más tiempo en los momentos de discusión grupal, de esta manera es posible profundizar en más detalles que son centrales en la comprensión de lo efectuado en la fase de trabajo individual y generar consideraciones grupales más estructuradas respecto a la comprensión general del fenómeno.

Otra limitación en lo que refiere a la implementación de la situación de aprendizaje fue el no poder recopilar información acerca de todo el actuar de las personas estudiantes. Esto se debió a que en el momento en el que se llevó a cabo la ejecución se efectúo en modalidad virtual pues las medidas sanitarias tomadas emitidas por el Ministerio de Salud de Costa Rica restringieron las actividades presenciales, regulaciones que fueron acatadas por la Universidad de Costa Rica y por nosotras al llevar a cabo este trabajo. Debido a ello, no fue posible recolectar la totalidad de las notas escritas por las personas estudiantes y tampoco se pudo observar el cómo enfrentaron las tareas y ahondar, de manera individual, afrontaron las circunstancias que se presentaron al momento de efectuar el trabajo independiente.

En relación con la modalidad en la cual se desarrolló la implementación, un elemento a tener en consideración es que no todas las personas estudiantes poseían condiciones similares. Por tanto, se considera esto una limitación pues el lugar y contexto en el cual desarrollaron las tareas no era el mismo y algunas de las personas no contaban con un espacio donde pudieran trabajar libre de distracciones externas. De este hecho, consideramos que una recomendación al ejecutar este tipo de actividades es que siempre y cuando las condiciones lo posibiliten, se debe realizar en un espacio que garantice homogeneidad en las condiciones en las cuales cada una de las personas va a desarrollar las tareas y velar por que posea el mínimo de distracciones posibles.

Con el propósito de orientar a futuras personas que deseen diseñar situaciones de aprendizaje basadas en la acumulación, seguidamente se brindan algunas recomendaciones. Inicialmente, es indispensable definir un objetivo que oriente las tareas, por ejemplo, en nuestro caso es el significar la integral definida a partir del estudio de fenómenos vinculados con la práctica de acumulación. Este viene a ser la guía de todo lo que se elabore, de tal forma que éstas busquen recopilar información que se relacione con el cómo las personas estudiantes comprenden la noción de integral definida a partir de la acumulación. Además, brinda los lineamientos de qué elementos deben incluirse y a cuáles hay que darles énfasis, sin caer en los abusos, para propiciar ese vínculo.

Continuando con lo anterior, para efectuar esta construcción se considera necesario efectuar una indagación de fenómenos donde se propicie la acumulación y resulte de forma intuitiva referirse a ella. Para ello se pueden consultar artículos y trabajos finales de graduación; teniendo en cuenta que, si se desea tomar alguna tarea de estas fuentes, se debe hacer una revisión y adaptación de la misma para que sea accesible a la población. De esta forma, se busca identificar contextos en donde no se fuerza esa conexión y sea necesario y útil el acumular datos para comprender la situación. En resumen, se busca un contexto real en donde se abordan fenómenos que involucran cambios conforme transcurre el tiempo; es decir, donde se estudien incrementos o acumulaciones con el propósito de efectuar una predicción.

Ahora bien, un elemento que se debe tener en cuenta antes de implementar la situación de aprendizaje es realizar un estudio previo del fenómeno y de las herramientas que se van a utilizar. Otro aspecto a considerar es indagar los conocimientos previos de las personas estudiantes, relacionados al área de funciones, aspectos generales del uso de GeoGebra, u otro tipo de graficador; entre otros elementos vinculados al área algebraica y de representaciones. Además, es indispensable implementar más de una vez el diseño; de manera tal que en una primera prueba se ejecute como plan piloto y permita determinar elementos que se deben modificar con el propósito de facilitar la comprensión de las personas estudiantes y recopilar la información deseada.

Una recomendación orientada al diseño de tareas matemáticas es acotar los datos en un determinado periodo, esto con el fin de efectuar un estudio más detallado en ese lapso específico. Para propiciar la comprensión de la situación es recomendable graficar la información para observar su comportamiento; enfatizando en la importancia que posee el significado y nombre de los ejes en el modelaje del fenómeno.

Aunado a lo anterior, en lo que refiere a requerimientos que deben tener las tareas matemáticas es adecuado diseñar preguntas que permitan realizar predicciones, haciendo énfasis en el uso de representaciones gráficas. Incluir elementos, si la tarea lo permite, que requieran efectuar un cambio en las unidades de medida para mejorar la precisión en los cálculos; es decir, para dar una predicción más acertada. Otro elemento importante es propiciar el contraste con los datos reales para observar qué tanto dista de la realidad esa predicción, formular interrogantes donde se conduzca a la persona estudiante a reflexionar al respecto y estudiar factores externos no considerados que pueden afectar lo realizado. La predicción es la que le da sentido a la acumulación y, dentro del contexto situacional, es imprescindible para conocer el qué sucederá en el fenómeno estudiado conforme transcurre el tiempo.

Particularmente, para propiciar una exploración de la noción de área bajo la curva como antesala de integral definida se recomienda que las personas estudiantes expliquen el significado del área en el contexto de la tarea, realizando una aproximación de ésta al subdividirla en rectángulos más pequeños. De esta manera, se busca interpretar la comprensión que poseen de la suma de dichos rectángulos y qué significa cada uno de ellos. Asimismo, estudiar el qué sucede si se utiliza otro tipo de figura geométrica para determinar esa área y estudiar de forma algebraica para establecer un nexo entre ambas representaciones

Para finalizar con las recomendaciones para el diseño de tareas centradas en la práctica de acumulación es central diseñarlas de tal manera que contemplen fases de trabajo independiente, discusión de resultados y construcción de significados colectivamente. Pues es de esta manera que se llega a significar por medio de prácticas socialmente compartidas la noción de integral definida a partir de la acumulación. En estos procesos es central señalar la necesidad de que las personas estudiantes identifiquen y verbalicen las estrategias y razonamientos utilizados.

Referencias bibliográficas

Apostol, M. (1967). *Calculus. Volumen I.* Reverté.

Aranda, C. y Callejo, M. (2017). Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: dos estudios de casos. *Bolema, 31*(58), 777-798. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13

Bartle, R. (1980). *Introducción al Análisis Matemático de una variable* (1a. ed.). Limusa.

Briceño, A. y Buendía, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *45*, 65-83.

Boigues, F. J., Llinares, S. y Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(3), 255-282.

Caballero-Pérez, M. (2018). *Causalidad y Temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de Variación y el Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional* [Tesis de Doctorado]. Cinvestav. https://revistas.uaz.edu.mx/index.php/REDIEM/article/download/560/507/

Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática, 20*(3), 33-57.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cantoral, R. (2019). Socioepistemology in Mathematics Education. In: Lerman S. (Eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer, Cham.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes–Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5–17.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la introducción al análisis. *Epsilon, 42*(14,3), 353–369.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 1031-1040.

Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime, 9*(1), 65-84.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Departamento de Educación Matemática. (2021). *Carta al estudiante del curso Funciones Riemann Integrables.* Escuela de Matemática. https://emate.ucr.ac.cr/images/EMATE/Departamentos/Ensenanza/Educacion/CartasII2021/MA0019.pdf

Escuela de Matemática de la UCR. (2015). *Texto parcial del Plan de Estudios de la Carrera Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática.* Escuela de Matemática. https://emate.ucr.ac.cr/images/EMATE/Departamentos/Ensenanza/Educacion/perfil_academico_profesional_educacion_matematica.pdf

Fallas–Soto, R. (2021). Una experiencia virtual de aprendizaje sobre la educación estocástica inicial con estudiantes costarricenses de secundaria. *Innovaciones Educativas, 23*(34), 244-260. https://doi.org/10.22458/ie.v23i34.3452

Gaete-Peralta, C. (2020). La categoría de modelación y el concepto de integral definida: una mirada socioepistemológica. *UCMaule, 58*, 83-105. http://doi.org/10.29035/ucmaule.58.83

García–García, J. & Dolores-Flores, C. (2021). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Math Ed Res J, 33*, 1–22. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

Hoba, R. (2018). A resource for introducing students to the integral concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(4), 603-616. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1480809

Huincahue, J. (2011). *Dinámica de modelos de depredación continuos e impulsivos y estudio fenológico del Brevipalpus Chilensis* [Tesis de maestría]. Universidad Pontificia Católica Valparaíso. https://www.researchgate.net/profile/Jaime_Huincahue/publication/309903714_Dinamica_de_modelos_de_depredacion_continuos_e_impulsivos_y_estudio_fenologico_del_brevipalpus_chilensis/links/5825df0208aeebc4f8a1dc82/Dinamica-de-modelos-de-depredacion-continuos-e-impulsivos-y-estudio-fenologico-del-brevipalpus-chilensis.pdf

Jiménez, J. R. (2019). Un acercamiento dinámico a la integral desde un punto de vista variacional: funciones aproximadas de acumulación. *AMIUTEM*, *7*(1), 44-65.

Jiménez-Villanueva, M. y Mejía-Velazco, H. (2015). Estudio de la integral definida mediante la función de acumulación. *3er Coloquio de Doctorado*, Departamento de Matemática Educativa.

Jiménez, V. E. (2012). El estudio de caso y su implementación en la investigación. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales, 1*(8), 141-150.

Kröll, H. (2013). El método de los estudios de caso. En Tarrés, M (Ed.) *Observar, escuchar y comprender. Sobre la tradición cualitativa en la investigación social* (231-264). FLACSO.

Marcía-Rodríguez, S. (2020). *Resignificación de la integral en una comunidad de estudiantes de docencia de la matemática. Una categoría de acumulación y la perspectiva de identidad disciplinar.* [Tesis de maestría]. Cinvestav. https://repositorio.cinvestav.mx/bitstream/handle/cinvestav/4030/SSIT0019024.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Martínez, F. (2014). Recursos para el cálculo visual de integrales. *Revista de Educación* Matemática, *26*(1), 153-169.

Mieles, M.D, Tonon, G. y Alvarado, S.V. (2012). Investigación cualitativa: El análisis temático para el tratamiento de la información desde el enfoque de la fenomenología social. *Universitas Humanística, 74,* 195-225.

Montiel, G. y Buendía, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa.*

Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 237-256.

Özgendi, M. & Aydin, U. (2021). Identifying Competency Demands in Calculus Textbook Examples: the Case of Integrals. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19*, 171-191. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10046-9

Palha, S. & Spandaw, J. (2019). The integral as accumulation function approach: A proposal of a learning sequence for collaborative reasoning. *European Journal of Science and Mathematics Education, 7*(3), 109-136.

Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon. S. (2007). *Cálculo Diferencial e integral*. Pearson Education.

Reyes Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Editorial Gedisa*, S.A.

Rodríguez, C. M., Piña, C. N. y Seife, A. (2012). El seminario como forma de organización de la enseñanza. *MediSur, 10*(2),109-116.

Simón, M. G. (2018). Situaciones de aprendizaje para el desarrollo del talento de las mujeres en matemáticas. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades (SOCIOTAM), 28*(1), 177-200.

Spivak, M. (1994). *Answer book for Calculus* (3a. ed.). Publish or Perish.

Universidad Nacional de La Plata. (2016). *Módulo 6: Integrales.*

Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (3a. ed.). SAGE Publications.

Anexos

Anexo 1: Tareas matemáticas

A partir del siguiente planteamiento, responde las preguntas.

$$\int_{a}^{b} (2x+1)dx = 30$$

a) ¿Cuáles podrían ser algunos valores para a y b?

b) ¿Qué significado tiene para ti la integral?

c) A partir del significado que tienes de la integral, explica el procedimiento que realizaste en el inciso a.

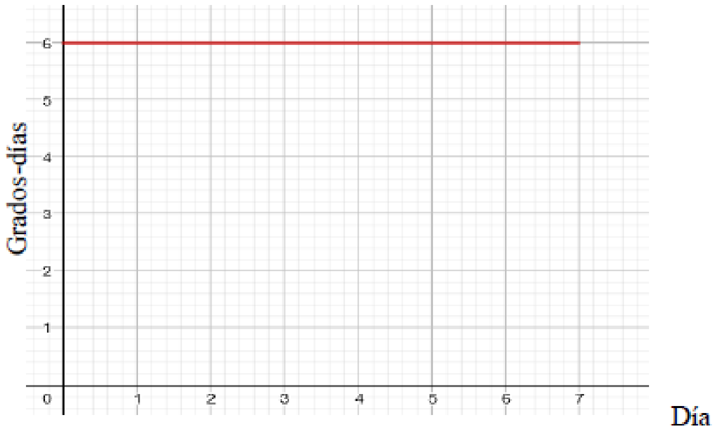
Primera situación

Fuente: Tesis de Marcia-Rodríguez (2020, p. 65)

1) Se está investigando el crecimiento de un bicho mediante el cálculo de los grados-días (unidad que se utiliza para medir la temperatura que consume un bicho). El insecto requiere consumir una cantidad específica de grados-días en cada etapa de su crecimiento.

Conocer esta información permite saber cuántos días tarda el bicho en alcanzar cada etapa de su crecimiento, para tomar medidas preventivas ante el daño que causaría en los cultivos.

En la siguiente gráfica se muestra cuántos grados-días consume el bicho **en cada día**



a) Grafica cuántos grados-días consume el bicho **en la semana**

b) ¿Describe cómo construiste la gráfica anterior?

2) Para que el bicho consuma grados-días, la temperatura debe ser mayor a los 13 °C. Por lo que para conocer cuántos grados-días consume el insecto se usa

$$\textit{Temperatura ambiente} - 13\ °C$$

En la siguiente tabla se muestra el pronóstico de la temperatura ambiente para los próximos cuatro días.

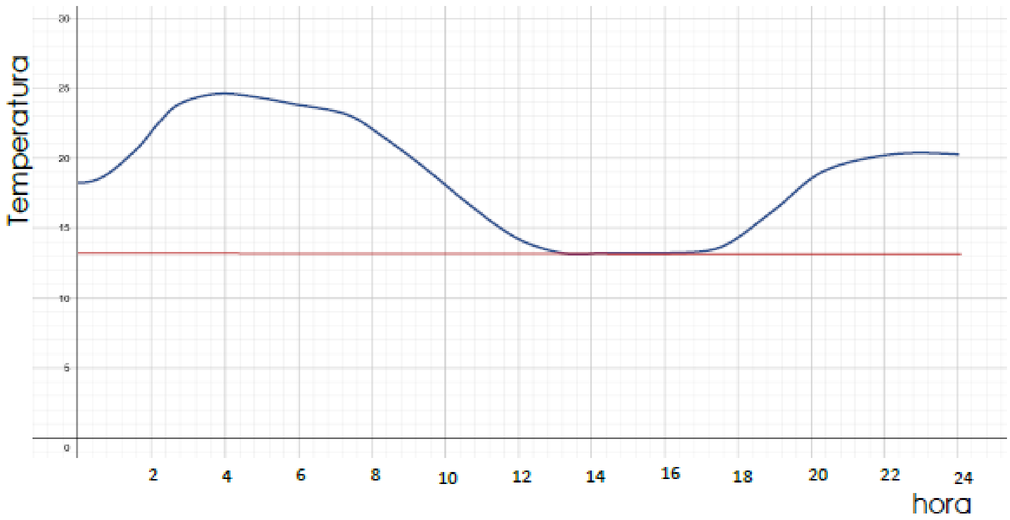
Temperatura en el día	Día
18 °C	Lunes
22 °C	Martes
21 °C	Miércoles
19 °C	Jueves

a) ¿Cuántos grados-días consumirá el bicho al final de los cuatro días?

b) Hasta el domingo (día previo al lunes de la tabla anterior) el bicho ya había consumido 143 grados-días. Dado que se deben tomar medidas preventivas cuando consuma 160 grados-días, ¿qué día se deben tomar las medidas preventivas?

c) Si se requiere calcular con más precisión los grados-días consumidos por el bicho en el día, ¿qué crees que se podría hacer para lograr tal precisión?

3) Las siguientes gráficas muestran el pronóstico de la temperatura ambiente para el viernes (azul) y la temperatura mínima para el consumo de grados-días del bicho (rojo).



a) ¿Cuántos grados-días consumirá el bicho entre las 0 y 8 horas de ese día?

b) ¿Cuántos grados-días consumirá el bicho entre las 3 y 8 horas de ese día?

c) Considerando el resultado del numeral 2, inciso a) y la información de la gráfica ¿cuántas horas tendrán que pasar para que el bicho consuma 32 grados-días?

d) ¿Cuántos grados-días en total consumirá el bicho durante los 5 días (lunes, martes, miércoles, jueves y viernes)?

e) ¿Qué ideas te permitieron encontrar la cantidad de los grados-días para **un día** y para una **cantidad de días**?

f) ¿Qué ideas te permitieron conocer el tiempo que tarda el bicho en consumir una cantidad de grados-días dada?

Segunda situación

Fuente: Tesis de Marcia-Rodríguez (2020, p. 65)

Anexo 2: Guía de entrevistas semiestructuradas

Entrevista inicial

- ¿Qué es para usted la integral definida?
- ¿Qué aplicaciones conoce de la integral definida?
- ¿Cómo describiría su experiencia en el curso Funciones Riemann Integrables? Refiere tanto a debilidades como fortalezas de la forma en la que se ha enseñado y aprendido el saber matemático.

Entrevista final

- ¿Qué es para usted la integral definida?
- ¿Qué aplicaciones conoce de la integral definida?
- ¿Qué elementos incorporaría en el diseño y ejecución de una clase donde se estudie por primera vez la integral definida?

Anexo 3: Diseño de situación de aprendizaje - Crecimiento de un ácaro

ESTUDIO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

NOMBRE

MOMENTO 1: ¿CÓMO INTERPRETO LA INTEGRAL DEFINIDA?

A partir de la siguiente integral definida, responde las preguntas.

$$\int_a^b (2x+1)dx = 30$$

a) ¿Es posible determinar valores para a y b? Justifique su respuesta.

b) En caso de que existan, ¿cuáles pueden ser algunos de esos valores?
Para esto, puede utilizar el documento .ggb en el cual podrá manipular deslizadores con el fin de modificar los valores de a y b.

01

MOMENTO II: CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

NOMBRE

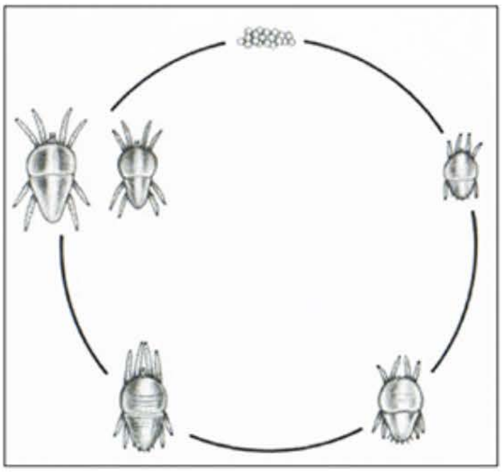
Estudiaremos un poco acerca del *Brevipalpus chilensis*, una plaga que, bajo condiciones favorables de una zona o región, afecta constantemente y de manera ininterrumpida, ocasionando daños más o menos considerables en ciertos cultivos. Lo anterior representa un problema económico en vid de mesa y vinífera (uvas utilizadas en la producción de vino), kiwi, cítricos, entre otros. En consecuencia, este ácaro ha sido base de numerosas investigaciones, principalmente en su asociación con uvas.

Para el manejo sustentable de plagas, se requiere del conocimiento biológico de éstas y de su interacción con el cultivo. Para ello, se estudia la dinámica de la población del *Brevipalpus chilensis* que constituye una herramienta que permite predecir el desarrollo de esta especie de ácaro.

Debido a que se pretende estudiar el crecimiento de este arácnido, es indispensable contemplar la siguiente definición:

Los grados-días son una unidad combinada de tiempo y temperatura utilizada para medir el desarrollo o progreso de un organismo desde un punto a otro en su ciclo de vida (Huincahue, 2011, p. 86).

Para calcular cuántos grados-días acumula un organismo existen variadas formas, desde las más simples hasta otras técnicas más elaboradas. En el Momento III se estudiará una de ellas.



Referencia: Huincahue, J. (2011). *Dinámica de modelos de depredación continuos e impulsivos y estudio fenológico del Brevipalpus Chilensis* [Tesis de maestría]. Universidad Pontificia Católica Valparaíso, Chile.

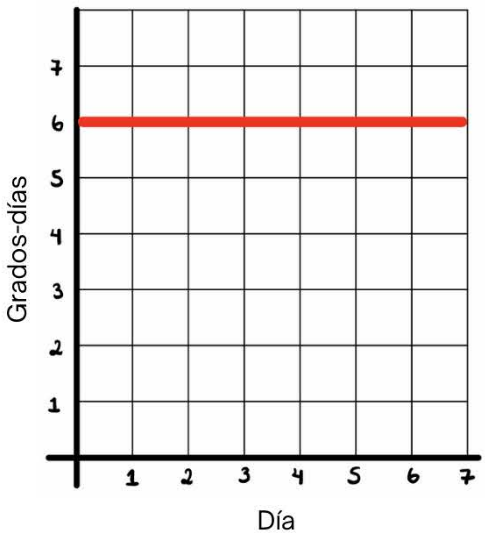
02

MOMENTO II:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

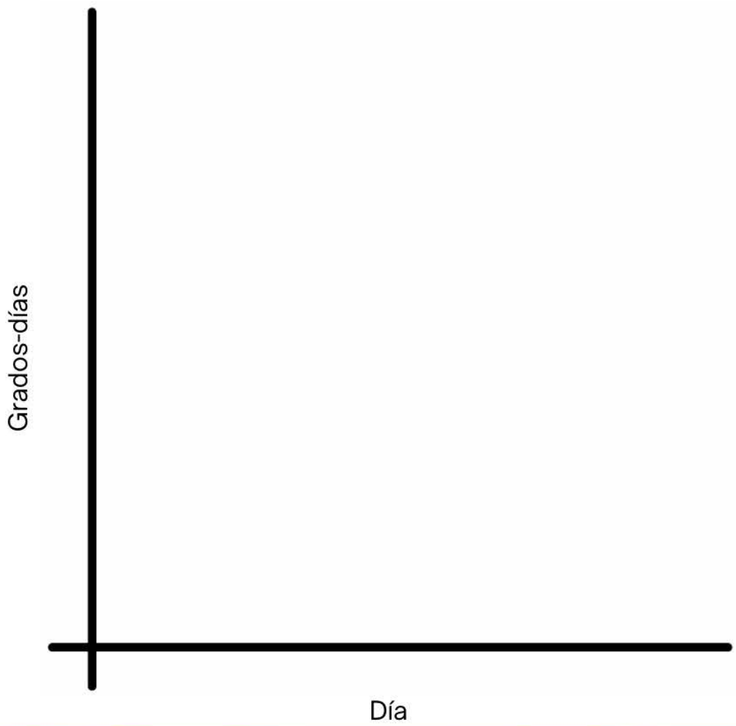
A continuación, se está estudiando el crecimiento del ácaro, el cual requiere consumir una cantidad específica de grados-días en cada etapa de crecimiento.

En este proceso, es necesario tomar medidas preventivas ante el daño que causaría en los cultivos.

En la representación gráfica de la derecha se muestra la cantidad de grados-días que consume el ácaro en cada día.



a) Grafique cuántos grados-días consume el ácaro en una semana.



03

MOMENTO II: CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

b) Describa cómo construyó la gráfica anterior.

04

MOMENTO III:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

NOMBRE

Para determinar la cantidad de grados-días qué consume el ácaro, la temperatura debe ser mayor a los 13°C. Por lo que para determinar cuántos grados-días consume el ácaro se emplea:

Temperatura ambiente - 13° C

En la siguiente tabla, se muestra una tabla que contiene los datos de las temperaturas pronosticadas para los próximos 4 días.

Temperatura	Día
18°	Lunes
22°	Martes
21°	Miércoles
19°	Jueves

a) Al finalizar los cuatro días, ¿cuántos grados-días consumirá el ácaro?

05

MOMENTO III:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

b) Se deben tomar medidas preventivas cuando el ácaro consuma 160 grados-días. Si hasta el domingo, el día anterior al lunes que se presenta en la tabla anterior, el ácaro ha consumido 143 grados-días, ¿qué día se deben tomar las medidas preventivas?

c) Si es necesario determinar con mayor precisión la cantidad de grados días que consume el ácaro en el día, ¿qué realizaría para determinar esa precisión?

06

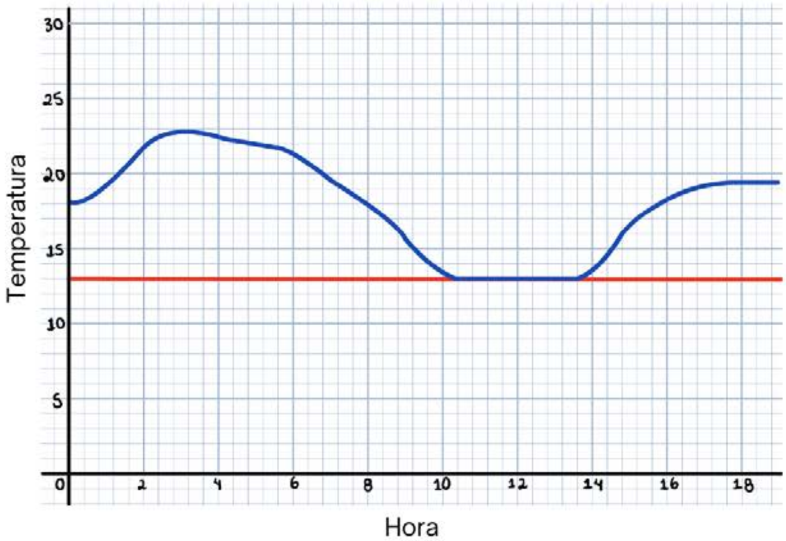
MOMENTO III:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

d) Describa las estrategias que le ayudaron a resolver el Momento III.

MOMENTO IV: CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

NOMBRE

Las siguientes gráficas muestran el pronóstico de la temperatura ambiente para el **viernes** (azul) y la temperatura mínima para el consumo de grados-días del ácaro (rojo).



NOTA:
Recuerde que las unidades que debe considerar es de grados-días, no la de grados horas.

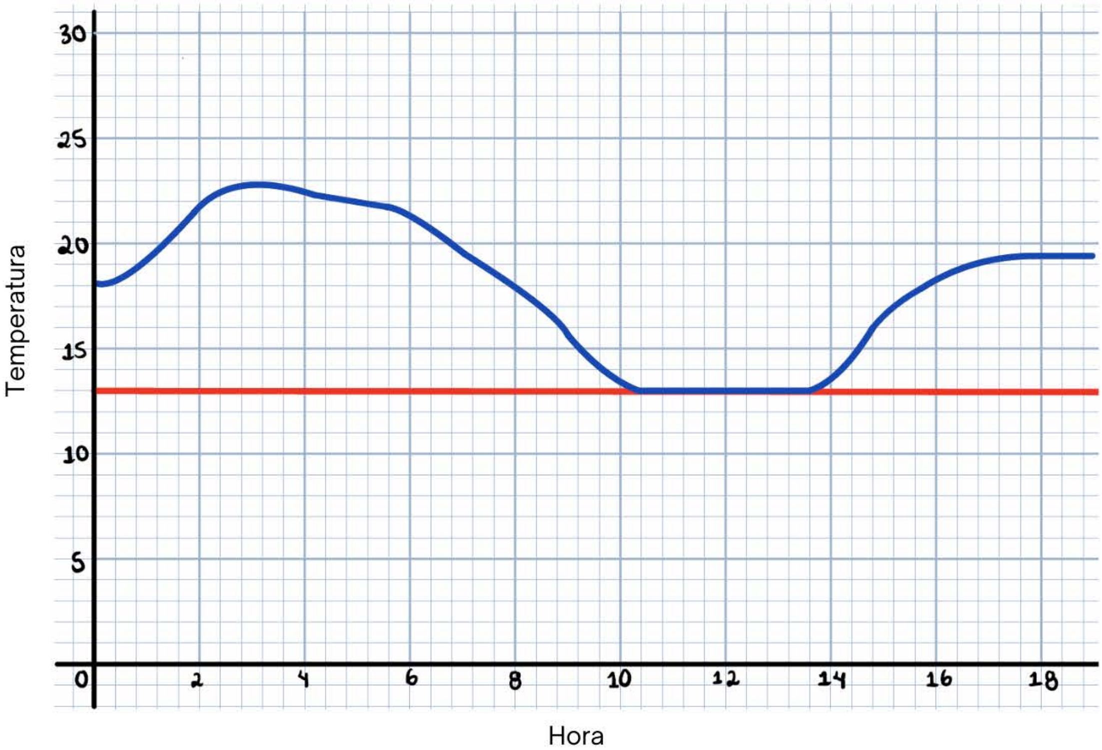
Por ejemplo, en un lapso se registra cada hora la temperatura ambiente, considere que el total de temperatura consumida por el ácaro en este periodo es de 22 **grados-horas**. Entonces, se debe efectuar una conversión en las unidades de medición pues se busca trabajar con **grados-días**; para ello, se debe dividir la cantidad de grados horas entre 24 (pues un día cuenta con 24 horas).

Si en un lapso se registra cada dos horas la temperatura ambiente, considere el total de temperatura consumida por el ácaro en este periodo es de 22 **grados-horas**. Entonces, se debe efectuar una conversión en las unidades de medición pues se busca trabajar con **grados-días**; para ello, se debe dividir la cantidad de grados horas entre 12 (pues un día cuenta con 12 bloques de 2 horas cada uno).

08

MOMENTO IV:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

Las siguientes gráficas muestran el pronóstico de la temperatura ambiente para el **viernes** (azul) y la temperatura mínima para el consumo de grados-días del ácaro (rojo).



a) ¿Cuántos grados-días consumirá el ácaro entre las 0 y 8 horas de ese día?

09

MOMENTO IV:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

b) ¿Cuántos grados-días consumirá el ácaro entre las 3 y 8 horas de ese día?

c) Considerando el resultado del Momento III, inciso a) y la información de la gráfica ¿cuántas horas tendrán que pasar para que el ácaro consume 32 grados-días?

MOMENTO IV:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

d) ¿Cuántos grados-días en total consumirá el ácaro durante los 5 días (lunes, martes, miércoles, jueves y viernes)?

e) ¿Cómo determinó la cantidad de los grados-días para un día y para una cantidad de días?

11

MOMENTO IV:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

f) ¿Cómo determinó el tiempo que tarda el ácaro en consumir una cantidad de grados-días dada?

g) Describa las estrategias que le ayudaron a resolver el Momento IV.

