Universidad de Costa Rica

Sede de Occidente

Departamento de Ciencias Naturales

Sección de Matemática

Proyecto para optar por el grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Significado que manifiestan estudiantes de primer año de la carrera Enseñanza de la Matemática sobre el tema de razones trigonométricas

Priscilla Angulo Chaves

Javier Picado Bermúdez

2022

Proyecto Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Significado que manifiestan estudiantes de primer año de la carrera Enseñanza de la Matemática sobre el tema de razones trigonométricas

Jesús Rodríguez R.

Máster Jesús Rodríguez Rodríguez

Presidente del tribunal

Licda. Wendy Araya Benavides

Miembro del tribunal

Dra. María Fernanda Vargas González

Directora del trabajo

Héctor MBG

Dr. Héctor Barrantes González

Lector

BARS

Máster Bolívar Ramírez Santamaría

Lector

Priscilla María Angulo Chaves

Sustentante

Javier Abdénago Picado Bermúdez

Sustentante

Dedicatoria

Priscilla Angulo Chaves

A mi familia, quienes me han motivado y apoyado en mi desarrollo personal y profesional. A mis profesores, por inspirarme y enseñarme tanto a largo de mi formación académica. A mis amigos, por acompañarme en tantos momentos que han marcado mi vida.

Javier Picado Bermúdez

A mi padre y a mi madre, que siempre me apoyaron. A mis hermanos y hermanas, que fueron un pilar fundamental. A los docentes que me motivaron siempre. A mis amigos, que me hicieron amar el proceso.

Agradecimientos

Después de dos años de dedicación, esfuerzo y tiempo, logramos una meta que anhelábamos, aunque este proyecto se viene gestando desde los inicios de nuestra carrera académica. Durante este tiempo tuvimos el apoyo de diferentes personas e instituciones que nos brindaron herramientas y conocimientos para ser mejores cada día.

Agradecemos a la Universidad de Costa Rica por brindarnos la oportunidad, el espacio y el desarrollo curricular para lograr convertirnos en grandes profesionales; a los docentes que nos acompañaron en nuestro andar y nos brindaron grandes lecciones, varias de ellas fuera del ámbito académico.

Queremos dar un agradecimiento especial a nuestra directora María Fernanda que nos brindó su tiempo y sabiduría para desarrollar el proyecto de la mejor manera posible, gracias por toda la paciencia y motivación en este proceso.

Agradecemos a nuestras familias, quienes fueron un pilar fundamental para no quebrantar nuestra entrega y entusiasmo en búsqueda de nuestros objetivos académicos y de vida; a esos grandísimos amigos y colegas que hicieron que el sendero fuera más disfrutable y enriquecedor. Por último, pero no menos importante, agradecemos a todas aquellas personas que, de una u otra manera, nos brindaron su ayuda y nos acompañaron en algún momento de nuestra carrera para poder concluir con este escalón académico.

Tabla de contenidos

Introducción

Para hablar de Trigonometría hay que hacer mención a las múltiples conexiones que tiene esta con otras áreas matemáticas e incluso otras disciplinas, esto le permite poseer un amplio valor conceptual; además, en torno a ella se desarrollan una gama de aplicaciones prácticas en las ciencias y tecnologías. Sin embargo, como explican Martín-Fernández et al. (2016)[1], esta riqueza de conexiones, hacen de la Trigonometría un contenido que suele resultar confuso y difícil de entender para algunos estudiantes[2].

Por tanto, el presente trabajo pretende realizar un análisis del significado manifestado por estudiantes sobre el contenido de razones trigonométricas. Para ello se ha organizado la información de cinco capítulos. En el primer capítulo, se plantea el problema de investigación considerando que las deficiencias en cuanto al significado de razones trigonométricas son una problemática nacional en el ámbito educativo que requiere una investigación teórico-práctica. Con el fin de proponer una posible solución, se realiza este trabajo en la modalidad de Proyecto de Graduación, abordando la situación desde un objetivo general que corresponde a analizar el significado que expresan los estudiantes de primer ingreso a la carrera de Enseñanza de la Matemática en la Universidad de Costa Rica (UCR) en la sede de Occidente, sobre el contenido razones trigonométricas. Para dicho fin, se establecieron tres objetivos específicos, que permitieron identificar diferentes percepciones de los estudiantes en cuestiones del significado.

[1] Para citas y referencias se han utilizado las normas APA en su séptima edición (American Psychological Association, 2020).

[2] En este trabajo se utiliza de manera inclusiva expresiones como "los estudiantes", "los profesores", entre otros; para referirse a personas de cualquier género. Esto con el fin evitar una saturación visual y facilitar la lectura del documento.

Para el segundo capítulo se desarrolla el marco teórico, el cual se divide en tres subapartados. El primero lleva como título: Significado de un contenido en la Enseñanza de la Matemática; se desarrolla la línea teórica basada en las investigaciones realizadas por los doctores Rico y Moreno (2016) y colaboradores, las cuales convergen a la idea de que el análisis y estudio del significado de un contenido matemático escolar se realiza mediante una terna semántica (también llamado triángulo semántico), la cual está compuesta por la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso de un contenido matemático. El segundo de estos subapartados, se centra en la importancia que toma el significado en la planificación curricular, mientras que el último de ellos, explica el significado, pero centrado en las razones trigonométricas.

Basados en dicho marco teórico, se estableció una metodología para alcanzar los objetivos propuestos. Por tanto, en el tercer capítulo se aborda el marco metodológico; se detalla que la investigación se abordó desde un enfoque cualitativo y se recabó información por medio de un cuestionario semántico que permitió analizar el significado que manifiestan los estudiantes respecto a las razones trigonométricas, además de la propuesta de una estrategia de intervención. Este capítulo cierra con la descripción de la intervención educativa y la interacción de los estudiantes en las cuatro clases que se realizaron.

En el cuarto capítulo se presenta la discusión de los resultados; se presenta una descripción y análisis de cada una de las preguntas de un primer cuestionario. También, se describe, detalla y explica lo recolectado en cada una de las preguntas de un segundo cuestionario.

Por último, en el quinto capítulo se establecen las conclusiones del trabajo, se mencionan los aportes de la investigación, así como recomendaciones para futuros proyectos. Además, se mencionan algunas limitaciones presentes en el proceso.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

Este capítulo inicia justificando la importancia y alcance del tema por investigar; se comentan los antecedentes existentes tanto en el ámbito nacional como internacional, esto con el fin de conocer el alcance y las líneas de investigación que han surgido alrededor del tema en cuestión. A partir de esto, se realiza el planteamiento del problema y se definen los objetivos que se pretenden alcanzar.

1.1 Justificación

La Trigonometría es un área de la Matemática que posee valor conceptual y tiene múltiples conexiones con diversas áreas de la ciencia, como lo son el álgebra, la variable compleja, el análisis armónico, la aritmética y la geometría. Además, posee una amplia gama de aplicaciones prácticas en las ciencias y tecnologías, entre las cuales se encuentran la topografía, las telecomunicaciones, la aeronáutica, la computación, electrónica y óptica. Sin embargo, es un área que se suele dejar de lado en la secundaria, ya que se subestima su importancia (Aray et al., 2020), lo cual trae repercusiones, principalmente para los estudiantes que realizarán estudios universitarios donde recibirán cursos de Matemática que requieran un conocimiento básico de Trigonometría.

Por otra parte, la Trigonometría suele resultar confusa y difícil de entender para los estudiantes (Martín-Fernández et al., 2016); es común que ocurran errores debido a la utilización de formas poco apropiadas para aproximarse a la disciplina, así como el uso incorrecto de conceptos básicos o explicaciones deficientes de los significados. Estos autores, también mencionan que existe poca investigación cuyo objetivo sea conocer las dificultades que presentan los estudiantes en Trigonometría y plantear soluciones para mejorar la enseñanza de este tema.

Similarmente, Fiallo-Leal (2010) menciona que varios autores han determinado que la Trigonometría en el plano cartesiano es un tema complicado y, a pesar de ello, existen pocos estudios que investiguen cuáles son las causas de dichas dificultades. También explica que existen varios factores que interfieren en este proceso, uno de ellos es que la Trigonometría posee interconexiones con temas muy variados, por tanto, los estudiantes deben adaptarse a las definiciones de las razones trigonométricas de acuerdo con el contexto. Además, el mismo autor señala que se presentan otras situaciones y aspectos que afectan la comprensión de las razones trigonométricas tales como: los conceptos débiles, la poca comprensión de la unidad en el círculo trigonométrico (también llamado círculo unitario), la errónea interpretación de los gráficos, las deficiencias en la comprensión de Seno y Coseno como coordenadas cartesianas y la dificultad que suele derivar en errores a la hora de asignar el signo correspondiente de seno y coseno en ángulos mayores a 90°.

Asimismo, Diéguez et al. (2019) explican que, si los estudiantes utilizan procesos memorísticos repitiendo razones e identidades y no se les atribuye un significado bien fundamentado, entonces no se genera un aprendizaje significativo, propiciando que se olvide con facilidad. También, como señala Thompson (2013), si los docentes continúan planteándose como objetivo principal el que sus estudiantes aprendan y efectúen algoritmos matemáticos, las cuestiones relativas al significado pasan a un segundo plano. Es decir, los docentes matemáticos tendrán estudiantes con problemas sobre la comprensión y uso de problemas de significado que no impliquen la utilización de pruebas o demostraciones. Pero, si se persigue una educación que forme estudiantes capaces de pensar en soluciones creativas y en contextos fuera de la escuela, el significado pasa a ser fundamental en el logro de estas habilidades.

Por ello, es importante el abordaje de significados en el aula; Rico (2012) plantea que la construcción de significados en el aula debe abordarse desde tres perspectivas; (1) el profesor comienza considerando diferentes representaciones de un mismo contenido, (2) se analiza sus propiedades y las relaciones que establece con aquellos que pertenecen a la misma estructura y (3) examina las diferentes referencias, fenómenos, sentidos y modos de uso que están en su origen, de los cuales procede.

La importancia que tiene la construcción de significados, demanda la investigación de este, desde diferentes aristas, además del significado que los contenidos matemáticos tienen, así como las diferentes manipulaciones y usos que el estudiantado les pueda dar. También resulta importante el significado para el profesor, más aún para aquellos que se encuentran en formación pues esto permite la toma oportuna de decisiones en cuanto a la preparación que reciben; y aunque el enfoque de esta investigación no es prioritariamente el estudio de esta población, pues apenas están iniciando la carrera, es de gran relevancia indicar algunos aspectos relacionados con este hecho. Benítez-Galindo (2016) menciona que, cuando se está investigando la práctica docente, se suelen encontrar diferentes problemas que se evidencian en el quehacer del profesorado, lo que los lleva a plasmar esas deficiencias en sus estudiantes, por lo que, es necesario realizar y aplicar un plan de intervención, con el fin de propiciar un desarrollo por parte de los docentes en habilidades como la reflexión, el análisis y el cuestionamiento de la práctica educativa.

El hecho de que esta investigación se lleve a cabo con estudiantes en formación docente, podría tener un impacto en ellos como futuros educadores, por tanto, resulta necesaria una intervención educativa para lograr un acercamiento a la mejora de, en este caso, un contenido matemático, propiciando en estos futuros docentes, un desarrollo e interpretación adecuado para su posterior enseñanza.

Thompson (2013) complementa la idea anterior, ya que plantea que es importante invertir esfuerzos en preparar a los profesores y demás profesionales en áreas educativas en materia de significado. Si se desea que los estudiantes comprendan correctamente los conceptos e ideas detrás de la Matemática, es lógico pensar que los primeros que deben estar bien preparados son los educadores. Siguiendo estas ideas, el presente trabajo se centra en el significado que manifiestan los docentes de Matemática en formación, sobre las razones trigonométricas. También, este autor expresa que los entornos de aprendizaje en donde se deja de lado el significado de los contenidos matemáticos no son tan útiles para lograr los propósitos de diseño curricular y preparación de maestros, como los contextos en los cuales sí se toma en cuenta.

Sumado a lo anterior, Thompson (2013) sostiene que esto ocurre, principalmente, debido a que la mayor cantidad de esfuerzos que los docentes aportan al trabajo con los estudiantes, ocurre en momentos donde los alumnos no poseen conocimientos referentes al significado y se espera que adquieran estos conocimientos más adelante; rescata la idea planteada por Dewey (1910) cuando manifiesta que, si el significado de un contenido matemático no se encuentra claro o es muy vago, esto conduce a errores y malentendidos. Además, cuando los significados son confusos, no son lo suficientemente firmes para que el estudiante se apoye en ellos y desarrolle análisis y reflexión.

Por estas razones, se considera pertinente realizar una investigación con estudiantes de primer ingreso de la carrera de Enseñanza de la Matemática, en la Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica, es decir, estudiantes que se empiezan a formar para llegar a ser docentes; el trabajo se enfoca en el área de Trigonometría, con el fin de analizar el significado que les dan los estudiantes a las razones trigonométricas, para poder establecer un precedente sobre investigación relacionada al tema de la Trigonometría en Costa Rica, posterior a la reforma educativa de los programas de estudio en Matemática del 2012.

1.2 Antecedentes

En este apartado se presentan resultados de diferentes investigaciones previas que abordan el tema de significados y Trigonometría, desde diferentes perspectivas o lineamientos teóricos. Se incorporan investigaciones relacionadas con la Trigonometría en el proceso de enseñanza y aprendizaje, además de otras que brindan un abordaje y estudio del significado de un objeto matemático, haciendo énfasis en el significado de la Trigonometría.

1.2.1 Trigonometría en la Enseñanza de la Matemática

A nivel nacional, el estudio de la Trigonometría en el ámbito escolar, se centra en propuestas o elaboraciones de estrategias didácticas. Por ejemplo, Rodríguez (2017) diseñó una unidad didáctica apoyada en Geogebra y el modelo de Van Hiele, el cual analizó desde los niveles descriptivos de reconocimiento, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor, cada una de ellas relacionadas con un proceso matemático; bajo las fases de aprendizaje resumidas o categorizadas en: información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración, esto para la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas. Explica que los procesos de aula en este tema, se han vuelto muy rutinarios y estructurados, por lo que, decidieron hacer uso de la tecnología para desarrollar actividades pertinentes que contribuyan en el estudiantado un aprendizaje significativo. Los resultados de la investigación mostraron que la unidad didáctica "incentivó los procesos matemáticos de razonar y argumentar, comunicar, conectar y representar propuestos por el MEP" (Rodríguez, 2017, p. 64).

Por otra parte, Braddock-Stradtmann (2020) brindó nuevas fórmulas para abordar las funciones Seno y Coseno, a las que denominó *Fórmulas de Trigonometría Áurea*. El objetivo fue plantear diferentes fórmulas que permitieran "calcular el valor de las funciones trigonométricas seno y coseno, evaluadas en ciertos ángulos, expresadas en función del número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y de una nueva constante, relacionada con φ (fi), que se definió y llamamos β (beta)" (p. 2). La construcción de las fórmulas se realizó con métodos similares a los utilizados por el astrónomo Ptolomeo. El estudio concluye que la utilización de estas propiedades facilitó varios pasos algebraicos y que se logró un "avance significativo en esa poco explorada rama de la Matemática conocida como *Trigonometría Áurea*" (p. 23).

Ahora bien, a nivel internacional existen investigaciones que buscan abordar aspectos de la Trigonometría en el ambiente de aula. Naranjo-Triana y Triana-Tobar (2015) mostraron la importancia de realizar una indagación en el aula real para identificar diferentes factores que afectan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Abordaron el tema de razones trigonométricas, proponiendo un método de enseñanza donde el estudiante "tome un papel más activo a través del trabajo experimental, con la ayuda de GeoGebra, para que logre descubrir y comprender conceptos matemáticos" (p.67). Explicaron que la enseñanza de la Trigonometría se centra en la utilización de algoritmos y la aplicación de fórmulas y que, por ende, es necesario la incorporación de nuevas estrategias de enseñanza, donde las TICs (Tecnologías de la información y la comunicación) juegan un papel crucial.

Vilchez y Ramón (2017) implementaron una estrategia didáctica basada en el uso de tecnologías y personalizada a las necesidades de un grupo de estudiantes, en busca de solventar problemas encontrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema de funciones trigonométricas. Decidieron realizar la propuesta didáctica, ya que mencionan que existe necesidad de buscar nuevas formas de enseñanza para lograr un aprendizaje significativo, pues los estudiantes evidencian dificultades en aspectos básicos de las funciones trigonométricas y, además, explican que:

> La mayoría de los docentes inician el estudio de las funciones trigonométricas, en forma algorítmica, como razón entre los lados de un triángulo rectángulo, con escaso análisis de sus propiedades; no utilizan textos actualizados del nivel medio y superior para reforzar sus conocimientos; no hacen uso de conocimientos previos para abordar el tema, tampoco propician estrategias de aprendizaje activo, en la etapa de fijación de tareas propician aprendizajes colaborativos; también utilizan en forma esporádica las TICs para dinamizar el aprendizaje. (p. 2)

Finalmente, Aray et al. (2020) expusieron la superficialidad que existe en la enseñanza de la Trigonometría en la educación secundaria, lo que ha provocado vacíos importantes en la construcción del conocimiento por parte del estudiantado. Por tanto, explicaron que, la intención de su investigación era especificar cómo se puede ayudar a que los alumnos logren comprender mejor los elementos básicos de la Trigonometría. Así, pretendían propiciar en los estudiantes un pensamiento crítico, para que pudieran "comprender el alcance y las limitaciones que puede tener un determinado concepto, pero también los procesos de abstracción que se ponen en juego en procura de generalizar el concepto o alguna de sus propiedades" (p. 63).