12

NOMBRE

MOMENTO V:
¿CÓMO INTERPRETO LA INTEGRAL DEFINIDA?

a) Resuelve nuevamente el primer momento empleando las estrategias utilizadas en el Momento II, III y IV.

A partir de la siguiente integral definida, responde las preguntas.

$$\int_a^b (2x+1)dx = 30$$

1) ¿Es posible determinar valores para a y b? Justifique su respuesta.

2) En caso de que existan, ¿cuáles pueden ser algunos de esos valores?
Para esto, puede utilizar el documento .ggb en el cual podrá manipular deslizadores con el fin de modificar los valores de a y b.

13

Anexo 4: Transcripción entrevista inicial E1

1	I3	Ahora, antes de iniciar, este… vamos a leer una consigna inicial para que sepás más o menos que vamos a hacer hoy.
2	E1	Ok.
3	I3	Entonces, para efectos de la investigación que estamos realizando, es necesario hacer una entrevista inicial para conocer eh… algunas de sus percepciones en torno al tema que estamos estudiando. Los entrevistadores, en este caso yo, voy a hacer una serie de preguntas en relación con algunas consideraciones que debemos conocer antes de la implementación de la situación de aprendizaje que vamos a aplicar el martes, como ahora estaba comentando el profesor. Eh… para las preguntas que te voy a hacer si es importante que intentés desarrollar ampliamente las respuestas, ¿verdad?, no sólo contestar sí y no; de acuerdo con las experiencias que hayas tenido como educador matemático en formación. Eh… si tiene algo que le parece confuso o no lo comprende, no dude en comunicarnos. Y este… puesto que es una investigación formal, todo lo que se comente, incluso su identidad, será completamente confidencial. Entonces no es como que va a salir tu nombre: “E1 dijo tal y tal cosa”, sino que va a ser anónimo. Y antes de iniciar, ¿no sé si tienes alguna pregunta?
4	E1	Mmmm no, no no.
5	I3	¿No?
6	E1	No.
7	I3	Todo bien, ok. Entonces, la primera pregunta es: ¿qué es para usted la integral definida? Con tus palabras, ¿qué consideras que es la integral definida?
8	E1	Ok, bueno, eh… En el curso y en lo que yo he aprendido, hemos visto que, digamos, la integral definida, cumpliendo la condición de que la función es positiva, se puede llegar a interpretar como el área bajo la curva de la función. O sea, el área entre los límites de integración, la curva y el eje x.
9	I3	Ok, muy bien. ¿Y qué pasa si la integral… si la función, perdón, no es positiva? ¿Qué pasa en ese caso?
10	E1	Lo que hemos… o lo que el profe nos ha dicho es como que podemos calcular el… o sea, podemos multiplicar por menos uno la función para que sea positiva, y ahora si interpretarlo como área sobre la curva. Eh… personalmente, yo … no sé, cuando yo estudio con GeoGebra, etc., etc… he visto que, digamos, lo que hace es que como que se calcula el área, pero, digamos, por debajo del eje x, entonces al hacer cálculos, queda como si fuera área en deuda, digamos; un área negativa que se cancela con la otra, digamos.
11	I3	Ok, ¿entonces si puede haber área negativa, digamos?

12	E1	Según lo que nos han dicho en el curso, no lo han dicho de esa forma, pero yo con mi investigación personal, eh… deduje que podía ser de esa forma.
13	I3	Ah ok, ok. Muy bien, ahora: ¿qué aplicaciones conoce de la integral definida? ¿Cómo se podría aplicar en…, ya sea dentro de la matemática o en otras áreas como física, biología, química? ¿Para qué sirve la integral definida?
14	E1	Ok… Nosotros vimos en el curso, por ejemplo, para el cálculo de longitud de arco, para área de sólidos de revolución, para el cálculo de áreas, etc. Y si he visto, por ejemplo, que para probabilidad muchas veces, digamos, lo que dan es como una función de probabilidad, etc.; y como que el área bajo la curva se utiliza para hacer ciertos cálculos, que verdaderamente no sé cuáles son, y si he visto que, por ejemplo, eh… economía la utiliza para eso. Tienen que llevar como su curso de cálculo para después para ya usando pasen la mate financiera, no sé, ya ahí la aplican. Sé que la utilizan, pero no sé en qué.
15	I3	Ok, ok muy bien. En la definición mencionaste eso de área bajo la curva, ya sea positiva o negativa, pero eso es la integral en general, pero la integral definida, ¿a qué se refiere el definida?
16	E1	La diferencia que yo había (INAUDIBLE) con la integral definida y la indefinida es los límites de integración. O sea, como a que a mí me dicen: ok, el área bajo la curva de aquí hasta acá, por ejemplo.
17	I3	Ok.
18	E1	Entonces, en realidad, digamos, la integral definida la interpretación que le hemos dado es como la inversa… la operación inversa a la derivada.
19	I3	Ok. Entonces ya la definida es poniendo como un intervalo, ¿verdad?; específico.
20	E1	Exacto. O sea, el área qué hay entre la, no sé, si los límites son a y b, el área qué hay entre la recta equis igual a, equis igual b, la función y el eje equis.
21	I3	Ok.
22	E1	O sea, el área que está encerrada entre esos cuatro.
23	I3	Ok, muy bien. Ahora quiero que me contés un poco sobre eh… tu experiencia en el curso de Funciones Riemann Integrables; es decir, me vas a mencionar como las debilidades o las fortalezas en la forma en que se ha enseñado y ha sido aprendido el saber matemático.
24	E1	Ah ok. Bueno, para mí, personalmente ha sido como bastante buena la experiencia. Yo venía de que tenía que aprender las cosas casi que solillo, digamos jaja en los anteriores dos cursos que eran como de análisis, pero en este el profe ha hecho una … como muy intuitivo y después se ha formalizado, siento yo, de manera correcta. Yo para mi estudio personal siempre llevo un cuaderno. Aquí tengo, digamos, mi cuaderno con toda la materia, con apuntes, dibujos; todo lo que yo necesito, digamos, para entender. Y este curso, en general, eh…

		comparándolo, digamos, con los otros del ciclo, ha sido bastante bueno. Como le digo, el profe lo que ha hecho más que todo es siempre irse a la parte intuitiva y después formalizar, ya matemáticamente. O sea, ese es como el abordaje que se le ha dado y me ha parecido bastante bien. Eh… tal vez alguna debilidad podría ser… bueno, que cuando se presentan las tareas, no sé, por poner un ejemplo, que se presenta… digamos, nosotros tenemos que presentar solo dos ejercicios y así. Y personalmente yo si los hago todos y me aseguro de tenerlos todos correctos, pero sí sé que algunas personas pues aprovechan esa parte para no desarrollar la materia por completo, y así, pero, personalmente, para mí no ha habido problema.
25	I3	Ok y ¿si es la primera vez que llevás esta materia?, es decir, ¿no estuviste en una carrera antes como ingeniería o la otra enseñanza y llevaste el curso de cálculo, o en el colegio incluso, o es la primera vez en este curso o la primera vez que trabajás con integrales?
26	E1	En este curso es la primera vez que he trabajado con una integral. Si, digamos, si estuve en la otra carrera, pero sólo pasé el primer año y en el colegio si hice MATEM, pero no hice cálculo. Entonces sí es la primera vez que vi la integral.
27	I3	Ok ok. Y con respecto a cómo vos aprendés el saber matemático, en este caso la integral definida, ¿qué sentís que… o qué considerás que ha sido lo mejor para vos aprender este tema?
28	E1	Bueno, eh… Siento que la parte gráfica fue como al que… es como la que más ha ayudado, verdad. La idea de ok, eh… comencemos con funciones a trozos, entonces el profe, al inicio, eran demasiados dibujos. Digamos, yo los dibujos los paso al cuaderno con papel cuadriculado y tengo un montón porque ah ok, la gráfica a trozos, entonces ¿cómo puedo sacar el área?, ¿qué pasa si la función hace así o así?; entonces como que uno va generando la idea de esa aproximación a partir de, digamos, de columnas y después hacer ya con lo matemático que ya sabíamos anteriormente, ver que esas columnas fueran base infinitamente pequeña para poder dar el área bajo la curva. Entonces siento que la parte gráfica es como lo que más me ha ayudado.
29	I3	Ok. Y este tema de integral definida ya me dijiste que empezaste, bueno que el profe empezó con funciones a trozos, ¿verdad?
30	E1	Sí.
31	I3	Eso fue como lo primero que él hizo para este… introducir este tema y luego, a partir de eso, ¿cómo trabajaron la integral? O sea, ¿qué fueron trabajando después de eso?
32	E1	O sea, desde la integral a tro… eh… ¿desde la función a trozos hasta integral definida o más bien después de integral definida?
33	I3	Sí, como… ¿cómo introdujo integral definida? ¿Cómo la fue trabajando?
34	E1	Ah ok. Primero fue así, digamos, a trozos, como le había dicho; como las funciones escalonadas. Después, comenzamos con lo de aproximemos cuánto cuánto sería el área bajo la curva, entonces comenzamos con

		sumas superiores y sumas inferiores. Ok, tomemos una partición, digamos, de aquí, aquí, y aquí; hagamos rectángulos y ahí vamos a ver que es algo muy parecido. Este… y después, bueno, se introducen las sumas superiores, sumas inferiores y después ya lo que nos dicen es como que la función es integrable y que las sumas coinciden cuando tienden al infinito y esa sería la integral definida.
35	I3	Ok, ok muy bien. Y eso sería; más bien muchas gracias por este…. participar y anuente a participar en nuestra investigación.

Anexo 5: Transcripción entrevista inicial E2

1	I2	Como te estaba diciendo, si en algún momento tuvieses alguna duda o consulta; si algo te parece confuso o no lo comprendes, me lo puedes comunicar, ¿verdad?
2	E2	Ok.
3	I2	Puesto que es una investigación ya meramente formal, todo lo que se vaya a comentar aquí, incluso tu identidad va a ser totalmente confidencial. Y, para la recolección de los datos, es necesario videograbar, entonces esperemos nos hayas dado el permiso (INAUDIBLE) jaja.
4	E2	No hay problema.
5	I2	Ok. Y antes de iniciar, no sé si ¿tienes alguna pregunta o duda?
6	E2	Eh… no, la verdad no.
7	I2	Ok, entonces comenzamos con las preguntas. La primera sería: ¿qué es para usted la integral definida?
8	E2	¿Qué es para mí la integral definida? Ok, para mi eh… la integral definida es aquella que tiene como límites de integración números reales, por ejemplo. Bueno y… y luego ya, ¿verdad?, otras características de la integral: que tiene una función y una variable de integración.
9	I2	¿Algo más que asocies a la integral definida o la concepción que tienes sobre esta? ¿No?
10	E2	Ah ok, sí; que la integral definida eh… sería como la… verla geométricamente sería como la… el área bajo una curva desde un… en un intervalo, digamos, eh… que en ese caso sería la… los límites de integración serían como de un valor real a otro.
11	I2	Ok, ok perfecto. Emmm… ¿Qué aplicaciones conoce de la integral definida?
12	E2	Eh… para cálculos de áreas, eh… también para lo que es el volumen de, ¿cómo se llama? Superficies de revolución. Eh… y creo que ya; creo que se me olvida una, pero la verdad no me acuerdo muy bien.
13	I2	Cuando hacemos referencia a aplicaciones, no tiene que ser algo meramente matemático. Puede estar asociado a contextos de la vida cotidiana, por ejemplo.
14	E2	Ok. Eh… Si no, la verdad no sabría… Le diría como cálculo de áreas, pero…, pero este…
15	I2	Ok, no hay problema. Y la última pregunta sería: ¿cómo describiría su experiencia en el curso de Funciones Riemann Integrables? Y acá, vamos a pedirte el favor de referir tanto a debilidades como fortalezas de la forma

		en la que se ha enseñado y cómo se ha aprendido este saber matemático, de lo que es la integral definida.
16	E2	La verdad… la verdad eh… A mi si me ha gustado demasiado el curso. El profesor digamos… eh… aborda muy bien lo que es el tema como, digamos, primero ve las definiciones, luego él ve ejemplos, luego propone 3 prácticas… eh… 3 ejercicios para que nosotros los hagamos, ¿verdad?, eh… asincrónicamente; y la verdad eso me ha ayudado bastante. Y más que todo el profesor, ¿verdad? Y debilidades… eh… la verdad no sabría qué decirle porque el profesor es demasiado bueno. O sea, entonces mmm…
17	I2	Eso estaría relacionado en cuanto a la forma en la que se ha enseñado y respecto a cómo lo has aprendido o asimilado ese conocimiento, ¿qué podrías decirnos?
18	E2	Eh… di la verdad si lo he aprendido eh… bien, porque, digamos, yo es que me reúno con otros compañeros para estudiar. Entonces ahí prácticamente nos resolvemos entre nosotros y, digamos, ahí todas mis dudas o algo que no entendí, digamos que después lo entiendo con ayuda de ellos, digamos.
19	I2	Perfecto. Bueno, si no deseas ampliar alguna de las otras preguntas, algo que se te haya ocurrido, entonces ya con eso finalizaríamos la entrevista.
20	E2	Ah ok. No, si no sé la verdad en qué parte podría ampliar o no sé si le hace falta como más información o alguna… No más me dices.
21	I2	Con esto es más que suficiente, era por si se te había ocurrido algo o así.
22	E2	Ok.
23	I2	Muchísimas gracias, hasta luego.
24	E2	Ok, con gusto.

Anexo 6: Transcripción entrevista inicial E3

1	I2	Antes de iniciar, voy a leer unas consignas para que sepas de qué va la entrevista.
2	E3	Ok, está bien.
3	I2	Entonces, para efectos de la investigación que estamos realizando, es necesario hacer una entrevista inicial para conocer eh… algunas de sus percepciones en torno al tema que estamos estudiando. Los entrevistadores, en este caso yo, voy a hacer una serie de preguntas en relación con algunas consideraciones que debemos conocer antes de la implementación de la situación de aprendizaje que vamos a aplicar el martes, como ahora estaba comentando el profesor. Eh… para las preguntas que te voy a hacer si es importante que intentés desarrollar ampliamente las respuestas, ¿verdad?, no sólo contestar sí y no; de acuerdo con las experiencias que hayas tenido como educador matemático en formación. Eh… si tiene algo que le parece confuso o no lo comprende, no dude en comunicarnos. Y este… puesto que es una investigación formal, todo lo que se comente, incluso su identidad, será completamente confidencial. Entonces no es como que va a salir tu nombre: “E1 dijo tal y tal cosa”, sino que va a ser anónimo. Y antes de iniciar, ¿no sé si tienes alguna pregunta?
4	E3	No, no, todo bien.
5	I2	Ok, perfecto.
6	I2	Yo voy a ir haciendo aquí algunas anotaciones de lo que vas mencionando, por si me ves escribiendo por ahí. Entonces, te voy a hacer las siguientes tres preguntas; la primera sería: ¿qué es para usted la integral definida?
7	E3	La integral definida eh… si no estoy mal. Es la que tiene límites. ¿Sí? Eh… la indefinida es la que no tiene límites, ni inferior ni superior. Está dentro de un intervalo finito.
8	I2	¿Quieres agregar algo más a la respuesta a esta pregunta, o eso sería todo?
9	E3	No es que bueno… En resumidas cuentas, eso es… la integral definida. Jmjmjm.
10	I2	Luego tenemos por acá… ¿Qué aplicaciones conoce de la integral definida?
11	E3	¿Aplicaciones?
12	I2	Mmmjmm
13	E3	Este… Recuerdo que el profe nos estuvo hablando sobre la longitud del arco. Y también… nos explicó que… ¿cómo se llama esto? Uno puede… ¿Cómo se llama esto? Calcular el área entre dos rectas. fueron varias.

		Con respecto a las dos rectas, no solamente fue entre dos rectas. También hacia abajo, infinitamente. Mmm no, pero suave, eso no. Bueno ahí sería. Quedé bateada. Pero bueno, las dos que le digo son esas, la longitud del arco y el área entre dos rectas. Ahí no importa si están en la parte positiva o negativa, porque siempre es positiva. Entonces, ahí. Sí, el cálculo de áreas supuestamente.
14	I2	Y en relación con aplicaciones cotidianas, no sé la música, química, biología; ¿se recuerda alguna?
15	E3	Mmm… Sinceramente, eso sí no sé.
16	I2	No hay problema. Y ya para la tercera y última pregunta, ¿cómo describiría su experiencia en el curso Funciones Riemann Integrables? Refiriendo tanto a debilidades y fortalezas en el saber matemático, tanto en el cómo se ha enseñado y el cómo lo has aprendido. Y también, me gustaría saber si es la primera vez que llevas el curso.
17	E3	Ok. Bueno sí, es la primera vez que llevo el curso. Eh… Para mí, el método que ha utilizado el profe Jonathan, de hecho, una vez se lo hice saber, me ha gustado en la parte de que verdaderamente le entiendo. Porque bueno, una cosa es lo que se ve en clase y otra lo que viene en las tareas, eso es claro. Pero bueno, en la clase a como él lo va explicando, él tiene algo que es muy detallista, no omite cosas pensando que uno ya las domina, que entiendo que debíamos dominarlas, pero él está consciente que tal vez los cursos anteriores no tuvieron una buena metodología y no están al cien en nosotros. Entonces él sí intenta llenar todos los espacios que uno necesita para ir comprendiendo. Otra cosa es que. Eh… yo creo que esto es súper personal, pero bueno. Es que por ejemplo, el profe llegaba dictaba la materia y nos compartía el PDF, entonces uno se quedaba como ¡uy!. Solamente con ese PDF. Este… el profe solamente comparte los videos, entonces a uno lo obliga a escribir la materia. Si a uno no le da tiempo estando en clase, luego va al video y puede copiar lo que le faltaba, copiar lo que va diciendo o haciendo. Eso es otra cosa muy buena, que él nos graba los videos de las clases. Entonces, uno se puede devolver las veces que sean necesarias para escuchar la explicación de tal tema o tal ejercicio. Yo digo que siento que esta pandemia me hizo depender de videos de clases y siento un nudo de solo pensar en la presencialidad del cuarto año, si es que viene; porque es solamente lo que usted escuchó en ese momento y ya nadie me va a grabar clase ni a grabar nada. Creo que fue una dependencia que se creó ahorita en pandemia que no sé cómo me la voy a quitar. Pero sí, me gusta mucho que el profe haga los momentos de exposición. Aunque es demasiado nervio porque a veces dice lo que uno va a exponer y a veces no, solamente se da cuenta uno al entrar a la clase. Este momento a uno lo obliga a ir entendiendo las cosas. ¿Por qué? Porque es una exposición que vale bastantes puntos y no solamente es usted y ya, sino que son todos sus compañeros y van a observar cómo es que usted va en el conocimiento. Y me da mucha responsabilidad porque es como

		supérese porque no solo usted lo va a ver jajaja. Y sí, de hecho, el viernes hay exposición jajaja. Pero me gusta mucho la parte de exposición porque lo obliga a entender muy bien para poder explicar. Eh… ¿Qué más? Bueno, en realidad en el examen, sí… o creo que baja un poquito la extensión de los ejercicios o nos da un poquito más de tiempo, porque no…no calza. Bueno, a mí, en mi caso, por tiempo, factor tiempo tuve problemillas. Pero osea, en realidad, es de los cursos que más he aprendido de matemáticas. Siento que he aprendido mucho en este curso. Yo hablo mucho, lo siento.
18	I2	Eh… ya con esas tres preguntas estaríamos finalizando la entrevista. Entonces, nuevamente muchísimas gracias.
19	E3	Listo, está bien, más bien muchas gracias a ustedes.

Anexo 7: Transcripción entrevista inicial E4

1	I3	Entonces, antes de iniciar te voy a leer unas consignas iniciales, para… Eh para establecer las reglas de la entrevista. Entonces, para efectos de la investigación que estamos realizando, es necesario hacer una entrevista inicial para conocer algunas de sus percepciones en torno al tema que estamos estudiando. Los entrevistadores, en este caso yo, voy a hacer una serie de preguntas en relación con algunas consideraciones que debemos conocer antes de la implementación de la situación de aprendizaje que vamos a aplicar el martes Eh… para las preguntas que te voy a hacer si es importante que intentes desarrollar ampliamente las respuestas, ¿verdad?, no sólo contestar sí y no; de acuerdo con las experiencias que hayas tenido como educador matemático en formación. Si tiene algo que le parece confuso o no lo comprende, no dude en comunicarnos. Y este… puesto que es una investigación formal, todo lo que se comente, incluso su identidad, será completamente confidencial. Entonces no es como que va a salir tu nombre. Y antes de iniciar, ¿no sé si tienes alguna pregunta?
2	E4	¿Ocupan que prenda la cámara o no?
3	I3	Como te sientas más cómoda.
4	I3	La primera pregunta es: ¿qué es para usted la integral definida?
5	E4	¿Integral definida?
6	I3	De acuerdo con tus experiencias en el curso o si ya había llevado un curso donde se trabajara con la integral definida, ¿qué es para usted la integral definida o cómo la podría definir o la entiende?
7	E4	Ok vamos a ver jajaja. Ok hace tiempo comencé. Este es el primer curso que estoy llevando dónde se estudia el tema. Pero… Básicamente… Una definición exacta no me acuerdo mucho. Pero es como una suma infinita de algo, entonces empezamos con sumas de Riemann para poder definirla. Entonces, siento que es como una… una suma infinita.
8	I3	Ok, ¿y ese algo qué podría ser? Digamos imagina una gráfica, de qué sería esa suma infinita, ¿de qué? O las sumas de Riemann, ¿en esas sumas qué era lo que estabas sumando?
9	E4	Áreas.
10	I3	Muy bien, áreas. ¿Áreas de qué?
11	E4	Em… Vamos a ver… Lo que hacíamos era sumar áreas que…. estuvieran bajo la curva, o encima de la función; porque habían varios casos.

12	I3	Entonces, sí, teníamos las sumas infinitas o el área bajo la curva. Entonces, cuando te dicen integral definida, ¿a qué se refiere ese definida.
13	E4	Cierto jajaja. Es como cuando… uno nada más toma un intervalo. Digamos, no es infinito, solamente toma un intervalo de A a B digamos.
14	I3	Muy bien. Ahora, ¿qué aplicaciones conoce de la integral definida? Que a vos te dice integral definida, ¿esto lo podríamos aplicar para?
15	E4	Cálculo de límites, creo que fue lo que vimos. Pero ya algo como más concreto… Vamos a ver jajaja
16	I3	O si han visto en clase alguna aplicación en otra ciencia básica como física, química, biología. O si han visto alguna aplicación en la vida diaria donde uno dice mirá la integral se puede usar para esto. Como aplicaciones en general…. O en la misma Matemática, dentro de otra área matemática vos decís, esto se puede usar para tal cosa
17	E4	Mmm… También creo que esto lo vimos, es que no vimos así como un ejemplo en otra área específica o no me acuerdo muy bien. Pero vimos que se puede medir la longitud de la función. En algunos casos de la vida cotidiana vimos que este… esa formita de algunas curvas… Pero en sí… No sé. no sé si usan Riemann para medir otras cosas. Es que lo vimos como en la misma matemática
18	I3	Ok, ¿como para ver la longitud de la función?
19	E4	Ajá
20	I3	Ok…. Entonces, ¿Cómo describirías la experiencia que has tenido en el curso de Riemann Integrables? Es decir, puede referirse tanto a las debilidades como a las fortalezas de cómo se ha enseñado y aprendido el saber matemático en general. ¿Cómo ha sido tu experiencia en el curso?
21	E4	Ok bueno… Al principio sí creo que el profe sí fue muy, o sea, a pesar de ser un tema nuevo yo sí le entendía al principio. Como todo curso, se va poniendo más complicado y ya está en las finales. Em… como el profesor explica me he sentido cómoda y con su metodología me he sentido cómoda. Lo que hacen son tareas y luego hay que exponerlas, es muy importante porque tenemos que expresarnos más. En general, sí me ha ido bien. Entonces, a veces uno se sienta y empieza a estudiar y es como ¿qué es esto? Pero es algo que pasa en los cursos de matemática. Digamos, un tema que me tiene pensando es… Porque lo venimos viendo… Es las impropias o las indefinidas. Pero es porque es bastante materia, pero yo creo que uno estudiando lo logra.
22	I3	Ok, entonces… ¿El curso sí ha propiciado que podás aprender esta materia? Digamos, cuando te dicen integral, ¿cuál creés que es la mejor manera de

		enseñar o aprender integrales?
23	E4	Ok…. Yo creo que el método que usó el profe es bastante factible. Digamos que he visto libros que inician con sumas. Una vez estaba en una tutoría con un muchacho y él nos decía que hay otra manera, no verlo con sumas. Ya introducir el concepto con sumas indefinidas, pero yo creo que es porque él estaba en mate pura, entonces es diferente, verdad. Em… pero digamos a mí me favorece como lo introdujo en este curso.
24	I3	¿Él empezó con sumas de Riemann?
25	E4	Ajá, sí, primero calcular las áreas pedacito por pedacito
26	I3	Ok, y luego de eso. ¿Cómo empezaron a trabajar la integral? Es decir, pasaron por sumas de Riemann y luego, ¿qué siguió?
27	E4	Eh… Después de eso vimos el concepto. Este… igual como relacionando mucho con lo que ya habíamos visto, que los supremos e ínfimos. Ya luego vimos los métodos, como el de por partes.
28	I3	Muy bien, ya eso sería.

Anexo 8: Transcripción entrevista inicial E5

1	I3	Para efectos de la investigación que estamos realizando, es necesario hacer una entrevista inicial, para conocer alguna de sus percepciones en torno al tema que estamos estudiando. Los entrevistadores, en este caso yo, vamos a hacer una serie de preguntas en relación con algunas consideraciones que debemos conocer antes de la implementación de la situación de aprendizaje, que es lo que estaba contando ahora el profe, que va a ser la otra semana. Para estas preguntas, quiero que intentes desarrollar ampliamente las respuestas, ¿sí? De acuerdo con las experiencias que hayas tenido como educador matemático en formación. Entonces, la idea no es como que respondas sí o no o no sé, sino que intentes desarrollar un poco más, ok?
2	E5	Ok.
3	I3	Si tenés alguna duda por favor comunica si algo te parece confuso o no comprendes. Puesto que es una investigación formal, todo lo que se comente, e incluso su identidad, va a ser completamente confidencial a la hora de publicar el trabajo, es decir, no va a salir tu nombre. Para la recolección de datos te pido el permiso para videograbar la entrevista y antes de iniciar, ¿no sé si tienes alguna pregunta?
4	E5	No, de momento no. Todo muy claro.
5	I3	Ok, muy bien. Entonces, primero quiero que me cuentes que es para vos la integral definida.
6	E5	La integral definida, para mí, al menos cuando la función es positiva, la integral la interpreto como esa área que está bajo esa curva o esa función digamos. Ya cuando es negativa ahí si me cuesta un poco más interpretar qué representa, entonces lo que hago es como que me la imagino como el valor absoluto y nuevamente esa área.
7	I3	Ok.
8	E5	Pero, en el caso negativo no sabría cómo interpretarlo.
9	I3	Ok, muy bien. Entonces cuando hay una gráfica vos decís ah ok, es el área bajo la curva, pero cuando eso te da negativo, decís como mmm ya no sé por qué me da negativo o si puedo considerar un área negativa, ¿o algo así?
10	E5	Si, exactamente.
11	I3	Mjm. Ahora, ¿qué aplicaciones conoces de la integral definida?
12	E5	De la integral definida, este… Bueno, las que hemos visto en el curso son: aplicaciones para cuerpos que, no recuerdo el nombre, pero, por ejemplo, que dan vueltas sobre el eje, el eje x o el eje y.
13	I3	¿Los sólidos de revolución?
14	E5	Ajá, exactamente, los sólidos de revolución. Y de ahí en realidad no

		recuerdo mucho más, solo eso. Digamos de aplicaciones reales, eso nada más.
15	I3	Ok, y digamos si vos consideras la integral definida como área bajo la curva, ¿en qué se podría aplicar eso? A parte de los sólidos de revolución.
16	E5	Bueno, me imagino que, no sé, por ejemplo, recuerdo que una vez en el curso de derivables vimos la utilidad de la derivada o las derivables en montañas rusas y demás y creo que podría ser algo similar. No sé, las áreas bajo alguna montaña rusa, por ejemplo. O sea como toda el área que hay desde esa montaña rusa hasta abajo o así similar ya en la vida real, simplemente en alguna pared o algo por el estilo.
17	I3	Ok y por ejemplo en algunas otras asignaturas o materias, como en física, biología, …, ¿vos crees que la integral definida tenga alguna aplicación?
18	E5	Sí, realmente yo creo que sí, pero no sabría decirte cuáles.
19	I3	Ok, ahora, ¿cómo describirías tu experiencia en el curso Funciones Riemann Integrables? Es decir, refiera tanto a las debilidades como fortalezas en la forma en cómo se ha enseñado y aprendido el saber matemático en general en este curso.
20	E5	Ok, en general yo estoy muy satisfecho con el curso. En realidad, este, bueno no sé si el foco es el profe, por ejemplo, pero el profesor, este, di explica muy calmado y retoma los temas que digamos nosotros tal vez no conocemos muy bien o que quedaron un poco ahí débiles o vacíos y entonces todo se le va comprendiendo muy bien, lo da muy detallado y con ejemplos. Ese es un aspecto muy positivo que el da muchos ejercicios para hacer nosotros y ejemplifica mucho y pregunta mucho, no es una clase magistral digamos. Tal vez, algo que podría cambiar un poquito ahí es hablar un poco más, ahora que lo pienso de aplicaciones, no sólo los cuerpos, los sólidos de revolución, sino algunas otras de, por ejemplo, las áreas, bueno las integrales definidas así simples. Bueno la verdad yo estoy muy satisfecho y considero que ha sido un curso demasiado provechoso y todo muy bien abordado.
21	I3	Ok muy bien, y ¿esta es la primera vez que llevas este curso o esta materia? Digamos, si antes estabas en una carrera de ingenierías o algo así, si ya habías llevado Cálculo I o en el colegio.
22	E5	Eh, no no, es la primera vez que conozco el tema en mi vida digamos.
23	I3	Ok, está bien. Perfecto. No sé si tienes alguna pregunta.
24	E5	No, de momento no.
25	I3	¿No? Ok muy bien. Entonces esto sería, nada más.
26	E5	Perfecto, muchas gracias

Anexo 9: Transcripción entrevista inicial E6

1	I2	Bueno, muchísimas gracias por colaborarnos, creo que ya nos conocemos por ahí, entonces muchísimas gracias por estar por acá.
2	E6	Con muchísimo gusto.
3	I2	Gracias. Antes de iniciar voy a leer algunas consignas en cuanto a lo que es la entrevista y el trabajo de este ratito. Entonces esto dice así, para efectos de la investigación que estamos realizando, es necesario hacer una entrevista inicial, para conocer alguna de sus percepciones en torno al tema que nosotras estamos estudiando. En este caso, mi persona que soy la entrevistadora acá, te voy a hacer una serie de preguntas en relación con algunas consideraciones que debemos conocer antes de la implementación de lo que es la situación de aprendizaje, como lo mencionaba el profesor ahora. Para ello, necesitamos que intentes desarrollar ampliamente las respuestas que nos des, de acuerdo con tus experiencias que hayas vivido como educadora matemática en formación. Puesto que es una investigación formal, todo lo que se comente acá e incluso su identidad, va a ser completamente confidencial, incluyendo esta grabación que la necesitamos para recolectar información. No sé si antes de iniciar tienes alguna pregunta.
4	E6	No, todo claro.
5	I2	Ok, perfecto. Son tres preguntitas entonces vamos a iniciar con la primera. ¿Qué es para usted la integral definida?
6	E6	Ok, vamos a ver … creo que todo el concepto de integral en general que yo comprendo, o la comprensión que yo tal vez apliqué más, es relacionándolo a un área bajo la curva cuando tenemos una función positiva, verdad. Entonces creo que iría por ahí, aunque esto más que todo por el curso que estoy llevando, pero tal vez fuera del curso, hace como seis meses tal vez, vi varios videos de YouTube y también se hablaba como de algo relacionado a acumulación o a, no sé, es que no recuerdo muy bien de qué trataba el video, entonces no lo podría explicar muy bien. Pero creo que por ahí andan esas dos intuiciones para comprender la integral como la acumulación, que la verdad no lo manejo tan bien, y la de área bajo una curva de una función positiva, que es con la que me siento como más cómoda podría decirlo, con la que he trabajado más y se ha trabajado más en el curso.
7	I2	Ok, y básicamente, específicamente a lo que es una integral definida, ya me hablaste como de una idea general de integral, pero cuando decimos que una integral es definida, ¿qué entiendes por eso?
8	E6	Que yo tengo como un intervalo, en donde los extremos son números reales. Ahí también lo que veo es como esa área bajo la curva.
9	I2	Ok, ok perfecto. Voy con la segunda pregunta, ¿qué aplicaciones conoce de la integral definida?
10	E6	Aplicaciones… que recuerde, estaba todo relacionado a este nombre, …,

		se me olvidó. Superficies de revolución, creo. Creo que han sido las aplicaciones que más hemos trabajado. Aunque no me recuerdo, si soy sincera, si era de integrales definidas, me parece que sí. Pero entonces serían como sólidos de revolución, y también el cálculo de áreas bajo curvas, podría verse también como entre dos curvas que trabajamos bastante eso.
11	I2	Esto es en torno, más que todo, a un contexto matemático, pero si piensas en algo más en relación a lo cotidiano, ¿se te ocurre alguna aplicación? No sé, algo asociado a la química, biología, física, o a la ingeniería.
12	E6	No, la verdad ahorita no se me ocurre.
13	I2	Ok. La tercera pregunta sería la siguiente ¿cómo describiría su experiencia en el curso Funciones Riemann Integrables? Básicamente haciendo referencia a debilidades y fortalezas de la forma en la que este se ha enseñado, en cómo se ha enseñado el saber matemático y cómo lo has aprendido. Y también me gustaría saber si es la primera vez que llevas el curso.
14	E6	Ah ok, sí, sí es la primera vez que llevo el curso y en relación a la primera pregunta, creo que ya se lo he comentado como a todas las personas que conozco que la forma en que el curso se ha desarrollado ha permitido que yo me vuelva a interesar en la parte más matemática de la carrera, porque en los cursos anteriores, más que todo los que están en esta misma línea, de derivables y reales, yo perdí todo ese interés, lo perdí completamente. De hecho, no sé, esa parte donde uno hace la evaluación docente es como que al principio no tenía interés y ahora aumentó, es prácticamente lo que describe cómo ha sido mi experiencia. Me encanta mucho como se dan las clases, como se intercalan ejemplos entre una explicación, una demostración, una representación gráfica. También, me gusta mucho cómo se abordan las tareas, nunca se habían abordado así en ningún otro curso y al principio tenía un poco de miedo, pero ya después vi que eso de cierta forma me obligaba, por así decirlo, a estar al día y explicarme yo misma toda la materia, y no dejarme ninguna duda yo, porque si yo me dejaba esa duda luego me lo iban a preguntar a mí, entonces, por así decirlo, como que no me servía. Y creo que es básicamente eso, la experiencia ha sido sumamente satisfactoria en todos todos los sentidos.
15	I2	Y respecto a tu aprendizaje, ¿cómo te ha ido con eso?
16	E6	Bastante bien por dicha. Yo, este, por dicha el profe graba las clases entonces es como una oportunidad para yo tener mi cuaderno. Entonces literal tengo como un cuaderno en donde puedo buscar cualquier duda que tengo o cualquier cosa que se me haya olvidado y cuando llega ese momento de hacer las tareas, me doy cuenta como que por medio de las clases y de los apuntes que yo tomo, he logrado aprender lo necesario para poder realizar las tareas y si ya tengo como alguna duda, ya es con ayuda del profe, pero si siento que he aprendido un montón, e incluso he logrado explicarle cosas a mi hermana que ahorita está llevando Cálculo II, y cuando uno ya logra explicar algo, ya sabe que lo tiene un poco más interiorizado.
17	I2	Ok, no sé si quieres ampliar alguna de las respuestas que ya me has dado, si no ya con eso terminaríamos la entrevista.

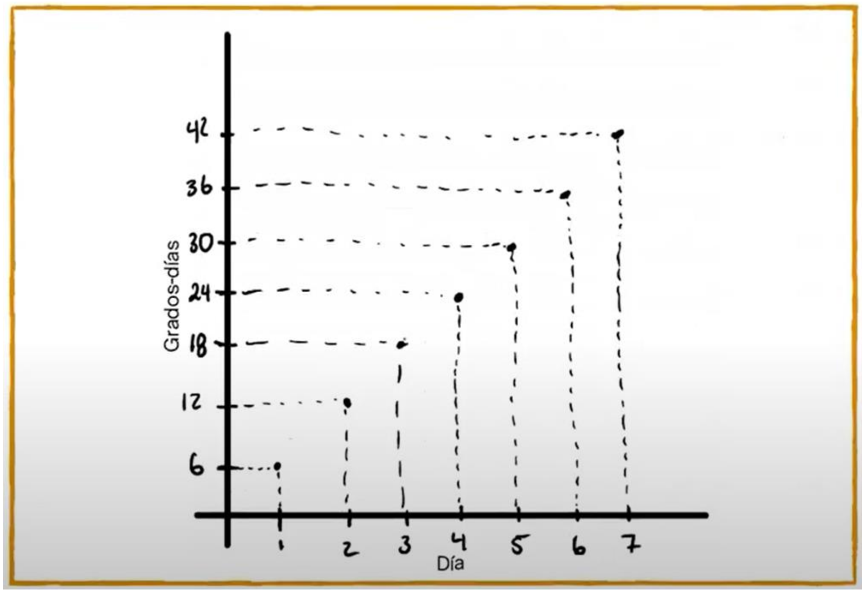
18	E6	No, yo creo que no se me ocurre qué podría ampliar la verdad.
19	I2	Ok, muchísimas gracias nuevamente y ahí nos veremos cuando implementemos la situación de aprendizaje.
20	E6	Perfecto.
21	I2	Gracias por participar y muchísimas gracias nuevamente.
22	E6	Con todo gusto, mucha suerte con el avance de la tesis.

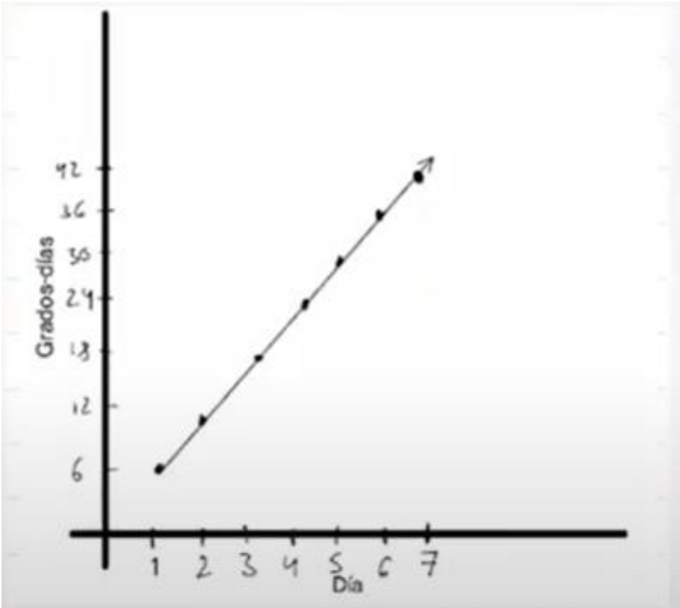
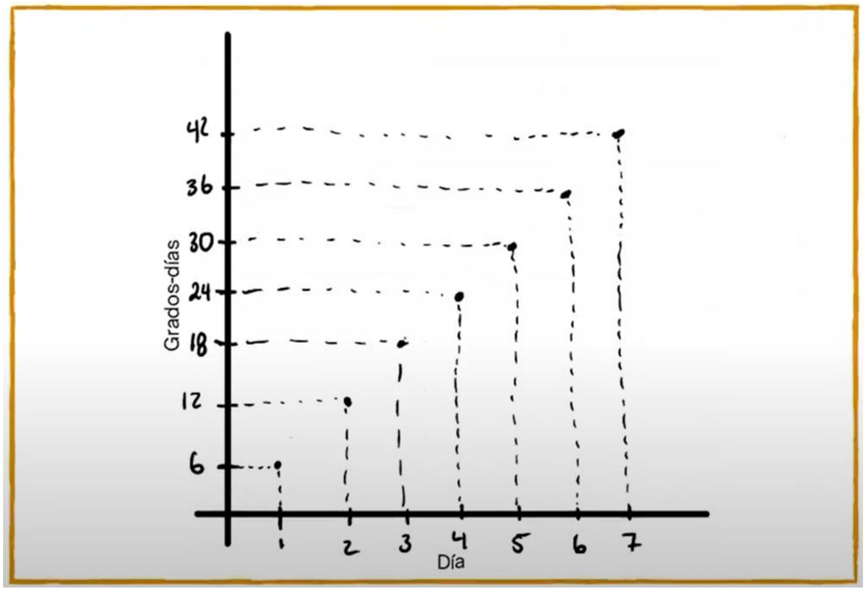
Anexo 10: Transcripción implementación - Situación de aprendizaje

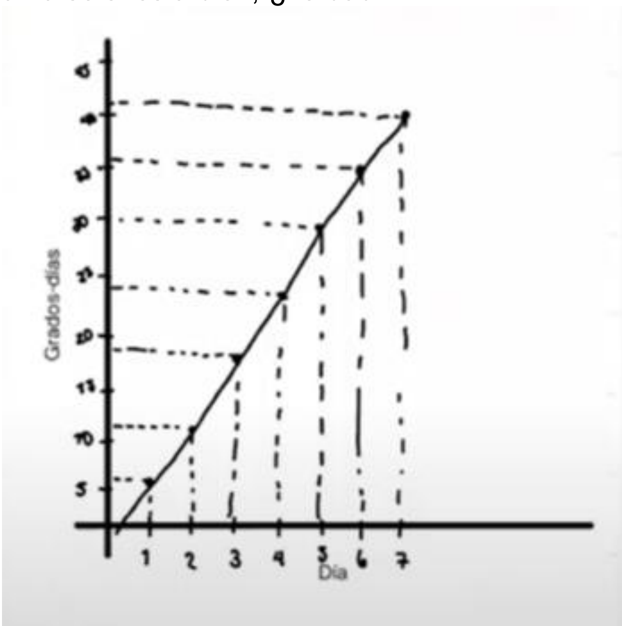
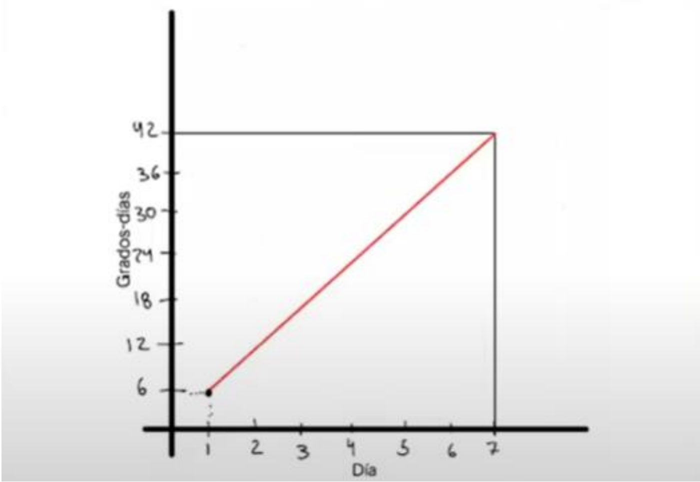
Momento I		
1	I1	(Saludo, agradecimiento por participación y se dan las indicaciones generales) Ok. Aquí tenemos a E1.
2	E1	Sí, yo parecido a E6 digamos. Yo propuse este… que sí podía encontrar los valores fijando uno e intentando encontrar el otro. Entonces, igual sin ver la pregunta 2 fijé el valor de a y empecé a resolver y ahí encontré valores y después vi que la pregunta dos preguntaba cuáles podían ser esos valores. Igualmente, con el GeoGebra logré encontré otros, que eran más bonitos que los que yo encontré porque me daban números irracionales. Pero, o sea, ese fue el método que yo seguí también.
3	I1	Ok… Ok, perfecto. ¿E3 quieres agregar algo, o E5?
4	E5	Este yo… en parte fue similar a lo que ya mencionaron. Yo… Bueno, no calculé como tal, solamente mencioné que sí; que tal vez fijando uno de los dos intervalos de integración puedo di calcular la expresión e igualarla a 30. Y ya en la pregunta, lo que me di cuenta es que pasé por alto el aspecto que los dos sean negativos. Por los deslizadores me di cuenta que necesitaba el -1 positivo para que no me dieran números negativos y entonces no me iba a dar 30, por ejemplo.
5	I1	Ok… Ok…. entonces chicos, de acuerdo con lo que ustedes han dicho, comenten entre ustedes, ¿qué tanto cambió cuando llegaron a usar el GeoGebra con lo que venían haciendo anteriormente? ¿Para ustedes cómo fue eso?, de acuerdo con lo que han mencionado.
6	E5	Eh… ¿hay que levantar la mano?
7	I1	No, no, tranquilo.
8	E5	Em… Bueno, en realidad lo que pensé, yo de manera analítica cuando lo resolví en la primera parte cuando llegué a una ecuación, pensé que el valor que me dé ese ya va a ser, aunque sea como feillo ése es el número. Pero cuando comencé con el deslizador, me decía 32, lo movía y me decía 29.5, y lo movía… Al inicio me frustraba un poquillo porque no lograba que me diera 30. Ya después encontré dos valores que sí me dieron 30; pero me costó más hacer que el GeoGebra calzara en el 30 que resolver, digamos, la ecuación. Eso fue mi percepción, digamos. ¿No sé si a los demás les pasó algo parecido?
9	E6	Creo que yo topé con suerte porque el valor que yo fijé en a fue 0 y el valor que me dieron en b fueron dos números enteros. Entonces, cuando yo llegué al GeoGebra puse el valor de a y los dos valores que me dieron en b y pude ver el 30 explícitamente; sin tener que probar con algunos otros

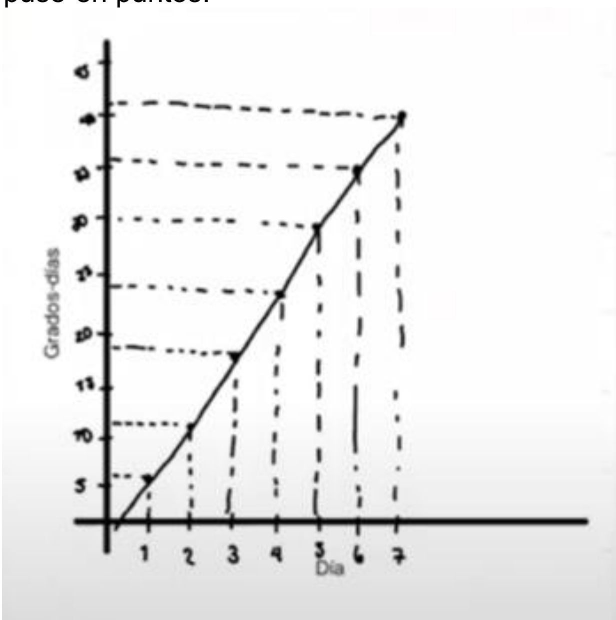
		valores que yo no conociera. Eso fue como lo que pude hacer con el GeoGebra, como verificar el caso específico que yo me di.
10	E5	Ah… es que yo me di a uno. Daba soluciones diferentes. ¿No sé los demás?
11	E2	A mí me pasó que lo que tuve, durante que los estaba moviendo me daba como 29.5, 31. Pero… digamos, como yo no había fijado ninguno entonces intentaba con otro valor, entonces ahí sí los encontré. Y también me pasó con los negativos. Yo quería ver si con a negativo también encontré uno. Pero… Más que nada me sirvió para verificar, digamos.
12	E1	Eh… Bueno en la primera parte no la he hecho como fijar un valor y etcétera. Pero sí explicar por qué puede ser 30, digamos. Entonces, luego de eso me fijé en le GeoGebra para fijar esos valores y me di cuenta de que, di, igualmente que ellos, digamos, me costó bastante encontrar que me diera 30; pero al final sí lo encontré
13	E3	Bueno… a mí no me costó, tuve suerte igual que E6. Este… Fijé a y luego empecé a manipular b y salió rápido. Entonces, los primeros dos valores de esos límites fueron los que coloqué en la respuesta. Los primeros dos que me dieron, pues…
14	I1	Ok… Ok chicos, algo más que durante esa primera partecita. Algo que ustedes observaron… Por ejemplo, las estrategias de resolución que tomaron cada uno en la primera preguntita que venía ahí… Por ejemplo, que ustedes fijaban valores cuando lo hicieron sin el GeoGebra y otros que lo trabajaron con intervalos; entonces, ¿cómo fue que fueron realizando esto? ¿Chicos?
15	E1	No sé si soy yo, no entiendo.
16	I1	Ok. Cuando resolvieron la primera pregunta, ustedes decían que para encontrar los valores de a y b fijaron valores; y otros que en realidad consideraron intervalos. Entonces, que nos comenten ¿cómo fue que pensaron hacer esto? Si usted fijó valores, ¿por qué lo pensó?
17	E1	Ah ok. Bueno yo, yo…. Yo fijé valores. Entonces lo que yo pensé fue como ok, tengo que hacer que la integral me dé 30. Pero si integro así como está voy a quedar con una ecuación en dos variables donde solo tengo una ecuación, que no me va a funcionar. Entonces tengo que fijo uno, tengo una ecuación en una variable, en donde voy a poder encontrar los valores. Eso fue lo que yo pensé, digamos. Eso fue lo que pasó por mi mente. Entonces, si integramos a como estaba no podía resolver la ecuación. Pero si ya fijaba un valor sí iba a poder resolver la ecuación.
18	I1	Y los demás que fijaron valores, ¿pensaron similar o qué pensaron?

19	E6	Sí, en mi caso yo pensé muy similar a lo que comenta E1. Yo dije: ok… ¿qué hago yo como con una ecuación donde no conozco el valor de a ni el valor de b y no tengo una segunda ecuación como para montar un sistema. Entonces me dije: voy a fijar uno y voy a ver si tiene solución. Como su tenía, ahí fue lo que yo puse.
20	I1	Ok… Los demás, ¿qué opinan de esto?
21	E5	Este yo… Lo hice más gráficamente y me dije… voy a fijarlo en un punto y voy a ver como a hasta qué otro punto tengo que irle sumando área para que me dé 30. Por eso fue que lo fijé; pero no hice el cálculo como tal.
22	E3	Este yo, igual que yo. Yo no hice el cálculo. Lo vi con otras cosas, pero sí.
23	I1	Ok, ok, ok. ¿Con qué te guiaste?
24	E3	Con lo que comenté ahora, que fijaba un valor, entonces ahí como justifiqué el porqué. Sí sé que se pueden calcular. Pero no hice tanta cosa.
Momento II		
25	I1	Ok, perfectísimo. Ahora vamos a pasar a un segundo momento. Igual, tienen una etapa de trabajo individual. Acá por el chat de Telegram les van a compartir el enlace y el documento y también por Zoom. Entonces, este segundo momento también tiene una etapa individual, donde tienen 10 minutos para hacerlo y ya la misma dinámica de escribir todos los procedimientos y todo lo demás; y cuando lo tienen lo envía a I2 en privado. Entonces, les damos los 10 minutitos. (0:28:24) (0:36:50) Ok chicos, igual que la vez pasada, ya vayan pasando lo que han realizado a I2, en privado por favor. Ok… Ahí lo van pasando. Mientras van pasando todo esto, vayan conversando entre ustedes cómo lo hicieron, qué pensaron. Si hicieron algo similar, porqué fue así, para poder ir viendo qué pensaron similar. Si otro lo hizo diferente, qué fue lo que pensó. Les doy el paso, pueden activar los micrófonos ustedes solitos para iniciar la discusión.
26	E1	Si quieren sigo yo. Yo lo que hice primero fue como que el ácaro siempre consumía, al día consumía 6 grados-días. Y después… Al inicio me costó entender la instrucción de grafique lo que consume en una semana, pero ahí como les escribí que yo hice fue…

		 Lo que yo hice fue como pensar, si lo que yo tengo que escribir lo que consumí en una semana, entonces tengo que ir sumando lo que comió desde el día uno hasta el día 7 para saber lo que consumió en una semana. Así fue como yo interpreté la instrucción de cuántos grados-días consume en una semana. Pero, eso fue lo que yo pensé, no sé si alguien la agarró por otro lado o si la interpretó igual.
27	I1	¿Chicos? ahí pueden activar los micrófonos de una vez.
28	E6	Okis, perdón; es que yo tuve que hacer algo. Entonces estaba un poco, estaba como un poco acá y un poco allá. Pero, por lo que escuché creo que este, tuve una solución muy similar a la de E1. Como este de, ok, yo al final ocupo ese que consume en todos esos días, que al final está relacionado con los 42 grados días.
29	E3	Este, tengo problemas de enviárselo, pero ya iba a enviar y ahora que vi el E1 lo hice muy similar; de hecho, lo hice en puntos y como… Sí, hasta el día 7 ahí fui como… Incluso hice el eje y de 6 en 6, como para ir… Bueno… como para no hacer tanta cosa y llegar a este. Entonces, sí me quedó como lineal y en puntos. Y yo llegué a que a la semana eran 42, no sé exactamente qué 42. Pero así quedé.
30	I1	Ok, ¿los demás chicos?
31	E5	Al menos al inicio no lo había entendido muy bien. Entonces, según yo iba a dibujar el consumo de grados-días semana a semana. Pero, vi que él, los ejes abajo decían días; entonces, vi que no era el consumo como de semana 1, semana 2, semana 3. Entonces, me dije que es acumulativo; entonces igual hice similar. Solo que ahora que veo la de E1 hice un segmento en lugar de puntos. Pero sí, eso.

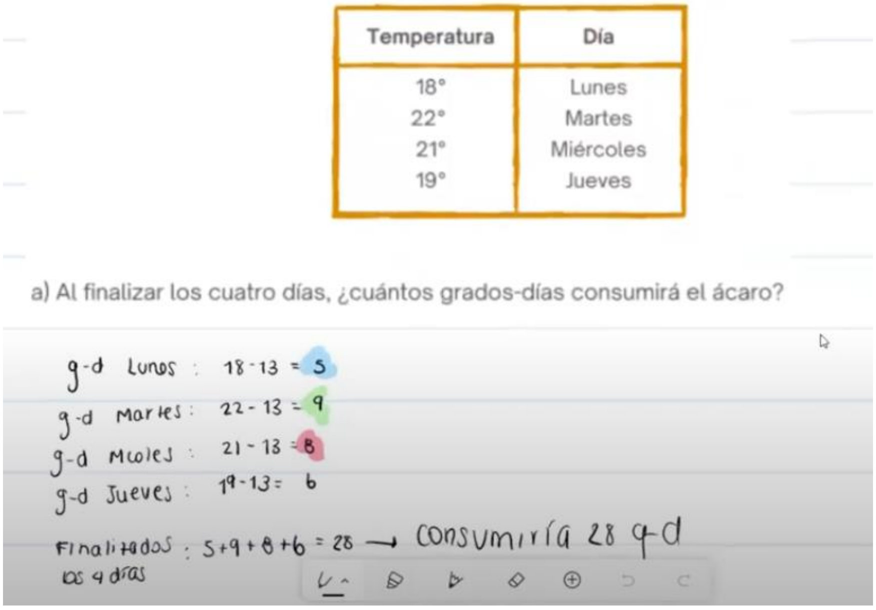
		
32	I1	Ok, chicos, ahí para todos. ¿Por qué algunos consideraron puntos y otros segmentos? ¿Qué fue lo que en sus cabecitas estaban pensando cuando consideraron puntos o segmentos?
33	E1	Bueno, si quieren respondo yo primero, que fue del que proyectaron la gráfica de puntos. Yo puse punto porque, no sé, pensé que, que digamos día 1 y día 2. Lo vi como, eh bueno la idea es como el día 1 tanto, el día 2 tanto y el día 3 tanto. No como, y como consumo se dice al día, entonces no pensé como que el 1.5, digamos, hubiera algo, por ejemplo. Porque la idea es, ok, un día 6, otro día 6. En dado caso, la tuve que haber hecho como por partes, como la función parte entera, iba por ahí el estilo. Pero pensé en puntos por eso. No sé los demás. 
34	I1	Ok, los demás ¿por qué consideraron puntos o segmentos?
35	E2	Ah sí, yo lo hice con segmento, es no sé… Me puse a cuestionar de que

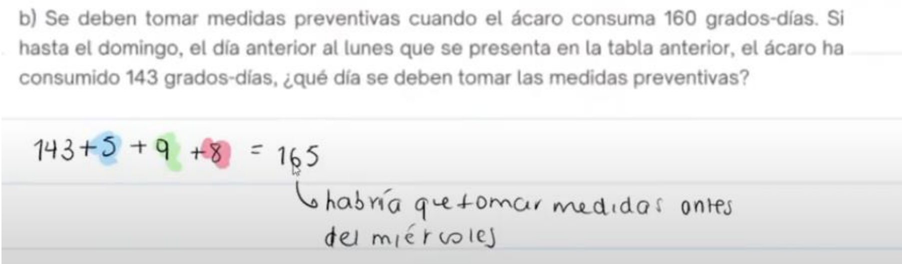
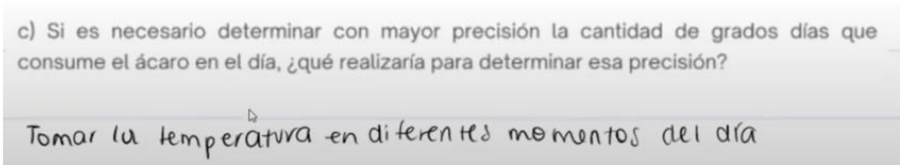
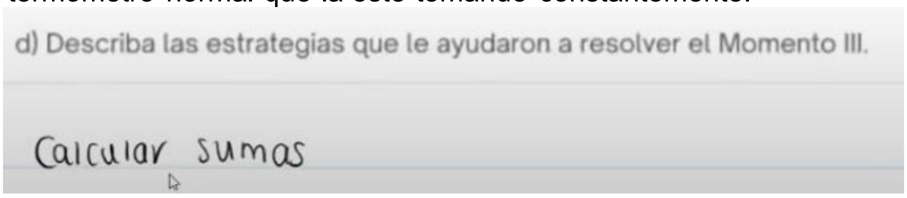
		qué había entre un día y otro, y lo vi como un proceso. Como que iba transcurriendo, transcurriendo así progresivamente durante el día hasta llegar hasta 6. Entonces, por eso puse como la… la… el segmento. Más que todo, pero no sé si está bien, ¿verdad? 
36	I1	Ok, ¿Los demás? ¿Qué consideran? Por ejemplo, el que puso punto, de lo que estaba pensando una persona que puso un segmento. ¿Cómo lo están comprendiendo? Y a la inversa también, claro está.
37	E6	Bueno, yo en lo personal, puse segmento, pero ahorita que lo estaba pensando, creo que puse segmento por maña. No sé cómo, pero a veces uno es como que está mal acostumbrado a que está trabajando con este, no sé, con, con intervalos o algo por el estilo. Pero con lo que dijo E2, creo que sí le vería sentido a verlo con segmento. Pero no sé, digamos, si el ácaro hace solo una comida diaria, sí le vería más sentido solo con puntos. 
38	I1	Ok, ¿los demás?
39	E5	Yo la verdad cuando la grafiqué no lo pensé mucho, fue por costumbre. Eh… va 6, 12, 18. Entonces, va así de una vez el segmento, pensando que iba así, como que no siento como que el ácaro o el arácnido, no sé, consuma 6 grados-días en un instante. Pero no sé.