1.2.2 El significado de los contenidos matemáticos

A nivel nacional, se presentan un par de investigaciones que indagan sobre el significado de un contenido matemático llevándolo a un contexto de aula, ambas basadas en la teoría desarrollada por Luis Rico en las últimas dos décadas. Castillo-Céspedes et al. (2017) lo abordaron desde el tema del Teorema de Pitágoras, proponiendo un estudio de casos a un grupo de docentes de Matemática. Para el análisis del significado se basaron en Rico (1997) quien lo identifica a partir de su estructura conceptual, sistemas de representación y su fenomenología; explican que se centraron primordialmente en la fenomenología o modos de uso. Los autores concluyeron que, cuando se incorpore como contenido escolar, el abordaje del Teorema de Pitágoras "debe enfatizar su aplicabilidad *real* en distintas y diversas situaciones de la cotidianeidad, de manera que se consideren una mayor variedad de contextos y se explicite la riqueza conceptual que engloba este teorema en las Matemáticas escolares" (p. 108).

González-Flores et al. (2020) investigaron en un grupo de estudiantes universitarios, el significado del concepto de límite de una función en un punto. De la misma manera, abordaron la idea de significado de un contenido matemático escolar desde su estructura conceptual, los sistemas de representación y sentidos y modos de uso, teoría que fue adaptada y desarrollada por Rico. Mostraron que, el conocer cómo los estudiantes perciben el concepto de límite, "puede orientar en el planteamiento de estrategias metodológicas de enseñanza que consideren estos significados y de este modo se favorezca su aprendizaje en los estudiantes" (p. 38).

Del mismo modo, a nivel internacional el factor común de la mayoría de las investigaciones consultadas hasta el momento que abordan el significado de un contenido matemático escolar, lo hacen desde la teoría desarrollada por Luis Rico. Castro (2015) es una de las autoras que trabajó con esta estructura para analizar el significado que tienen un grupo de estudiantes universitarios de formación docente, sobre la noción de fracción basada en la relación parte-todo. Explicó que los resultados permiten observar la relación existente con las diferentes "líneas de reflexión sobre los fundamentos de la aritmética escolar y de la relación parte-todo multiplicativa" (p. 204).

También, Fernández-Plaza et al. (2015) trabajaron bajo esta teoría de Rico para analizar, en un grupo de estudiantes de bachillerato, la noción del concepto de límite finito de una función a partir de su representación gráfica. Además, explicaron que una definición en Matemática es un compendio de propiedades de un contenido matemático, que poseen una lógica consistente. También, consideraron la importancia de tomar en cuenta el contexto en que se emplean las definiciones, ya que, se toma la representación de un determinado contenido, que mejor se adapta en el ambiente escolar. Propusieron dos modelos para detectar concepciones de los estudiantes sobre un determinado contenido: sintético/definidor y analítico/diagnóstico. Entre las conclusiones de la investigación, cabe destacar que:

> El procedimiento a definir debiera introducirse con tareas que involucren el análisis y discusión de propiedades de los conceptos en diversidad de sistemas de representación seguidas de tareas que obliguen a la síntesis de qué propiedades caracterizan el contenido y cuáles son superfluas. Evidencias de esta necesidad son las incoherencias entre los argumentos que planteaban los estudiantes (concepciones elementales) y su definición individual (concepción sintética), aparte de las debilidades lógicas de su definición individual que obligaron a los estudiantes a recurrir a otras intuiciones para construir sus argumentos. (p. 226)

1.2.3 El significado de contenidos matemáticos relacionados con la Trigonometría

A nivel nacional, no se han podido localizar investigaciones que aborden el significado de algún contenido matemático escolar en el área de Trigonometría. Sin embargo, a nivel internacional, como ya se ha mencionado, la línea teórica que se utiliza en diferentes investigaciones es la que ha desarrollado mayoritariamente el Dr. Luis Rico. Su teoría pretende concebir el contenido matemático escolar desde sus tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos y modos de uso.

Martín-Fernández et al. (2016) presentaron una propuesta, diseño y análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de un cuestionario sistemático a un grupo de 74 estudiantes de bachillerato en Granada. Parte de los logros alcanzados por los investigadores radica en que se pudo obtener una descripción de los significados por parte de los estudiantes, esto mediante diversas representaciones. Concluyen diciendo que:

> Los resultados obtenidos sugieren la necesidad de profundizar en el tema diseñando y poniendo en práctica situaciones variadas que abarquen los diferentes componentes del significado de un contenido matemático escolar. Futuras investigaciones podrán explorar actividades que se adapten a mostrar la flexibilidad entre representaciones y sus ventajas y limitaciones. Esperamos contribuir a dotar de mayor coherencia la enseñanza de la Trigonometría. (p. 68)

Martín-Fernández et al. (2014) identifican e interpretan los significados sobre las nociones de seno y coseno de un ángulo que expresaron un grupo de estudiantes de Bachillerato. Basados en la idea de significado de Luis Rico, la idea del trabajo consistió en indagar las representaciones verbales, con las cuales los estudiantes, recurriendo a expresiones escritas, describen y explican el contenido considerado. El trabajo se desarrolló como exploratorio y descriptivo bajo un enfoque interpretativo. Además, se organizaron los temas en categorías y subcategorías y se realizó un análisis cuantitativo básico evaluando las respuestas en cada uno de los cuestionarios.

Entre las conclusiones del trabajo, los autores explican que los sujetos muestran una diversidad de concepciones cuando interpretan verbalmente el seno y coseno de un ángulo; la mayoría de los participantes describieron las razones trigonométricas seno y coseno como cociente; los datos mostraron escasa conexión de la Trigonometría con el mundo real; los sujetos tienen un conocimiento correcto del rango de valores del seno y coseno del ángulo 45º; el análisis ha puesto de manifiesto que los alumnos manejan una amplia gama de expresiones verbales y consideran una diversidad de sentidos no triviales para estas dos nociones.

1.3 Planteamiento del problema

La educación secundaria de Costa Rica ha sufrido diversos cambios a lo largo de las últimas décadas. Uno de ellos fue la implementación de nuevos programas de estudio del Ministerio de Educación Pública durante el año 2012. Específicamente, en la asignatura de Matemática, la principal característica de los programas fue el cambio en la metodología de enseñanza: en vez de partir de lo abstracto a lo particular, ahora se inicia cada tema con ejercicios contextualizados, y a partir de los mismos se construye la teoría. Es decir, se plantea emplear la resolución de problemas como un medio y un fin de la educación Matemática.

Sin embargo, esta serie de cambios también implicó eliminar contenidos para incorporar otros nuevos, entre ellos se encuentran algunos relacionados al tema de Trigonometría, el cual se eliminó de los niveles de décimo y undécimo, dejando de enseñar a los jóvenes costarricenses contenidos como funciones, identidades y ecuaciones trigonométricas. De modo que, el único abordaje que propone el MEP (Ministerio de Educación Pública, 2012) a este tema, es el que se hace en noveno año, donde se estudian las razones trigonométricas en ángulos complementarios, ángulos de elevación y depresión, y la Ley de Senos.

Por otra parte, los resultados del Diagnóstico en Matemática (DiMa) que realiza la Universidad de Costa Rica a los estudiantes de primer ingreso cuyo plan de estudios contenga cursos de Matemática, arroja resultados muy desalentadores. Según la publicación de Molina (2019) en Semanario Universidad, solamente un 6% de los estudiantes, aprobaron el DiMa en el año 2019. Además, según Cerdas (2021, 2022), para los años 2021 y 2022, los resultados son similares ya que, en ambos años, sólo el 4% lo logró aprobar. El entonces director de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, William Ugalde, destacó que Trigonometría es el área que presentó el promedio más bajo y recalca que una de las posibles causas es que su estudio se dejó de lado en secundaria (Cerdas, 2021).

Así mismo, los cambios mencionados anteriormente, afectan a los estudiantes que ingresan a la Universidad de Costa Rica, ya que en los primeros cursos de Matemática (Precálculo, Matemática de Ingreso, Matemática Elemental) entran en contacto con temas más amplios sobre Trigonometría. Sin embargo, esta área siempre se encuentra entre los últimos contenidos del correspondiente programa, y es frecuente que, a raíz de las diferentes deficiencias que traen los estudiantes de la secundaria, se deba dedicar más tiempo en los primeros temas del programa del curso, causando así un reacomodo de los contenidos que se pretenden abordar, propiciando que sean los correspondiente al área de Trigonometría los que en varias ocasiones se estudien de manera superficial o incompleta. Si a lo anterior se suman situaciones como huelgas, suspensión de lecciones, y más recientemente, el reajuste de cursos por la situación de la pandemia causada por el COVID-19, el problema se agrava aún más.

En concordancia con lo anterior, Matemática de Ingreso es el primer curso de la carrera de Enseñanza de la Matemática, y es preocupante saber que quienes se están formando como futuros educadores pueden presentar deficiencias de contenidos desde el primer curso. Si ya de por sí, el sistema de educación secundaria en Costa Rica presenta falencias en cuanto a Trigonometría (Molina, 2019), si quienes se preparan para ser profesores no tienen una base sólida en esta área, cuando sea el momento de ejercer en el sistema educativo, se podrían generar más deficiencias y errores de los existentes (Aray et al., 2020).

Ante el panorama descrito, surgen inquietudes como: ¿Qué entienden los estudiantes por razones trigonométricas? ¿Qué sistemas de representación identifican los estudiantes para las razones trigonométricas? ¿Qué sentidos y modos de uso les asignan los estudiantes a las razones trigonométricas? Es decir, ¿Qué manifiestan los estudiantes acerca del significado de las razones trigonométricas tras su paso por la educación secundaria? Y más aún: ¿Qué significado manifiestan después de su primer curso universitario de Matemática?

1.4 Objetivos de la investigación

Para realizar la investigación se planteó un objetivo general y tres objetivos específicos que se detallan a continuación.

Objetivo general

Analizar el significado que expresan los estudiantes de primer ingreso de la carrera Enseñanza de la Matemática sobre el contenido razones trigonométricas, en la Universidad de Costa Rica, sede de Occidente, durante el año 2021.

Objetivos específicos

1. Describir el significado que expresan los estudiantes universitarios de primer ingreso de la carrera Enseñanza de la Matemática acerca de las razones trigonométricas previo a la intervención educativa.
2. Describir el significado que expresan los estudiantes universitarios de primer ingreso de la carrera Enseñanza de la Matemática acerca de las razones trigonométricas posterior a la intervención educativa.
3. Identificar, si existe, el cambio de significado que expresan los estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática antes y después de realizar una intervención educativa sobre el tema.

Capítulo 2: Marco Teórico

En este apartado se desarrollan los referentes y fundamentos teóricos que sustentarán el análisis, interpretación y explicación de los datos, tal como se adelantó, se empleará el marco teórico desarrollado por Rico y Moreno (2012) y colaboradores. Para ello, se ha dividido este capítulo en tres apartados:

a) El significado de un contenido en Enseñanza de la Matemática, donde además se expone dicha noción desde diferentes perspectivas que convergen en la incorporación y utilización de una terna semántica (también llamado triángulo semántico) como una herramienta para el estudio y análisis del significado de los contenidos matemáticos.
b) La importancia del significado en la planificación curricular.
c) Significado del contenido razones trigonométricas descrito desde los componentes del triángulo semántico.

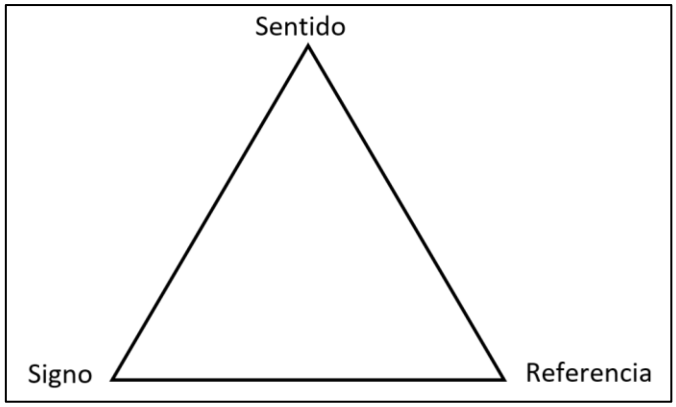
2.1 Significado de un contenido en la Enseñanza de la Matemática

La noción de significado ha sido abordada desde distintas perspectivas, principalmente desde la filosofía, de la cual la Educación Matemática se ha visto influenciada. Desde la filosofía, vale la pena destacar a Frege, quien estableció una terna semántica, también llamada triángulo semántico (ver figura 2.1):

> En esta noción de significado de un concepto, el triángulo semántico viene dado por el signo o término con el que se expresa, por su referencia o concepto propiamente tal, y por su sentido o modo en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto. (Rico, 2012, p. 52)

Figura 2.1

Triángulo semántico (concepto)



Al igual que en la filosofía, en la Educación Matemática, se han desarrollado una serie de triángulos semánticos como herramientas para el estudio y análisis del significado de los contenidos matemáticos. Castro (2015) recopila diferentes investigadores o autores referentes a ello, destaca a Radford (2013) quien trabaja con la terna de interpretación, concreción y generalización; a Sáenz-Ludlow (2006) y su terna de matemática, aprendiz y signos; a Vergnaud (1983) con las nociones referente, invariantes y representaciones; y a Steinbring (1997, 2006) con los conceptos de signo/símbolo, objeto/contexto y concepto.

De forma similar a estos autores, Rico y Moreno (2016) desarrollaron un triángulo semántico para los contenidos matemáticos formado por tres componentes: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación y (c) sentidos y modos de uso. Para ellos, conocer el significado de un contenido matemático implica que la persona sepa "su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problema" (Rico y Moreno, 2016, p. 94).

Además, Rico (2012) plantea que, sobre los significados, se distinguen desde tres ámbitos de actuación. Se refiere a un primer significado como *curricular*, el cual está dado por las diferentes situaciones, contextos y aspectos derivados de la enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática en el medio educativo. El segundo significado se refiere a un ámbito *profesional*, es decir, se ve implicado en la formación y desarrollo de profesionales que ejercen en procesos de enseñanza y aprendizaje. Por último, un tercer significado comprende a la Educación Matemática desde un contexto *investigador*, el cual considera los fundamentos y teoría que describen, interpretan, explican, predicen y actúan sobre las situaciones generadas de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. En el caso de este trabajo, se abordará desde un contexto investigativo.

En Educación Matemática se investiga e incorpora la noción de significado de un contenido matemático como un marco interpretativo del entendimiento de los escolares; buscando dar respuesta a preguntas como:

> ¿sobre qué conceptos, propiedades, definiciones o relaciones los estudiantes argumentan y comunican sus ideas Matemáticas?, ¿qué signos emplean para ello?, ¿qué modos de uso se identifican en el concepto? o ¿qué situaciones o contextos enmarcan sus ideas Matemáticas o están en su origen? (Fernández-Plaza et al., 2015, p.215)

Y en ese intento por dar respuesta a esas preguntas es que nace la idea del significado de un contenido matemático escolar definido desde los tres componentes mencionados y descritos en Rico y Moreno (2016). Cada uno de esos componentes se conforma de una serie de elementos que permiten su caracterización y estudio, tal como se muestra en la tabla 2.1.

Tabla 2.1

Componentes del significado de un contenido matemático

Estructura conceptual			Sistemas de representación	Sentidos y modos de uso
Ámbitos o campos				
Conceptual	*Procedimental*	*Actitudinal*		
Hechos	Destrezas	Emociones	Simbólico	Modos de uso
Conceptos	Razonamientos	Moralidad y normas	Gráfico	Contextos
Estructuras	Estrategias	Valores éticos		Situaciones

A continuación, se describe detalladamente cada uno de esos componentes y elementos; y al final de este capítulo, se ejemplifican directamente con el contenido matemático de razones trigonométricas.

2.1.1 Estructura conceptual

La idea de estructura es bien conocida en Matemática, Castro (2015) explica que, en la Matemática, al concepto de *estructura* se le define como un "conjunto con una colección finita de operaciones y relaciones definidas dentro del conjunto" (p. 72).

En el significado, se concibe la idea de la *estructura conceptual* como todos aquellos aspectos formales que caracterizan y describen a un contenido matemático, los conjuntos de procedimientos, conceptos, propiedades y relaciones que se derivan; estableciendo el criterio de veracidad para las proposiciones que se pueden establecer, acatando la estructura Matemática en el que se aborda y configuran, permitiendo brindar sentido de referencia al contenido matemático. Para su estudio, la estructura conceptual se divide en tres campos: conceptual, procedimental y actitudinal, los cuales, a su vez, se dividen en tres niveles de complejidad.

El campo conceptual es el conjunto de conceptos y relaciones del contenido matemático. En el primer nivel se establecen los *hechos*, los cuales se estudian mediante cuatro categorías: términos, notaciones, convenios y resultados; en el segundo nivel, se encuentran los *conceptos* y las relaciones existentes entre ellos; y en el tercer nivel, se encuentran las *estructuras conceptuales*, las cuales surgen a partir de las transformaciones y relaciones que pueden vincular conceptos más complejos.

Con respecto al campo procedimental, se establecen también tres niveles de complejidad, en este caso se tienen: las *destrezas* que sirven para procesar los hechos; los *razonamientos*, los cuales procesan los conceptos, y por último las *estrategias*, las cuales sirven para procesar las estructuras.

En última instancia, el campo actitudinal hace referencia a las emociones, la moralidad, normas y los valores éticos, sin embargo, por el alcance de esta investigación y sus objetivos; este campo no se utilizará dentro de este trabajo.

La estructura conceptual se vuelve fundamental en la construcción de significados, y en esto el docente tiene un rol esencial, debido a que la percepción o conceptualización que adquieren los estudiantes de los contenidos escolares se ve influenciada por la explicación que brindan los profesores, estos deben plantear respuestas a preguntas como: “¿Cuáles son los conceptos que caracterizan el tema? ¿Qué procedimientos están implicados en el tema? ¿Cómo se relacionan estos conceptos entre sí? ¿Cómo se relacionan estos procedimientos entre sí? ¿Cómo se relacionan estos conceptos y estos procedimientos?" (Cañadas et al., 2016, p.5).

2.1.2 Sistemas de representación

Los *sistemas de representación* son otro componente esencial para dotar de significado a un contenido matemático escolar. En Educación Matemática, la utilización de símbolos, palabras, gráficos y demás formas de representación, basadas en sus propias reglas, comunican y describen a su manera, el contenido matemático escolar (Rico, 2012; Castro, 2015). De modo que, se definen los s*istemas de representación* de un contenido matemático escolar como el conjunto de propiedades, convenios, símbolos, gráficos, notaciones y demás signos apropiados que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otros.