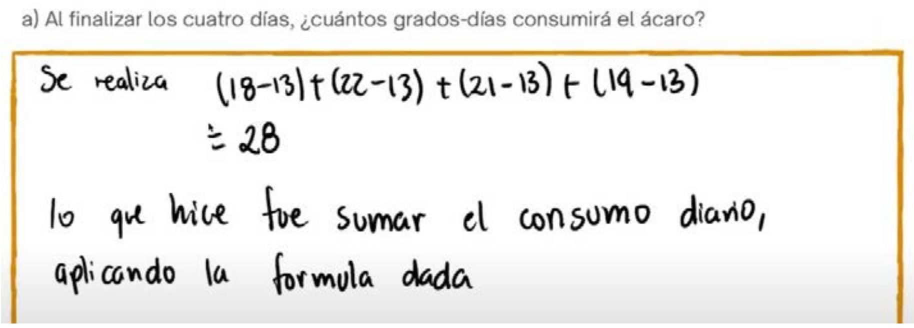
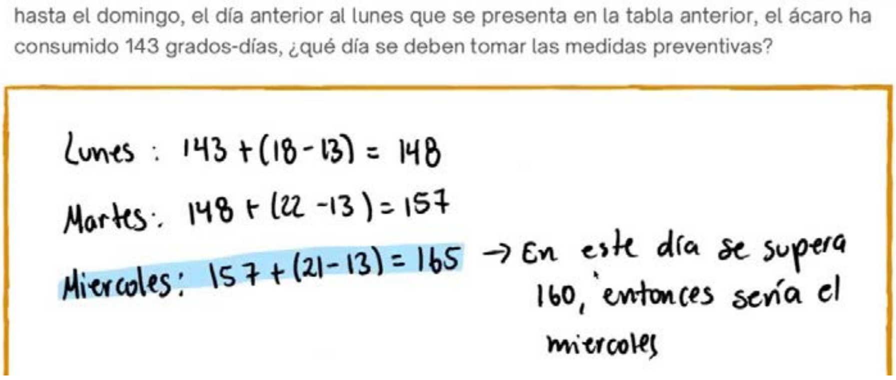
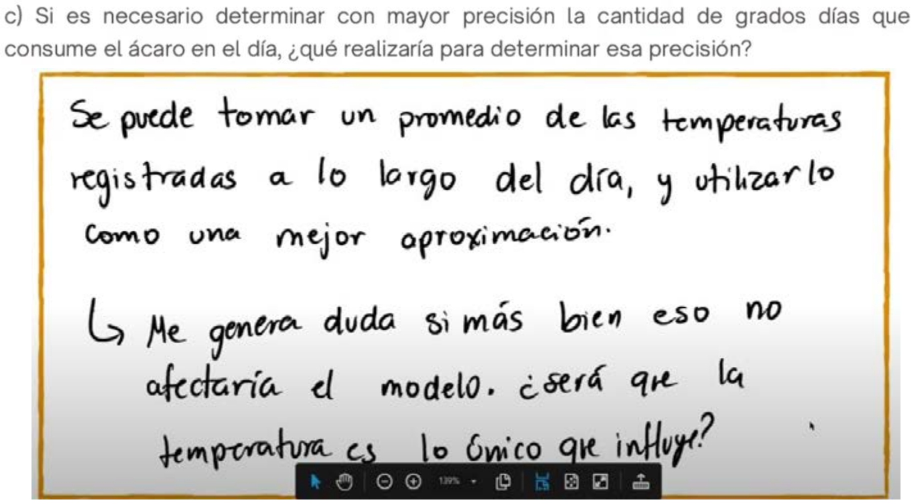
40	E3	Sí, bueno, en realidad yo, yo no puse segmentos porque… No sé. como que lo pensé diariamente, no como, no me imaginé al ácaro consumiendo todo el día para poder hacer ese segmento. Sino como, ok ya comió hoy, ya comió mañana, así. Entonces, así fue como pensé. Porque el segmento siento como que, como que… inclusive, que conforme pasa el día el ácaro va comiendo más; entonces no me imaginaba en esas todo el día jajaja. Pero no sé jajaja. Está un poco confuso jajaja. Por eso yo lo puse en puntos. 
41	E1	Yo creo, que digamos, también podría ser porque la interpretación. Digamos, yo tal vez lo pensé como… digamos, ahí culminado el día cuánto comió, ya era como que era 6. Igual, no sé, me pareció extraño que entre el 3 y el 4 está pi; a los pi días, ¿cuánto comió? No sé, me pareció como por esa parte, pero no sé. En realidad, creo que cualquiera de las dos podría estar bien.
42	I1	Ok chicos. ¿Qué papel tuvieron esas sumas que ustedes mencionaron para comprender este fenómeno? Que ustedes hablaron de unas sumas y algo por ahí que hicieron. Entonces, ¿qué papel tuvo esto para poder comprenderlo?
43	E1	Creo que para poder responder la pregunta era fundamental poderlos sumar. Porque si usted me pregunta cuánto consume al final yo tenía que ir sumando de uno en uno. También podía haber hecho la multiplicación, pero la gráfica ... de punto a punto. Eh… del cómo… Cómo era que se iban, cómo era que iba consumiendo a la semana para poder llegar al final y ver cuánto era, eso fue como lo que yo pensé.
44	I1	Ok, ok, ¿los demás chicos? Chicos, ¿qué consideraron los demás con esas sumas? ¿Cómo fue que las utilizaron? Si es que las utilizaron. Y, ¿por qué las emplearon o no?
45	E6	Bueno, yo las sumas las utilicé prácticamente como con la tabla del 6. Bueno prácticamente. Bueno primero hice como el eje y y ya después las

		fui colocando… 6, 12, 18, y así sucesivamente hasta el que está asociado con 7. Y así fui como lo pensé.
46	I1	Y esa suma para ustedes, ¿qué estaba representado? ¿Qué estaba representando? Más del porqué las hicieron.
47	E1	Que la acumulación, de cómo acumula el consumo a lo largo de los días.
48	I1	¿Los demás qué opinan de eso?
49	E3	Sí, en realidad, eh… se hace la suma porque eh… No sé cómo explicarlo utilizando otras palabras. Es que es la acumulación de la comida que hace la persona. En la gráfica que ustedes ponen es constante, que cada día come 6. No sé qué comen, ¿qué comen, perdón? Es que digo que comen, pero no sé qué comen
50	I1	Grados-días.
51	E3	Bueno, entonces, entonces sí, por eso es que yo lo vi como una suma de múltiplos de 6 hasta llegar a 42 para cumplir los 7 días.
52	I1	Ok, ok, ¿los demás chicos? ¿Están de acuerdo con lo que ellos exponen o lo pensaron un poco distinto? Ok… ¿O están viendo algo similar
53	E1	Yo lo pensé también igual dado que era acumulativa, di sí, digamos, el primer día consume 6 grados días; entonces, iba a ir sumando 6, 6, 6 por cada día. entonces, similarmente a los demás, creo que lo pensé así
54	E4	Yo en esa parte tengo un dilema de primero, y lo que hice en realidad no fue ir sumando, fue ir restando… Porque hago yo, el máximo es el punto (7, 42), ahí fue cuando dije: son valores discretos, pero es que… Desde las sesiones que estamos dando en didáctica venimos con eso; entonces, hago yo, los días son valores discretos, entonces, voy a poner puntos. Porque según yo iba a poner una, un segmento, ¿verdad? Entonces hago yo, mejor para poner los puntos recuerdo la gráfica que tengo y voy restando de 6 en 6 hasta llegar a (1, 6).
55	I1	¿Alguien más lo pensó de esta manera? ¿O no? ¿Qué les pareció la manera en la que lo pensó E4?
56	E3	Me parece interesante. De hecho, yo no lo había pensado jajaja. O sea, no me hubiera ido por ahí, pero está interesante. Eh… Las diferentes resoluciones de los compañeros.
57	E1	Tal vez no es como que haga de hacer segmentos o puntos porque ya pasó. Pero cuando E3 dijo que se preguntó qué consumía, yo me devolví al PDF y vi la representación de, de días y grados-días; entonces, me acabo de percatar que yo hice un segmento en parte, hasta lo hice rojo porque lo vi aquí el segmentito rojo, entonces me dejé llevar por eso.
58	I1	Ok… Ok. ¿Algunas consideraciones finales, chicos? Ok. Bueno, si no hay otro tipo de consideraciones de momento, vamos a pasar a otra facecita del trabajo de hoy.

Momento III		
59	I3	Este momento III, este… es en la misma línea de este momento II. Entonces, igual, es el mismo contexto; entonces si tienen alguna pregunta, se pueden devolver al momento II y verlo. Entonces van a leerlo y responderlo. Igual, van a tener 10 minutos para esto. (0:52:21) (1:01:26) Ok, entonces los que van terminando se lo envían a I2. Y por mientras se lo envían, quiero que me comenten: ¿cómo les fue en este momento?, ¿qué consideraron para responder las preguntas?
60	E1	Eh…. una pregunta, yo no he podido terminar, pero ¿se lo envío así o lo sigo haciendo? Es que llegué a la c y no pude avanzar porque no entendí la pregunta.
61	I3	Ok, ¿cómo están los demás?
62	E3	Igual, yo estoy en la c.
63	I3	Les voy a dar un par de minutos más, ¿ok?
64	E1	Y… ¿usted me podría explicar la c? Porque no entiendo la pregunta jajaja, pero o… es algo así como, no sé jaja
65	I3	Ok, en esa c, ¿quiénes la han podido responder? ¿O quiénes la entendieron? ¿O qué entendieron por esa pregunta?
66	E6	Yo ya la respondí, pero tengo mis dudas de si iba por ahí.
67	I3	Ok, digamos, con tus palabras, ¿cómo se lo explicarías a E1? ¿A qué se refiere esa pregunta?
68	E6	Yo lo entendí como un proceso que no sea como tan generalizado, por día, hablando en términos de la temperatura diaria. Como que, tal vez, se está dando como un valor que podría estar más bien variando y no ser ese único valor a lo largo de… di 24 horas; pero no sé si va por ahí.
69	I3	Ok, ¿no sé si E1, te quedó un poco más claro? ¿O si alguno entendió otra cosa?
70	E1	Creo que… creo que medio “agarré una idea”, voy a ver qué contesto jaja.
71	I3	Ok.
72	I1	Igual, E1, si hay algo que no entiendes, escribe qué es lo que no estás entendiendo porque eso nos da mucha información, también. ¿Ok?
73	E1	Ok ok.
74	I1	Mmmjmmm.
75	I3	Muy bien. Un par de minutos más y este… volvemos. (1:03:40) (1:05:11) Recuerden que este momento tiene 3 páginas, entonces para que se fijen. Son las preguntas a, b, c y d.

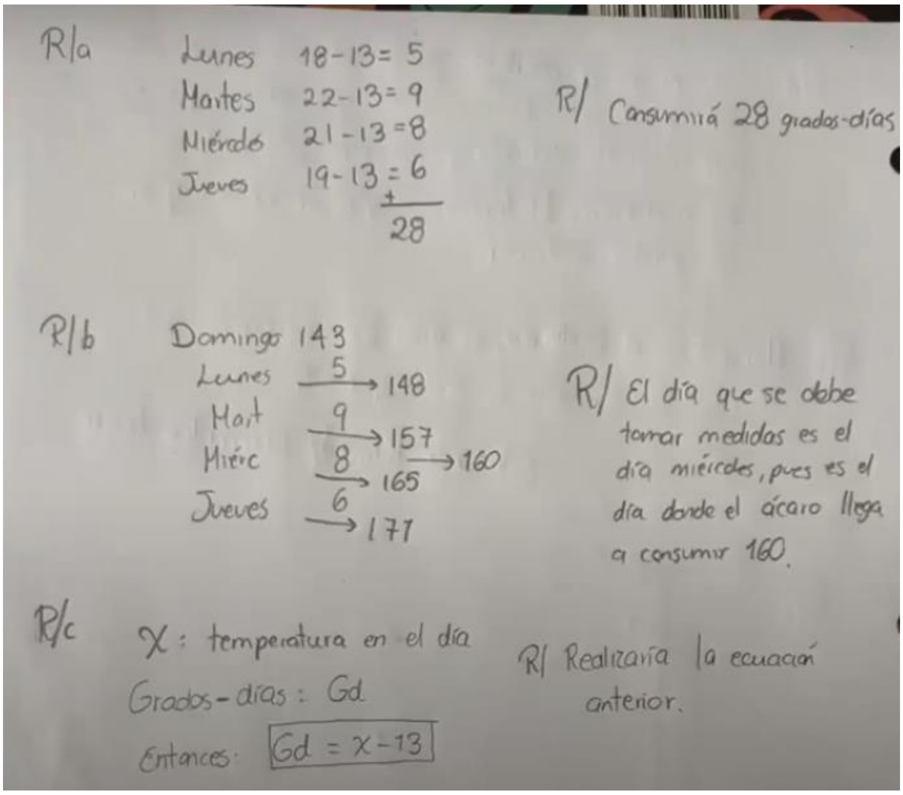
		(1:05:24) (1:05:39) Sí, para que no dejen nada en blanco. Intenten responder ahí lo que entiendan de esa pregunta. (1:05:47) (1:07:48) Ok, entonces… ya pueden ir enviando el documento. ¿Ya todos terminaron?
76	E3	Yo sigo en la justificación de la b, es que fueron varias estrategias, entonces estoy en eso.
77	I3	Ok, entonces ahí, mientras los demás lo envían eh… los que ya terminaron pueden iniciar la discusión de cómo resolvieron este momento. Eh… ya veo que la mayoría lo hizo de manera digital. No sé si tienen tablet o en la misma compu, entonces pueden compartir la solución que hicieron y este… no sé si, por ejemplo, E6 que creo que ya lo envió, si quiere puede comenzar la discusión.
78	E6	Ah ok, sí claro. Voy a compartir, como para guiarme mejor.
79	I3	Ok.
80	E6	Voy, para buscar… Me dicen si se ve, porfa. ¿Ahí lo están viendo?
81	I3	Está cargando. Ahora sí.
82	E6	Ah ok.  Bueno, creo que, prácticamente, para la a y para la b lo que hice, bueno… Me costó mucho pensar cuál fue la estrategia que utilicé, la verdad. Creo que no lo pude como expresar bien, entonces yo dije: bueno, así como en grandes rasgos, lo que yo hice fue sumar, entonces… ok. Acá eh… lo que hice fue aplicar la fórmula que nos dieron, en cada caso, y sumar; y así obtuve ya como esa respuesta.

		 b) Se deben tomar medidas preventivas cuando el ácaro consuma 160 grados-días. Si hasta el domingo, el día anterior al lunes que se presenta en la tabla anterior, el ácaro ha consumido 143 grados-días, ¿qué día se deben tomar las medidas preventivas? 143+5 + 9 +8 = 165 habría que tomar medidas antes del miércoles Y en la b fue similar, pero hasta llegar a ese “tope” en el que nos decían que era el momento en el que se empezaban como a tomar medidas y acá, bueno… lo que hice fue como eh… anotar cuáles fueron las que sumé para guiarme como con cuál día era.  c) Si es necesario determinar con mayor precisión la cantidad de grados días que consume el ácaro en el día, ¿qué realizaría para determinar esa precisión? Tomar la temperatura en diferentes momentos del día Y como les comenté anteriormente, lo que yo pensé para la c, como para esa mayor precisión fue como … bueno, ok. aquí me están diciendo que la temperatura del día lunes fue 18, pero no creo que haya sido 18 a las 7 de la mañana, a las 12 medio día y a las 4 de la tarde; bueno, y así con todas las horas, entonces se podría como tomar la temperatura en diferentes momentos o no sé, supongo que hay algún mecanismo de tomar la… como un termómetro normal que la esté tomando constantemente.  d) Describa las estrategias que le ayudaron a resolver el Momento III. Calcular sumas Y bueno, para la última, eso fue lo que les dije que no supe cómo expresarlo más, entonces solamente puse, así como básicamente sumar sumas. Digo, sumar sumas… calcular sumas.
83	I3	Ok, ok muy bien. ¿alguien ahí tiene una solución distinta o lo hizo similar, pero pudo explicar un poco mejor esa estrategia? O en la c, ¿qué pusieron? Algunos ahí tuvieron… Mmmjmm, E1.
84	E1	Si quiere, yo puedo… Voy a abrir el documento que les mandé.
85	I3	Ok, perfecto.
86	E1	¿Ahí ya se está viendo?
87	I3	Eh… sí. Ajá.
88	E1	Ah ok. Eh… bueno, aquí yo vi que nos daban como la fórmula, entonces lo que yo hice fue como ir nuevamente, igualmente como E6, solo que yo hice como la suma de una vez jaja. O sea, plantee una única suma, no sumé hasta el final.

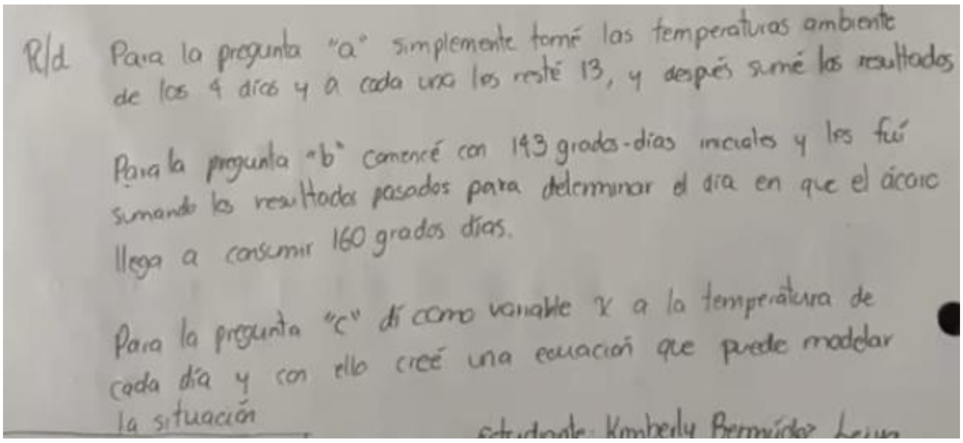
		 a) Al finalizar los cuatro días, ¿cuántos grados-días consumirá el ácaro? Se realiza $(18-13)+(22-13)+(21-13)+(19-13) \doteq 28$ lo que hice fue sumar el consumo diario, aplicando la formula dada
89	I3	Mmmjmmm.
90	E1	Luego, acá lo que hice fue cada día, bueno el lunes, tuvieron que haber consumido 48, el martes 57, miércoles 65, y ahí fue donde me di cuenta que tuvo que haber sido el miércoles.  hasta el domingo, el día anterior al lunes que se presenta en la tabla anterior, el ácaro ha consumido 143 grados-días, ¿qué día se deben tomar las medidas preventivas? Lunes: $143+(18-13)=148$ Martes: $148+(22-13)=157$ Miercoles: $157+(21-13)=165$ → En este día se supera 160, entonces sería el miercoles Acá lo que yo dije fue como que se podía tomar un promedio de las temperaturas y utilizar este promedio de temperaturas en la fórmula, pero también puse como que me generaba más bien… no sé si eso más bien va a afectar más el modelo, en lugar de hacerlo más preciso. Pero fue como lo que se me ocurrió con… con los comentarios que me dieron cuando pregunté.  c) Si es necesario determinar con mayor precisión la cantidad de grados días que consume el ácaro en el día, ¿qué realizaría para determinar esa precisión? Se puede tomar un promedio de las temperaturas registradas a lo largo del día, y utilizarlo como una mejor aproximación. ↳ Me genera duda si más bien eso no afectaría el modelo. ¿será que la temperatura es lo único que influye? Y aquí, yo lo que hice… como un proceso recursivo, ahí de ir sumando a la cantidad anterior el siguiente valor. Eso fue lo que expresé, como… como se ve más que todo explícito en esta parte, como que al martes es lo del lunes más otra cantidad, el miércoles es lo del martes más otra cantidad, y así.

		MOMENTO III: CRECIMIENTO DE UN ÁCARO d) Describa las estrategias que le ayudaron a resolver el Momento III. Un proceso "recursivo(?" de ir sumando a la a la cantidad anterior el siguiente valor.
91	I3	Ok.
92	E1	Entonces eso es literal como un proceso recursivo.
93	I3	Ok, muy bien. ¿No sé si alguien más quiere compartir ahí lo que hizo en eso… en este momento, las 4 preguntitas? O si alguno entendió algo diferente en el momento c, que era ahí como un poco más abierta de responder. Ahí los que faltan por hablar E5, E2, E4.
94	E2	Si quiere comparto yo.
95	I3	Ok.
96	E2	Momento III a) $(18-13)+(22-13)+(21-13)+(19-13) = 5 + 9 + 8 + 6 = 28$ Al finalizar los cuatro días el acaro consumió 28 horas-días b) El miércoles que es cuando el acaro sobrepasa el consumo con 165 grados-días Bueno… Bueno… eh… igualmente que… que ellos, fui… digamos, para la a, sumando, ¿verdad?, y bueno… hice, apliqué la fórmula de restar 13 a la temperatura por cada día y luego hice las operaciones básicas; y llegué a que (INAUDIBLE) al terminar los 4 días consume 28 horas, 28… Bueno, aquí sería los grados-días, ¿verdad? Ahí me equivoqué. Y luego, para el miércoles, entonces empecé ahí a sumar. Digamos, a 143, que era… que… que era los eh… grados-días que tenía el domingo, entonces los fui sumando eh… hasta sobrepasar 160 que era donde ya se tiene que tomar las medidas preventivas y llegué que… que eso pasaba el miércoles. c) La verdad no entiendo como determinar ese consumo dependiendo de la temperatura, si esta no tiene un patron y cambia constantemente. Incluso, estuve a punto de proponer la misma fórmula

		Y luego, para la c, si, digamos, no… no la entendí. Más que todo porque no sé si… eh… si era como plantear una… una fórmula o una ecuación; no sé, la verdad; como dependiendo de la temperatura, pero estaba demasiado confundido porque como no había un patrón en la… o sea, que había que… que sacar como un patrón de las temperaturas que habían en la tabla o… Pero di, esto cambia di… a lo largo del día, entonces eso ahí me confundió bastante.
97	I3	Mmmjmm.
98	E2	Y incluso estuvo… ahí puse, digamos… incluso estuvo como… estuve a punto de poner la misma fórmula, digamos, porque, no sabía que poner. d) • Entender el contexto y cómo funciona la fórmula • Realizar operaciones básicas para determinar el consumo en una cantidad específica de días • Ver cuando una cantidad sobrepasa otra. Y, al final, eh… de las estrategias, di bueno, entender el contexto y cómo funciona esa fórmula, y bueno, realizar operaciones básicas. Eh… y también ver cuándo una cantidad sobrepasa otra, y así.
99	I3	Ok. Y, por ejemplo, en esa pregunta c.
100	E2	Ajá.
101	I3	Relacionado a lo que ya habían dicho E6 y E1, ¿podrías ahí como cambiar tu respuesta? ¿La dejarías igual?
102	P	Eh… La verdad no sé. Es que la… creo que E6 había puesto como que eh…, di que es como… creo que la… los… tanto la de E6 como la de E1 va como… van como en lo de buscar como un promedio, entonces yo creo que me voy por ahí, tal vez. Creo que con eso que enseñaron tal vez me guiaría como para… para plantear algo así como… que se tiene que hacer como un promedio… de todas las temperaturas, tal vez.
103	I3	Ok. Y en la pregunta d, ahí cuando escribís: “ver cuando una cantidad sobrepasa otra”, ¿eso como…, a qué te referís con eso?
104	E2	Ah ok. Di que…, bueno… aquí en la parte d, digamos, si voy sumando a ver cuándo… hasta cuándo sobrepasa el límite de 160, que es donde se toman las medidas preventivas, entonces… a ver… Diay, no sé jaja. Puse eso porque es que la verdad no sé qué poner y… y eso, digamos.
105	I3	Ok ok, muy bien. Muchas gracias.
106	E2	Con gusto.
107	I3	¿No sé si alguna tiene ahí algún aporte… sobre las contribuciones de los compañeros o si quieren aportar algo propio?
108	E3	Eh.. bueno… No no, en realidad todo bien, nada más que si me dio

<table>
<tr><td></td><td></td><td>curiosidad que en la b yo soy como super… no sé, flechitas y demás, y ellos lo hicieron casi que hablado, pero si es porque yo me guío mucho, no sé, como más gráfica, no sé.</td></tr>
<tr><td>109</td><td>I3</td><td>Ah ok.</td></tr>
<tr><td>110</td><td>E3</td><td>Entonces…</td></tr>
<tr><td>111</td><td>I3</td><td>Tenés… ¿No podés ahí como proyectar?</td></tr>
<tr><td>112</td><td>E3</td><td>Jaja perdón.</td></tr>
<tr><td>113</td><td>I3</td><td>Tranquila.</td></tr>
<tr><td>114</td><td>E3</td><td>

Pero la b, por ejemplo, ves. Entonces ahí como que fui… 143, 58 el lunes… entonces ahí fui… y ya ahí estaba el 160, por eso es que lo respondí así. Pero sí, me dio curiosidad que ellos lo hicieran como más… diferente. Y con la c, o sea… no se me ocurrió otra jajaja… no sé si era lo que querían, pero… es básicamente es lo que ustedes pusieron arriba; no se me ocurrió otra cosa.</td></tr>
</table>

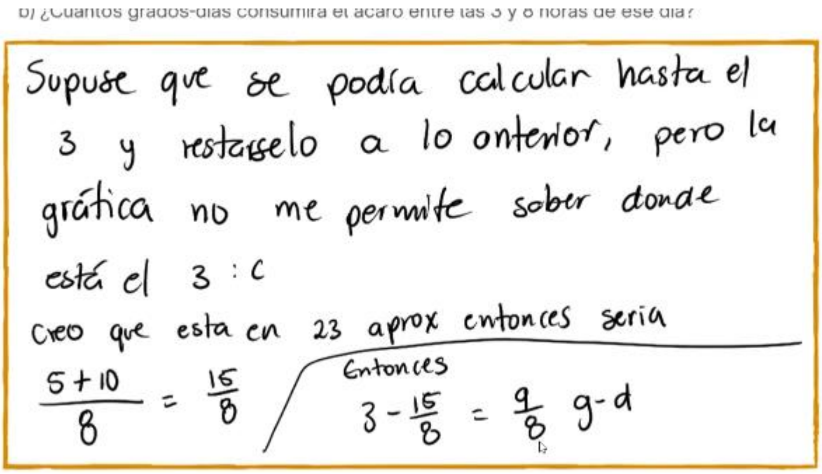
		 R/d. Para la pregunta "a" simplemente tomé las temperaturas ambiente de los 4 días y a cada una les resté 13, y después sumé los resultados Para la pregunta "b" comencé con 143 grados-días iniciales y les fuí sumando los resultados pasados para determinar el día en que el ácaro llega a consumir 160 grados días. Para la pregunta "c" dí como variable x a la temperatura de cada día y con ello creé una ecuación que puede modelar la situación estudiante: Kimberly Bermúdez
115	I1	Y cuando dices que te guías con hacer algo más gráfico, ¿qué es lo que estás pensando cuando lo estás haciendo?
116	E3	¡Uy… qué difícil! Eh… no sé, o sea… voy en la situación, estoy pensando en la situación, pero se me hace más fácil las flechas y no sé… No sé cómo explicar esto jaja
117	I1	Ok. ¿A qué te ayuda eso? ¿Te ayuda a…?
118	E3	A ubicarme mejor en lo que… en… con el pensamiento mío, digamos… Yo estoy en la situación y con las flechas, pues yo me ubico eh…, no sé… Después de la flecha yo pongo un número, este es el resultado cuando sumo y después ya, en ese resultado, pues ya ahora si voy con el 160, por eso puse lo ubiqué en miércoles.
119	I1	Mmmjmm.
120	E3	Como para ubicarme.
121	I3	Si, es como el mismo procedimiento nada más que lo colocás distinto, porque vea que ahí siempre hacés como la suma del día anterior le sumás, por ejemplo, ahí al 148 le sumás 9 y llegás ahí al 157. Te ubicás mejor haciéndolo como con flechas.
122	E3	Exacto jajaja
123	I3	Ah ok. Mmmjmm. Perfecto, muy bien. Muchas gracias. Y no sé si alguno quiere proyectar la solución, de los que faltan, o comentar si lo hicieron similar a los compañeros.
124	E5	Bueno, yo es que… No había visto la d, entonces pues estaba muy feo… como muy escrito a la carrera, pero, en general, este… yo sí, bueno… De inicio lo que hice fue aplicar la fórmula, ¿verdad?, sumar todos los días y bueno, todo lo que consumieron y llegar a cuánto consumieron en los 4 días, ¿verdad? En la parte b, lo que hice fue empezar con esa cantidad que dieron, 143 y le iba sumando cada día, y entonces vi que el miércoles ya se pasaba de 160, entonces que era ese día el que hay que tomar eh… medidas preventivas; y eso me ayudó a mí a la pregunta c porque vi que en realidad no… no se tomaron medidas preventivas cuando era 160, sino 165.

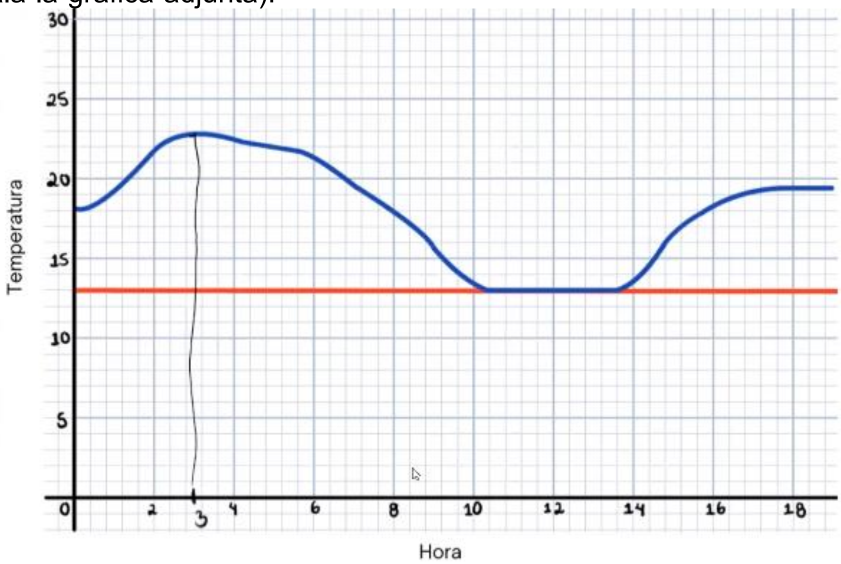
		Entonces eso fue lo que pensé, como que se podría medir más eh… como detallado, digamos, o en intervalos pequeñitos para encontrar exactamente donde es 160. Y en la d ya lo que hice fue este… mencionar lo que les acabo de mencionar a ustedes.
125	I3	Ok ok, muy bien. Y ahora pensando más bien como en el contexto y en qué nos ha ayudado para… para ver lo que han mostrado, ¿si creen que este tipo de contextos o de trabajos se usan para plagas u otras cuestiones como…; creen que ese contexto si… si es como un poco más cercano a la realidad o no? O… ¿qué consideran? Por ejemplo, para la pregunta b que decía este… que se deben tomar medidas preventivas, ¿verdad?, porque si ya se pasa… si el ácaro consume más de 160 grados-días, entonces puede arruinar el cultivo. Entonces, ¿qué consideran que ese contexto nos ayuda para la toma de decisiones?
126	E6	Bueno, yo creo que si ayuda como a… a tomar una decisión más informada que intuitiva. Yo supongo que tal vez antes como no habían tantos estudios y se podía intuir que había como una plaga, se tendía como a tomar alguna decisión, pero más como basada como en la experiencia de la persona o lo que le decían tal vez vecinos o amigos, amigas; pero ya ahorita sabiendo como que, ok hay un estudio que me dice que es a partir de cierto momento, entonces va a tener como un efecto mejor esa decisión que se está tomando.
Momento IV		
127	I3	Ok. Ok, muy bien. Igual, esta pregunta la podemos retomar al final del siguiente momento. Vamos a empezarlo. Ya les voy a mandar aquí el momento IV. Perfecto. Entonces, igual, van a tener unos… unos 10 minutos para contestar este momento IV. Igual, véanlo relacionado a este momento eh… III y al momento II. (1:22:10) (1:33:01) En este momento, nada más ahí, para que verifiquen, tiene hasta la pregunta g, ¿verdad? Para que intenten ahí completar todas, no dejar nada en blanco y acuérdense, si se equivocan o dicen: “¡ay no!, esto no”, lo dejan ahí, no importa. No lo tachen, no lo borren. Y escriben ahí a la par lo que consideren, ¿ok? (1:33:23) (1:36:14) ¿Cómo van? ¿Necesitan un poquito más de tiempo?
128	E1	Al menos yo nuevamente voy por la c, porque estoy… no sé jaja No sé cómo resolverlo, estoy ahí pensando.
129	E3	¿Verdad? Jajaja
130	E5	Si, yo también estoy ahí.
131	E6	Yo igual, estoy en blanco, pero desde la b.
132	I3	Ok, entonces, si quieren, podemos eh… discutir qué entendieron en la primera parte, en la primera hoja donde están las notas. Entonces, ¿qué entendieron en esas dos eh… como post-it que están ahí, que hablan de grados-horas o grados-días? Y viendo la gráfica, ¿a qué se refiere eso?