Para efectos de esta investigación, se consideran dos grupos de sistemas de representación: las *simbólicas* que contienen símbolos alfanuméricos que se utilizan bajo un sistema de reglas predeterminado, y las *gráficas* que son figurativas, también funcionan bajo un sistema de reglas de composición, así como de interpretación. Además, existen otros sistemas de representación como verbal, numérico, tabular, que se derivan de los dos anteriores, y los mismos dependen del concepto con el que se trabaja (Lupiáñez-Gómez, 2016).

2.1.3 Sentidos y modos de uso

Los sentidos y modos de uso se refieren a las situaciones a las que responde el contenido matemático, los problemas que puede resolver y los fenómenos que organiza (Ruiz-Hidalgo, 2016). En esta investigación se consideran tres perspectivas: (a) los términos y modos de uso, (b) los contextos y cuestiones a las que brinda respuesta y (c) las situaciones en donde se aplica.

Los *términos* son quienes componen la definición de un concepto y ayudan a conocer sus diferentes sentidos; en ocasiones, los términos poseen un origen matemático específico o bien, pertenecen al lenguaje cotidiano de los estudiantes, de modo que, al tomar en cuenta sus modos de uso es importante considerar cada caso, ya que podría ser distinto en el caso de las palabras del vocabulario cotidiano.

Los *contextos* son descripciones de cómo las estructuras conceptuales responden a las necesidades matemática particulares. Dicho de otra forma, “proporcionan precisión técnica para delimitar el sentido de un concepto” (Ruiz-Hidalgo, 2016, p. 142).

Por último, las *situaciones* sirven para aportar sentido a los contenidos matemáticos identificando contextos y usos de los diferentes conceptos. El marco de estudio PISA (Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos) considera cuatro categorías para organizar las situaciones matemáticas: personales, laborales y educativas, sociales y científicas.

2.2 Importancia del significado en la planificación curricular

Como se mencionó, el triángulo semántico es un instrumento que permite, sobre los contenidos matemáticos, el análisis del conocimiento, posibilitando el describir y establecer los diferentes significados de un contenido en términos de su estructura conceptual, sus sistemas de representación y los sentidos y modos de uso (Castro, 2015). Es decir, esta terna semántica puede jugar un papel sumamente importante en la planificación curricular, ya que al considerar los tres componentes y sus elementos, permite establecer conexiones entre ellos; generando en el docente un sentido de conciencia sobre la importancia de estos elementos en el entendimiento del significado.

Es así que, para poder manipular y entender un contenido matemático, se requiere identificar su *definición*, comprender sus *representaciones*, interpretar sus *modos de uso* y, en general, conocer todo lo que estos tres componentes implican entre sí, es decir, dotarlo de significado, lo cual permite entender y organizar el significado de un contenido matemático desde una perspectiva constructiva (Castillo-Céspedes et al., 2017).

La presencia de los contenidos matemáticos en el entorno hace necesaria una representación externa o un signo para materializar su reconocimiento y su expresión, como lo establece Pecharromán (2013), quien explica que la existencia de un signo que representa y manifiesta un contenido matemático es casi inherente, ya que, cuando se construye una representación, esta solo adquiere sentido desde un contexto en el que sea posible observar el concepto matemático. Además, debe tenerse en cuenta que la construcción y utilización de cada representación debe permitir la funcionalidad del contenido matemático, esto sin provocar modificaciones a sus propiedades, es decir, un sistema de representación se considera “como un sistema de reglas para: (a) identificar o crear signos, (b) operar sobre ellos y con ellos y (c) determinar relaciones entre ellos” (Castro, 2015, p.73).

Martín-Fernández et al. (2016) complementan la idea anterior al expresar que los significados escolares que los estudiantes construyen en el aula, presentan una amplitud y profundidad que permiten atender a sus diferentes formas de expresión y de uso, además de tener la capacidad de conectar diversas estructuras y favorecer la utilización de diferentes procedimientos; así, cada contenido matemático, está definido por sus propiedades y relaciones, las cuales están mediadas por las representaciones y modos de uso que estos presentan.

Por eso, para lograr construir significados matemáticos correctos y útiles, el estudiantado debe proponer, desarrollar, construir y aplicar sus ideas a partir de las diferentes actividades planteadas por el docente. A partir de ello, se comienzan a percibir los significados construidos por los escolares, desde distintos modos de expresión y uso, además de la capacidad para conectar diversas estructuras y utilizar diversos procedimientos (Gómez, 2007).

2.3 Significado de las razones trigonométricas

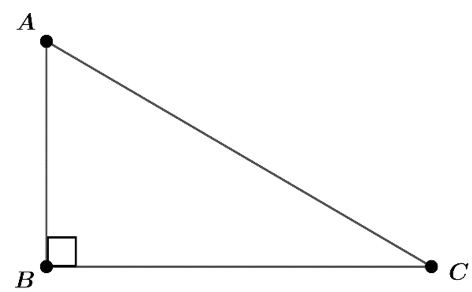
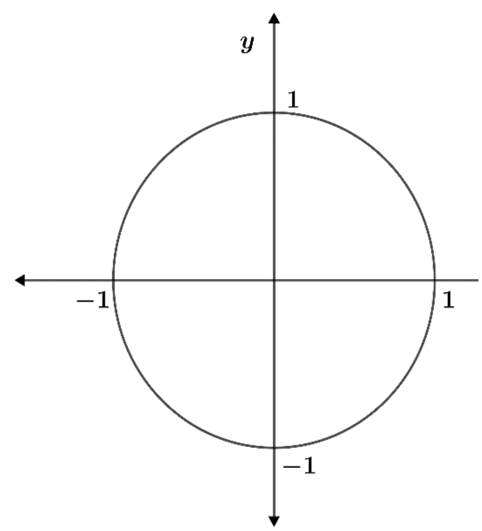
De acuerdo con la construcción del significado abordada anteriormente, en la tabla 2.2 se ejemplifican cada uno de estos componentes del triángulo semántico de un contenido matemático, de forma específica para las razones trigonométricas.

Tabla 2.2

Ejemplos sobre las razones trigonométricas en los componentes del significado

Organizador Conceptual	**Componentes**		**Ejemplos**
Estructuras conceptuales	Conceptual	Hechos	Términos: razones, identidades, seno, coseno, tangente. Convenios: denotar $sen^2(x)$ en lugar de $(sen(x))^2$

Organizador Conceptual	Componentes		Ejemplos
		Conceptos	Definición de las razones trigonométricas como la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo.
		Estructuras	El círculo trigonométrico
	Procedimental	Destrezas	Calcular razones trigonométricas dados los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.
		Razonamientos	Deducir identidades entre razones trigonométricas.
		Estrategias	Determinar las coordenadas de un punto en el círculo trigonométrico.
Sistemas de representación	Simbólico		Se utiliza $sen(x)$ para representar "seno de x", $cos(x)$ para representar "coseno de x", $tan(x)$ para representar "tangente de x"

Organizador Conceptual	**Componentes**	**Ejemplos**
	Gráfico	**Figura 2.2** *Triángulo rectángulo de vértices A, B y C.*  **Figura 2.3** *Círculo trigonométrico centrado en el origen* 
Sentidos y modos de uso	Modo de uso	Razón (como relación), Identidad (como equivalencia matemática)

Organizador Conceptual	Componentes	Ejemplos
	Contextos	Calcular distancias o ángulos
	Situaciones	Personales, laborales y educativas, sociales y científicas.

Capítulo 3: Marco Metodológico

En este capítulo se describe la metodología que se utilizó para la presente investigación, con el fin de alcanzar los objetivos propuestos. El mismo se divide en seis apartados: (1) enfoque y alcance de la investigación, (2) la descripción de las fases de la investigación, (3) la selección de los participantes, (4) los instrumentos de recolección de datos, (5) método de análisis de datos y (6) la descripción de la intervención educativa.

3.1 Enfoque y alcance de la investigación

Dado que la investigación pretende explorar el significado que le asignan los estudiantes universitarios a las razones trigonométricas, se considera del tipo cualitativa. Este enfoque se suele utilizar cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben e interpretan, entre otros fenómenos, los significados. Además, con la revisión bibliográfica se determinó que el tema es poco estudiado en Costa Rica, por lo que es recomendable utilizar dicho enfoque (Hernández-Sampieri et al., 2014).

El alcance de la investigación es exploratorio porque se pretende indagar acerca de una problemática poco estudiada en el país. Además, es descriptivo pues uno de los objetivos de investigación pretende describir el significado que manifiestan los estudiantes sobre el contenido matemático de razones trigonométricas.

3.2 Fases de la investigación

La investigación se llevó a cabo en tres fases:

En la primera fase, se aplicó un cuestionario semántico, el cual será referido como cuestionario inicial, para conocer los significados que les asignan los estudiantes a las razones trigonométricas (ver apéndice A). Dicho instrumento se empleó en un grupo de estudiantes donde la participación fue voluntaria. El cuestionario se aplicó de forma virtual y sincrónica, de modo que todos los participantes contaron con 40 minutos para completarlo, bajo la supervisión de los investigadores.

En la segunda fase, se implementó la intervención educativa en un subgrupo de los estudiantes anteriormente mencionados. Se abordó en cuatro lecciones virtuales sincrónicas, de aproximadamente 2 horas cada una, en donde los investigadores plantearon las actividades para que los estudiantes llevaran a cabo (ver apéndice D).

Por último, en la tercera fase, se aplicó nuevamente un cuestionario (ver apéndice B), el cual se referirá como cuestionario final, a los estudiantes que participaron en las lecciones de la segunda fase. Dicho cuestionario se envió para resolverlo de forma asincrónica y, dado que la participación era voluntaria, solamente una parte del grupo lo resolvió.

Estas fases permitieron responder a los dos primeros objetivos específicos, mientras que el tercer objetivo se alcanzó tras la comparación de los resultados obtenidos en cada una de las fases.

3.3 Participantes

Los participantes fueron estudiantes de primer ingreso del año 2021 de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, en la Sede de Occidente. Se trabajó con los estudiantes matriculados de un curso introductorio de la carrera, MA0101: Matemática de Ingreso.

Dicho curso contó con dos grupos en distintos horarios, uno de ellos con 16 estudiantes (grupo A) y el otro con 17 (grupo B). El primer cuestionario se aplicó en ambos grupos y todos lo contestaron. La intervención educativa se llevó a cabo solamente en el grupo B, el cual se escogió por conveniencia de horario. A las cuatro lecciones asistieron la mayoría de los estudiantes, sin embargo, como las clases no son de asistencia obligatoria, no se llevó un registro de los participantes cada día.

Finalmente, el segundo cuestionario se aplicó cuatro semanas después de concluido el curso y las lecciones impartidas, con el fin de tener una perspectiva del aprendizaje logrado después de transcurrido dicho periodo sin contacto con la materia del curso. Se contactó a los estudiantes vía *Whatsapp* y se envió solamente al grupo en donde se aplicó la intervención. De los 17 estudiantes a quienes se envió el cuestionario solamente se obtuvo respuesta de seis.

Para mantener la confidencialidad de los estudiantes, se hace referencia a los participantes del grupo A como MGA (Matemática Grupo A), a los participantes del grupo B como MGB (Matemática Grupo B) y a quienes respondieron el cuestionario final MGF (Matemática Grupo Final).

3.4 Instrumentos para la recolección de datos

De acuerdo con las tres fases del diseño planteadas anteriormente, se utilizaron los siguientes instrumentos de recolección de datos.

Cuestionario inicial: consiste en un instrumento que permitió indagar los conocimientos previos que poseen los estudiantes, el cual fue de respuesta abierta (ver apéndice A).

Para elaborar el cuestionario se llevó a cabo el siguiente proceso:

- Se creó un banco con 20 preguntas relacionadas con las razones trigonométricas.
- Se realizó un análisis para determinar los componentes de la terna del significado que buscaba evaluar cada pregunta.
- Se clasificaron las preguntas dentro de los ámbitos de cada componente, es decir, conceptual o procedimental; gráfico o simbólico; y modos de uso, contextos o situaciones.
- Se seleccionaron nueve preguntas del banco, que abarcaran de forma equilibrada los componentes del significado, y que además no fueran complejas para el primer cuestionario.
- Se creó un instrumento de validación para que los expertos dieran su opinión sobre si el cuestionario es efectivo para determinar el significado que les asignan los estudiantes a las razones trigonométricas. El mismo, fue enviado a dos expertos quienes calificaron, en una escala del 1 al 5, la presencia de cada uno de los tres componentes del significado en cada pregunta (ver apéndice C). Después de dicha validación, no fue necesario hacer correcciones en las preguntas, pero sí funcionó para profundizar en el análisis de las respuestas sobre la presencia de cada componente.

A pesar de que todas las preguntas tienen de alguna forma la presencia de los tres componentes del significado, ciertamente existe un componente que tiene mayor presencia en cada ejercicio. Por ejemplo, en el caso de las preguntas uno y dos, se enfocaban principalmente en el componente de la estructura conceptual, pues se solicitó a los estudiantes palabras relacionadas con Trigonometría y determinar la veracidad de una proposición; las preguntas tres y cuatro, iban más centradas en sistemas de representación pues los estudiantes debían dibujar representaciones gráficas de un círculo trigonométrico y un triángulo respectivamente; y las preguntas ocho y nueve, se enfocaban en sentidos y modos de uso, pues los estudiantes debían resolver un problema contextualizado y dar ejemplos de otras situaciones donde se pudieran utilizar las razones trigonométricas.

Cuestionario final: este instrumento buscaba recolectar los significados asignados por los estudiantes a las razones trigonométricas tras la intervención educativa, con el fin de identificar, si existen, cambios en los significados manifestados en el primer instrumento (ver apéndice B).

Para elaborar el segundo cuestionario se llevó a cabo el siguiente proceso:

- Se tomó en cuenta las preguntas planteadas en el primer cuestionario, y se buscó llevar una estructura similar, solamente que las nuevas preguntas debían tener un mayor grado de complejidad, pues los estudiantes ya habían participado de la intervención educativa y habían concluido el curso de Matemática de Ingreso.
- Se revisaron los ejercicios resueltos en clases con el fin de tomar en cuenta esa base de conocimiento.
- Se crearon seis preguntas tomando en cuenta los dos puntos anteriores, donde se abarcara cada uno de los componentes del significado.

Igual que en el primer cuestionario, cada ejercicio poseía un componente del significado que sobresalía con respecto a los otros, las preguntas uno y dos se enfocaban principalmente en estructura conceptual pues los estudiantes debían brindar una definición a un concepto y verificar la veracidad de una proposición; las preguntas tres y cuatro se relacionaban con los sistemas de representación ya que los estudiantes debían justificar una idea con una representación gráfica, además, ubicar un punto específico en el plano cartesiano utilizando razones trigonométricas; y las preguntas cinco y seis, ahondaban principalmente en los sentidos y modos de uso pues los estudiantes debían resolver dos problemas en diferentes contextos y situaciones.

3.5 Método de análisis de datos

Se utilizó el método de análisis de contenido, la cual es una técnica para seleccionar y sistematizar los datos recolectados con el fin de llevar a cabo una descripción objetiva del fenómeno de estudio (Cáceres, 2003). Para llevar a cabo esta técnica se siguieron los pasos propuestos por Rico y Fernández-Cano (2013). En primer lugar, se delimita el corpus de contenido a analizar, luego se concreta la unidad de análisis, a partir de esto se localiza o infiere del texto la unidad de análisis. Una vez realizados estos pasos, se denominan, definen e interpretan las categorías, se codifican y cuantifican, posteriormente se relacionan entre sí y se interpretan las categorías establecidas, para finalmente, relacionar el proceso de análisis con la cuestión que se indaga.

3.5.1 Categorías de análisis

El análisis se realizó de forma individual para cada pregunta, siguiendo una misma estructura para cada una de ellas: se describe la pregunta y se explica la intención de esta, así como el componente del significado que se espera analizar con ella y se describe cuál es la respuesta esperada por parte de los estudiantes.

Las categorías de análisis inductivas surgieron a partir del Marco Teórico, por tanto, se estableció el análisis de la presencia de los diferentes elementos del significado en cada pregunta, y se desarrolló el componente que tuviera mayor presencia. Para todas las preguntas, se estableció de forma inductiva las siguientes categorías de análisis:

- Respuesta correcta (donde tanto los procedimientos como las respuestas eran correctos), parcialmente correcta (donde varios procedimientos eran correctos, pero no se da la respuesta correcta) o incorrecta (donde tanto los procedimientos como la respuesta eran incorrectos).
- Presencia del componente del significado.
- Completitud de la solución.

A su vez, a partir de las categorías inductivas, surgieron nuevas categorías deductivas. De la pregunta tres en adelante, se analizó el nivel de logro alcanzado, siendo el mismo total, parcial o nulo. Sin embargo, por la naturaleza del cuestionario, en cada pregunta se establecieron diferentes categorías para el logro parcial. En el caso de las preguntas que poseen más de un componente del significado, las categorías se desarrollaron de acuerdo con la presencia de uno o ambos componentes. En la tabla 3.1 se especifican dichas categorías.

Tabla 3.1

Categorías de análisis en cada pregunta del cuestionario inicial

Pregunta	Elemento del significado	Categorías analizadas
1	**Estructura conceptual** (Conceptos)	Se determinó la frecuencia de las palabras utilizadas (términos) y se analizaron las que obtuvieron valores mayores.
2	**Estructura conceptual**	Se analizó si determinaba la proposición

Pregunta	Elemento del significado	Categorías analizadas
	(Hechos)	como falsa o verdadera, pero también la veracidad del argumento utilizado.
3	**Sistemas de representación** (Gráfico)	Se analizó si dibujaba el círculo correctamente, pero también si lo centraba en el origen y si especificaba la medida del radio.
4	**Sistemas de representación** (Simbólico y Gráfico)	Se analizó la correcta representación del triángulo, así como la asignación de los valores respectivos a cada lado.
5	**Estructura conceptual** (Destrezas y Razonamientos)	Se analizó que determinara la medida correcta, así como la completitud del procedimiento.
6	**Estructura conceptual** (Razonamientos y Estrategias) **Sistemas de representación** (Gráfico)	Se analizó si determinaban que era posible o imposible, pero también la veracidad de la justificación brindada.
7	**Estructura conceptual** (Procedimental)	Se analizó si determinaban la proposición como falsa o verdadera, pero también la veracidad del argumento utilizado.

Pregunta	Elemento del significado	Categorías analizadas
8	**Sentidos y Modos de Uso** (modos de uso) **Sistemas de representación** (Gráfico)	Se analizó la veracidad de la respuesta, además si se apoyaron o no en una representación gráfica para argumentar su respuesta.
9	**Sentidos y modos de uso** (Situaciones o Contextos)	Se analizó si brindaba una justificación correcta.

De igual modo, para el cuestionario final, se describió cada pregunta, lo que se esperaba alcanzar con ella y el componente del significado utilizado. En la tabla 3.2 se especifican los elementos del significado presentes en cada pregunta, así como sus respectivas categorías de análisis.

Tabla 3.2

Categorías de análisis en cada pregunta del cuestionario final

Pregunta	Elemento del significado	Categorías analizadas
1	**Estructura conceptual** (Conceptos)	Se analizó si menciona la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, además, si menciona las razones trigonométricas.
2	**Estructura conceptual** (Razonamientos)	Se analizó si determinaban la proposición como falsa o verdadera, pero también la veracidad del argumento utilizado.

Pregunta	Elemento del significado	Categorías analizadas
3	**Estructura conceptual** (Razonamientos) **Sistemas de representación** (Gráfico)	Se analizó la veracidad de la respuesta, si la justificación brindada es correcta y si se apoyaron en una representación gráfica.
4	**Sistemas de representación** (Gráfico)	Se analizó la correcta identificación del cuadrante y las coordenadas del punto que brindaron.
5	**Estructura conceptual** (Razonamientos y Estrategias) **Sentidos y modos de uso** (Contextos)	Se analizó si los estudiantes utilizaron procesos algebraicos correctamente y si mencionaron la identidad pitagórica para justificar su respuesta.
6	**Estructura conceptual** (Destrezas) **Sistemas de representación** (Gráfico) **Sentidos y modos de uso** (Contextos y Modos de uso)	Se analizó si el estudiante realiza los procedimientos matemáticos adecuados y determina la respuesta correcta.

En cada uno de los casos, se creó una tabla que permitió cuantificar y analizar las respuestas obtenidas, prestando especial atención a las respuestas no esperadas y se insertaron imágenes de algunas respuestas; finalmente, se realizó un análisis general de los resultados obtenidos en todas las preguntas.

3.6 Intervención educativa

La intervención educativa se llevó a cabo en cuatro clases de 2 horas cada una. Las sesiones fueron virtuales de forma sincrónica. El profesor del grupo siempre estuvo presente durante las clases y solamente interactuó como oyente. Para cada clase se elaboró un documento PDF (ver apéndice D) que contenía la teoría y ejercicios, los cuales se mostraban en la pantalla y se realizaban anotaciones en el documento mientras se iba desarrollando la clase.

El desarrollo de las lecciones siempre estuvo a cargo de los investigadores y la participación de los estudiantes era voluntaria respondiendo preguntas durante la clase; en ocasiones se brindaban algunos minutos para que los alumnos intentaran resolver ejercicios de forma individual y posteriormente eran explicados por los investigadores incentivando la participación de los estudiantes en el proceso con preguntas que servían de guía, sin embargo, no se realizaron trabajos grupales debido al tiempo con el que se disponía para abordar los contenidos, tampoco hubo estudiantes que explicaran la solución de algún ejercicio por completo.

Al finalizar cada lección, el documento con las anotaciones se compartía con los estudiantes por medio de Mediación Virtual, el entorno virtual oficial de la UCR. Los temas se desarrollaron de forma constructiva y se planearon las lecciones estratégicamente para que, en cada clase, se pudiera conectar la materia con lo visto la clase anterior.

3.8.1 Descripción de las lecciones

La participación activa de los estudiantes en clases fue un poco menor a la esperada, la mayoría de los estudiantes se conectaban a la clase virtual, pero permanecían con su micrófono y cámara apagada, por lo tanto, fue muy frecuente que cuando los investigadores realizaban preguntas o incentivaban la participación, no más de cinco estudiantes eran quienes contestaban o realizaban algún comentario, y para ello, encendían brevemente el micrófono, pero la cámara continuaba apagada. En muy pocas ocasiones los estudiantes realizaban preguntas por cuenta propia y debido a las barreras presentes en la virtualidad, no había forma de saber si realmente estaban prestando atención a la clase y comprendiendo la materia.

A continuación, se describen las actividades realizadas en cada una de las clases desarrolladas durante la intervención educativa, donde se relacionan los respectivos componentes del significado que tienen mayor presencia en cada una de las actividades.

Clase 1

Se realizó un repaso del Teorema de Pitágoras y se definió el concepto de razón trigonométrica, además, se definieron las razones seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente, así como su representación algebraica y gráfica en el triángulo rectángulo. Se realizaron ejercicios donde dados los valores de las medidas de los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, los estudiantes debían completar unas tablas con los valores de las seis razones vistas. Por último, se realizaron tres problemas contextualizados en donde se debía utilizar el cálculo de las razones trigonométricas vistas para poder resolverlos.

En este caso, se evidenció el estudio de elementos de la estructura conceptual con el uso de los *hechos y conceptos* a la hora de definir las razones trigonométricas, además los sistemas de representación tanto *simbólicos* como *gráficos* se encontraron presentes en las definiciones y en los ejercicios. Los sentidos y modos de uso se hicieron presentes en los tres problemas finales donde se utilizaron *situaciones* sociales y personales.

Clase 2

Se inició la clase con un vídeo que explicaba de donde proviene la unidad de radianes, a partir de una circunferencia. Luego, se explicó la forma en que se convierten valores de grados a radianes y viceversa. Los estudiantes realizaron un ejercicio donde debían convertir ángulos dados en grados a radianes, y determinar, con ayuda de la calculadora, el valor de seno, coseno y tangente, de los ángulos en radianes. Luego, se definió el círculo trigonométrico, junto con su representación gráfica y se explicaron los signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Por último, se realizaron dos problemas en donde se debía utilizar los ángulos en radianes y los signos de los cuadrantes para averiguar la respuesta, donde se hizo mención a los ángulos de referencia, que sería el tema de la siguiente clase.

En esta clase, la estructura conceptual se presentó en los *razonamientos* para convertir los ángulos, además, se presentó el concepto *estructural* del círculo trigonométrico. Los sistemas de representación se vieron reflejados principalmente en la representación *gráfica* del círculo trigonométrico y los signos de las razones en los cuadrantes del plano cartesiano. Los sentidos y modos de uso se evidenciaron en los dos problemas finales, donde el *contexto* era ubicar objetos en determinado espacio, y las *situaciones* eran personales y laborales.

Clase 3

Al iniciar la clase se retomaron los problemas vistos en la sesión anterior, para definir los ángulos de referencia. Se explicó, utilizando un plano cartesiano, como trabajar con los ángulos de referencia en cada cuadrante. Luego, se realizaron varios ejercicios con ángulos superiores a 90°: se debían convertir a radianes, realizar la representación en la circunferencia trigonométrica, anotar el valor del ángulo de referencia, y determinar los valores de seno, coseno y tangente del ángulo dado. Seguidamente, se resolvieron tres problemas en diversos contextos y situaciones, en donde se utilizaban los ángulos de referencia para dar con la respuesta. Por último, se inició con el tema de identidades trigonométricas, pero solamente definiendo la identidad pitagórica y explicando por medio de un triángulo rectángulo dentro de la circunferencia trigonométrica, de donde provenía dicha identidad; además, con base en ella se desarrollaron las otras dos identidades pitagóricas.

En esta clase se utilizaron los componentes del significado de forma más integral. La estructura conceptual, en las *estrategias* para calcular los ángulos de referencia, y en los ejercicios siguientes, también estaban presentes los razonamientos para averiguar el signo, los sistemas de representación tanto *simbólicos* como *gráficos*, así como el *contexto* de averiguar los valores. Además, se profundizó en los problemas en *situaciones* laborales y científicas.

Clase 4

Al inicio de la clase se recordaron las identidades trigonométricas pitagóricas vistas en la clase anterior. Se brindaron las identidades de la suma y resta de ángulos para seno, coseno y tangente, además, se resolvieron ejemplos para cada identidad, con el fin de que los estudiantes lograran observar el desarrollo de las mismas. Seguidamente, se resolvió un problema en un contexto matemático, en donde los estudiantes debían probar la veracidad de la identidad trigonométrica de la suma de dos ángulos en tangente, utilizando las propiedades de la suma de dos ángulos de seno y coseno. Después, se presentaron las identidades del ángulo doble para seno y coseno, y se demostraron utilizando las propiedades de la suma de ángulos. Por último, se realizaron tres problemas en contextos matemáticos, en donde se debían utilizar las identidades trigonométricas vistas para resolverlos.

En esta última lección, la *estructura* estuvo presente en las identidades trigonométricas, y las *estrategias* para poder verificar diversas identidades. Los sistemas de representación tuvieron mayor presencia con su componente *simbólico* en la escritura de las razones e identidades trigonométricas. Los sentidos y modos de uso estuvieron muy enfocados en *situaciones* científicas pues los problemas eran de índole específicamente matemático y los *contextos* responden a calcular valores específicos o verificar identidades.

Capítulo 4: Discusión de resultados

Tal como se señaló en la metodología, los instrumentos que se utilizaron para recabar los datos fueron el cuestionario inicial (cuestionario 1) y el cuestionario final (cuestionario 2). De modo que, a continuación, se presentan los resultados obtenidos.

4.1 Cuestionario inicial

En este apartado se explica qué se pretendía alcanzar con cada pregunta del cuestionario inicial, qué componentes del significado poseían mayor presencia en la misma, las respuestas obtenidas y un análisis por parte de los investigadores de los resultados generales.

Pregunta 1

En la primera pregunta se solicitó a los estudiantes que escribieran cuatro palabras que se les vinieran a la mente cuando escuchan la frase "razón trigonométrica". Esta primera pregunta brinda un acercamiento a las nociones que podrían tener los estudiantes sobre razones trigonométricas; se engloba en uno de los tres componentes del significado, correspondiente a la estructura conceptual, ya que se solicita directamente que escriban palabras lo cual entra en la categoría de hechos, específicamente hablando de términos (ver tabla 2.1). Se esperaba que los estudiantes escribieran palabras como triángulo, identidades, seno, coseno y tangente, e inclusive, que establecieran alguna relación entre las palabras seleccionadas.

Tal como se observa en la tabla 4.1, en su mayoría están presentes componentes de las identidades trigonométricas, así como las palabras ángulo y triángulo. Los 33 estudiantes contestaron esta pregunta, algunos brindaron menos de las 4 palabras solicitadas y otros más bien brindaron más de las solicitadas.

Tabla 4.1

Frecuencia de respuestas de la pregunta 1

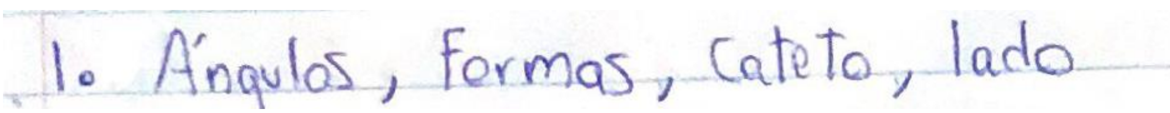
Términos	*Frecuencia*
Triángulos	16
Ángulo	13
Tangente	13
Coseno	12
Catetos	12
Seno	12
hipotenusa	9
Geometría	5
Medidas	4
Lados	3
Pitágoras	3
Gráficas	2
Otros	33
Total	137

En este caso, se puede notar que entre las palabras más utilizadas está la de *triángulo* y las que derivan de la utilización de las razones trigonométricas, como, por ejemplo: seno, coseno, ángulo y cateto. En la casilla de *otros*, se agrupan algunas frases o palabras que al ser tan generales nos dan poca información sobre la forma en la que conciben las razones trigonométricas, tales como: matemáticas, trigonometría griega, recta, formas, etc.

Lo anterior se evidencia en casi todas las respuestas brindadas, pero hay una en particular que sintetiza la idea de identidades trigonométricas: en la figura 4.1 se observa que el estudiante MGA_014 brinda las palabras *ángulos* y *lado*, lo cual puede ser muestra de que es consciente de la relación que hay entre ellas.

Figura 4.1

Respuesta dada por MGA_014 a la pregunta 1

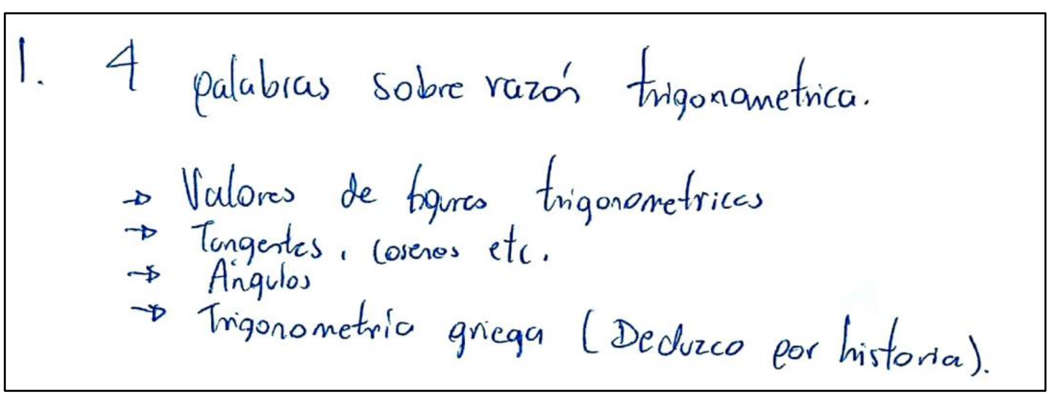


1. Ángulos, formas, Cateto, lado

Por otra parte, las figuras 4.2 y 4.3 muestran las respuestas dadas por los estudiantes MGA_006 y MGA_013, las cuales son casos donde brindaron más de las cuatro palabras solicitadas.

Figura 4.2

Respuesta dada por MGA_006 a la pregunta 1



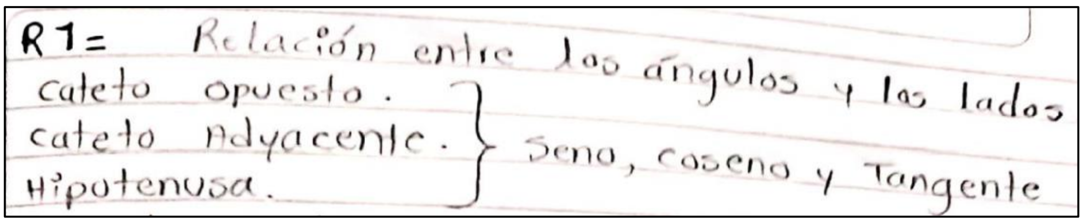
1. 4 palabras sobre razón trigonametrica.

→ Valores de figuras trigonometricas
→ Tangentes, cosenos etc.
→ Ángulos
→ Trigonometría griega (Deduzco por historia).

Se observa que los significados escolares que desarrollan los estudiantes presentan una amplitud que contempla las diferentes expresiones y cómo estas se utilizan para conectar diversas estructuras y que, por ende, muchas frases que brindan pueden ser analizadas.

Figura 4.3

Respuesta dada por MGA_013 a la pregunta 1


R1= Relación entre los ángulos y los lados
cateto opuesto.
cateto Adyacente.
Hipotenusa.
Seno, coseno y Tangente

Es interesante analizar estas dos respuestas porque los estudiantes más allá de brindar palabras, lo correspondiente a conceptos dentro de la estructura conceptual, tratan de más bien formar una estructura que relacione las palabras entre sí, e inclusive, intentan de alguna forma justificar por qué eligieron dicha frase, como es el caso del estudiante MGA_013 quien escribe “deduzco por historia”.

Pregunta 2

Se pidió determinar si la proposición *En un triángulo rectángulo, la tangente de un ángulo agudo relaciona las longitudes de los catetos* es verdadera o falsa, además de justificar su respuesta. Con esta pregunta se pretendía ahondar en la estructura conceptual, específicamente en los ámbitos conceptual y procedimental, específicamente en la complejidad de razonamientos. Se esperaba que los estudiantes determinaran la veracidad de la expresión argumentando que la razón trigonométrica tangente es el cociente del cateto opuesto al ángulo por el cateto adyacente.

Como se observa en la tabla 4.2, la mayoría de los estudiantes determinaron que la proposición es verdadera. Particularmente, tres de los estudiantes justificaron su veracidad partiendo del hecho de que la razón trigonométrica tangente es cateto opuesto sobre el adyacente. El estudiante MGA_011 afirmó: "Si. Debido a que la fórmula de la tangente divide a ambos catetos del triángulo (al cateto opuesto y adyacente), por ende, los relaciona". Sin embargo, muchas de las justificaciones del porqué la proposición es verdadera, en realidad son incorrectas. Entre las falsas justificaciones destaca la del estudiante MGB_001 quien afirma: "Ya que los catetos se presentan $c^2 + c^2$ es decir la tangente biseca el ángulo agudo y se producen mitades". En esta respuesta se puede observar que mezcla varios conceptos (Teorema de Pitágoras, bisección del ángulo, identidades trigonométricas) pero la relación que crea entre ellos es incorrecta.