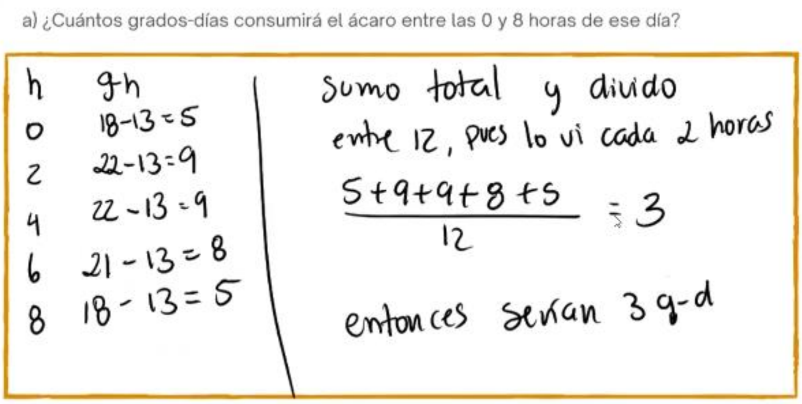
133	E1	Yo creo, a lo que entendí en esa parte, es como que bueno… me dan una gráfica de la temperatura a lo largo de las primeras 18-19 horas del día y la idea es como que se puede tener otra unidad, que, en vez de ser por día, sea por hora; entonces que… yo supuse que se utilizaba la misma fórmula que en la anterior que era temperatura menos 13, pero que diay… esos grados-horas se convertían a grados-días dividiendo como viene acá, entre 12 o 24, dependiendo de la medida que yo tome. Si lo veo cada dos horas, entonces entre 12, si lo veo cada 8, entonces… entre 3 y así, no sé.
134	I3	Ok. Ok, muy bien. ¿Los demás entendieron eso?
135	E5	Yo, en lo personal, si entendí lo que dijo E1.
136	I3	Ok, muy bien. Vean que eso se relaciona con la pregunta del momento III, que decía lo de la precisión. Entonces, creo que fue ahí E6 la que dijo: "ok, más bien si se tómala temperatura en diferentes momentos del día, se va a tener una mejor precisión", que es lo que estamos haciendo aquí. Aquí estamos tomando ahí más bien la temperatura por hora y ya no por día, pero, muy bien, la unidad que estábamos tomando era grados-días. Entonces, si lo tomamos por horas, hay que hacer esa conversión de grados-horas a grados-días. Y muy bien, lo que dijo E1, si tomamos cada hora, cada dos horas, cada ocho horas; hay que hacer esa conversión. Muy bien. ¿Y cuál es como la pregunta ahí que les está haciendo eh…, o como que no entendieron muy bien?
137	E1	Bueno, personalmente en la b yo me atrasé un montón porque como que la gráfica va de dos en dos, entonces no sabía cómo hacer con ese tres. Ahí al final di…, puse como que no sabía cómo qué hacer porque no podía estimar el tres y las separaciones que trae tampoco me dejan como sacar el punto medio. No sé, tendría como que estimarlo mucho y no sé… Y… iba por la d, la estaba leyendo, pero estaba viendo en qué me puede ayudar lo del momento III inciso a, a ver cómo resolver eso jajaja
138	I3	Ok. Entonces, voy a darles un tiempito más. Si tienen alguna duda, me preguntan. Recuerden no borrar sus procedimientos, ¿si? Sino eh… lo pueden escribir ahí a la par como: ok, ya este pensamiento mejor no y me voy por esta ruta. (1:39:53) (1:41:45) Si están pegados ahí con alguna pregunta pueden decirlo aquí y los demás compañeros pueden decir: "mmm, yo hice esta estrategia…"; para que lo discutan y se ayuden entre… lo que están pensando.
139	I1	O "yo entendí qué hay que hacer tal cosa", también.
140	I3	Exacto.
141	I1	O compartir la duda que tengan, si tiene una duda puede ser que sean dudas diferentes o en común, y ver qué es eso que está en común, también.
142	E6	Bueno… perdón. Chicas, es que… bueno… En mi caso, es que la verdad estoy, así como… como cuando uno llega a un examen y se embota y ya está completamente en blanco. No sé por qué me está costando como mucho tratar, o sea… Creo que inclusive la a la hice mal y ya la b no sé cómo hacerla, y las demás las leo y creo que es porque no estoy

		comprendiendo… O sea, sí comprendo como el contexto y la necesidad de hacer la conversión, pero no sé del todo cómo contestar las preguntas.
143	I1	Ok.
144	E3	A mi… A mí lo que me pasó, bueno… no sé. A mí lo único que se me vino a la cabeza fue eh… la fórmula que el profe dio como para la longitud del arco dando esos límites y ya después, haciendo la conversión, pero o sea… no llegué a nada jajaja. No sé ni cuál es la función, entonces no sé. Estoy un poco “bateada”.
145	I3	Ok. Los demás, por ejemplo, para la a, que… ¿qué estrategia utilizaron?
146	E1	Yo… yo puedo comentar lo que hice en la a, aunque no sé si estoy… si estoy bien, pero di… puedo comentarlo porque yo me pegué más adelante.
147	I3	Ok.
148	E1	En la a, yo lo que hice… Bueno, yo vi que la escala iba cada dos horas, ¿verdad?, entonces yo vi que (INAUDIBLE) hablaba de: si en un lapso se registra cada dos horas la temperatura. Entonces lo que yo hice fue como: ok, cada dos horas calculé la temperatura menos 13, para ver cuántos grados-horas en teoría había consumido y después lo que hice fue que eso se dividía entre 12, como decía el post-it de la derecha.
149	I1	Ok.
150	E1	Eso fue como lo que yo intenté hacer.
151	I1	Ok, chicos entonces acá, eh, cada uno con lo que van discutiendo entre ustedes, como tomen eso que ustedes consideran les va a funcionar para entenderlo y resolverlo y lo anotan en su resolución y siguen conversando ahí entre ustedes.
152	I3	Exacto, entonces ahí pueden decir mmm mirá, para esa yo no lo había pensado así, podría usar esta estrategia o esta otra, etc. Muy bien.
153	E5	Yo en la parte a este, tomé la temperatura de la octava hora digamos, este no la dividí en cada dos horas, entonces creo que es una aproximación un poco mala, pero entonces lo que hice fue que di la temperatura en la hora número 8 era 18, entonces le resté 3 y luego lo dividí entre 3 por los tres bloques de 8 horas entonces así yo obtuve la temperatura grados-días. Pero, eso que dijo el compañero E1 me ayuda más para la c que estaba un poco pegado. Entonces lo puedo hacer de dos en dos horas hasta que me de lo que ocupo.
154	I3	Ok… vean que en esa c, hay que volver al momento III, el inciso a, que creo que todos lo calcularon de la misma manera. Ahí era al finalizar los 4 días, que eran lunes. martes, miércoles y jueves, consumía, creo que todos llegaron al mismo resultado, verdad. Entonces ahí hay que ver, ok del día viernes que es la gráfica que está aquí, ¿cuántas horas tienen que pasar para llegar a que el ácaro consuma 32 días. Ahí no sé si alguien levantó la mano.

155	E1	Había sido yo perdón, eso iba a decir. Que no había visto que la gráfica decía que era viernes. O sea, no había visto la relación entre los dos momentos. Ya, después me devolví a la situación y ya vi que era viernes. Entonces ya lo logré comprender, gracias.
156	I3	Ok, sí con gusto. Si vean que la gráfica es del día viernes, las primeras 18 horas de ese día. No sé si las chicas que estaban ahí pegadas al principio ¿ya pudieron hacer algo por lo menos en las primeras preguntas?
157	E6	Yo personalmente sigo pegada. Pero es que últimamente cuando me emboto, me emboto mucho.
158	I3	Ok, y con respecto a lo que mencionó E1 y E5, ¿cómo podrías resolver esa primera?
159	E6	Di la primera sí la había resuelto y creo que fue igual a como dijo E5, tomé el que estaba en 8 horas, luego lo dividí entre 3, pero no sé, es como extraño. Para la b, no sé.
160	I3	Vean que ahí la gráfica está cada 2 horas, pero podemos tomar ahí, si nos dicen la tercera hora, podemos tomar entre el 2 y el 4. Podemos hacer una pequeña estimación de dónde estaría el 3. Y, por ejemplo, para las demás, tal vez en esa b que estás pegada no, pero en las demás ¿qué estrategias podrías utilizar o qué procedimientos?
161	E6	No sé, creo que fue porque no las he leído todavía.
162	I3	Ah ok. No sé si alguno quiere proyectar y pueden ir resolviendo las preguntas que les faltan entre todos, como las estrategias que utilizaron.
163	E1	Yo no tengo problema en proyectar lo mío, no sé si les parece a los compañeros.
164	E2	A mí la verdad sí, sí me parece porque es que la verdad yo soy demasiado lento y apenas voy por la c y estaba tratando de entenderla y no sé la verdad.
165	I3	Ok, no sé E1 si quieres compartir.
166	E1	La idea es que lo vayamos resolviendo entre todos…
167	I3	Exacto, entonces si querés proyectar lo que ya tenés hecho decir qué es lo que hiciste y qué es lo que te hace falta o qué estrategias podrías utilizar para las que siguen.
168	E1	Ok, eh, ¿desde la a o desde donde voy que es la c?
169	I3	Creo que la a ya todos la lograron hacer, entonces puede ser en las demás.
170	E1	Ok, bueno yo en la b, bueno aquí yo puse que no había podido encontrar lo de la 3,

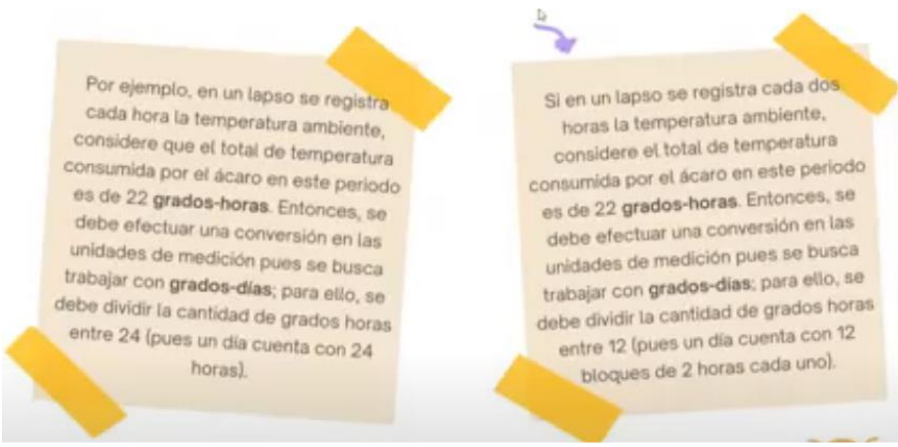
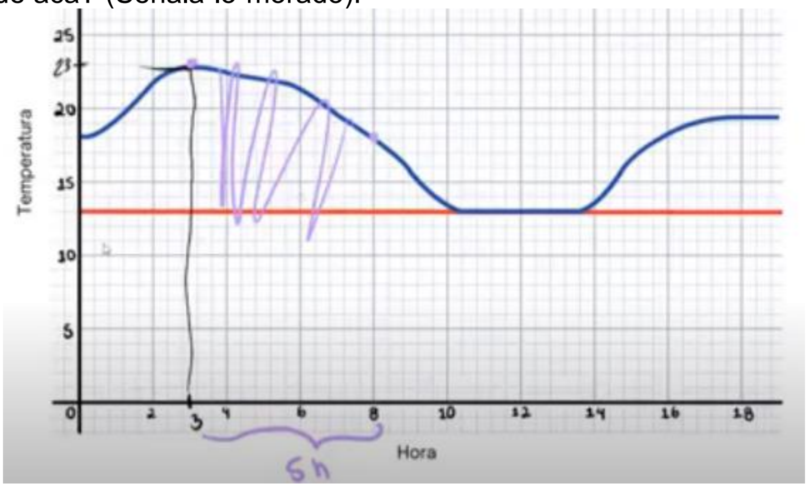
<table>
<tr><td></td><td></td><td>


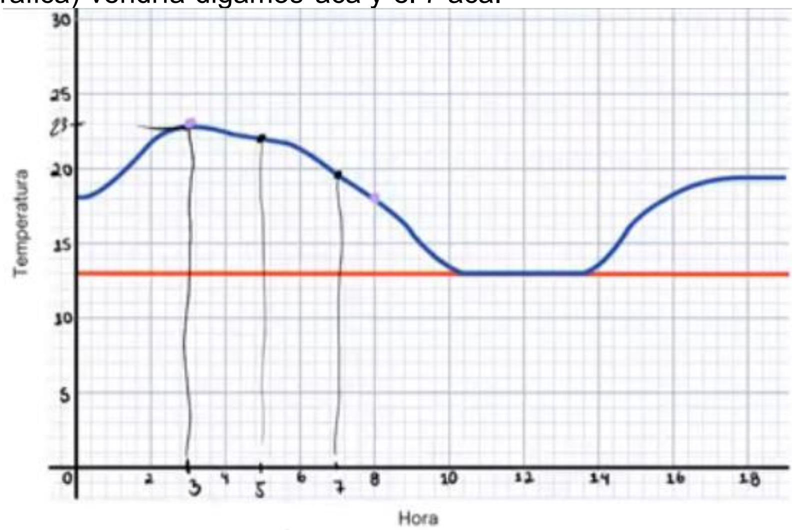
y luego lo que hice fue como bueno, supongamos que el 3 está por aquí (señala la gráfica adjunta):


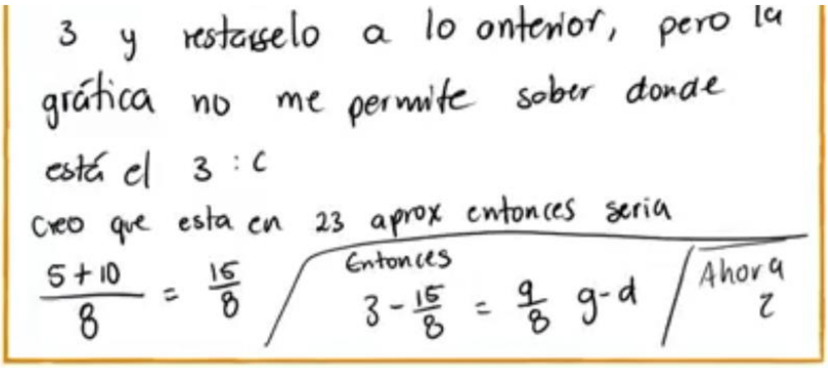
Si subimos (traza la línea), ojalá recto, está muy cerca de 23, entonces lo que yo hice fue, bueno calculamos cada tres horas, hora 0 y hora 3, lo sumamos y lo dividimos entre 8 y eso me da que consumiría, en la hora 3, que consumiría 15 grados-días. Entonces, al resultado anterior (señala pregunta a), que a mí me dio 3 que así fue como lo hice, le resté eso para saber cuánto era, 3 a 8.


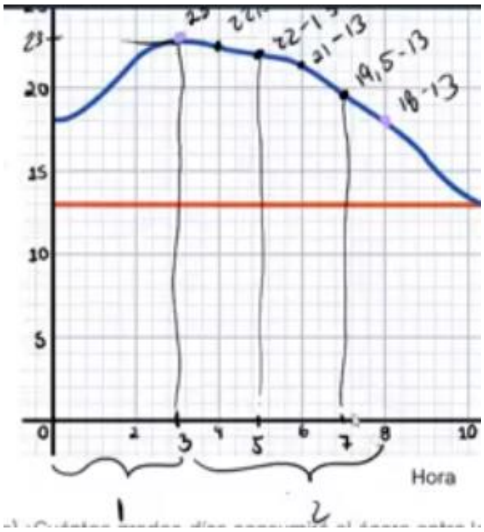
</td></tr>
<tr><td>171</td><td>I3</td><td>Ok, ¿qué opinan ahí los demás? Ahí vean que creo que se puede, este, anotar para los demás, viendo la gráfica. Pueden hacer ahí sus</td></tr>
</table>

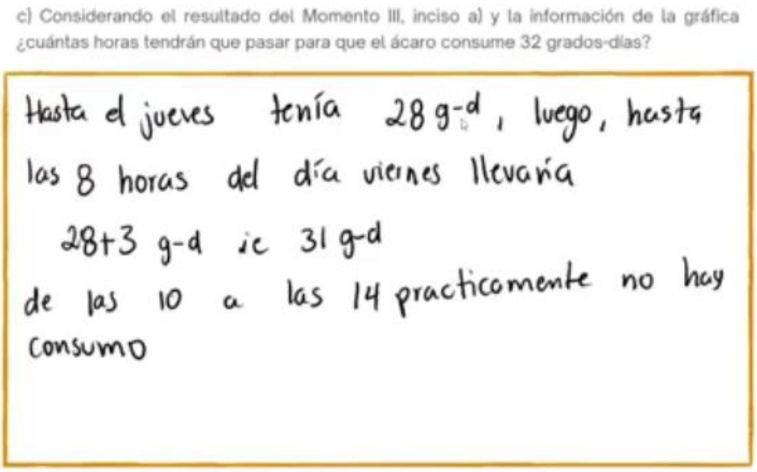
		anotaciones. O qué estrategias habían pensado ustedes que, digamos, E1 lo hizo de 3 en 3, si no me equivoco.
172	E1	Sí, o sea ya tenía la medida de grados-días hasta las 8 horas, y después intenté hacer lo mismo, pero de 3 en 3.
173	I3	Ok.
174	E5	Yo esa en lo personal, no la pude hacer, por eso mismo, como iba ya digamos, en un lapso de 3, pero ahora que E1, digamos, 24 horas que es lo que tiene el día di se divide entre 3, entonces se puede agarrar el bloque que dice él digamos, de 8.
175	I3	Ok.
176	E5	Creo que por ahí está bien.
177	I3	Y, por ejemplo, no sé si podés subir ahí a la gráfica. ajá (E1 proyecta la gráfica). Ahí a lo que entiendo, E1 hizo ok, yo ya tenía de 0 a 8, ¿cierto? Y ahora me preguntan de 3 a 8, entonces voy a restarle como el pedacito que ahí sobra. ¿Hay alguna otra estrategia o más bien, calcular de 3 a 8? ¿Cómo se podría hacer? En vez de restar de 0 a 3, ¿qué podría hacer ahí?
178	E5	Yo lo calculé de 3 a 8.
179	I3	Ok, ¿cómo lo calculaste?
180	E5	Pero, no me da muy buena aproximación. Lo que hice fue restar 8 y 3 entonces ahí me da un intervalo de 5 horas.
181	I3	Ajá.
182	E5	Y entonces, igual tomé la temperatura de la hora número 8 y dije que hay 24/5 de bloques de 5 horas, porque 24 no es divisible entre 5. Pero igual dividí lo que consumió en la hora 8 entre 24/5.
183	I3	Ok.
184	E1	Bueno no sé, es que ahí no sé si está tomando solo como los valores extremos.
185	I3	Como sólo el 3 y sólo el 8. O sea sólo las temperaturas asociadas al 3 y al 8. Ok, E5 ahí ¿qué hiciste? ¿Tomaste sólo el 3 y el 8?
186	E5	Yo sólo tomé la del 8 nada más.
187	E1	Ah…
188	E5	Ajá digamos, esas cinco horas como si la hora 3 fuese la hora 0 y la hora 8 fuese la 5 y sólo tomé el valor de la hora 8, le resté 13 y lo dividí entre 24/5. No sé si me entendió.
189	E1	Creo que sí, pero es que no sé entonces creo que entendimos muy diferente esto (señala los post-it):

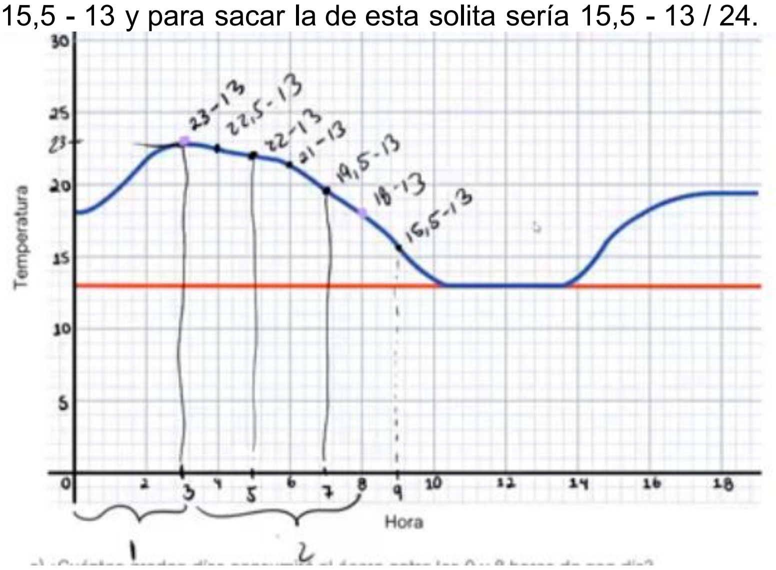
		
190	I3	¿Por qué?
191	E1	Es que yo lo que veo es como que, si un lapso se registra cada dos horas, entonces creo que es como ir registrando cada dos horas el consumo y sumar todo esto (encierra las tres líneas):  Si yo tomo sólo el 8, ¿no estaría tomando sólo esto e ignorando toda esta parte de acá? (Señala lo morado):  Esa sería mi duda.
192	E5	Como si estuviera tomando o registrando un lapso de 8 horas.
193	E1	Ajá, creo que es como que, bueno no sé, es según lo que entiendo aquí, puede ser que esté equivocado (lee el post-it): en un lapso se registra cada dos horas la temperatura. entonces es cada 2 horas, le resto 3 y eso nos va a dar grados-días, eh, grados-horas y eso es lo que tengo que pasar a grados días. Pero si tomo sólo uno, ¿no estaría ignorando como toda esta parte? (señala nuevamente lo morado en la gráfica).
194	I3	¿Qué opinas ahí E5?
195	E5	No sé, es que esa parte no la entendí como muy bien. Yo lo que entendí

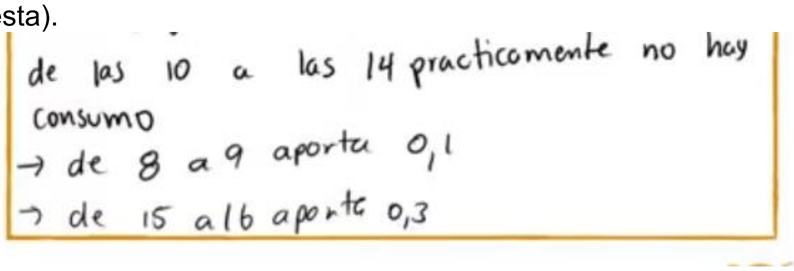
		fue, o sea, voy a volver a leer (los post-it) a ver qué puedo decir.
196	I3	Ok, ahí las chicas ¿qué opinan? ¿Qué entendieron ustedes?
197	E5	Ah ok, si ya me acordé. Yo cuando leí eso como que entendí, este, digamos, por ejemplo, si pasan dos horas, entonces yo tomo la temperatura en la hora número 2, y la convierto a por ejemplo a grados-días, si sólo quisiera la temperatura de la hora 0 a la hora 2. Luego, si quiero la temperatura de la hora 2 a la hora 4, tomo la temperatura de la hora 4 y lo divido entre 12 también, eso fue lo que entendí yo. Por eso digamos yo dije, bueno voy a tomar este la hora la temperatura de la hora 8 y la voy a dividir entre la cantidad de bloques.
198	I3	Ok. muy bien. Si querés ahí te devolvés a la gráfica. Entonces viéndolo así, verdad, según lo que explicó E1 y lo que ahora E5 estaba diciendo, ¿cada cuánto podríamos tomar de 3 a 8, para averiguar los grados-días que consume entre 3 y 8?
199	E1	¿Se puede tomar un lapso de una hora?
200	I3	Mjm, podríamos tomar cada hora.
201	E1	Y luego dividirlo entre 24, lo que, bueno y restándole los 13 acá.
202	E5	Sería el 5, bueno digamos, el 5 y el 7, entonces el 5 (traza una línea vertical en la gráfica) vendría digamos acá y el 7 acá. 
203	I3	Ok muy bien. Entonces ahí pueden ir. si quieren, anotando.
204	E1	En la hora 3 serían 23 menos 13 y aquí …
205	I3	Vean que ahí pueden utilizar una aproximación, entonces puede ser …
206	E1	Entonces 22,5.
207	I3	Mjm, muy bien. Ahí las chicas están muy calladas. ¿Qué opinan de lo que están haciendo ellos?
208	E5	… casi en 21 (le dice para que E1 anote en la gráfica el valor)

209	E1	Ok, pongámosle 21, y este 7, ¿19 y medio?
210	E5	Si, 19,5 y después aquí en 8 si está en 18. Entonces la idea sería sumar todo esto y dividirlo entre 24.
211	E1	Ajá. Ok vamos a ver (hace los cálculos).
212	I3	No sé si ahí se van aclarando un poco más las dudas que tenían al principio, ahí las chicas, o si quieren pueden escribir por el chat, por si tienen alguna otra idea o entendieron un poco más esta parte.
213	E1	Ok, eso en total da 48, la suma y entre 3, … 16.
214	I3	Ok, si quieren pueden ir anotando eso en la parte b.
215	E1	Ok, ah no, no era entre 3, era entre 24.
216	E5	Ajá…
217	E1	¿Cuánto era? ¿Cuánto dije que había?
218	E5	48.
219	E1	Sí, 48 entre 24. Di dos, digamos.
220	E5	De hecho, cuando lo hice me dio 1,04.
221	E1	Sí a mí me dio 1,025, aquí bueno, aquí les voy a poner un paréntesis “ahora es dos”.  Ah bueno, entonces ya, porque entonces … vamos a ver. Entonces hasta la hora 8 consumió 2, de 3 a 8 consumió 2 entonces de 1 a 3 consumió 1.
222	E5	Mjm.
223	E1	Aquí consumió 1 y aquí consumió 2

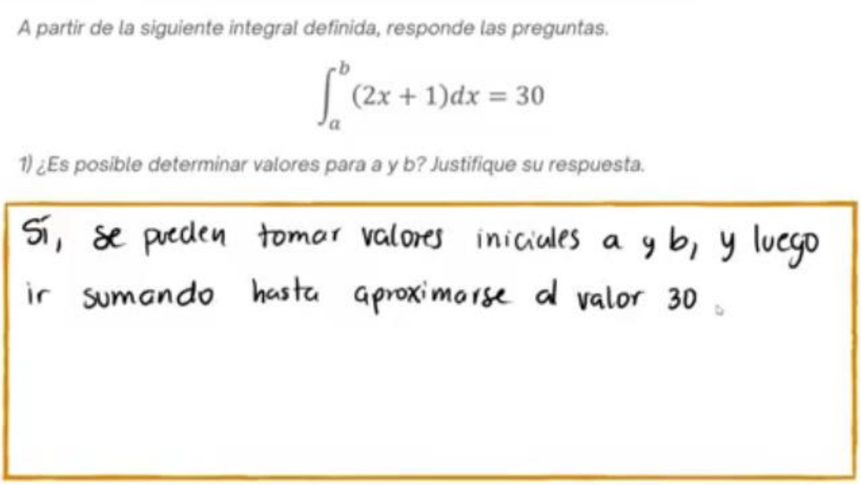
		 Y bueno en el mío consumió 3, no sé cuánto les dió a ustedes.
224	E5	A mí me dió 3. Este como yo solo tomé a la hora 8, fue bastante distinto, pero sí.
225	E2	Ah, la a.
226	E5	Ajá.
227	E2	A mí la a me dio 3,08 grados días.
228	E5	Ah bueno sí, parecido digamos.
229	I3	Bueno, aquí E4 pone (lee texto del chat): yo la a y la b las hice de esa manera, porque no entendí muy bien los intervalos. Ok, entonces E4 ahí, este hiciste como primero la estrategia de las que ya había calculado, le resto como el pedacito, o más bien tomaste de una en una, en cada hora.
230	E4	De hecho, tomé, tomé de una hora.
231	I3	¿De una hora? Ah ok, muy bien. ¿Y cuánto te dio maso menos?
232	E4	Mmm… 2,0.
233	I3	2,0 ah ok, y ahí fue porque aproximaste las temperaturas como en “coma cinco” o tomaste…
234	E4	Ajá
235	I3	Ah ok, entonces muy bien. Ahí depende de la aproximación, verdad, ahí va a dar un poco más distinto. Muy bien, entonces ya un poco más claro cómo resolver esa a y esa b.
236	E4	Sí, bueno de mi parte sí.
237	I3	Ok, muy bien. Igual, ahí si las que faltan tienen alguna duda nos pueden preguntar, no hay ningún problema. Pueden ahora hacer la pregunta c, no sé si igual E1 quiere seguir compartiendo o alguien más quiere proyectar.
238	E1	Yo no tengo problema, pero no sé si alguien lo quiere hacer, sino lo sigo