Tabla 4.2

Frecuencia de respuestas de la pregunta 2

Respuesta	*Frecuencia*
Afirma que sí con una correcta justificación	3
Afirma que sí, pero la justificación es incorrecta	17
Afirma que no y justifica incorrectamente	6
No responde	7
Total	33

Por otra parte, de los que afirmaron que era falsa, sólo uno presentó una justificación, la cual hace alusión a que eso no se podía dar ya que la longitud de sus catetos puede variar, mientras que el resto utilizan argumentos como: "La longitud de los catetos siempre depende del triángulo”, “Según recuerdo para encontrar la tangente es opuesto sobre adyacente, entonces por ser un triángulo rectángulo siempre tendrá dos lados iguales (catetos) y uno diferente (hipotenusa), con la operación se estaría encontrando la medida solicitada”. En este último caso, el estudiante determina correctamente la razón trigonométrica, no obstante, afirma que en todos los triángulos rectángulos los catetos poseen la misma medida, lo cual es incorrecto. Aunque la respuesta no permite saber por qué el estudiante realiza esta afirmación, algunas posibles causas serían que el estudiante asuma que como los lados poseen el mismo nombre, catetos, entonces sus medidas van a ser las mismas; o también, podría estar asumiendo que todos los triángulos rectángulos provienen de cuadrados partidos por una de sus diagonales.

Tras el análisis de esta pregunta se aprecia que, pese a que la mayoría indica correctamente que la proposición es verdadera, sus argumentos para justificar son bastante débiles e incluso inexistentes, lo cual evidencia carencias en el significado pues están dejando de lado los razonamientos y estrategias, brindando una respuesta, posiblemente, de memoria.

Pregunta 3

Se solicitó a los estudiantes que dibujaran el círculo trigonométrico, y que, además determinaran su radio. Esta pregunta se engloba en uno de los componentes del triángulo semántico: los sistemas de representación; estos son de suma importancia para dotar de significado a los diferentes contenidos matemáticos que se trabajan en el aula, por tanto, el ítem buscaba conocer la noción que tienen los estudiantes acerca del círculo unitario, el cual permite construir las razones trigonométricas. Al pedir explícitamente que lo dibujaran, se está trabajando con el componente gráfico de los sistemas de representación. Se esperaba que los estudiantes realizaran el dibujo de una circunferencia centrada en el origen del plano cartesiano y anotaran los valores de los puntos donde la circunferencia se interseca con los ejes. En la tabla 4.3 se clasifican las respuestas brindadas por los 33 estudiantes:

Tabla 4.3

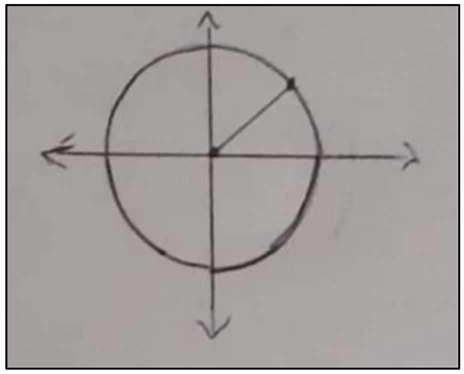
Frecuencia de respuestas de la pregunta 3

Respuesta	*Frecuencia*
Dibuja el círculo centrado en el origen, sin especificar la medida del radio.	16
Dibuja el círculo centrado en el origen, con medida de radio distinto a uno.	2
Dibuja el círculo centrado en el origen, con medida de radio uno.	3
Dibuja el círculo sin centrar en el origen	6
No dibuja el círculo	6
Total	33

La tabla 4.3 permite observar que la mayoría de los estudiantes dibujan el círculo centrado en el origen del plano cartesiano, pero no anotan el valor del radio de la circunferencia, ni ningún otro dato que permita identificar dicha medida. En la figura 4.4, se muestra el círculo trigonométrico que adjuntó el estudiante MGB_001:

Figura 4.4

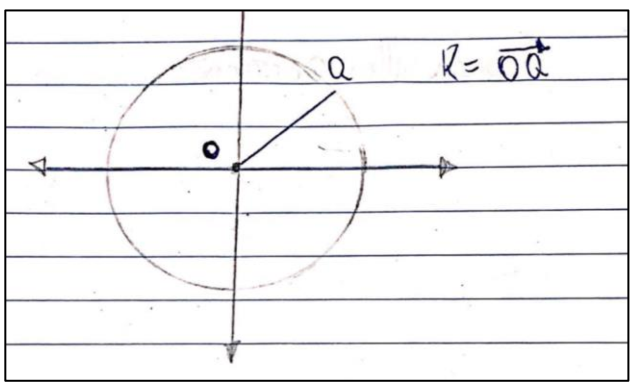
Respuesta dada por MGB_001 a la pregunta 3



El estudiante MGA_015 planteó algo similar (ver figura 4.5); quien representa el radio como un segmento que va del centro de la circunferencia a un punto Q en la frontera, sin embargo, no brinda ninguna medida específica para este.

Figura 4.5

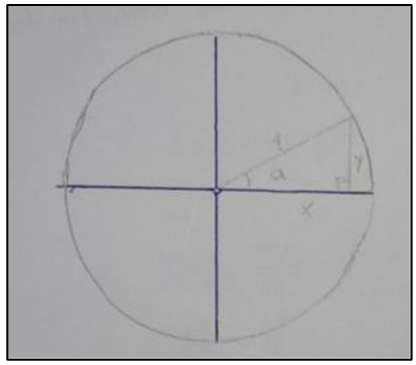
Respuesta dada por MGA_015 a la pregunta 3



Como se detalla en la tabla 4.3, sólo tres estudiantes dibujan un círculo de radio uno y centrado en el origen, de los cuales cabe destacar la respuesta dada por MGB_016 (ver figura 4.6) quién no sólo hace lo que se le pide en el ítem, sino que es capaz de realizar un triángulo rectángulo en el primer cuadrante, etiquetando el cateto correspondiente al *eje x*, el *eje y* y a la hipotenusa como el radio con medida uno.

Figura 4.6

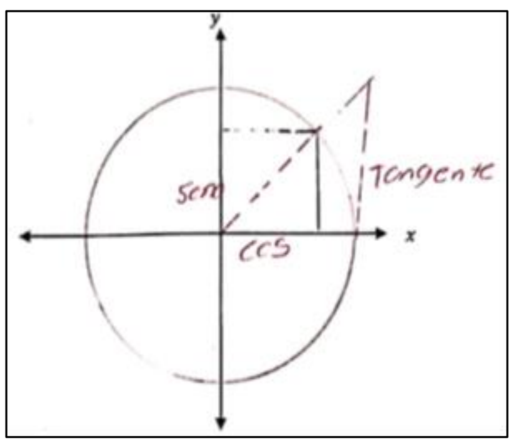
Respuesta dada por MGB_016 a la pregunta 3



También, se puede destacar la respuesta dada por MGB_006 (ver figura 4.7), quién, a pesar de no dar un valor explícito del radio, pareciera tener claro la relación entre el círculo y las razones trigonométricas, esto debido a que señala de manera correcta el *eje x* como coseno y al *eje y* como seno, además de extender un triángulo para representar la tangente.

Figura 4.7

Respuesta dada por MGB_006 a la pregunta 3



Pregunta 4

Para las preguntas 4 y 5 se planteó un mismo enunciado: “Considere el triángulo △ABC, con ∢ABC=90º y ∢BCA=30º. Además, se sabe que la medida del lado AC es igual a 10”.

En la pregunta 4 se les solicitó a los estudiantes representar gráficamente dicho triángulo. Para clasificar las respuestas, se plantearon cuatro categorías donde se evidencian diferentes niveles de logro, las cuales se pueden observar en la tabla 4.4.

Tabla 4.4

Frecuencia de respuestas de la pregunta 4

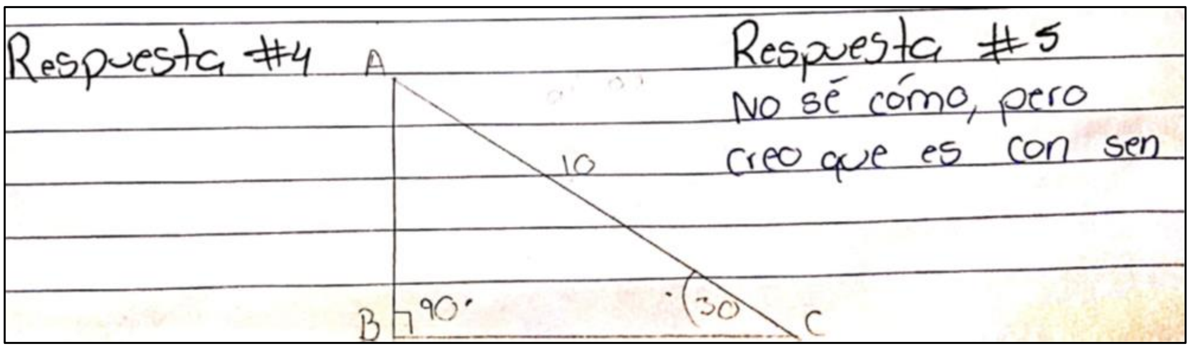
Respuesta	*Frecuencia*
Representa el triángulo correctamente con la medida del ángulo BCA y el segmento AC.	18
Dibuja el triángulo con los vértices correctamente pero no anota la medida del ángulo o el segmento.	6
Representa el triángulo de forma incorrecta.	5
No representa ningún rectángulo.	4
Total	33

Con esta pregunta, se pretendía identificar la idea sobre la representación gráfica que poseen los estudiantes del triángulo rectángulo, así como la correcta ubicación de sus medidas en los catetos y la hipotenusa. Se esperaba que los estudiantes realizaran el dibujo de un triángulo rectángulo especial, con una hipotenusa de medida 10. Como se observa en la tabla 4.4, la mayoría anotaron correctamente la medida de los ángulos y la medida del segmento AC.

En particular, se muestra la respuesta brindada por el estudiante MGB_005 (figura 4.8) donde representó correctamente el triángulo con sus componentes.

Figura 4.8

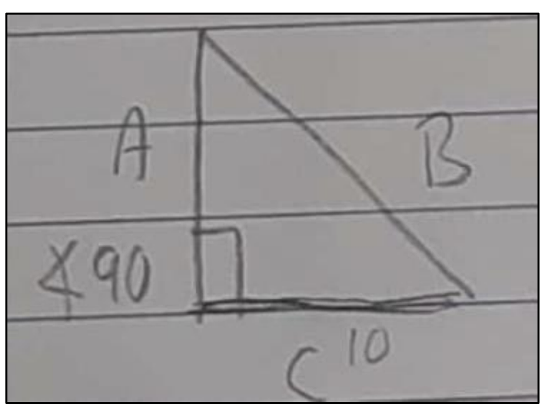
Respuesta dada por MGB_005 a la pregunta 4 y 5



En la figura 4.9, se observa la respuesta del estudiante MGB_014, se aprecia que presenta algunas deficiencias, por ejemplo, no reconoce las letras A, B y C, como los vértices del triángulo; además, anotó el número 10 en el supuesto lado C, pero de ninguna forma se observa que lo relacione con A.

Figura 4.9

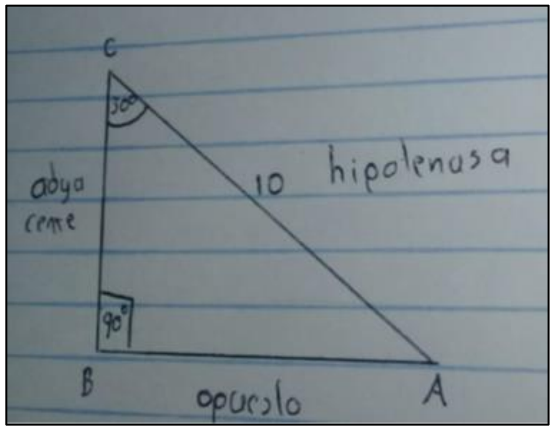
Respuesta dada por MGB_014 a la pregunta 4



Cabe destacar la respuesta brindada por el estudiante MGA_004 figura 4.10), pues este decide detallar aún más su respuesta, etiquetando la hipotenusa y los catetos de manera correcta, evidenciando así su entendimiento de algunos aspectos básicos.

Figura 4.10

Respuesta dada por el estudiante MGA_004 a la pregunta 4



Las respuestas dadas, evidencian concepciones muy distintas que poseen estos estudiantes en cuanto al significado y componentes de un triángulo rectángulo, donde se aprecia que algunos de ellos no dominan ni siquiera los elementos básicos, lo cual es la base fundamental para poder entender las razones trigonométricas y la geometría en general.

Pregunta 5

Se solicitó a los estudiantes que determinaran la medida del lado BC del triángulo dado en el enunciado anterior. Con esta pregunta se pretendía medir la estructura conceptual, referente a destrezas y razonamientos. Se esperaba que los estudiantes utilizaran la razón trigonométrica *coseno* para hallar el valor de BC, y tomando en cuenta que es un triángulo especial, el valor de coseno se podía calcular para despejar la ecuación.

En la tabla 4.5 se puede observar que la mayoría de los estudiantes dijeron no recordar el procedimiento o no brindaron ninguna respuesta. Sin embargo, dos estudiantes sí obtuvieron la respuesta correcta, pero uno de ellos no brindó procedimiento, por lo que es posible que nada más supiera el valor de memoria.

Tabla 4.5

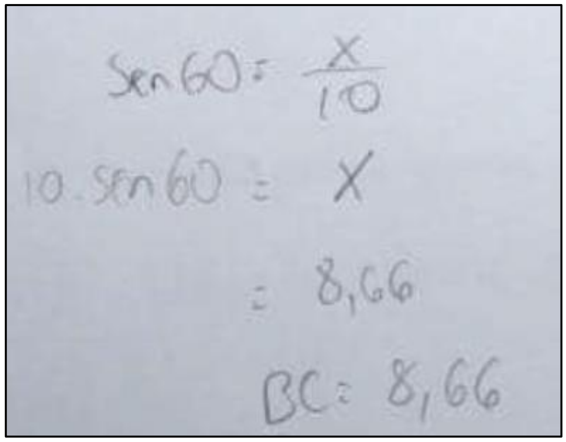
Frecuencia de respuestas de la pregunta 5

Respuesta	*Frecuencia*
Determina la medida correctamente y adjunta procedimiento	4
Determina la medida correctamente sin procedimiento.	2
Realiza un procedimiento erróneo y/o brinda una respuesta incorrecta.	9
No brinda respuesta.	18
Total	33

En la figura 4.11 se adjunta el procedimiento realizado por el estudiante MGB_007, uno de los que evidencia la utilización de la razón trigonométrica que establece que el seno de un ángulo es igual al cociente de la medida del cateto opuesto por la medida de la hipotenusa.

Figura 4.11

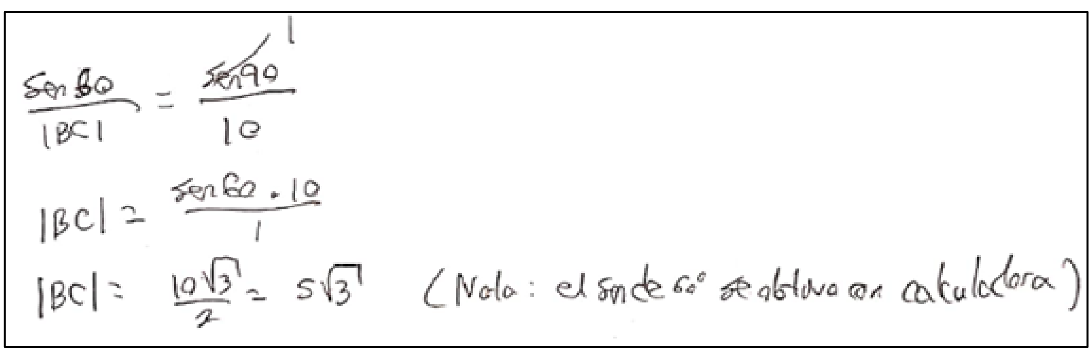
Respuesta dada por el estudiante MGB_007 a la pregunta 5



De forma similar, en la figura 4.12, se observa la respuesta brindada por el estudiante MGA_012, el cual logró obtener la respuesta correcta, donde además se puede observar que utilizó la Ley de Senos.

Figura 4.12

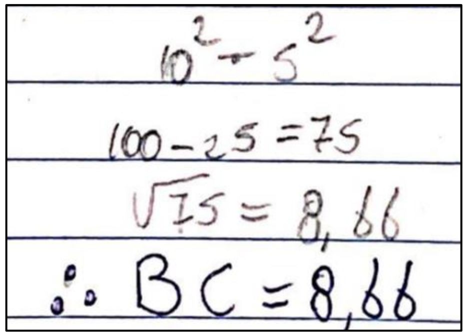
Respuesta dada por el estudiante MGA_012 a la pregunta 5



También, se resalta la respuesta brindada por el estudiante MGA_015 en la figura 4.13, el cual, también logró determinar la respuesta correcta, pero empleando únicamente el Teorema de Pitágoras, sin hacer uso de razones trigonométricas. Es evidente que el orden en la resolución del ejercicio no es el más apropiado ya que no lleva una secuencia de igualdades; sin embargo, logra obtener el valor deseado.

Figura 4.13

Respuesta dada por el estudiante MGA_015 a la pregunta 5



Esto resulta ser bastante enriquecedor pues, ante una misma pregunta, se recurre a distintos procedimientos (el cual es uno de los elementos del significado); un estudiante utiliza más la definición del contenido matemático y el otro se apoya en un teorema que incorpora el uso de triángulos especiales.

Con esta pregunta, se buscaba que los estudiantes se basaran en la representación gráfica para poder encontrar la medida solicitada, por lo que resulta curioso analizar cómo a pesar de que varios estudiantes lograron realizar la representación correctamente, casi ninguno logró obtener la medida solicitada.

Rescatando lo planteado por Castillo-Céspedes et al. (2017), sobre la importancia de conocer la representación gráfica, así como interpretar su correcto modo de uso para tener una noción del significado certera, se evidencia que los estudiantes poseen fragmentos de dichos componentes, conocen la representación, pero no la forma de aplicarla en la resolución de un problema.