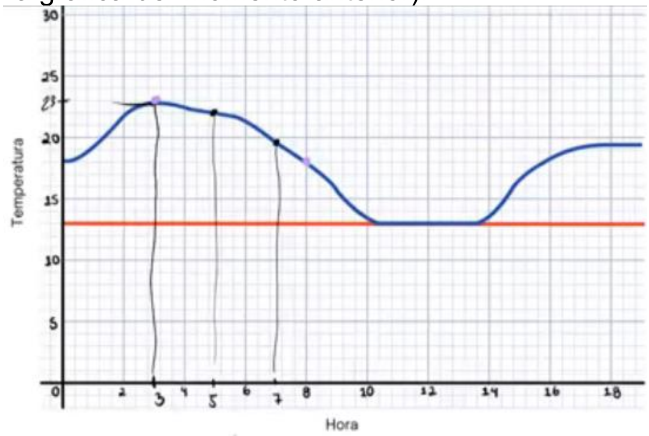
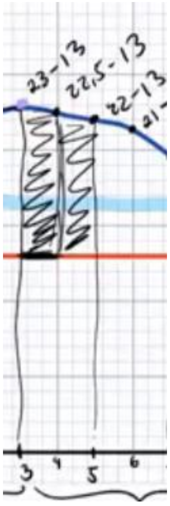
		proyectando.
239	E5	Bueno de mi parte estoy de acuerdo en seguir así.
240	I3	Ok.
241	E1	Bueno yo para esta c, ya sabíamos que teníamos 28 porque hasta después entendí bien que era, que esto era lo del viernes (señala lo que escribió), entonces yo supuse estos 28, y ya sabemos que hasta las 8 horas llevamos 3 más.  c) Considerando el resultado del Momento III, inciso a) y la información de la gráfica ¿cuántas horas tendrán que pasar para que el ácaro consume 32 grados-días? Hasta el jueves tenía 28 g-d, luego, hasta las 8 horas del día viernes llevaría 28+3 g-d ie 31 g-d de las 10 a las 14 practicomente no hay consumo
242	I3	Ahí no sé si E3, E4 o E6, pueden compartir para ir variando ahí un poco y los demás aportan.
243	I4	Más bien, no es que tiene que haber como una respuesta definitiva, sino que es una situación en donde nada más queremos analizar qué es lo que piensan ustedes, verdad, en esa parte. Entonces todo lo que digan, va a ser siempre muy positivo para el trabajo.
244	I3	Ahí entre todos van a ir ayudando. No sé si alguna quiere compartir. Tal vez E6 o E4 que están, bueno, no sé si están desde alguna tablet o desde la compu y puedan rayar ahí más fácil. Creo que E3 estaba ahí con un papel, verdad, y es más difícil … Ah bueno, a E3 se le pegó la computadora, ah bueno ahí está E3.
245	E3	Si acabo de meterme, … es que mi computadora se jodió y no la puedo quitar y me escucho, ay no, no puede ser, perdón.
246	I3	Tranquila.
247	E3	¿No sé si ya se desconectó del otro lado?
248	I3	No, creo que seguís conectada.
249	E3	Voy a ver cómo hago para apagar esto, no sé qué hacer.
250	I3	Ya ahora sí.
251	E3	Bueno en realidad ahorita ni siquiera puedo proyectar porque estoy haciéndolo desde una hoja. La a y la b las estaba entendiendo súper mal, pero bueno seguí las instrucciones de I1, y ya después no entendí pues, la

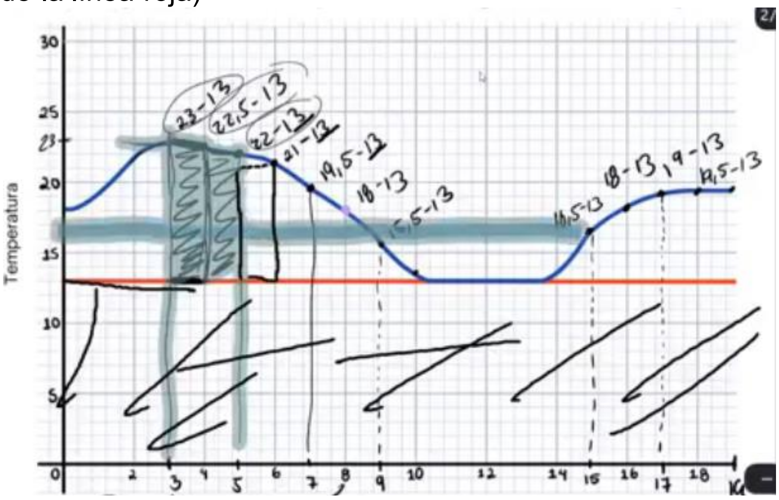
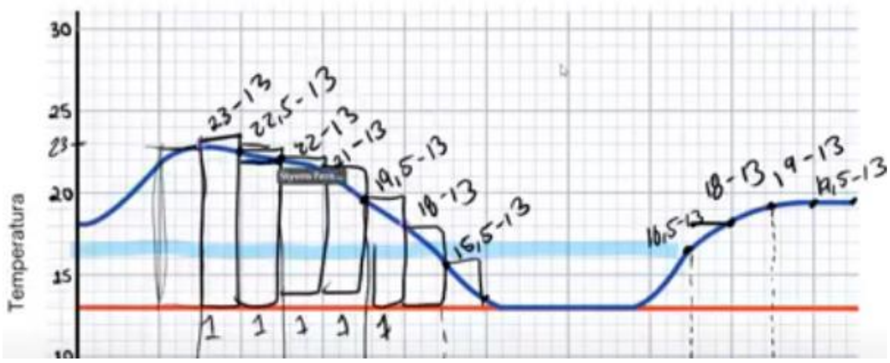
		explicación de E1. Entonces, bueno ahí estoy intentando hacer el a. El c la verdad no lo he llegado y ni siquiera he leído las siguientes, entonces bueno así está mi situación en este momento.
252	I3	Ok, tranquila. Bueno, E1 entonces si quieres sigues compartiendo y ahí los demás pueden aportar.
253	E1	Ok.
254	I3	Gracias.
255	E1	Ah bueno, lo que había dicho antes era que, ya sabemos que teníamos 28 y estos 3 de aquí (proyecta pregunta a nuevamente) y estoy buscando el lado que me falta.
256	I3	Ok, muy bien. Ahí los demás, este, ¿qué pensaron en esa parte?
257	E5	Yo estaba haciendo eso mismo sólo que con las aproximaciones que tenía antes, como no eran tan buenas, lo que tenía era como hora y algo, entonces me faltaba un montón, como de cantidades digamos. Ahí lo que se puede hacer es como, ahí que E1 pone que “de las 10 a las 14 casi no hay consumo”, este, se puede sumar de la hora 8 a la 9 que hay un pedacito, para ver si eso me completa tal vez no sé, medio, o sea 0,5 de grados días y tal vez el otro pedacito un poco más para llegar a los 32.
258	I3	Ok, muy bien.
259	E1	Yo lo dejaría aquí, entonces sería (señala la gráfica en 9), entonces sería ¿15,5? 15,5 - 13 y para sacar la de esta solita sería 15,5 - 13 / 24.  Sólo una medida. Ok, entonces (escribe en la pregunta c): “de 8 a 9 aporta 0,1” y sería como de, bueno no sé si de 9 a 10, es que hay demasiado poquito. Di entonces sería como ¿cuánto consumió en la 16? Porque ahí subió.
260	E5	Sí, creo que sí.
261	E1	Ah bueno, pero en la 16 consumió, ¿es el mismo 19? No, es 18, 18 -13 / 24, me aporta otros 0,2. Ah bueno,...

262	E5	Es que eso …
263	E1	Entonces sería entre 12, bueno no, mejor no hago loco. Voy a hacerlo bien
264	I3	Recuerden ahí los demás ir escribiendo también en su propia hojita y luego lo mandan.
265	E1	Ok. ¿16 y medio no? Creo.
266	E5	Sí, sería como 16,5.
267	E1	16,5 - 13 + 18 - 13 y todo eso lo divido entre 24. Ok, eso da 0,3 (escribe su respuesta).  de las 10 a las 14 practicomente no hay consumo → de 8 a 9 aporta 0,1 → de 15 a16 aporte 0,3 Entonces nos queda un 0,6 por encontrar, o no, estoy mal.
268	I3	Ok, entonces ahí ¿cómo llegamos hasta 32? ¿Por dónde van ahora?
269	E5	Vamos por la 16. Ya sumamos hasta 16, digamos, y llevamos 31,4, entonces nos falta 0,6.
270	I3	Ok.
271	E1	En 17 y en 18 y esto es como 19,1 o 19,5. Ok, entonces sería 19 - 13 y 19,15 - 13 ¡ah! y eso me aporta 0,52
272	E5	0,52, no llegamos.
273	E1	Bueno, supongamos que los 19. Yo diría que ya a las 19 ya debió haber llegado, lo que falta es … 19 sería la última, que es este punto también ¿qué dicen? ¨Ah ok, si hasta las 19 mejor.
274	E5	¿Cuánto aportó?
275	E1	0.79, entonces ahí más bien se pasó.
276	I3	Ok, entonces ahí si quieren, retomemos qué es lo que quieren en esta pregunta.
277	E1	Creo que la estrategia fue ir sumando, digamos, el consumo por hora, pasándolo a grados días, con la temperatura hasta llegar al 32.
278	I3	Ok, entonces de los 28 que tenían de lunes a jueves, este, fueron sumando cada una del día viernes hasta ver cuándo llegar a 32.
279	E1	Exacto.
280	I3	Ah ok, y hasta donde llegaron, hasta cuál hora.
281	E1	Hasta el borde de la gráfica, hasta el 19.

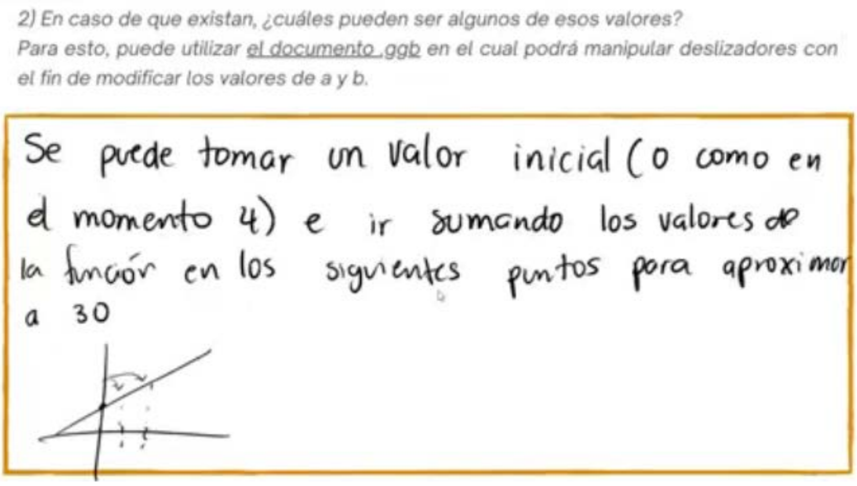
282	I3	Ok, muy bien, y ya llegaron a 32.
283	E1	Sí, un poquito más.
284	I3	Ok, muy bien. Entonces, ahora esas preguntas que faltan no las vamos a realizar, sino que les voy a mandar otro momento que igual lo van a responder entre todos. Recuerden pasarles este documento, no importa que las últimas preguntas estén en blanco, pero se lo van a pasar a I2. Ya les voy a pasar el último… listo, ¿ya les llegó?
285	E1	Sí.
286	I3	Ok, perfecto. De igual manera, si alguien quiere compartir puede hacerlo y discuten entre todos, que es lo que van a hacer en ese momento… ok, ¿quién quiere proyectar? Si quiere puede ser igual E1 o algún otro que quiera proyectar, para leer juntos este momento.
287	E1	Yo no tengo problema en hacerlo, o si alguno quiere.
288	I3	Ok, entonces si quieres compartes.
289	E1	¿Lo leo?
290	I3	Sí.
Momento V		
291	E1	(Lee la pregunta a del Momento V): “Resuelve nuevamente el primer momento empleando las estrategias utilizadas en el Momento II, III y IV. A partir de la siguiente integral definida, responde las preguntas. 1) ¿Es posible determinar valores para a y b? Justifique su respuesta”. Ah ok, es básicamente la primera.
292	I3	Exacto, utilizando las estrategias que utilizaron en los momentos anteriores.
293	E1	Ok la idea, compañeros ¿qué opinan?
294	I3	¿Qué opinan ahí los demás? ¿Cómo podrían determinar esos valores de a y b? ¿Es posible? Utilizando lo de los momentos pasados.
295	I1	Bueno lo primero también es reconocer qué es lo que están entendiendo por lo que se utilizó por estrategias en los momentos pasados. ¿Qué están entendiendo ustedes o qué identificaron que son esas estrategias? También empezar a discutir a partir de ahí.
296	E1	Bueno yo, voy a seguir hablando, creo que la idea era esa tipo ir sumando, o sea esa suma que yo dije que era como recursiva, de lo anterior le voy agregando lo anterior y así, entonces di para esa pregunta yo pensaría que es lo mismo pero no sería resolverla a partir de una ecuación sino como probar un valor de a y un valor de b y depende de lo que me de irle agregando al valor de a para que el área vaya aumentando, es lo que pensaría yo. No sé los demás qué opinan o si piensan completamente diferente a mí, no sé.
297	E5	Es que estaba enviando la parte anterior, no sé si me pueden repetir la

		pregunta porfa.
298	E1	Creo que la idea es resolver nuevamente la parte 1 pero utilizando las estrategias del momento II, III y IV. Entonces lo que yo dije es que se podría fijar un valor de a, calcularlo hasta cierto valor de b y luego irse aproximando a 30, sumando como esa suma repetitiva.
299	E5	Sí, opino igual. Se puede, como, por ejemplo, gráficamente podemos ir calculando cada pedacito e ir sumando y sumando hasta llegar a 30, entonces uno sabe de dónde hasta donde tiene aproximadamente esos 30 ese valor.
300	I3	Ok, entonces si quieren vayan tomando nota de eso que están diciendo. (E1 escribe en el documento)  *A partir de la siguiente integral definida, responde las preguntas.* $\int_a^b (2x+1)dx = 30$ *1) ¿Es posible determinar valores para a y b? Justifique su respuesta.* Sí, se pueden tomar valores iniciales a y b, y luego ir sumando hasta aproximarse al valor 30. Ok, ¿qué más podríamos agregar ahí? ¿O viendo los momentos anteriores, nos podemos devolver y ver ok, qué estrategias podemos utilizar en esta otra?
301	E1	Estos son los momentos anteriores.
302	I3	Ok muy bien. ¿Qué estrategias se utilizaron ahí?
303	E1	Bueno, en el Momento III yo utilicé la suma recursiva como les dije, como ir sumando a lo anterior.
304	I3	Muy bien, ahí ¿cuál era la estrategia de E5, de E3, de E2? ¿Qué utilizaron en esa?
305	E2	Sí lo mismo, bueno yo había planteado todo, haciendo las restas y las sumas, pero sí va prácticamente ligado a lo que puso E1.
306	I3	Ok, muy bien. Entonces si quieres te puedes devolver al Momento V.
307	E2	Yo tenía una duda, bueno ahora que me acuerdo. Ahora que hemos pasado como por todos los momentos, al final, bueno no sé si estará bien, pero los grados días y los grados horas ¿vienen a ser lo que es, el área bajo esas gráficas que hemos venido haciendo? No sé si concluir eso la verdad, pero no sé lo estaba viendo así, que al final los grados horas y grados días, eran como esa área debajo de la curva, o cómo se comportaban los ácaros digamos, en un día o en una semana, pero no sé. No sé qué piensan los

		demás.
308	I3	Ok muy bien. ¿Por qué crees eso?
309	E2	Eh, o sea más que todo porque como siempre lo veíamos como temperatura y luego horas, o temperatura días, entonces no sé cómo asocié que grados días iba a ser como algo, como lo que está debajo de o como entre de, o tomar en cuenta lo de la gráfica, no sé cómo explicarme la verdad, pero por ahí va.
310	I3	Ok.
311	E2	No sé si los demás pensaron lo mismo o solo fui yo.
312	I3	Ok, ahí los demás qué opinan con eso que dijo E2.
313	E5	Yo diría que creo que no, pero voy a decir porqué creo que no. Por ejemplo, aquí (señala la gráfica del momento anterior):  O sea, nosotros íbamos como a cada uno de estos puntos sumando y sumando y sumando. Entonces, digamos el área de aquí (señala el área de 3 a 4) y el área de aquí (señala el área de 4 a 5), yo creería que se calcula distinto porque sería … es que no sé.  Yo veo que se calcula como distinto a como lo fuimos calculando, porque, por ejemplo, aquí lo fuimos haciendo día a día, entonces era en este punto, en este punto y así, entonces digamos sería como un rectángulo, como un trapecio más bien, porque nosotros sólo tomamos, o sea no esta curvita

		sino esta parte pero no estoy seguro.
314	I3	Ok, ¿qué opinan ahí?
315	E5	Creo que ahí, al tomar como el último valor es como similar cuando uno está en ese tema digamos cuando integrales que nos den lo hace con sumas o calculando por encima o por debajo y que no es una aproximación como tan exacta, entonces no sé si estoy equivocado, pero siento que aquí lo que estamos agarrando es por ejemplo este de aquí (dibuja un rectángulo) y estamos obviando este pedacito de arriba. Bueno ahí sí, la parte de 22 - 13 es porque estamos quitando todo esto (señala el área debajo de la línea roja) 
316	E2	Sí digamos, tiene razón, porque lo que estaría haciendo es como aquí, tomando como este rectángulo y aquí tomando como este rectángulo, o sea con la altura de la izquierda básicamente, y la medida de la base sería 1 porque vamos de uno en uno..
317	E5	Sí, creo que ahí lo que hicimos, bueno creo que era más bien el de la derecha.
318	E3	Sí por abajo.
319	E5	Ajá por debajo, porque a veces queda por encima, a la derecha. Por ejemplo, en la hora 5 tomamos esta 
320	I3	Ok, entonces qué opinan de la idea de E2, que estábamos tomando grados-días, grados-horas, ¿era el área bajo la curva?
321	E5	Ahora que lo dibujé, ahora me parece como que sí.

322	I3	Ok.
323	E2	Ajá, porque eso es como lo que consume el ácaro digamos. Entonces di lo que consume es como todo eso, algo así lo estaba viendo yo, por eso fue que concluí eso.
324	I3	Ok muy bien, entonces como que iba consumiendo todo eso y que se puede ver como el área bajo la curva. Entonces ya para ahí terminar, si quieren nos devolvemos al Momento V.
325	E1	Si, voy un momento.
326	I3	Ok, entonces vean que ahí ya relacionamos ese Momento I, que era ver el área bajo esa curva, usando el GeoGebra, y ver las relaciones con las estrategias de los Momentos II, III y IV. Y la segunda pregunta ¿cómo la podrían responder? Viendo todo lo que utilizaron en los Momentos II, III y IV. ¿Qué opinan?
327	E1	Creo que aquí, bueno no sé, es que si lo relaciono con los ácaros, por ejemplo, yo en ese caso diría que no pueden ser negativos, por ejemplo el valor de a porque sería que está consumiendo “menos tanto”, pero sería como obligar al contexto pasado a este, que no es el mismo, pero no sé.
328	I3	Ok, ¿qué opinan ahí los demás?
329	E5	Pero en ese caso los valores de a y b vendrían a representar como las horas ¿no? O sea, aquí el -1 representaría la hora 23 del jueves, no sé, como algo así. Creo que el a y el b son los extremos, no los valores. No sé si lo interpreté mal.
330	E1	Ah bueno sí, porque está limitando la temperatura si está por debajo de 13 ya se sabe que no consume.
331	I3	Ok muy bien, entonces si quieren pueden ir escribiendo eso.
332	E1	No sé qué parte de la conversación escribir.
333	I3	Ok, ¿ahí qué consideras que puede ir ahí?
334	E1	Es que lo que me preguntan cuál puede ser algo de esos valores. Entonces sería como ir tomando un valor inicial, como aquí por ejemplo que tomamos desde el cero y comenzar ahí a sumar, no sé, podría tomarse desde cero e ir sumando de uno en uno a ver dónde se llega, y si no me equivoco, habían dicho que daba entero. O no sé si eso está dentro de los comentarios de E5.
335	I3	Ok, entonces podés ir escribiendo eso.
336	E1	Ok. (Escribe en el documento).

		 2) En caso de que existan, ¿cuáles pueden ser algunos de esos valores? Para esto, puede utilizar el documento .ggb en el cual podrá manipular deslizadores con el fin de modificar los valores de a y b. Se puede tomar un valor inicial (0 como en el momento 4) e ir sumando los valores de la función en los siguientes puntos para aproximar a 30 Como es 2x+1, entonces como en 0 vale tanto, en 1 vale tanto y en 2 tanto, entonces ir sumando eso, eso creo que sería lo que podría agregar de la parte anterior, no sé si alguien tiene algo más para agregarlo.
337	I3	¿Qué opinan ahí los demás? Esas serían como las estrategias que utilizaron en los Momentos II, III y IV para calcular esos valores de a y b.
338	E1	Sí.
339	I3	Bueno, entonces los demás pueden igual escribir las respuestas y nos lo envían a nosotras. Entonces bueno, muchísimas gracias a E1 por compartir y a los demás por ir agregando comentarios.

Anexo 11: Transcripción entrevista final E1

1	I3	Entonces, bueno. Quiero que me cuentes ¿qué es para vos la integral definida? O si no cambió de percepción después de esta actividad o si un poco. Entonces igual, con tus palabras ¿qué es la integral definida?
2	E1	Ok, creo que hasta que E2 hizo la relación que dijo, que yo primero dije que no y después me comenzó a cuestionar, logré hacer como esa relación entre esa idea de ir acumulando o ir sumando verdad, lo anterior súmelo, o agréguele la siguiente medida, digamos, sume el anterior más otro poco, etc. Entonces creo que la integral definida puede tener varias interpretaciones. O sea, al inicio, digamos, la sigo viendo como área bajo la curva, en el sentido que fue la primera interpretación que me dieron, etc. pero ahora veo esta nueva interpretación que también considero que es válida y que tiene cierto isomorfismo con el área bajo la curva. Entonces siento que se pueden tener varias interpretaciones y esa acumulación podría ser una.
3	I3	Ok, muy bien. Ahora, ¿qué tipo de aplicaciones considerarías para dar significado a la integral definida?
4	E1	Ok, … bueno siento que, a como nos lo enseñaron, tiene un contexto sumamente matemático. O sea, tengo una función y tiene que cumplir esta y esta condición, por ejemplo, que sea mayor a no sé qué, mayor que cero, etc. pero con esta otra interpretación digamos, se abre a un montón de posibilidades. De hecho, esto de los ácaros yo ni siquiera la había relacionado con la integral hasta que usted lo dijo. Entonces supongo que ahora hay muchas interpretaciones que se pueden dar para poner, digamos, el tema en contexto, como ese de los ácaros y supongo que deben haber muchos más que desconozco en este momento.
5	I3	¿Cuál otro, digamos, considerarías viendo esto como la interpretación de acumulación que me dijiste? Por ejemplo, ahorita todo esto de la pandemia, ¿crees que se puede relacionar?
6	E1	Tal vez como, por ejemplo, con los casos que se han venido dando desde el día cero en Costa Rica, no sé. Digamos, los casos di siento que se pueden ir sumando, el día 1 hubo tantos, el día 2 hubo tantos, entonces hasta el día 2, dio tantos casos, y hasta el día 3 dio tantos y así. En Google, si usted se mete tiene como una grafiquita y así, entonces supongo que se van sumando todos los valores de la gráfica, va a ir acumulando igualmente, entonces di tendría la interpretación de integral igualmente.
7	I3	Ves que en realidad eso como de ir viendo los casos acumulados o la población de ácaros, ves que es como lo mismo, ¿verdad?
8	E1	Mjm.
9	I3	A este día, cuántos casos o cuántos grados-días ha consumido el ácaro. En vez de calcularlo todo desde el principio, vamos acumulando o sumando el día que estamos estudiando. Incluso, podemos ver que cuando se lleguen a tantos casos, hay que tomar medidas preventivas, verdad, que no podemos seguir así o lo mismo con los ácaros.

10	E1	Ajá.
11	I3	Ok muy bien. Este, también como ¿qué elementos aportarías para dar una clase donde se va a estudiar por primera vez la integral definida? Es decir, ¿qué podrías incorporar en el diseño o en la implementación de una clase donde se vea por primera vez la integral definida?
12	E1	Ok, no tomando en cuenta, no digamos agregar a los modelos que ustedes nos presentaron, sino una clase completamente diferente.
13	I3	Exacto, como vos ya siendo profesor de Cálculo, o de Funciones Integrales, ¿cómo o qué elementos darías vos para dar esa clase por primera vez que se ve la integral definida?
14	E1	Bueno, ahora tomando en cuenta esto que vimos, siento que se podría traer problemas como más contextualizados como este, a diferencia de bueno tenemos esta función entonces inmediatamente calcule usted el área bajo la curva, eso es lo que nos dicen; y después nos dicen, bueno eso se llama integral. Sino como ir descubriendo esa idea intuitiva, a partir de la acumulación, y haciéndolo justo como esto digamos, que yo no había relacionado la integral y después de que me dijo pues ya pude como anidar todo. Entonces siento que eso lo permite, tal vez no sé en Funciones Derivables habían problemas que se podían incluir y así, pero eso fue más directo, fue como bueno eso es el área bajo la curva, calcúlela. Entonces siento que, al menos en el curso se podría hacer esa diferencia de introducir esa noción de integral definida a partir de problemas contextualizados y después ver qué es lo que me va a aportar vivir esa acumulación.
15	I3	Ok, ok muy bien. Ahora, no solo verlo como área bajo la curva o solo en un contexto matemático, sino integrar un poco más, ir viendo o considerando otros contextos verdad.
16	E1	Sí, exacto. Aunque si también, considero que en cierto momento se podría hacer ese isomorfismo digamos, con el área bajo la curva. Como ver las distintas interpretaciones, no sólo quedarse con la fórmula.
17	I3	Exacto, muy bien. No sólo ver una, sino también se puede considerar como acumulación o también se puede considerar como límites, etc. y ahí viendo como todas las interpretaciones.
18	E1	Exacto.
19	I3	Muy bien. Ya por último quiero que me cuentes más bien, ¿cómo fue la experiencia en esta situación de aprendizaje? Si viste o si te ayudo, ok, para ver eso de considerar la integral como algo más, o si se te hicieron largos los momentos o qué podría mejorar, o qué está bien, etc. como en general, ¿cuál ha sido tu percepción acerca de esta actividad?
20	E1	Bueno, al inicio, a mí me gusta mucho como participar e intentar aportar, entonces bueno a mí, las actividades me parecieron interesantes. Sólo que, digamos, en ese momento que me quedé pegado, me gustó mucho como el poder comentarlo abiertamente con mis compañeros porque yo estaba acostumbrado a hacer las tareas y todo con ellos, entonces muchas veces si algo no me sale inmediatamente compartimos y entre todos vamos viendo. Entonces eso me pareció algo muy positivo e igualmente esa idea

		de los problemas contextualizados y todo, me parece bastante bien, como que ayuda a entender y siento que en los momentos si venía bastante contextualizado, los ácaros de las uvas, de qué era grados días, de cómo se debía trabajar. Ahí fue como esas peguillas que a uno le pasan siempre, pero con la ayuda de mis compañeros ya lo pude solventar, como viendo otras opiniones.
21	I3	Ok perfecto, vamos a parar aquí la grabación o no sé si tienes alguna otra duda o comentario, observación…
22	E1	No, yo diría que todo súper bien. Así está bien.

Anexo 12: Transcripción entrevista final E2

1	I4	Ahora, acá es para hacer como un tipo contraste sobre la entrevista inicial que tuvimos la semana pasada con ah…, después de haber desarrollado un poco la situación. Voy a hablar en lugar de I2. I2 va a tomar nota y te voy a hacer una serie de preguntas.
2	E2	Mmmjmm.
3	I4	La primera es: ¿qué es para usted la integral definida?
4	E2	Eh… Bueno, di… Di, si tomo, digamos, no sé… Digamos, si mi integral está eh… o si yo estoy calculando… Digamos, esa integral va a estar definida como en unos límites de integración eh… y que esos valores van a ser reales y en el caso, digamos, con lo de los… lo que hemos tratado en lo de estas 3 horas. Eh… podría decir que eh… que, al final, es como eh… como un área bajo la curva que uno va a ir calculando como por partes, tal vez; y que… y si es, digamos, es limitado, o sea como que es… si se puede ver de dónde a dónde va o de dónde… o como que… O sea, sabemos que la integral es el área bajo la curva, entonces, de acuerdo a lo que hemos visto estas 3 horas, podríamos decir que esa es eh… un área que si se puede ver y que si está limitada, digamos.
5	I4	Ah bueno. Y eso que ves por partes, ¿cómo qué sería, más específicamente?
6	E2	Ajá. Eso sería como lo de los… lo que vimos ahorita, como que los lapsos, con respecto a lo de los… a lo del contexto que estamos tratando. Como que lo estamos viendo como por rectángulos, entonces eh… O sea, si esa integral se puede ver por rectángulos puede ser también… o sea, se podrá catalogar como definida, como una integral definida.
7	I4	Si. ¿Qué tipo de aplicaciones ah… podrías, después de esta situación considerar como para dar significado a la integral definida?
8	E2	Mmm… No entendí, como… ¿Cómo a qué se refiere?
9	I4	Por ejemplo, ya ahorita estudiamos una situación.
10	E2	Ajá.
11	I4	Que era de consumo de grados-días de un “bichito”.
12	E2	Mmmjmm.
13	I4	Y, por ejemplo, vimos que tiene, tal vez, relación con la integral definida, ¿verdad?, por lo que está diciendo al final.
14	E2	Mmmjmm.
15	I4	Entonces, conociendo esto, ¿cuáles creen que serían como tipos de aplicaciones que me ayudarían a mi para dar significado a la integral

		definida?
16	E2	Ok, como… como decir… como… ¿Cómo decir el contexto donde se pueda aplicar?
17	I4	Si, algo así.
18	E2	Ah ok, eh… Bueno, no conozco muy bien, pero di, tal vez se puede utilizar para, no sé, eh… eh… Di bueno, eso era para cultivos, no sé. Siento que se puede ir también por la parte de economía, no sé; puede haber ahí alguna relación eh… para ver es… O sea, como… como en este contexto que estamos tratando de los cultivos, era como una relación entre horas y… y… y temperatura, entonces ok…; siento que por economía puede ir porque como hay bastantes variables por ahí que se pueden tomar en cuenta, entonces puede haber como una relación y se puede hacer esa relación con la integral; tal vez por ahí.
19	I4	Si. ¿Te acordásemos en la entrevista inicial que vos diste, por ejemplo, aplicaciones, pero tal vez más relacionadas en un contexto matemático?
20	E2	Ajá.
21	I4	¿Verdad? El área bajo la curva, y todo eso; y después de estar haciendo esta situación, ¿Crees que tu “cabecita” como que hizo “click” y se abrió como un abanico más de posibilidades, como para dar significado a la integral definida, o siguen siendo las mismas?
22	E2	Ah sí, claro. Ya sé… Yo solo estaba centrado en eh… que las aplicaciones eran: área bajo la curva, eh… superficies de revolución y etc, ¿verdad?; más en lo matemático, pero ahora que vi esto… lo del cultivo, me pareció bastante interesante, entonces ahora me parece curioso en qué otras áreas se puede aplicar. Y supongo que sí, debería de haber… o sea, supongo que sí debe de haber un montón de áreas donde se pueda aplicar esto de la integral definida.
23	I4	Si. Y, por ejemplo, ah… ¿qué elementos incorporaría para el diseño? Digamos que vas a dar una clase de cálculo, y en ese momento estás en cálculo integral.
24	E2	Mmmjmm.
25	I4	¿Verdad? Y vas a introducir, por primera vez, a la integral definida, entonces uno como profe debe tomar muchas decisiones.
26	E2	Sí.
27	I4	Entonces, ¿qué elementos incorporaría para el diseño y ejecución de una clase donde se estudie por primera vez esa integral definida? Y reflexionando sobre lo que se ha visto.
28	E2	Ajá… Bueno lo… ahora que… es que… bueno, si…, ¿Cómo qué elementos? Eh… la verdad, ahora que como vimos esto del contexto y eso, siento que un problema introductorio contextualizado eh… y donde se vaya

		acercando y defendiendo esto de la integral como esa suma eh… debajo de la curva, etc. Pero obviamente en el contexto donde uno lo especifique o lo plantee; siento que esa sería una buena forma de introducir la integral y luego hacer esa relación ya… Hacer como esa formalización de la integral y…, pero asociándolo con el contexto que uno vio como problema introductorio. Siento que eso sería muy valioso y provechoso.
29	I4	Si. ¿Vos crees que, por ejemplo, uno siempre piensa en integral como área bajo la curva?
30	E2	Ajá…
31	I4	¿Crees que esos fenómenos en donde existen sumas de algo, digamos, como sumas de ahorros o sumas de personas o sumas de ah… líquidos, de flujos, de cantidades? ¿Cree que esos contextos podrían ayudar a la integral definida, para dar como un significado a la integral definida?
32	E2	Yo siento que sí. Es que todo… dependiendo de las variables que se tomen. Por ejemplo, en este caso, como dije, ¿verdad?, se tomó la variable de temperatura y días. Bueno, también temperatura y horas, eh… Si, yo siento que sí, en eso que… o sea, o que en esas sumas en otros contextos, como eso que decía como sumas de ahorros, etc.; yo siento que ahí sí puede haber cómo está parte de la aplicación de la integral definida. O sea, más que todo dependiendo de las variables que estén tomando en cuenta, ¿verdad?
33	I4	Si, porque vos dijiste economía, entonces yo pensé, por ejemplo, mirá si E2 hace un ahorro anual, en enero, digamos que él anota qué fue lo que hizo de ahorro, en febrero qué fue lo que hizo de ahorro, en… marzo, y así sucesivamente; y eso son como tipos "sumitas", ¿verdad? Al final del año, eso… al final está como calculando "rectangulitos", ¿verdad?, por decirlo de esa forma.
34	E2	Ajá.
35	I4	Y eso es parte de… de lo que se hizo, ¿verdad?
36	E2	Ajá.
37	I4	Como lo de los bichos, nada más que con ahorros.
38	E2	Ajá, exacto.
39	I4	Ahorros en meses, por decirlo así.
40	E2	Ajá.
41	I4	Y la última preguntita, que fue I2 que la hizo, pero no la encuentro en el grupo… ¿Puedes recordarla I2?
42	I2	Es básicamente si nos puedes comentar un poco respecto a cómo te sentiste con la situación; en general, todo lo que se trabajó hoy, ¿si nos puedes dar tu opinión al respecto?
43	E2	Mmmjmm. Eh… Di… la verdad me metí… me sentí, mejor dicho, como…

		como muy metido en el contexto, la verdad. Es que… bueno, yo aquí también soy como del campo y también trabajo con esto de cultivos y etc., entonces si me sentí como muy familiarizado con el contexto. Entonces la verdad si me pareció bastante interesante y curioso lo del… ese contexto que se estaba tratando en sí.
44	I4	¿De qué parte del país?
45	E2	Ah, de San Gabriel de Aserrí.
46	I4	Ah mirá. Si es puro campo. Entonces, ¿sí se te hizo como muy a la par el contexto?
47	E2	Ajá, sí. Y he escuchado mucho sobre los ácaros y etc., y todo eso, ¿verdad?, entonces si me pareció como bastante interesante ver ese contexto.
48	I4	¿Y vos sabés si E2 y E1 también son como de campo o son de ciudad? Ah… E2 no, sino el otro, E5.
49	E2	Ajá… E1 y E6 sí sé que son de Barrio Cuba, no son tanto de campo. E5 si no está… o sea, está como entre campo y no campo, está como entre lo urbano y lo rural.
50	I4	Ya, perfecto, era una curiosidad jajaja
51	E2	Jajajaja
52	I4	Está bien. ¿No sé I2 si hay otras preguntitas por hacer?
53	I2	Y, en cuanto a la longitud de la situación, ¿no sé… me gustaría saber si hubo un momento, no sé, como que te quedaste muy pegado y sentías que no podías avanzar?
54	E2	Ah si, eran eh… en la parte de los cálculos, digamos… Yo sí sé, conozco lo de los ácaros, etc., pero no conocía esa parte de grados-días, grados-horas, entonces se me dificultó entender eso y no… Bueno, yo les había comentado ahí en la sesión que… que me había quedado en una parte pegado porque no no sabía qué hacer, digamos. Eh… y era más que todo como… cómo dar solución a esos por medio de cálculos, etc. Eh…, di a las preguntas que se estaban… bueno, las que ustedes pedían, digamos. Eso fue como… lo que se me dificultó más.
55	I4	¿Podrías dar como algunas ah… algunas sugerencias de cómo mejorar la situación? Si tuvieras que llevarla a cabo, ¿qué ah…, qué cambios le harías a la situación?
56	E2	Mmm… Mmm, no sé. La verdad, sentiría que por la parte de… de cómo funcionan grados-días y esto de los… de los cálculos, digamos, que era en esa parte donde calculaban por lapsos de dos horas, creo que ahí, no sé… Yo… no sé, la verdad si se podrá, pero se podría como incorporar alguna simulación o algo por el estilo, no sé; puede ser por ahí, pero no estoy seguro de si eso de verdad sirve, ¿verdad?
57	I4	Sí.

58	E2	Como… como algo que represente ese… esa parte, digamos, y que… Algo así, digamos, podría decirlo, no sé si con eso les ayuda.
59	I4	Sí, perfecto.
60	I2	Ya con eso es más que suficiente, más bien muchísimas gracias.
61	I4	Sí.
62	E2	Ah, con gusto.
63	I4	Y ya para… ya lo último, pues parte de esta investigación es como para darle… el hacer esta situación cómo puede ayudarle a una persona estudiante cambiar el significado de la integral definida, que es lo que se está estudiando. Y entonces ya esta investigación… este diseño se ha aplicado en otros contextos.
64	E2	Mmmjmm.
65	I4	En México y Honduras, entonces queríamos verlo acá, como para ver si también podemos reportar algunos resultados específicos, pero eso es lo que están trabajando las chicas.
66	E2	Ah ok, mmmjmmm. Sí, a mí, en lo personal, la integral me gusta. Bueno, este tema de integrales me gusta demasiado, entonces… entonces sí me parece bastante interesante.
67	I4	Sí. Ya cuando te preguntan si la integral definida se estudia con la acumulación, entonces recuerda este ejemplo, porque (INAUDIBLE) en la acumulación.
68	E2	Sí.

Anexo 13: Transcripción entrevista final E3

1	I3	Entonces, primero, esta va a ser la última pregunta, para que ahí vos me digas todo lo que me quieras decir. Ah bueno aquí está el profe. Profe al final si pude grabar, entonces todo bien, gracias. La primera pregunta va a ser, ¿qué es para usted la integral definida? Después de haber pasado por todo este momento, todas estas actividades que hicimos, para vos qué es la integral definida, si quedó igual a como lo hicimos antes del primer momento, ¿qué es para vos la integral definida?
2	E3	Creo que si me quedo con lo mismo, la verdad. La integral definida es aquella que pues me da un resultado, un número real. Tiene límites, bueno está acotada, eh …, creo que tal vez lo que empezaría a pensar o agregaría un poco ahí es sobre si tengo, que se puede fijar un límite e ir sumando el área hasta llegar a lo que está igualado para poder aproximar el otro valor, pero bueno, eso sería como un tipo de estrategia para saber cuáles son los límites. Pero en sí, la integral definida para mí sigue siendo lo que yo dije anteriormente. O sea es como algo que, ajá, por la experiencia de ahora es algo que escuché bastante decirlo por mis compañeros pero en sí siento que no es parte de la definición.
3	I3	Ah ok. Y esa parte que me dijiste como que se puede fijar un límite, e ir sumando, en una palabra ¿cómo lo podrías definir esa parte?
4	E3	¿Disculpe?
5	I3	Esa parte que me dijiste como que se puede fijar un valor o un límite y luego ir sumando esas áreas, ¿cómo lo podrías resumir en una palabra?
6	E3	Mmm, es que el profe la dice bastante …
7	I3	Pero vos, con tus definiciones, con tus palabras, eso de ir sumando, ¿cómo lo podríamos definir en una palabra? … ¿o no se te ocurre?
8	E3	Di no sé, tal vez aproximar, porque a eso vamos a ir aproximando y llegar al valor del otro. No sé, digo yo aproximar.
9	I3	Ok, ok muy bien. Ahora, la segunda pregunta, ¿qué tipo de aplicaciones consideraría para dar significado a la integral definida?
10	E3	… que difícil. Este, bueno ahora con toda la parte de la situación problema que ustedes nos plantearon pues ahora, claramente está en mi cabeza eso de las plagas y demás. Ahora, sé que se puede resolver bastantes dudas utilizando la integral definida, pero … podría generalizar eso, pero no sé cómo. ¿A eso querías o a eso se refería la pregunta, o no?
11	I3	Sí, como qué aplicaciones en general, consideraría para dar significado a la integral definida, es decir, por ejemplo, que vos vas a dar una clase de integral definida y te toca empezar con ese tema, ¿qué tipo de aplicaciones podrías considerar para ejemplificar o dar significado a la integral definida?
12	E3	… uy la verdad no sé. Di no, seguramente, es que tendría que investigar un poco más. Pero sí, sería, es que no sé cómo decirlo, eh, no no,

		seguramente inicio como con una situación problema parecida a esta. Tal vez que se pueda modelar igual, tal vez, para poder llegar a aproximar bien para ciertas cosas. Por ejemplo, en una parte de la situación de ustedes uno ya podía identificar en qué día ya se estaba saliendo de control y digamos, hacer ese tipo de situaciones, tal vez con algo similar. Sí, seguramente me iría por ahí. Ya seguramente cuando llegue a ser profe de verdad de esto, tenga muchísima más experiencia que ahorita.
13	I3	Ok, ok muy bien. Y ya la tercera pregunta sería más bien como ¿qué elementos aportarías para dar una clase donde se estudia por primera vez la integral definida? Es decir, ya no tanto en aplicaciones sino como qué elementos podrías aportar para dar una clase donde se da por primera vez la integral definida. O sea, ¿qué se puede incorporar en el diseño y en la ejecución? ¿Qué podrías implementar ahí?
14	E3	Bueno, yo me acuerdo que el profesor, bueno no sé, confío mucho en el profe Jonathan con su carrera y experiencia, bueno sus carreras, este … yo también soy muy gráfica. Yo me acuerdo que el profe empezó haciendo puras gráficas y haciendo funciones, explicando en la gráfica, digamos, poniendo el a y el b, cómo se representa algebraicamente. Comenzaría también explicando las notaciones, cómo se leen, creo que eso es inicial. Pero si digamos, más que todo como es el área bajo la curva, comenzaría con gráficas, subrayando el área bajo la curva, si tiene límites, bueno en este caso tiene límites, saber que no se tiene que pasar de aquí, no se tiene que pasar de acá; cómo se puede aproximar, de hecho esto de hacer rectangulitos, entonces hacerlo por arriba, por abajo. Yo me acuerdo que así fue como el profesor inició el tema, y yo supongo que, no es como que está definido qué es lo mejor, pero a mí me sirvió para entenderlo, entonces yo supongo que a mis estudiantes, algunos estudiantes pueda también ayudarles. Puede que haya otras estrategias, este, para que abarque el entendimiento de todos los estudiantes, pero si esa estrategia que utilizó el profe a mí me sirvió, entonces yo supongo que a algunos estudiantes les puede servir.
15	I3	Ok …
16	E3	Obviamente empezar a definir las cosas que se deben definir y dar una explicación con ejemplos sencillos primeros y luego un poco más difíciles y así.
17	I3	Ok, muy bien. Ya por último, quiero que me cuentes como ¿qué consideraste de toda esta implementación? ¿Cómo te sentiste en esta implementación? Si consideras que era como al nivel del curso o un poco menos o un poco más, o algo nada que ver o etc. como qué opinas en general.
18	E3	Los primeros momentos, inclusive donde estuve participando y demás, este, no sé si eran al nivel del curso o menos, la verdad, creo que menos. Estuvo interesante, estuvo interesante ahí la situación. Ya en los otros momentos, a parte de largos, porque sí los consideré largos en cuanto al tiempo que nos estaban dando, el tiempo que nos estaban brindando que eran 10 minutos, bueno creo que ustedes notaron que no era el tiempo correcto, o no eran tantas preguntas, no sé, cuál era el que había que modificar. Pero sí, creo que no sé, no estaba ambiguo, no estaba ambiguo,

		sí se tuvo que haber entendido con lo que ustedes habían puesto y demás, yo supongo que eso lo revisaron de arriba a abajo para poder aplicarlo a nosotros. Sin embargo, si o sea, en mi caso, me encloché muchísimo y ya a mí me pasa mucho como lo que le pasaba a Vane, de hecho yo estaba hablando con ella y me dijo “E3 yo safé”, y yo que pecado verdad. Este, yo no lo hice, sin embargo, o sea si llegó un punto donde dejé de pensar y solamente escuché a mis compañeros hablar. O sea, dejé de razonar yo, porque ya hasta dolor de cabeza me dio, porque yo dije no ya no, y tras de eso tuve el inconveniente de que la computadora se me jodió y tuve que pasarme al celular, tomando las fotos, saliéndome del zoom, entonces fue algo incómodo. E inclusive, en un momento llegó una señora y tuve que atenderla verdad, y eso son otras cosas que son distractores, que yo sé que en este momento yo no debería estar aquí pero bueno, las circunstancias hicieron que estuviera aquí en la tienda. Entonces, eso también me distrajo un montón. Solo fue una señora …
19	I3	Si claro.
20	E3	Solo fue una señora que vino a la tienda, y bueno di imagínate. Entonces sí, yo llegué a un punto en donde solamente escuché el razonamiento de mis compañeros y la verdad, les entendí hasta mucho después de que estaban hablando.
21	I3	Mjm.
22	E3	E inclusive, los últimos dos momentos casi que ahí yo los llevé guiados por mis compañeros. O sea, es mentira que al final hubo razonamiento de mi parte, entonces sí, pero no no, en realidad estuvo interesante la actividad, más bien espero que les haya ayudado bastante todo lo que dijimos, aportamos y les mandamos.
23	I3	Si claro, más bien muchísimas gracias por participar. Ahí también, consideras que como estuvimos en lo virtual, afectó, digamos si hubiéramos hecho esta actividad presencial, ¿sientes que hubiera pasado lo mismo, como que uno se enclocha y ya no quiere participar, o si hubieras estado un poco más atenta o hubieras entendido un poco más? ¿O más bien hubiera sido igual o peor en presencial? ¿Qué opinas?
24	E3	Bueno, siempre hay un factor muy importante en la parte de la virtualidad y es que, eh, estamos, ok, mis compañeros y yo estamos realizando lo mismo, sin embargo, todos estamos en un escenario distinto.
25	I3	Mjm.
26	E3	Entonces, para mí, eso afecta bastante. Por ejemplo, yo estoy en la tienda, eh, puede ser que E1 esté no sé, encerrado en su cuarto de estudio, pero puede ser que E4, esté con el hermanito menor de aquí para allá, entonces eso, bueno yo siento que afecta bastante. Eh, …, por ejemplo que yo esté haciéndolo a mano, tomando foto y demás y que, por ejemplo, Vane esté haciéndolo con su tablet, eso también es una diferencia verdad, yo siento que si estuviéramos en presencial, todos estaríamos en un mismo contexto, en un mismo ambiente y además, con las mismas condiciones.
27	I3	Mjm.

28	E3	Entonces por ahí si se regularía un poco, pero no le voy a decir, que eso sea el 100% de mi frustración, porque también vale lo que yo en ese momento puedo razonar y argumentar y demás. O sea, la parte matemática que yo tengo, por más igual de condiciones que yo tenga con los demás, si yo no lo tengo presente o no lo tengo muy claro, obviamente no voy a lograr mi objetivo y también me voy a frustrar. Entonces, son cosas, o sea, son muchos factores que influyen.
29	I3	Ok, si claro. Bueno, no más bien muchísimas gracias por participar, por estar ahí pendiente aunque yo sé, digamos, uno no se concentra igual en la virtualidad que en la presencialidad, más si ni quiera estás en tu casa y todo, entonces eso cuesta un montón y más bien muchísimas gracias por sacar el tiempo, entonces voy a parar la grabación aquí.

Anexo 14: Transcripción entrevista final E6

1	I4	Vamos a hacerte como una serie de “preguntitas” ya como para finalizar, que nos va a ayudar como también a… a contrarrestar.
2	E6	Ah ok, claro.
3	I4	Nada más que voy a pasar… ¿Estaba I1 en la sala principal?
4	E6	No sé. Creo que no, me parece que no.
5	I4	Ah bueno. Voy a mover a la sala 3 a… Ah no. Ya casi empiezo, nada más voy a mover a la sala 3 a I3 y a I1 a la sala 2. A E1 a la sala 3 y a E4 a la sala 2. Listo. Vamos a ver si entraron. Listo, listo. Entonces E6, te vamos a hacer unas “preguntitas” que vamos a tomar ya para finalizar. Entonces, ¿te acordás que en la entrevista inicial te preguntamos: qué es para usted la integral definida?
6	E6	Sí.
7	I4	Entonces, con lo que desarrollaste, actualmente, no sé si eso cambió un poco, entonces ver, ahorita, ¿qué es para usted la integral definida?
8	E6	Ok, bueno. Así, sinceramente, no pude estar en gran parte al final por ya una situación que tuve. Ya le comenté un poco a I2 por el chat de Telegram, pero lo que pude intuir como quizá la finalidad de la actividad era como que se podía relacionar a esa acumulación que se buscaba hacer, tal vez, como con las sumas para determinar eh… no sé, cuántos grados por días iban a haber en un cierto momento de la semana. Entonces, creo que también aparte de área bajo la curva, que fue como lo que… la forma en la que yo la percibía más antes de este momento si la podría como extender a esta parte de acumular.
9	I4	Sí. ¿Te acordás que en la entrevista inicial nos dijiste, por ejemplo, que habías visto videos en YouTube que se relacionaban con acumulación, pero que no estabas como muy segura?
10	E6	Sí.
11	I4	Ya con esto, ¿como que te da un “poquito” más de ideas?
12	E6	Exactamente. Sí, siento como que lo amplié un poquito más; como que tal vez es como… otra manera de introducirla y no únicamente como: ok, es acumulación, sino que en procesos y también como esa parte de aplicaciones, también se puede este… aplicar este concepto de integral definida.
13	I4	Buenísimo. Y, por ejemplo, ¿qué tipo de aplicaciones consideraría para dar significado a la integral definida? Si es que el “abanico” se abrió un poco más a las aplicaciones que se han visto en el curso o siguen siendo como las

		aplicaciones que se han estado estudiando en el curso.
14	E6	Creo que en ese aspecto si lo veo un poco más restringido, pero no porque… ¿cómo lo explico?, vamos a ver… Como que si me puedo dar una idea intuitiva de cómo se podría utilizar, pero no sé un ejemplo concreto. Entonces si me quedo como más con las ideas más concretas que hemos visto en el curso, pero como que todo esto si da pie a que hayan aplicaciones que sean como aparte de las que son tan propiamente matemáticas.
15	I4	Ah ya, claro. ¿No identificás como otros contextos o algo así que puedan como ayudar a darle como ese uso a la integral?
16	E6	Di, yo supondría que estos… como este tipo de contextos que se relaciona con el paso de días o este… también como de horas o cualquier unidad de tiempo, o incluso, tal vez, como de unidad de volumen, no sé, se me ocurre. Tal vez como acumulación de algún tipo de mililitros en algún medicamento; tal vez como por ahí.
17	I4	Sí. Algo que dijiste ahí esencial es justamente eso, como la acumulación de algo. Entonces, hay fenómenos en donde observas que algo se acumula, pueden ser como contextos que nos ayuden a dar significado a la integral. Se acumula ahorros, se acumula… flujos, se acumula temperatura, se acumula… masas. Todo eso se puede trabajar, es como ver rayitas.
18	E6	Mmmjmmm..
19	I4	Por lapsos de tiempo, como dijiste. Y ya, sólo 2 preguntitas más. ¿Como qué…? Digamos que vas a dar una clase de cálculo integral, ya en MATEM o en la universidad, sea de colegio o universidad; y vas a dar por primera vez la integral definida. Entonces, ¿como qué elementos incorporarías para el diseño y ejecución (INAUDIBLE) de una clase donde se estudie por primera vez la integral definida?
20	E6	Ok, si soy 100% sincera en este momento de mi vida, creo que sí me inclinaría a lo que es área bajo la curva de funciones positivas. Si me enfocaría como directamente en eso.
21	I4	Sí, que es así como lo aprendiste y es aparte.
22	E6	Sí, igual el verano pasado yo fui como de oyente y la profesora con la que fui también dio esa introducción y la forma en la que la dio, también… como que la comprendí muy bien y, ya ahorita, con el profe (INAUDIBLE) ya me pasó igual y fue como… igual que lo comprendí.
23	I4	Buenísimo. Y, por último, dada la situación que se desarrolló ahora, ¿qué modificaciones le harías a la situación, como sugerencias? Si es la longitud, si algunas preguntas no están claras, el tiempo, etc.
24	E6	Ok. Creo que lo principal sería tiempo, creo que las personas que han sido como profesores míos saben que yo soy un poco lenta, la verdad, entonces… y la presión últimamente no la he logrado manejar bien, por situaciones personales. Entonces, ese factor como que sí; yo sabía que tenía 10 minutos y, tal vez, leer todo el contexto y comprenderlo ya me

		tomaba la mitad y ya, ya E6 colapsó jaja. Entonces, eso sería como el principal factor que sí modificaría.
25	I4	Si, en la parte del tiempo, la longitud. ¿Algunas preguntas estaban claras o modificarías como esas preguntas; definitivamente no las entendí y eso fue lo que me hizo como… como… como atrasarme un poquito en el tiempo?
26	E6	Sí, también eso. Creo que fue el… cuarto momento, sí fue el cuarto momento donde no sé si fue como por la presión del tiempo, la verdad, ahorita que ya estoy como más tranquila y tomé como las medidas que tomo cuando entro en este estado. Sí me gustaría como volverlas a leer porque, si le soy sincera, no sabría decirle si fue porque la pregunta yo no la comprendí por redacción o si fue por el estado entro, me impidió poder comprenderla.
27	I4	Claro, buenísimo. Sí, ya eso va a dar insumos como para tomar decisiones, para luego dar sugerencia a futuros rediseños.
28	E6	Perfecto.
29	I4	Bueno, de hecho las… Para concluir, el tema que están estudiando las chicas es la integral definida, pero cómo esta acumulación puede ayudar a darle como… o a brindar a nutrir el significado de la integral definida, no solamente el área bajo la curva.
30	E6	Mmmjmm.
31	I4	Sino que todos los fenómenos en donde se estudia algo que se acumula: gente que se acumula, cantidades de… de bacterias que se acumulan, etc.; ahí está la noción de integral. Como que nos hacen abrir más campos, no solamente lo matemático.
32	E6	Sí.
33	I4	Y, pues, con esta situación quieren determinar si existe como… se nutre ese significado o no, ¿verdad?
34	E6	Ah ok, sí, comprendo. Sí, tal vez, como en las áreas que son más matemáticas, como en las carreras propias de matemática, (INAUDIBLE), mate pura. Si lo vería como importante, la verdad, como ir más allá de esa área bajo la curva. Ya, tal vez, en cursos de servicio, no sé si es porque ahorita tengo una visión un poco limitada, no lo consideraría tanto por el objetivo que tienen estos cursos, ¿me explico? Es como algo más calculero, bases, etc.; pero en los cursos donde sí lo haría es como desarrollar más esta parte formal, sí… sí lo considero importante, como ir más allá de… de esta parte de área bajo la curva.
35	I4	Sí. Si tenés algún familiar que estudia ingeniería, o alguien cercano, si vos le preguntás: ¿cómo trabaja la integral?, a lo mejor no te va a decir, ¿verdad?: “no no, la integral yo nunca la uso” , pero si vos le preguntás: ¿estudias acumulaciones?, ¿acumulas algo?, ¿haces como un estudio donde estudias la acumulación de algo? Ahí si te va a “brincar” y a decir: “bueno, empiezo a estudiar como acumulación de mezclas, o acumulación

		de cargas eléctricas, o acumulación…" Entonces uno dice: "ah mirá, si está usando la integral, pero no como la parte escolar, ¿verdad?, sino con un significado más general"
36	E6	Mmmjmm. sí exacto, como más práctico.
37	I4	Más práctico sí. Como que sí tienen esa parte, lo práctico. ¿No sé I2 si hay algo más que mencionar o alguna preguntita ya como para ir finalizando?
38	I2	No, creo que con eso es más que suficiente. Más bien, muchísimas gracias por colaborarnos.

Anexo 15: Producciones escritas E1

Momento I

martes, 9 de noviembre de 2021 9:37

a) Considero que sí, se puede fijar un valor (digamos el de a) y se puede obtener el valor de b.

$$\int_1^b (2x+1)\,dx = 30$$

$$\Rightarrow 2\int_1^b (x)\,dx + \int_1^b 1\,dx = 30$$

$$\Rightarrow 2\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^b + (b-1) = 30$$

$$\Rightarrow b^2 - 1 + b - 1 = 30$$

$$\Rightarrow b^2 + b - 32 = 0$$

$\hookrightarrow \Delta > 0$, por lo que si hay valor.

b) utilizando los deslizadores encontré que los valores pueden ser $a=3$ y $b=6$.

Al ver la gráfica pensé que tambien se puede aproximar con la formula. del área del trapecio

MOMENTO II: CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

b) Describa cómo construyó la gráfica anterior.

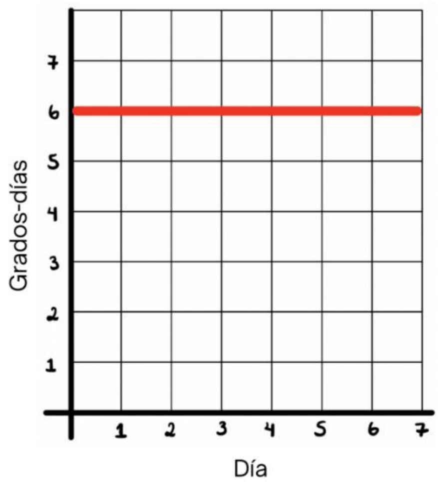
En un inicio no logré comprender la instrucción, luego pense que para saber cuanto había comido en una semana, debía ir sumando lo que consumió por día.

MOMENTO II:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

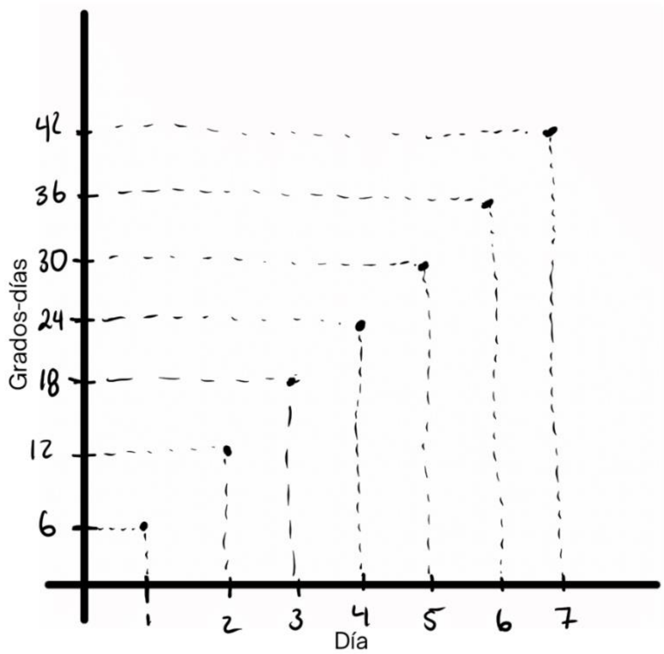
A continuación, se está estudiando el crecimiento del ácaro, el cual requiere consumir una cantidad específica de grados-días en cada etapa de crecimiento.