Pregunta 6

Los estudiantes debían indicar si era posible representar un triángulo en donde el seno y el coseno de dos de sus ángulos tengan el mismo valor; de ser afirmativa la respuesta, se les pidió que lo representaran. Esta pregunta pretendía medir tanto la estructura conceptual en el ámbito de razonamientos y estrategias, como los sistemas de representación en su componente gráfico. Se esperaba que los estudiantes afirmaran la expresión y dieran por ejemplo el triángulo especial cuyos ángulos agudos miden 45°.

La mayoría de los estudiantes no sabía cómo responder la pregunta, tal como se muestra en la tabla 4.6, sólo dos de ellos respondieron de forma afirmativa y brindaron una justificación correcta, otros ocho estudiantes afirmaron que sí se podía representar el triángulo, algunos hicieron uso de un triángulo isósceles, pero sin detallar los ángulos, o bien, lo hicieron de forma incorrecta.

Tabla 4.6

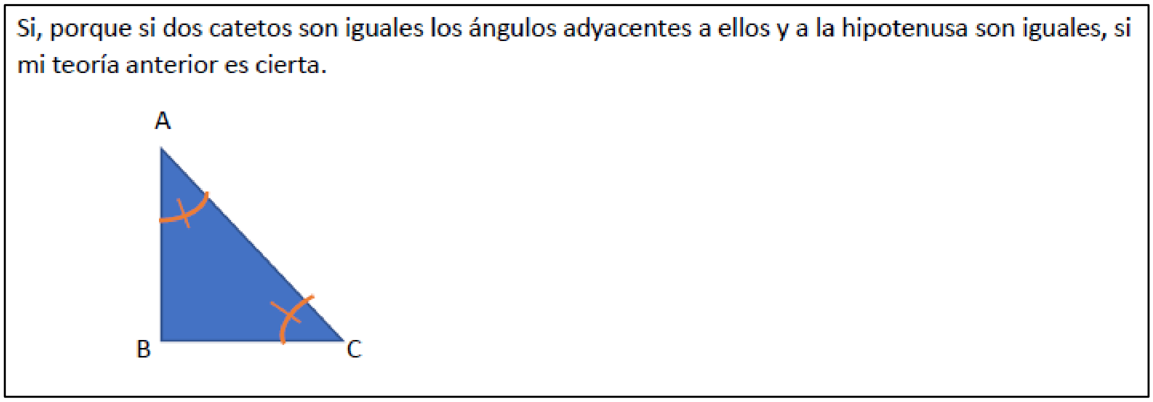
Frecuencia de respuestas de la pregunta 6

Respuesta	*Frecuencia*
Afirma que sí con una correcta justificación.	2
Afirma que sí con una incorrecta justificación.	8
Afirma que no y no brinda una justificación válida.	2
No responde o dice que no sabe.	21
Total	33

Resulta importante observar la respuesta brindada por el estudiante MGB_004, ya que, como se observa en la figura 4.14, este afirma que sí se puede y de hecho brinda un triángulo rectángulo señalando que los ángulos distintos al ángulo recto son iguales ya que los catetos poseen la misma medida.

Figura 4.14

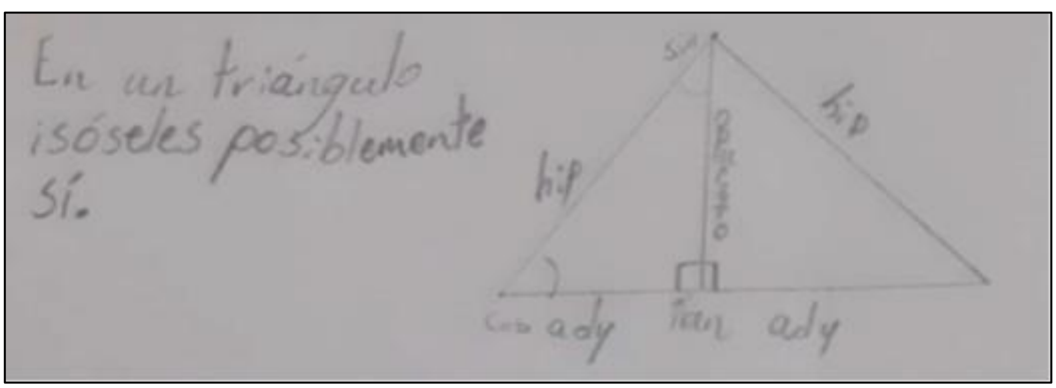
Respuesta dada por el estudiante MGB_004 a la pregunta 6



Además, el estudiante MGA_016 dio una respuesta bastante interesante, ya que afirma que, sí se puede representar y lo hace mediante un triángulo isósceles, en el cual hace una división para que se tengan dos triángulos rectángulos en donde etiqueta los catetos e hipotenusas respectivas. En la figura 4.15 se observa su respuesta.

Figura 4.15

Respuesta dada por el estudiante MGA_016 a la pregunta 6



Rico y Moreno (2016), explican que los sistemas de representación permiten identificar los diferentes aspectos o correspondencias de los contenidos matemáticos; las respuestas tomadas anteriormente son un ejemplo de lo que plantean, ya que se toman dos representaciones gráficas distintas para dotar de sentido una afirmación planteada.

Pregunta 7

Se planteó lo siguiente: ¿Existe alguna relación entre el signo de tangente de un ángulo con el de seno y coseno del mismo ángulo? Justifique.

Por medio de esta pregunta se pretendía averiguar el componente de estructura conceptual, en el ámbito procedimental. Se esperaba que los estudiantes afirmaran esta pregunta justificando que la razón trigonométrica tangente se definía como el cociente de seno y coseno, y que, por tanto, sus signos determinaban el signo de tangente.

En la tabla 4.7 se puede observar que hubo seis estudiantes que respondieron correctamente y brindaron una justificación válida. Igualmente, hubo cuatro estudiantes que dijeron que sí existe relación entre las identidades planteadas, pero cuya justificación no fue correcta o fue insuficiente.

Tabla 4.7

Frecuencia de respuestas de la pregunta 7

Respuesta	*Frecuencia*
Afirma que sí con una correcta justificación.	6
Afirma que sí con una incorrecta justificación.	4
Afirma que no y no brinda una justificación válida.	1
No responde o dice que no sabe.	22
Total	33

Por ejemplo, el estudiante MGB_005 escribió: "Sí, porque para resolver cualquiera de ellos se necesitan entre sí", lo cual no siempre es cierto, pues no es necesario conocer los valores de las demás razones trigonométricas para averiguar una en particular, siempre y cuando se posean los valores de los lados y ángulos del triángulo.

La pregunta pretendía abarcar el ámbito procedimental de la estructura conceptual del triángulo semántico propuesto; Rico y Moreno (2016) explican que es en este campo donde se toman en cuenta los modos de procesamiento y el conocimiento que sustentan las propiedades, operaciones y métodos matemáticos. Como se mencionó, la idea era conocer la relación que los estudiantes podían plantear acerca de dos conceptos trigonométricos: el signo de la tangente con el signo del seno y el coseno.

Ahora bien, de esta pregunta es muy importante rescatar que la gran mayoría no respondieron o dijeron desconocer la respuesta, lo cual muestra un bajo dominio en cuanto a las razones trigonométricas y aritmética básica, es decir, y siguiendo la idea de Rico y Moreno (2016), las destrezas que se pretendían observar en los estudiantes fueron escasas, ya que sí demostraron un conocimiento de la identidad que establece que la tangente de un ángulo es el cociente de seno por coseno, pero no desarrollan a profundidad el razonamiento que les permitiera deducir que los signos de los mismos influyen directamente sobre el signo de tangente.

Pregunta 8

Se decidió plantearles a los estudiantes un problema en el que debían aplicar las razones trigonométricas. El enunciado presentado es el siguiente: Si en un momento dado, un árbol de 24m de altura proyectó una sombra de 16m, ¿cuál es el ángulo de elevación del sol en ese momento?

En este punto, la pregunta gira en torno al componente de sentidos y modos de uso, abarcando específicamente el contexto, así como también los sistemas de representación, en el caso de que los estudiantes realizaran un dibujo como apoyo al problema.

Se esperaba que los estudiantes realizaran una representación gráfica que les ayudara a analizar eficientemente el problema, donde además utilizaran la identidad trigonométrica tangente para calcular el ángulo de elevación, pues los dos datos brindados corresponden a los catetos del triángulo rectángulo que se forma entre el árbol y su sombra.

Como se observa en la tabla 4.8, poco más de la mitad de los estudiantes del grupo lograron plasmar una forma gráfica que representara el problema planteado, sin embargo, sólo tres de ellos dieron respuesta y justificación correcta.

Tabla 4.8

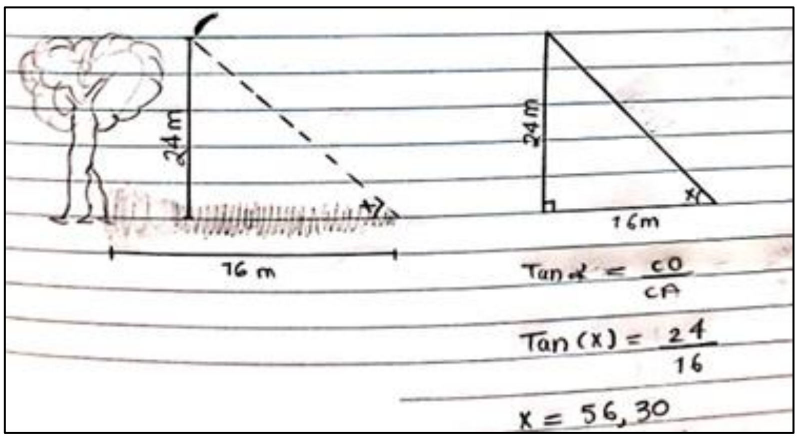
Frecuencia de respuestas de la pregunta 8

Respuesta	*Frecuencia*
Responde de forma correcta con apoyo de una representación gráfica.	3
Representa la gráfica que moldea el problema, pero no brinda la respuesta o es incorrecta.	14
No representa la gráfica que moldea el problema y responde de forma incorrecta.	2
No sabe/no responde	14
Total	33

A continuación, en la figura 4.16 se presenta la respuesta brindada por el estudiante MGA_013, quien representa gráficamente el problema de manera contextual, ya que inclusive hace un dibujo del árbol y el césped, pero, además, extrae la información y la representa mediante un triángulo rectángulo para proceder a aplicar la razón trigonométrica correspondiente.

Figura 4.16

Respuesta dada por el estudiante MGA_013 a la pregunta 8



Pregunta 9

Se cuestionó si se pueden plantear ejercicios similares al anterior en la vida real, y de ser así, para qué se usarían.

Esta pregunta buscaba que los estudiantes reflexionaran en cuanto a los sentidos y modos de uso y que brindaran ejemplos concretos de situaciones o contextos en donde se aplican las razones trigonométricas. Nótese que la pregunta se centra en *para qué* se usan, más que en *plantee usted un problema*.

En este caso las respuestas fueron muy variadas, sin embargo, la mayoría respondió afirmativamente y brindó algunos ejemplos sencillos, en su mayoría relacionados con la construcción, medición de alturas y ángulos, además, mencionaron rampas o pendientes. En la tabla 4.9 se resumen las respuestas brindadas:

Tabla 4.9

Frecuencia de respuestas de la pregunta 9

Respuesta	*Frecuencia*
Afirma que sí con una correcta justificación y brinda ejemplos.	16
Afirma que sí pero no brinda ejemplos.	7
No responde o dice que no sabe.	10
Total	33

Cabe destacar al estudiante MGA_012, quien fue muy amplio y claro en su respuesta al anotar lo siguiente: “Antes se utilizaban para calcular la hora, los radianes se utilizaban en muchos cálculos dinámicos junto con las identidades trigonométricas, se puede ver que esta materia es la base para problemas matemáticos más avanzados como: resistencia de materiales, estática y elementos de máquinas”.

Síntesis del cuestionario inicial

Después de realizar el análisis de las respuestas que dieron los estudiantes a las diferentes preguntas se pueden realizar varias reflexiones referentes a cada uno de los tres componentes del significado que se analizaron.

En primer lugar, se evidencia un manejo regular de la *estructura conceptual*. La primera pregunta muestra buenas bases en el ámbito conceptual pues las respuestas contemplaron una gran variedad de palabras; sin embargo, en la segunda pregunta se evidencia deficiencias en el ámbito procedimental, pues a la hora de justificar la veracidad de la expresión, la mayoría presentaron justificaciones incorrectas. Igualmente, en el ámbito procedimental, la pregunta cinco deja ver grandes deficiencias en cuanto a razonamientos y estrategias, pues la mayoría de los estudiantes no logró resolver el ejercicio o, peor aún, ni siquiera lo intentaron y/o decidieron dejarlo en blanco.

En cuanto a los *sistemas de representación,* es donde se presenta la mayor deficiencia. Las preguntas 3, 6 y 8 dejan en evidencia que la mayoría de los estudiantes presentó dificultades para realizar correctamente las representaciones gráficas, tanto simbólicas como gráficas. Por ejemplo, a la hora de dibujar el círculo trigonométrico, la gran mayoría realizó el trazo de un círculo, pero fueron pocos los que incluyeron elementos como el origen, los ejes y la medida del radio. Sin embargo, el panorama cambia un poco en la pregunta 4, en donde deben representar un triángulo rectángulo con ciertas medidas y, en este caso, la mayoría lo dibujó correctamente. Aquí resulta interesante analizar cómo los estudiantes tienen una mejor percepción de los triángulos, aunque los mismos incluyan más datos que la circunferencia trigonométrica. Una razón para ello puede ser que los contenidos relacionados con triángulos (medida de sus lados o ángulos, Teorema de Pitágoras) tienen mayor presencia en los programas de estudios de Matemática del MEP, que las habilidades relacionadas a las circunferencias, y menos aún, a la circunferencia trigonométrica.

Finalmente, en cuanto a los *sentidos y modos de uso,* el panorama es muy variado. Al preguntar a los estudiantes si podían mencionar contextos en donde se utilizaran las razones trigonométricas, la mayoría dieron respuestas muy apropiadas y variadas; sin embargo, el ejercicio que iba enfocado a que ellos resolvieran un problema aplicado en un contexto específico, resultó ser un gran reto para la mayoría, ya que gran parte de los estudiantes dejó la pregunta en blanco, y otra gran parte la resolvió de forma errónea. Se puede ver que los estudiantes sí tienen noción de los modos de uso de las razones trigonométricas, pero carecen de las habilidades (lo cual también entraría en el ámbito procedimental de la estructura conceptual) para dar con la correcta solución del ejercicio.

4.2 Cuestionario final

De igual forma, ahora se presentan los resultados obtenidos del cuestionario final, donde también se explica el alcance de cada pregunta, los componentes del significado presentes en cada una, las respuestas obtenidas y una síntesis de los resultados en general.

Pregunta 1

La primera pregunta pretendía que los estudiantes definieran con sus propias palabras qué son las razones trigonométricas. Esta pregunta se engloba en el componente del significado referido a la estructura conceptual, específicamente, a los *conceptos* dentro del ámbito conceptual (ver tabla 2.1). Se esperaba que los alumnos fueran capaces de hacer la relación entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo y las razones trigonométricas. Las respuestas de los seis estudiantes que contestaron el cuestionario se pueden agrupar en tres categorías, tal como se aprecia en la tabla 4.10.

Tabla 4.10

Respuestas a la pregunta 1

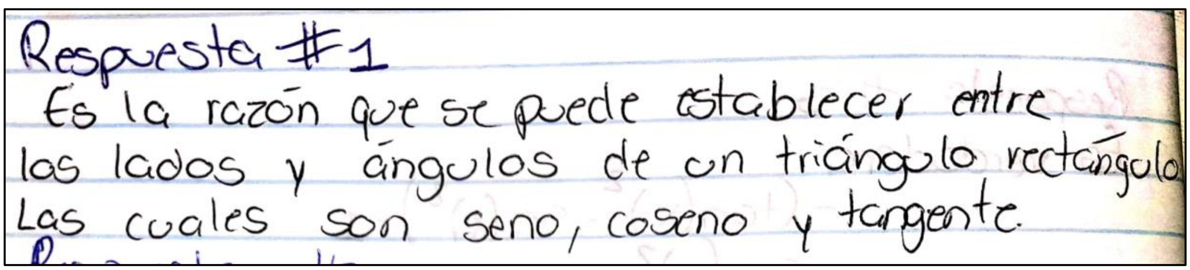
Categoría	*Frecuencia*
Menciona la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo y además nombra las razones trigonométricas.	1
Menciona la relación entre los lados y ángulos de un triángulo	

rectángulo, pero no nombra las razones trigonométricas.	3
Sólo menciona las razones trigonométricas.	2
Total	6

Es sumamente interesante ver el avance que han tenido los estudiantes en cuanto a lo que perciben como razones trigonométricas. Por ejemplo, el estudiante MGF_001 (ver figura 4.17) define las razones trigonométricas utilizando la relación de los ángulos y lados del triángulo rectángulo y después específica que estas son seno, coseno y tangente.

Figura 4.17

Respuesta dada por MGF_001 a la pregunta 1



Pregunta 2

En esta pregunta se les pidió a los estudiantes determinar la veracidad de la afirmación: “Si la medida de un ángulo es distinta a otro, con certeza se sabe que los valores de sus respectivos cosenos también serán distintos”; además, debían justificar el porqué de su respuesta. En este caso la pregunta hace referencia al componente de estructuras conceptuales del triángulo semántico. Específicamente, se engloba en un nivel de complejidad de razonamientos. En esta pregunta se esperaba que los estudiantes lograran hacer la relación de los ángulos coterminales con las razones trigonométricas, es decir, explicar que la proposición es falsa mediante dicha mención.

Tal como se observa en la tabla 4.11, de los seis estudiantes que respondieron el cuestionario, cinco mencionan que la afirmación es verdadera; cuatro de ellos explican que como las medidas de los ángulos son distintas, entonces los resultados del coseno también deben ser distintos. Es decir, todos los estudiantes brindaron argumentos incorrectos para responder esta pregunta.