En este proceso, es necesario tomar medidas preventivas ante el daño que causaría en los cultivos.

En la representación gráfica de la derecha se muestra la cantidad de grados-días que consume el ácaro en cada día.



a) Grafique cuántos grados-días consume el ácaro en una semana.



Dilan Jiménez

NOMBRE

MOMENTO III:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

Para determinar la cantidad de grados-días qué consume el ácaro, la temperatura debe ser mayor a los 13°C. Por lo que para determinar cuántos grados-días consume el ácaro se emplea:

Temperatura ambiente - 13° C

En la siguiente tabla, se muestra una tabla que contiene los datos de las temperaturas pronosticadas para los próximos 4 días.

Temperatura	Día
18°	Lunes
22°	Martes
21°	Miércoles
19°	Jueves

a) Al finalizar los cuatro días, ¿cuántos grados-días consumirá el ácaro?

Se realiza $(18-13)+(22-13)+(21-13)+(19-13)$

$= 28$

lo que hice fue sumar el consumo diario, aplicando la formula dada

05

MOMENTO III:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

b) Se deben tomar medidas preventivas cuando el ácaro consuma 160 grados-días. Si hasta el domingo, el día anterior al lunes que se presenta en la tabla anterior, el ácaro ha consumido 143 grados-días, ¿qué día se deben tomar las medidas preventivas?

Lunes: $143 + (18 - 13) = 148$

Martes: $148 + (22 - 13) = 157$

Miercoles: $157 + (21 - 13) = 165$ → En este día se supera 160, entonces sería el miercoles

c) Si es necesario determinar con mayor precisión la cantidad de grados días que consume el ácaro en el día, ¿qué realizaría para determinar esa precisión?

Se puede tomar un promedio de las temperaturas registradas a lo largo del día, y utilizarlo como una mejor aproximación.

↳ Me genera duda si más bien eso no afectaría el modelo. ¿será que la temperatura es lo único que influye?

06

MOMENTO III:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

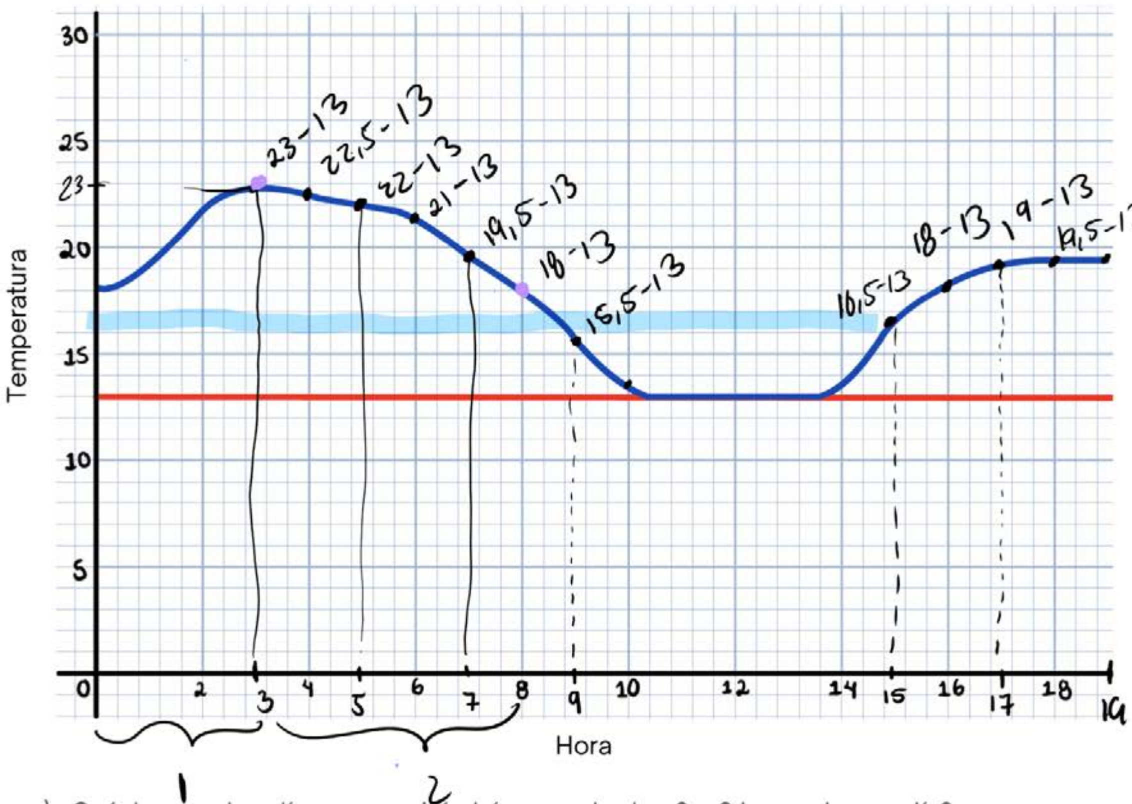
d) Describa las estrategias que le ayudaron a resolver el Momento III.

Un proceso "recursivo(?" de ir sumando a la
a la cantidad anterior el siguiente valor.

07

MOMENTO IV:
CRECIMIENTO DE UN ÁCARO

Las siguientes gráficas muestran el pronóstico de la temperatura ambiente para el **viernes** (azul) y la temperatura mínima para el consumo de grados-días del ácaro (rojo).



a) ¿Cuántos grados-días consumirá el ácaro entre las 0 y 8 horas de ese día?

h	gh
0	18-13=5
2	22-13=9
4	22-13=9
6	21-13=8
8	18-13=5

Sumo total y divido entre 12, pues lo vi cada 2 horas

$$\frac{5+9+9+8+5}{12} = 3$$

entonces serían 3 g-d

09

MOMENTO V:
¿CÓMO INTERPRETO LA INTEGRAL DEFINIDA?

a) Resuelve nuevamente el primer momento empleando las estrategias utilizadas en el Momento II, III y IV.

A partir de la siguiente integral definida, responde las preguntas.

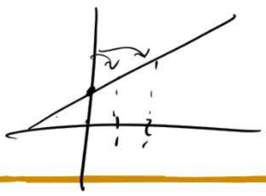
$$\int_a^b (2x+1)dx = 30$$

1) ¿Es posible determinar valores para a y b? Justifique su respuesta.

Sí, se pueden tomar valores iniciales a y b, y luego ir sumando hasta aproximarse al valor 30

2) En caso de que existan, ¿cuáles pueden ser algunos de esos valores?
Para esto, puede utilizar el documento .ggb en el cual podrá manipular deslizadores con el fin de modificar los valores de a y b.

Se puede tomar un valor inicial (o como en el momento 4) e ir sumando los valores de la función en los siguientes puntos para aproximar a 30



Anexo 16: Producciones escritas E2

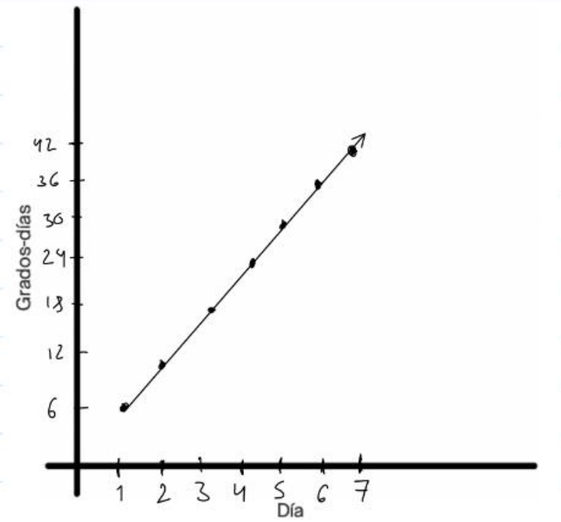
Momento I

a) Sí, puesto que el resultado de la integral es 30, y esto representa un area. Entonces, se pueden establecer límites de integración específicos donde el area sea esa.

b) Uno de esos valores puede ser 14 y 15

Momento II

a)



b) Como el acaro consume 6 grados-días por dia, entonces es acumulativo, por tanto era ir sumando 6

Momento III

a)

$$(18-13)+(22-13)+(21-13)+(19-13) = 5+9+8+6 = 28$$

Al finalizar los cuatro días el ácaro consumió 28 horas-días

b) El miércoles que es cuando el acaro sobrepasa el consumo con 165 grados-días

c) La verdad no entiendo como determinar ese consumo dependiendo de la temperatura, si esta no tiene un patron y cambia constantemente.

Incluso, estuve a punto de proponer la misma fórmula

d)

- Entender el contexto y cómo funciona la fórmula
- Realizar operaciones básicas para determinar el consumo en una cantidad específica de días
- Ver cuando una cantidad sobrepasa otra.

a) Tenemos 18 grados-horas y esta la dividimos entre 3, pues en un día hay 3 bloques de 8 horas.

Entonces, el ácaro consumió 6 grados-días

Lo anterior ya no, entonces me voy por otro camino

Utilizando la fórmula del momento III

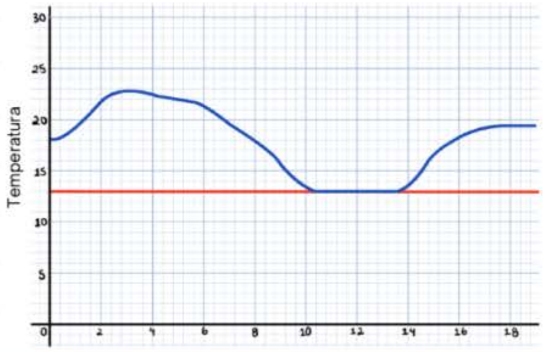
De 0 a 8 horas

$18-13=5$
$22-13=9$
$22{,}5-13=9{,}5$
$21{,}5-13=8{,}5$
$18-13=5$

$\frac{37}{12} \approx 3{,}08$ grados-días

b) Si analizo por un lapso de 1 hora, entonces

Grados-horas
↓
$\frac{48}{24}=2$



c) Necesito que en el viernes el ácaro consuma 4 grados-días

De acuerdo a lo que hemos hecho en conjunto, concluimos que hasta las 19 horas del viernes el ácaro consume 4 grados días

Momento V

a) Sí, se pueden ir tomando valores de a y b e ir observando si se acercan a 30. En relación a los demas momento considero que los grados-dias al final es como el area bajo la curva, osea como lo que consume el ácaro en un intervalo de tiempo.

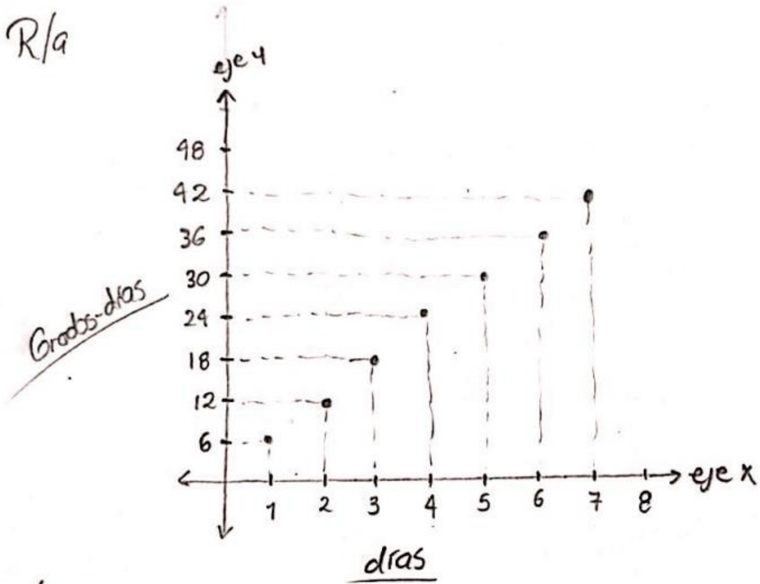
b) En realidad, valores como tal no podría especificarlos. Sin embargo, se podria fijar un valor e ir sumando por lapsos, como lo hacimos con el contexto de los ácaros, para ir así aproximandonos a 30 que es lo que al final queremos.

Anexo 17: Producciones escritas E3

R/a Sí, ya que el resultado de la integrable es un valor real y no una función, por lo que afirma que es una integrable definida y por ende está acotada.
En conclusión, los límites "a" y "b" sí existen y sí se pueden calcular.

R/b Manipulando el GeoGebra, el área bajo la curva "c" toma valor 30, cuando a=0 y b=5.

R/a



R/b Cada día consume 6, por ello el eje y lo realicé con múltiplos de seis, para hacer más sencilla la gráfica al final, se evidencia que al cumplir una semana (7 días) consume 42.

R/a Lunes $18-13=5$
Martes $22-13=9$
Miércoles $21-13=8$
Jueves $19-13=6$
$+$
28

R/ Consumirá 28 grados-días

R/b Domingo 143
Lunes $\xrightarrow{5}$ 148
Mart $\xrightarrow{9}$ 157 $\longrightarrow$ 160
Miérc $\xrightarrow{8}$ 165
Jueves $\xrightarrow{6}$ 171

R/ El día que se debe tomar medidas es el día miércoles, pues es el día donde el ácaro llega a consumir 160.

R/c x : temperatura en el día
Grados-días : Gd
Entonces: $\boxed{Gd = x - 13}$

R/ Realizaría la ecuación anterior.

R/d Para la pregunta "a" simplemente tomé las temperaturas ambiente de los 4 días y a cada una les resté 13, y después sumé los resultados

Para la pregunta "b" comencé con 143 grados-días iniciales y les fuí sumando los resultados pasados para determinar el día en que el ácaro llega a consumir 160 grados días.

Para la pregunta "c" dí como variable x a la temperatura de cada día y con ello creé una ecuación que puede modelar la situación

perdón por la letra tan horrible ¨ |

R/a Longitud del arco

$$\frac{\int_0^8 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{3} = \text{Grados-días}$$

Conversión $\boxed{24 \div 8 = 3}$

Ya noté que esto está mal, pero no entendí cómo hacerlo bien

R/b

$$\frac{\int_3^8 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{4,8} = \text{Grados-días}$$

Conversión $\boxed{24 \div 5 = 4,8}$

R/c Momento III inciso "a" R/ al finalizar consumirá 28 grados días (L-J) $\boxed{32-28=4}$

28gd + 4 gd del viernes = 32 gd

Escuchando la explicación de Dilan

R/b

$23-13 = 10$
$22,5-13 = 9,5$
$22-13 = 9$
$21-13 = 8$
$19,5-13 = 6,5$
$18-13 = 5$
$+$ 48

Conversión

$$\frac{48}{24} = 2$$

R/a

horas

$0 \rightarrow 18-13 = 5$
$1 \rightarrow 19-13 = 6$
$2 \rightarrow 22-13 = 9$
$3 \rightarrow 23-13 \quad 10$

30

Conversión.

$$\frac{30}{24} = 1,25$$

R/ $1,25 + 2 = 2,25$ → Tengo dudas de esto.

R/c Siguiendo el razonamiento de lo que estaba pensando anteriormente

4gd del viernes son 8 horas de ese día

8-9 0,1
15-16 0,3
17-19 0,79

Perdón por no seguirlo, me encloché feísim

Anexo 18: Producciones escritas E4

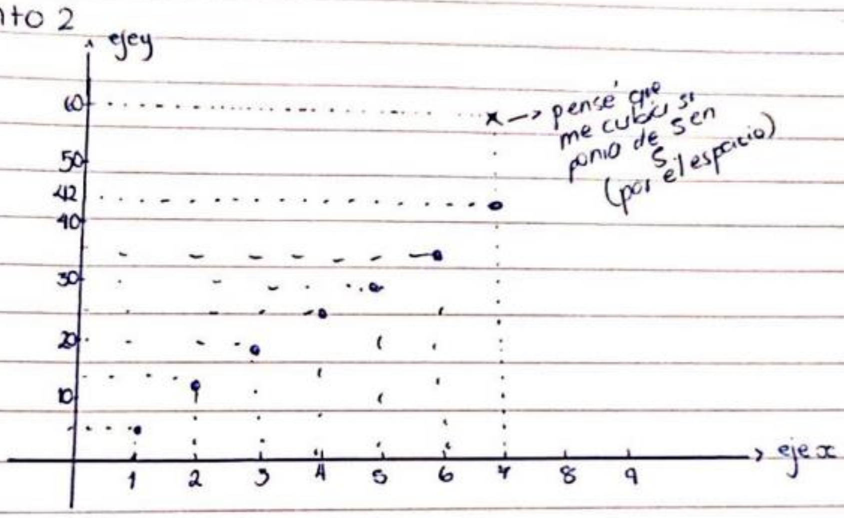
Momento 1.

a. Si es posible, como nos dan la integral con su resultado hay que resolverla y antes de evaluarla usar a y b, luego con trabajo algebraico se obtienen esos valores. Una forma es tomar a = 0.

b. Si a = 0 y b = 5 según el Geogebra.

Momento 2

a)



b) Guiándome con el gráfico vi que por un día crecía 6. entonces 1 → 6 2 → 12 y así sucesivamente, entonces en el plano puse los puntos

Momento III

grados-días no tiene símbolo

a) Lunes 18° entonces el lunes consume $18° - 13° = 5°$
Martes 22° entonces el martes consume $22° - 13° = 9°$
Miércoles 21° entonces el miércoles consume $21° - 13° = 8°$
Jueves 19° entonces el jueves consume $19° - 13° = 6°$

Ahora sumando nos da 28° en esos 4 días,
Ahora lo que me surge duda es que en lo anterior se dijo que en 4 días consumía 24°?

b) Domingo 143° grados-días.

$$\begin{array}{lr} & 143 \\ \text{Lunes} + & 5 \\ \hline & 148 \\ \text{Martes} + & 9 \\ \hline & 157 \\ \text{Miércoles} + & 8 \\ \hline & 166 \end{array}$$

166 -> se pasa de 160.

Entonces deben tomarse medidas preventivas entre los días martes y Miércoles

c) Tal vez estudiando la temperatura promedio de la zona donde se produce el ácaro, en la tabla anterior oscila entre 18° y 22°, pero son muy pocos días, entonces si fuera el caso que se estudie 1 año, o 2 años para observar esos cambios de temperatura y generalizar la temperatura entre algunos meses o épocas del lugar.
Otra sugerencia es que en lugar de generalizar una temperatura es tomar un intervalo de temperaturas ideales ~~[illegible]~~ por ejemplo, entre los 18° y 22°.

d) Sumas en a), b)
Adentrarme en el contexto c).

Momento 4

a) [0, 2] horas temperatura 22° y 22° - 13° = 9
[2, 4] horas temperatura 23° y 23° - 13° = 10
[4, 6] horas temperatura 22° y 22° - 13° = 9
[6, 8] horas temperatura 19° y 19° - 13° = 6
34 grados-h

4 bloques de 2 horas entonces divido
34 GH ÷ 12 = $2{,}8\overline{3}$
entonces consumirá $2{,}8\overline{3}$

hora 0	18°	5
hora 1	19°	6
hora 2	22°	9
hora 3	23°	10
hora 4	23.5°	10.5
hora 5	22°	9
hora 6	21°	8
hora 7	19.5°	6,5
hora 8	18°	5

69 ÷ 24 = 2,875

b)

hora 3	23°	10
hora 4	23.5°	10.5
hora 5	22°	9
hora 6	21°	8
hora 7	19,5°	6,5
hora 8	18°	5

49 ÷ 24 = 2,04

Anexo 19: Producciones escritas E5

Momento 1

martes, 9 de noviembre de 2021 09:41

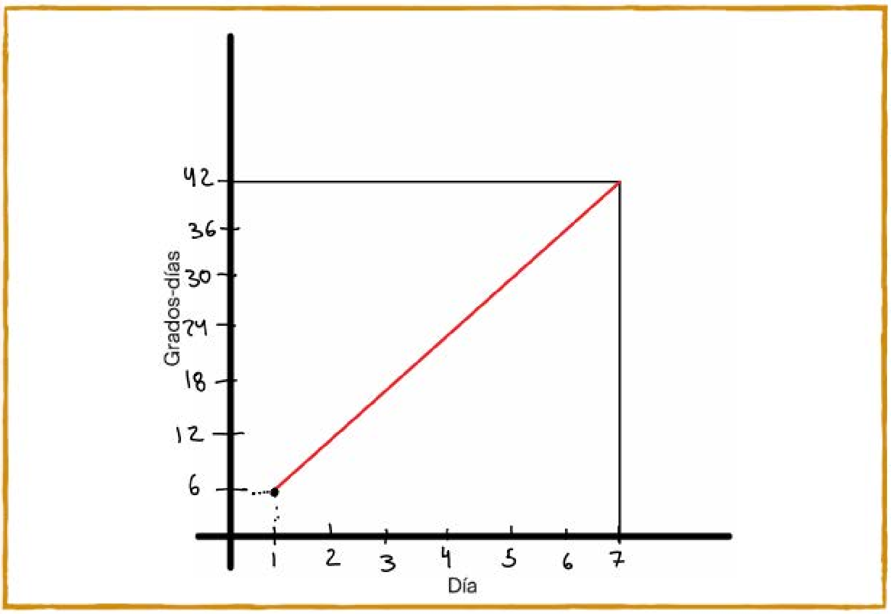
a) Sí, considero que puedo determinar los valores integrando, encontrando la expresión y entonces evaluando los extremos, tal vez fijando alguno de los dos intervalos de integración, y por último igualando a 30.

b) Lo que observo al manipular los valores de a y b es que en caso de que ambos valores sean negativos, el valor nunca va a dar positivo. Por lo anterior considero que el valor de b debe ser positivo.

Momento 2

martes, 9 de noviembre de 2021 10:07

a)



b) La verdad me costó entender al inicio qué debía graficar, ya que en un inicio creí que tenía que colocar las semanas en el eje x. Luego, imaginé que debía graficar la cantidad de grados-días acumulados a lo largo de la semana.

Momento 3

martes, 9 de noviembre de 2021 10:31

a) Lunes : $18-13=5$
Martes : $22-13=9$
Miércoles : $21-13=8$
Jueves $19-13=6$

$5+9+8+6=28$

Al finalizar los 4 días el ácaro consumió 28 grados-días.

b) $143+5=148$ Lunes
$148+9=157$ Martes

Se deben tomar medidas preventivas el miércoles, cuando pasa de 160 grados-días.

c) Tal vez estudiar la cantidad de grados-días no hasta finalizar el día, más bien considerando por ejemplo una medición al medio día, y así hasta que se pueda hacer por ejemplo cada hora.

d) (Perdón no la ví)
Primeramente, sustituir los datos en la parte a)

Utilicé en la parte b) los datos de la a), y así ir sumando cada día el acumulado de grados-días.

Para la parte c) me dí cuenta de que el miércoles se tienen 165 días, por lo que sentí que el proceso por día no era tan efectivo, y entonces podríamos buscar el momento exacto del día donde sea 160 grados-días. Por esto, considero que es mejor medir de manera segmentada.

Momento 4

martes, 9 de noviembre de 2021 10:42

a) Consumo hasta hora 8.

Temperatura en hora 8: 18

Consumo en hora 8: $18-13=5$

Temperatura grados-días: $\frac{5}{3}$, pues hay 3 bloques de 8 horas en un día.

b) de 3 a 8 horas:

Consumo hora 8: 5

Intervalo de horas considerado: 5 horas

hay $\frac{24}{5}$ bloques de 5 horas en un día (no estoy muy seguro de esto).

Entonces c) consumo grados días es de: $\frac{5}{\frac{24}{5}} = \frac{25}{24} \approx 1,042$

(Ahora es 2)

c) Lunes : $18-13=5$

Martes : $22-13=9$

Miércoles : $21-13=8$

Jueves $19-13=6$

Buscamos 32 grados días

Hasta el jueves tenemos 28 grados días.

Sumo cada 2 horas la temperatura. Voy a tomar la temperatura más alta.

De 0 a 2 : Temperatura máxima: 22

Consumo : $22-13=9$

Consumo grados- días: $\frac{9}{12}$

- hasta hora 2, total: $28+\frac{9}{12}=28,75$

De 2 a 4 : Temp. máxima : 23

$23-13=10$

grados-días: $\frac{10}{12}$ $\Rightarrow$ Temp. total: $20+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}\approx 29,59$

Con los nuevos resultados tenemos:

Hasta hora 8, tenemos un total de

31 grados-días.

De 8 a 9 tengo $\frac{15,5-13}{24}=0,1$ Total 31,1

De 14 a 15 y de 15 a 16 :

$\frac{16,8-13+18-13}{24}=0,3$ $\Rightarrow$ Total 31,4

De 16 a 18 aporta 0,52 $\Rightarrow$ Total 31,92

De 18 a 19 aporta 0,79 $\Rightarrow$ Total ~~31,92~~

$\Rightarrow$ Total: 32,71

Momento 5

1) Sí, podemos fijar nuevamente el valor de a, e ir sumando valores hasta un punto b variando, hasta llegar a aproximadamente 30.

2) En este caso, al inicio consideré que los valores de a no podían ser negativos, pero luego considero que esto nos dá el inicio donde comenzamos a medir, y b hasta donde dejar de calcular o de sumar área.

Lo importante creo que es saber hasta donde parar de considerar valores, es decir comenzar desde un valor a y sumar áreas hasta alcanzar 30, así podemos determinar b.

Anexo 20: Producciones escritas E6

A partir de la siguiente integral definida, responde las preguntas.

$$\int_a^b (2x+1)dx = 30$$

a) ¿Es posible determinar valores para a y b? Justifique su respuesta.

Lo primero que pienso es que sí se pueden determinar valores para a y b tales que se cumpla la igualdad, pero que estos no son únicos. Por ejemplo, si tomo $a=0$ se tiene:

$$2\cdot\int_0^b x\,dx + \int_0^b 1dx = 30 \Rightarrow 2\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^b + x\Big|_0^b = 30$$

$$\Rightarrow b^2 - 0^2 + b - 0 = 30$$

$$\Rightarrow b^2 + b = 30$$

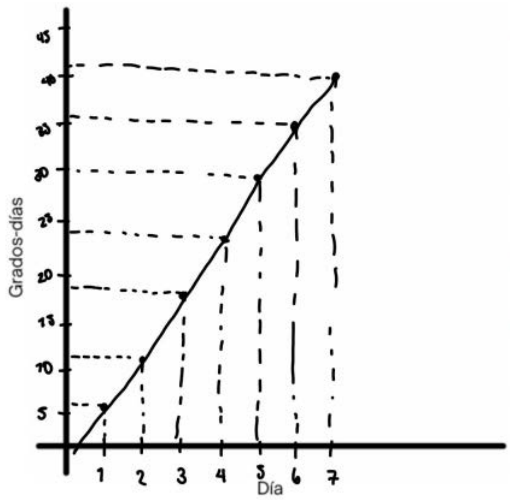
$$\Rightarrow b^2 + b - 30 = 0$$

$$\begin{matrix} b & 6 \\ b & -5 \end{matrix}$$

en este caso se tiene que $\Delta > 0$ entonces habrían dos valores para b tales que se cumple la igualdad ($b=-6 \wedge b=5$)

Entonces fijando uno de los valores se puede determinar el otro

En este punto vi la pregunta 2 y noté que también lo contesté en la primera pregunta. Me gustó poder verlo con Geogebra.



b) Describa cómo construyó la gráfica anterior.

Para el primer día sólo consumió 6 g-d, para el segundo día ya habrá consumido los 6 g-d del día anterior y en este mismo día consumió otros 6 g-d por lo que para el 2do día habrá consumido 12 g-d y así sucesivamente

Temperatura	Día
18°	Lunes
22°	Martes
21°	Miércoles
19°	Jueves

a) Al finalizar los cuatro días, ¿cuántos grados-días consumirá el ácaro?

g-d Lunes : 18 - 13 = 5

g-d Martes : 22 - 13 = 9

g-d Mcoles : 21 - 13 = 8

g-d Jueves : 19 - 13 = 6

Finalizados los 4 días : 5 + 9 + 8 + 6 = 28 → consumiría 28 g-d

b) Se deben tomar medidas preventivas cuando el ácaro consuma 160 grados-días. Si hasta el domingo, el día anterior al lunes que se presenta en la tabla anterior, el ácaro ha consumido 143 grados-días, ¿qué día se deben tomar las medidas preventivas?

143 + 5 + 9 + 8 = 165

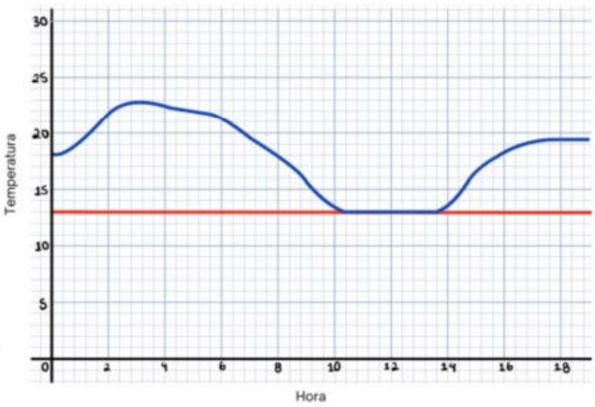
↳ habría que tomar medidas antes del miércoles

c) Si es necesario determinar con mayor precisión la cantidad de grados días que consume el ácaro en el día, ¿qué realizaría para determinar esa precisión?

Tomar la temperatura en diferentes momentos del día

d) Describa las estrategias que le ayudaron a resolver el Momento III.

Calcular sumas



a) ¿Cuántos grados-días consumirá el ácaro entre las 0 y 8 horas de ese día?

g-h entre 0 y 8 horas : $\frac{18-13}{3} = \frac{5}{3}$

b) ¿Cuántos grados-días consumirá el ácaro entre las 3 y 8 horas de ese día?

g-h entre 3 y 8 horas :

* últimamente cuando quedo en blanco se me es imposible continuar y necesito darme una pausa para seguir (consecuencias psicológicas de la pandemia). Entonces por más que mis compañerxs comentan o explican algo se me hace imposible concentrarme y comprender.

Las disculpas del caso por no continuar, ya que podría copiar lo que mis compañerxs proyectaron pero sería una transcripción sin sentido para mí.

Si puedo ayudar en otro momento estoy en completa disposición.

c) Considerando el resultado del Momento III, inciso a) y la información de la gráfica ¿cuántas horas tendrán que pasar para que el ácaro consume 32 grados-días?