Tabla 4.11

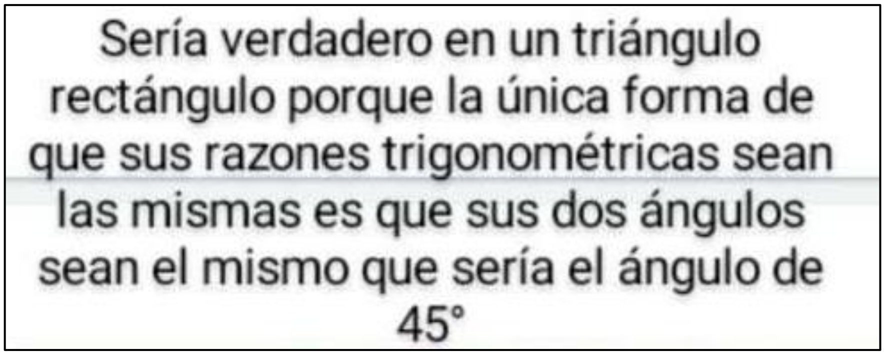
Respuestas a la pregunta 2

Categoría	*Frecuencia*
Determinan que es verdadera	5
Determinan que es falsa	1
Total	6

El estudiante MGF_006 (ver figura 4.18) hace mención en términos generales de que la única forma en que dos razones trigonométricas sean las mismas, es que sus dos ángulos sean el mismo y que, esto sólo va a suceder, si el triángulo rectángulo que se use tenga ángulos de 45°.

Figura 4.18

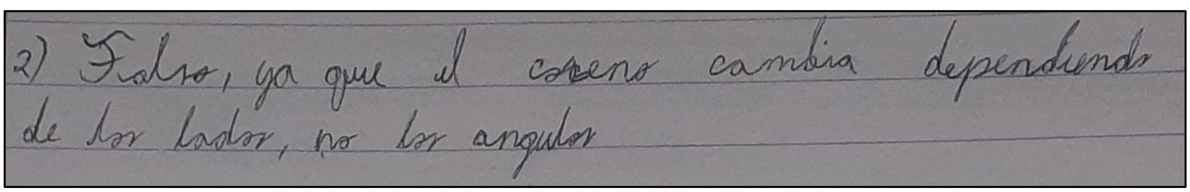
Respuesta dada por MGF_006 a la pregunta 2


Sería verdadero en un triángulo rectángulo porque la única forma de que sus razones trigonométricas sean las mismas es que sus dos ángulos sean el mismo que sería el ángulo de 45°

Por otra parte, es interesante observar la respuesta brindada por MGF_005 (ver figura 4.19); explica que la proposición es falsa pues el coseno depende de los lados y no de los ángulos. El significado que interpreta se centra únicamente en los lados del triángulo, es decir, en la relación del cateto adyacente y la hipotenusa.

Figura 4.19

Respuesta dada por MGF_005 a la pregunta 2


2) Falso, ya que el coseno cambia dependiendo de los lados, no los angulos

Pregunta 3

En la pregunta 3 se les planteó a los estudiantes determinar si era posible representar un triángulo en donde el valor del seno de un ángulo corresponda al valor del coseno del otro ángulo; y si respondían afirmativamente, debían representarlo. Esta pregunta se engloba en dos de los componentes del significado. Por un lado, desde la estructura conceptual, específicamente al componente de estrategias, se esperaba que los estudiantes fuesen capaces de deducir la relación que tienen las razones de seno y coseno con sus respectivos lados, para llegar a la conclusión de que en todo ángulo rectángulo se cumple la igualdad planteada entre el seno y el coseno; y además, se incorpora el componente de sistemas de representación, específicamente el gráfico, esto debido a que los estudiantes debían dibujar el triángulo en el que se cumpliera la proposición.

Dos de los seis estudiantes respondieron de manera afirmativa y brindaron argumentos correctos, sin embargo, sólo uno dibujó el triángulo donde se cumple lo solicitado. Por otra parte, en dos respuestas brindaron únicamente el dibujo de un triángulo rectángulo, pero sin dar detalle de este. En la tabla 4.12 se agrupan las respuestas:

Tabla 4.12

Frecuencia de respuestas de la pregunta 3

Categoría	*Frecuencia*
Responde de manera afirmativa y lo justifica con una explicación.	1
Responde de manera afirmativa, no justifica y brinda el triángulo correspondiente.	1
Sólo brinda el triángulo rectángulo	2
Responde que no es posible	1
No responde	1
Total	6

Cabe destacar la respuesta brindada por MGF_006 (ver figura 4.20); en esta, no se utiliza la representación del triángulo rectángulo para justificar que eso es posible en uno de los triángulos especiales; el sentido que le da es más de razonamiento, pues brinda otra perspectiva de la amplitud de sentidos que le dan los estudiantes a un contenido matemático escolar.

Figura 4.20

Respuesta dada por MGF_006 a la pregunta 3

Si en el triángulo rectángulo especial de 45 que es en el que sus dos ángulos agudos miden 45°

Pregunta 4

En esta pregunta se les pidió a los estudiantes representar un punto en el círculo trigonométrico donde el seno de un ángulo sea positivo y el coseno del mismo ángulo sea negativo. Adicionalmente, debían indicar las coordenadas de dicho punto. Esta pregunta comprende el componente del significado correspondiente a los sistemas de representación; en específico, el *gráfico*. En este caso, se esperaba que los estudiantes fuesen capaces de identificar el cuadrante en el que se encuentra el punto que cumple las condiciones, además de elegir un ángulo para determinar las coordenadas respectivas.

Cuatro de los estudiantes que respondieron el cuestionario colocaron el punto en el cuadrante correspondiente, además indicaron las coordenadas de manera correcta. El detalle de las respuestas se presenta en la tabla 4.13.

Tabla 4.13

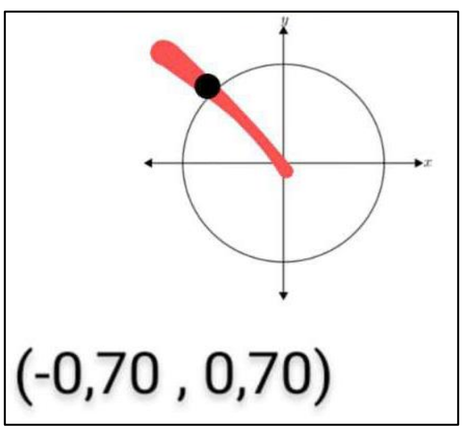
Frecuencia de respuestas de la pregunta 4, cuestionario 2

Categoría	*Frecuencia*
Identifica el cuadrante e indica las coordenadas del punto de manera correcta	4
Identifica el cuadrante correctamente, pero no indica las coordenadas del punto.	1
No responde	1
Total	6

El estudiante MGF_006 (ver figura 4.21) dibujó una línea en el segundo cuadrante, en el cual el coseno es negativo y el seno es positivo. Al final de la línea colocó el punto y detalló las coordenadas, además, aunque el redondeo falló por un decimal, se puede observar que aplicó de manera clara la idea del ángulo de referencia de 45°.

Figura 4.21

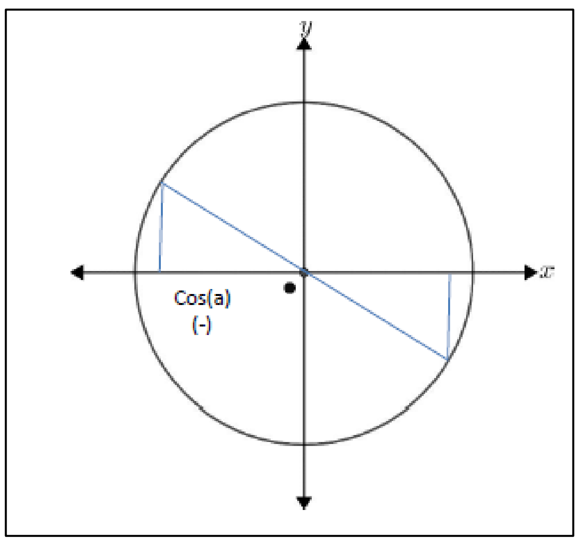
Respuesta dada por MGF_006 a la pregunta 4



Es importante también observar la respuesta dada por MGF_002 (ver figura 4.22). Este estudiante hace un triángulo rectángulo en el segundo y cuarto cuadrante, pero al parecer el punto lo coloca en un espacio cualquiera del tercer cuadrante. Lo interesante aquí es que en el segundo cuadrante efectivamente el coseno es negativo y el seno es positivo, por otro lado, en el cuarto es al revés, es decir, el coseno es positivo y el seno es negativo; lo que podría indicar que entiende que son cuadrantes en los que estas razones trigonométricas tienen signo opuesto, o bien, se podría suponer que piensa que en el cuarto cuadrante también ocurre lo mismo.

Figura 4.22

Respuesta dada por MGF_002 a la pregunta 4



Pregunta 5

En la pregunta cinco se les pidió a los estudiantes determinar si la proposición: $-(tan^2(x) - sec^2(x)) = 1$, es verdadera o falsa, además, debían justificar su respuesta. La pregunta se engloba en el campo procedimental de la estructura conceptual, específicamente en los niveles de complejidad de razonamientos y estrategias. Además, también están presentes los sentidos y modos de uso con el componente de contextos. Se esperaba que los estudiantes aplicaran procedimientos algebraicos para manipular la proposición hasta deducir de las identidades pitagóricas su veracidad.

Tres de los estudiantes realizaron los procesos algebraicos correctos para deducir, utilizando la identidad pitagórica, que la igualdad es verdadera. Mientras que dos no respondieron y la otra persona sólo dijo que era verdadera por la identidad pitagórica, pero no justificó. En la tabla 4.14 se detallan las respuestas recogidas.

Tabla 4.14

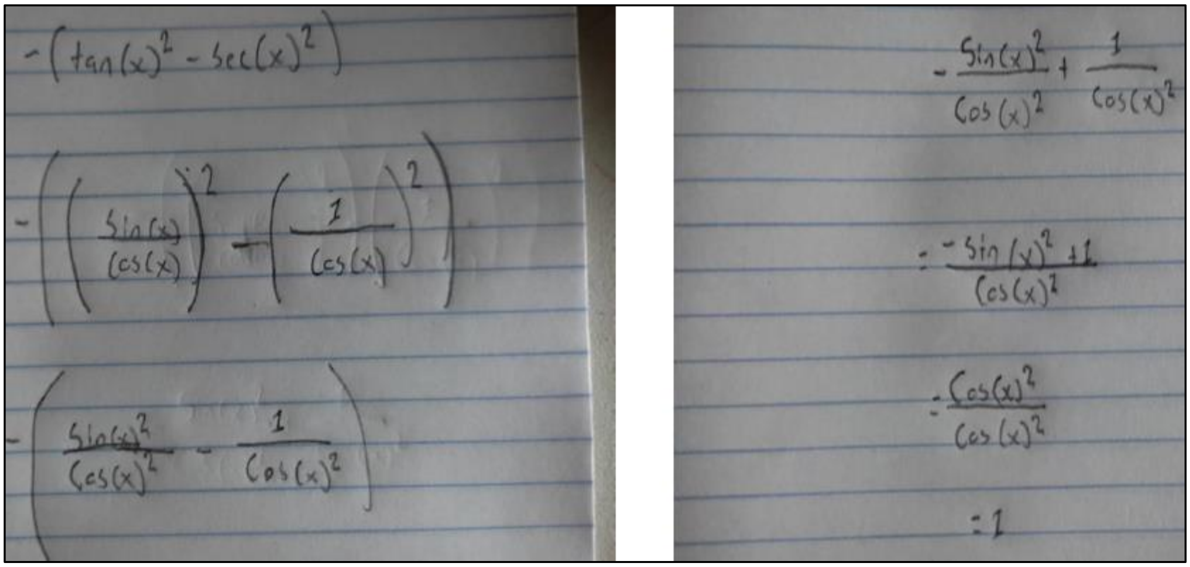
Frecuencia de respuestas de la pregunta 4

Categoría	*Frecuencia*
Utiliza procesos algebraicos y la identidad pitagórica para justificar que es cierta.	3
Menciona que es verdad por la identidad pitagórica pero no justifica algebraicamente	1
No responde	2
Total	6

Es importante destacar la respuesta de dos estudiantes, MGF_002 y MGF_004. Tal como se aprecia en la figura 4.23, MGF_002 manipula directamente la parte izquierda de la desigualdad; sustituye tangente y secante en términos de seno y coseno, esto le permite hacer una suma de fracciones homogéneas. El estudiante cierra el proceso algebraico manipulando la identidad pitagórica $1 - sen^2\,(x) = cos^2\,(x)$. Al final, obtiene una fracción equivalente a la unidad y comprueba la desigualdad.

Figura 4.23

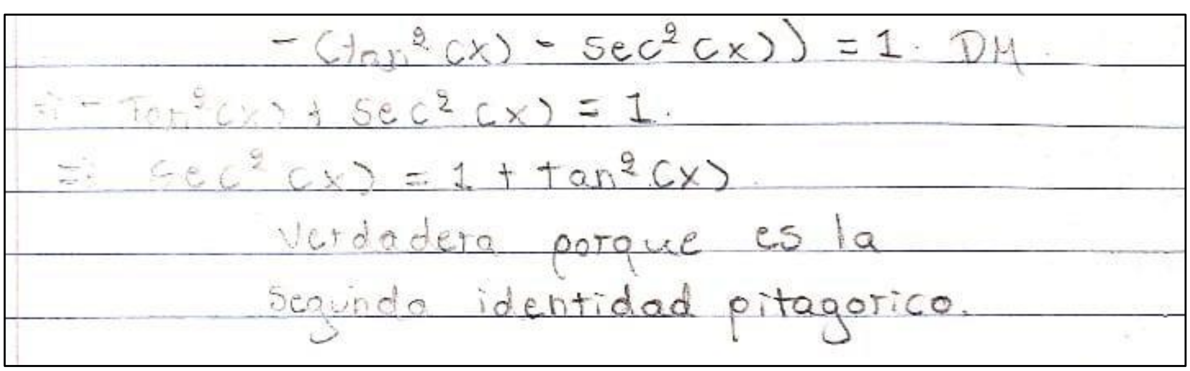
Respuesta dada por MGF_002 a la pregunta 5



Por otra parte, el estudiante MGF_004 (ver figura 4.24) inicia aplicando el signo menos al lado izquierdo de la igualdad para después sumar tangente al cuadrado en ambos lados, la cuestión acá es que simplemente menciona que $sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$ es verdadera porque es la segunda identidad trigonométrica.

Figura 4.24

Respuesta dada por MGF_004 a la pregunta 5



Pregunta 6

La última pregunta del cuestionario final corresponde a un problema en el que los estudiantes debían utilizar razones trigonométricas para resolverlo. El problema se observa en la figura 4.25 a continuación:

Figura 4.25

Pregunta 6 planteada en el segundo cuestionario

6. Suponga que un estudiante observa la ventana del último piso de la biblioteca con un ángulo de elevación de 45°. Si la altura desde la base del edificio de la biblioteca hasta la ventana es de 35m, ¿a qué distancia se encuentra el estudiante con respecto a la entrada de la biblioteca?

El problema se engloba en los tres componentes del significado. Primero, desde la estructura conceptual en el campo procedimental y un nivel de complejidad de destrezas, se pretendía que el estudiante pudiera utilizar los datos brindados para poder llegar a la solución mediante el cálculo de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo que se forma en el problema planteado. En segundo lugar, está el aspecto gráfico del componente de sistemas de representación, ya que se debían apoyar en una figura que propiciara el entendimiento y la resolución del problema. Por último, en el componente de sentidos y modo de uso, se presenta en torno a los componentes de contextos para calcular una distancia y se aplica en una situación personal.

De los seis estudiantes que respondieron, dos brindaron la respuesta correcta, tres identificaron el ángulo incorrectamente y el otro sí identifica correctamente el ángulo de elevación, pero brinda una respuesta errónea. En la tabla 4.15, se detallan las respuestas obtenidas y, seguidamente, se explica cada una de las categorías planteadas.

Tabla 4.15

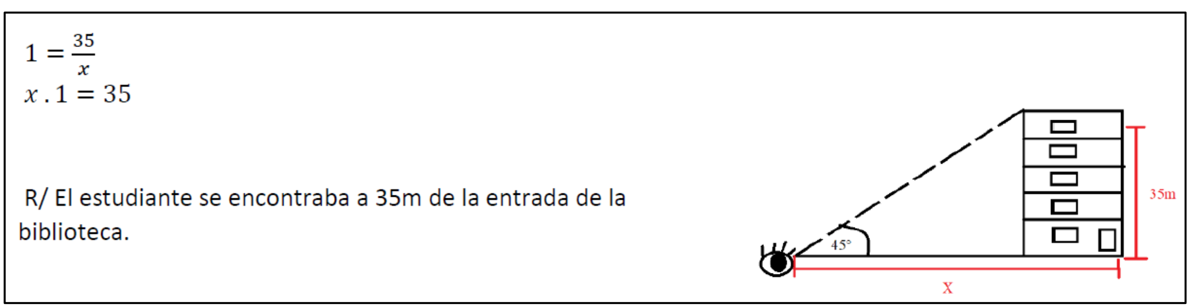
Frecuencia de respuestas de la pregunta 6

Categoría	*Frecuencia*
Brinda un procedimiento correcto y da la respuesta de manera correcta.	2
Realiza un procedimiento correcto, pero brinda una respuesta errónea.	1
Realiza un procedimiento ligeramente correcto y brinda una respuesta errónea.	3
Total	6

En la primera, se tienen dos estudiantes que brindan procedimientos distintos, pero ambos son correctos; por un lado, MGF_004 (ver figura 4.26) realiza un dibujo en el que se detalla el ángulo de elevación y los datos brindados, después realiza una ecuación en la que coloca el valor de tangente de 45° (el cual es uno) igualando a la división del cateto opuesto sobre el cateto adyacente, así, procede a despejar y determinar la respuesta.

Figura 4.26

Respuesta dada por MGF_004 a la pregunta 6



Por otro lado, el estudiante MGF_006 (ver figura 4.27) explica que, como el ángulo es de 45º y estamos con un triángulo rectángulo, entonces sus dos catetos deben medir lo mismo.

Figura 4.27

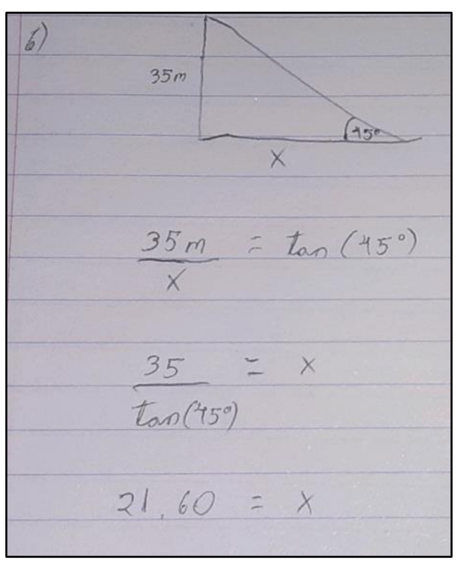
Respuesta dada por MGF_006 a la pregunta 6

R/ 35 metros porque para que un triángulo rectángulo tenga ángulos agudos de 45 grados sus dos lados tienen que medir lo mismo, es decir que de dónde está el observador a dónde está la biblioteca mide lo mismo que la altura donde está la última ventana de la biblioteca.

Ahora, en la segunda categoría se tiene el caso del estudiante MGF_005, en la figura 4.28 se puede observar su respuesta.

Figura 4.28

Respuesta dada por MGF_005 a la pregunta 6

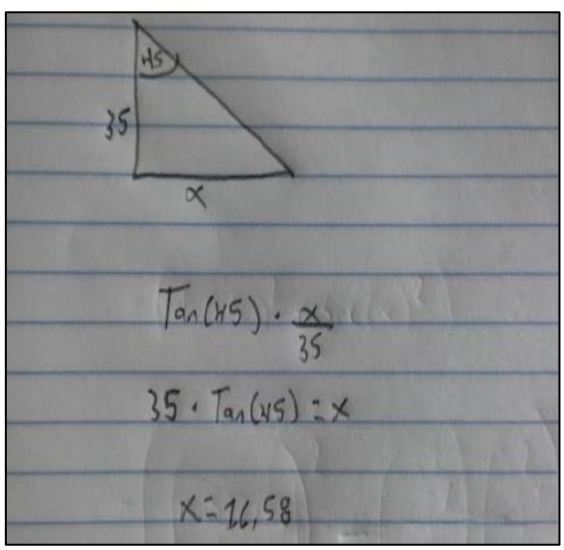


En la figura anterior se observa que el estudiante dibuja un triángulo rectángulo en el que detalla de manera correcta el ángulo de elevación y los datos brindados; realiza la ecuación de buena manera, es decir, iguala la tangente de 45º a la división del cateto opuesto sobre el cateto adyacente, sin embargo, al final calcula la tangente de manera incorrecta; al revisar la respuesta, se puede deducir que el error radica en que, a la hora de colocar la expresión en la calculadora, esta estaba en la unidad de radianes.

Por último, en la tercera categoría se engloban tres estudiantes que identifican el ángulo de elevación de forma incorrecta y lo ubican en el otro ángulo correspondiente al triángulo rectángulo que se forma. Sin embargo, gracias a que el mismo es de 45º, el fallo no les afecta en ese sentido y hacen la correcta relación entre la tangente del ángulo y los catetos. Al final, el principal error radica en lo mismo de la categoría anterior, es decir, por el resultado dado, cuando se utiliza la calculadora para determinar el valor, la misma está en la unidad de radianes. Se presenta el ejemplo del estudiante MGF_002 en la figura 4.29:

Figura 4.29

Respuesta dada por MGF_002 a la pregunta 6



Síntesis del cuestionario final

Una vez leídas y analizadas cada una de las respuestas brindadas por los estudiantes al segundo cuestionario, resulta importante mencionar algunas reflexiones que se pueden dar respecto a los elementos del triángulo semántico.

Desde la *estructura conceptual* se puede observar como la mayoría de los estudiantes logra entender lo que se les presenta, pudiendo así, generar diferentes destrezas, razonamientos y estrategias para resolver los ejercicios y justificar sus respuestas. Esto muestra un acercamiento al manejo del tema y, sobre todo, una mayor confianza en lo que responden, debido a que buscaban la manera de explicar el porqué de sus respuestas, aunque en algunos casos estas estuviesen mal.

Por otra parte, en los *sistemas de representación*; los estudiantes mencionan, manipulan y explican en diferentes preguntas el uso de elementos simbólicos y gráficos, no como un elemento auxiliar, sino como aspectos necesarios para poder resolver lo que se les plantea. En las respuestas se logra observar la utilización de diferentes figuras que permiten al estudiante extraer datos de la pregunta y representar la idea en un gráfico para una mejor manipulación del problema.

Lo anterior se complementa muy bien con los *sentidos y modos de uso*, ya que se pudo observar cómo los estudiantes interpretan un contexto y toman los datos importantes para poder representarlo de alguna manera que pudiese ser aplicado el contenido matemático correspondiente. Se observa capacidad en el entendimiento de diferentes contextos que se le pueden presentar al estudiante en el cual debían poner en práctica su conocimiento matemático.

A pesar de que hay algunas preguntas que, desde la teoría, están incorrectas, todas brindan información interesante de analizar. En general, los estudiantes mostraron tener cierta capacidad para generar su propio significado basándose en lo aprendido en la intervención educativa. En algunos casos se nota la capacidad de tomar el concepto y, por medio de procedimientos, poder plasmar el contexto en gráficos y símbolos que les permitan darle sentido al problema y, por supuesto, una correcta solución.

Capítulo 5: Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones y discusión que generó la investigación. El abordaje se inicia con la explicación del alcance de cada uno de los tres objetivos específicos planteados, además se detallan algunos aportes que el estudio realiza. Después, se mencionan algunas limitaciones que se presentaron durante el desarrollo del trabajo; por último, se proponen algunas recomendaciones sobre diferentes líneas de investigación que se pueden desarrollar en el futuro.

5.1 Discusión y logro de objetivos

En esta investigación se propuso como objetivo general: Analizar el significado que expresan los estudiantes de primer ingreso de la carrera Enseñanza de la Matemática sobre el contenido razones trigonométricas, de la Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica, durante el año 2021; para ello, se plantearon tres objetivos específicos. A continuación, se discute el logro de cada uno de ellos.

5.1.1 Objetivo específico 1

Describir el significado que expresan los estudiantes universitarios de primer ingreso de la carrera Enseñanza de la Matemática acerca de las razones trigonométricas previo a la intervención educativa.

Para abordar este objetivo se realizó el cuestionario inicial compuesto por nueve preguntas las cuales permitieron ahondar en el conocimiento que manifiestan los estudiantes respecto a las razones trigonométricas, esto desde los tres componentes del triángulo semántico: estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos y modos de uso.

Con respecto a la estructura conceptual, se logró evidenciar que la mayoría de los estudiantes estaban familiarizados con términos y nociones relacionados con las razones trigonométricas, además, similarmente a lo encontrado por Martín-Fernández et al. (2014), las concepciones eran bastantes variadas, basadas principalmente en el uso de seno y coseno. Esto es bastante interesante de observar pues gran parte de ellos no habían tenido un acercamiento al tema más allá de lo estudiado hace tres años, o más, en la educación secundaria. De hecho, en concordancia con Prada-Núñez et al. (2017), lo anterior queda en evidencia cuando se analizan las respuestas a preguntas con una complejidad mayor, como determinar la veracidad de una expresión, pues carecían de argumentos válidos para explicar su respuesta. Es decir, las respuestas manifiestan que, pese a existir alguna noción sobre las razones trigonométricas, el manejo de la estructura conceptual es débil.

En cuanto a los sistemas de representación, es el componente donde se encontraron las mayores deficiencias, tanto en su forma simbólica como gráfica. Se logró detectar que gran parte de los estudiantes no tenían noción de la representación de una circunferencia trigonométrica, esto refuerza lo encontrado por Aray et al. (2020) sobre la superficialidad de la enseñanza de la Trigonometría en secundaria, ya que, en el caso de Costa Rica, el tema correspondiente al estudio del círculo unitario ya no se incluye en el plan de estudios de Matemática del MEP, es decir, queda evidenciado como la superficialidad, o nula enseñanza de un tema, trae carencias importantes en la educación universitaria. Además, en concordancia con Diéguez et al. (2019), se logró identificar casos de estudiantes que no diferenciaban entre la medida de un lado de un triángulo o de un ángulo, pues en sus representaciones gráficas confundían dichos datos.

Finalmente, en lo que respecta a los sentidos y modos de uso, se obtuvieron bastantes intentos de respuestas a los cuestionamientos planteados. Entre ellas, se refuerza la importancia que plantea Ruiz-Hidalgo (2016) de incorporar distintos contextos en el concepto, ya que varios estudiantes sí conocían algunas áreas en donde se aplican las razones trigonométricas, sin embargo, manifestaron no saber cómo utilizarlas. Ahora bien, Martín-Fernández et al. (2014) explican que los datos encontrados en su investigación evidencian una poca conexión de la trigonometría con la cotidianidad, lo cual se contrasta con los resultados de las respuestas dadas en el cuestionario, ya que, se logró detectar que más de la mitad comprendieron y crearon una representación gráfica de la situación que se describía en los problemas, pese a esto, no lograron llevar a cabo los procesos matemáticos adecuados para solucionar el ejercicio correspondiente, lo cual estaría más bien relacionado con el componente conceptual de estrategias.

Es importante destacar el papel fundamental del instrumento empleado, ya que al igual que Vargas (2020), por medio del cuestionario se logró recabar la suficiente información que permitió conocer y describir algunos elementos del significado manifestados por los estudiantes en cuanto a la estructura conceptual, los sistemas de representación, y los sentidos y modos de uso de las razones trigonométricas.

5.1.2 Objetivo específico 2

Describir el significado que expresan los estudiantes universitarios de primer ingreso de la carrera Enseñanza de la Matemática acerca de las razones trigonométricas posterior a la intervención educativa.

Para cumplir con este objetivo, tras la intervención educativa que se describió en el capítulo 3, se realizó el cuestionario final compuesto por seis preguntas. Al igual que el primer cuestionario, este se creó considerando los tres componentes del significado de un contenido matemático, con el cual se pretendía analizar las ideas sobre razones trigonométricas tras la intervención educativa. Cabe destacar que, en este segundo cuestionario, no se pudo hacer un análisis tan amplio con las respuestas ya que, como se mencionó en la metodología, solamente seis estudiantes lo completaron. A continuación, se presentan las conclusiones obtenidas con este segundo cuestionario, desglosadas de acuerdo con los tres componentes del significado.

En la estructura conceptual se obtuvieron respuestas que evidencian un buen manejo de conceptos y destrezas, pues los sujetos son capaces de hacer conexiones que les permitan describir de manera más completa el contenido. A pesar de esto, y en concordancia con lo analizado por Castro (2015), las preguntas donde tenían mayor presencia las estructuras y razonamientos dejaron ver que aún existen deficiencias en esos procesos que, si bien es cierto, en cada pregunta al menos dos estudiantes realizaban los procedimientos correctamente, los demás todavía poseen algunos problemas para hallar la estrategia correcta y resolver el problema.

Por otra parte, en las respuestas dadas en este segundo cuestionario, los estudiantes presentan una buena concepción de los sistemas de representación. El avance en este componente supone un acierto a lo concluido por Aray et al. (2020), ya que en la intervención educativa se fomentó el manejo de los sistemas de representación para la apropiación conceptual. En este segundo cuestionario, las preguntas que buscaban que los discentes pusieran en manifiesto sus conocimientos sobre representaciones tanto gráficas como simbólicas, obtuvieron respuestas bastante acertadas. Incluso, se puede evidenciar un mayor manejo de este componente ya que la mayoría de las preguntas buscaban medir al menos dos componentes del significado y, de manera similar a lo planteado por Lupiáñez-Gómez (2016), en algunos casos los estudiantes no lograban llevar a cabo los procesos para alcanzar alguno de los otros, pero si realizaban correctamente la representación gráfica de la situación expuesta.

En los sentidos y modos de uso las respuestas fueron muy variadas. Se comparte una de las conclusiones planteadas por Martín-Fernández et al. (2016), ya que los estudiantes fueron capaces de extraer la información de un problema y transformarla a un lenguaje matemático, donde también entra en juego la representación simbólica; varios de ellos lograron llevar a cabo satisfactoriamente todos los procesos para solucionar ejercicios que incluyeran este componente y así dotar de significado el concepto. A pesar de este avance, se siguen notando deficiencias en la resolución de problemas. Es interesante analizar esto último con lo concluido por Prada-Núñez et al. (2017), pues también afirman que el mayor reto no se encuentra en el componente de sentidos y modos de uso, sino en la presencia de la estructura conceptual y los respectivos razonamientos y estrategias que se requieren de manera intuitiva para resolver un ejercicio del contenido matemático.

Por tanto, el segundo objetivo se cumplió de forma satisfactoria ya que, similarmente a lo concluido por Naranjo-Triana y Triana-Tobar (2015), por medio de un cuestionario llevado a cabo después de un análisis del grupo y, en este caso, de una intervención educativa previa al segundo cuestionario, se logró recolectar información valiosa que permitió analizar y, posteriormente, describir el significado que expresan los estudiantes sobre las razones trigonométricas desde los tres componentes del significado.

5.1.3 Objetivo específico 3

Identificar, si existe, el cambio de significado que expresan los estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática antes y después de realizar una intervención educativa sobre el tema.

Por último, el abordaje del tercer objetivo se realiza mediante una observación y comparación de lo recopilado por los dos cuestionarios. Como ya se mencionó, de ambos instrumentos se realizaron sus respectivos análisis desde la perspectiva del significado; a continuación, se pretende contrastar ambos resultados desde los tres vértices del triángulo semántico.

Desde la estructura conceptual se encontró un cambio significativo en la forma en que los estudiantes justifican sus respuestas, ya que, en el primer cuestionario, la mayoría de las respuestas carecían de una argumentación lógica; mientras que, en el segundo, explican y defienden, con un criterio significativamente mayor, el porqué de sus respuestas. Vilchez y Ramón (2017) concluyen en su investigación que, la utilización de una estrategia didáctica adecuada permite evidenciar cómo los estudiantes tienen una mejor comprensión de un contenido matemático, lo cual se complementa con los hallazgos de este segundo cuestionario. Además, reforzando lo concluido por Aray et al. (2020), otro aspecto importante que se concluye es que, a pesar de que los estudiantes siguen sin mostrar o mencionar aspectos relacionados de manera directa con las razones trigonométricas, tienen una mayor coherencia para establecer una relación con los lados del triángulo rectángulo, lo cual fortalece la estrategia planteada en la intervención.

Ahora bien, los cambios presentados por los estudiantes en cuanto a los sistemas de representación son bastantes interesantes. Se planteó una intervención educativa donde se pone en evidencia lo concluido por Lupiáñez-Gómez (2016), quien concluye que tiene gran importancia analizar de manera organizada y detallada las diferentes representaciones, permitiendo que el estudiantado reconozca, interprete y relacione los sistemas de representación. Lo anterior se refleja en la mejoría que tuvieron sobre la representación gráfica y simbólica de un problema para poder brindarle solución. Se observa un cambio importante debido a que en el primer cuestionario los estudiantes plasmaron la figura que se solicitaba, pero no sabían qué hacer con ella; en el segundo cuestionario se ve como, a pesar de que algunos estudiantes dan el resultado incorrecto, son capaces de manipular de forma acertada los sistemas de representación y los datos ahí plasmados.

Por último, en cuanto a los sentidos y modos de uso, se logró determinar que los estudiantes siguen siendo capaces de extraer información de los diversos contextos y situaciones, convertir los datos a una representación gráfica y/o simbólica que les permita desarrollar los procedimientos correspondientes y obtener la respuesta, sin embargo, similar a lo concluido por Ruiz-Hidalgo (2016), en el segundo cuestionario se evidenció una mayor apropiación de los conceptos que permitieron dar una respuesta más coherente, es decir, los estudiantes lograron entender el para qué sirve lo que se les plantea, es decir, tanto la estructura conceptual como la finalidad de sus modos de uso. Si bien es cierto, este fue el componente que tuvo menor presencia en los cuestionarios, las preguntas existentes fueron suficientes para determinar que los estudiantes tenían más seguridad para plantear sus posibles soluciones después de la intervención educativa.

Es importante rescatar que, a pesar de que la intervención fue corta, las lecciones se planificaron utilizando estrategias apropiadas para abarcar los diferentes componentes de la terna semántica, propiciando a que se pudiese evidenciar una mejoría en el significado manifestado por los estudiantes. Por tanto, en concordancia con Mora et al. (2014), quienes diseñan, aplican y analizan los resultados de una unidad didáctica; se fortalece y evalúa positivamente la intervención educativa como una estrategia adecuada para abordar un tema de Trigonometría desde los diferentes componentes de la terna semántica. Cantoral et al. (2015) explica la importancia de considerar el cómo la Matemática se puede ver, trabajar y desarrollar de distintas maneras y que, por tanto, es sumamente útil incorporar diferentes contextos que permitan desarrollar esa pluralidad conceptual, es así que, se termina de concluir que es bastante útil involucrar los componentes del significado a la hora de planificar las lecciones, pues sirven como guía para desarrollar el tema y lograr que el estudiante adquiera de forma más constructiva los conocimientos.

En conclusión, se puede decir que el objetivo se logró satisfactoriamente, ya que se pudo observar un cambio del significado puesto en manifiesto por los estudiantes después de la intervención educativa que se realizó, lo cual complementa lo planteado por Aray et al. (2020), quienes, citando a Solanilla (2015), explican la importancia de buscar diferentes formas didácticas para mejorar la apropiación de los aprendizajes en los estudiantes.

5.2 Aporte de la investigación

La investigación llevada a cabo como proyecto de graduación supone un aporte importante en el estudio del significado de contenidos matemáticos en el país. La educación en Costa Rica se encuentra en un proceso de cambio y reestructuración, por lo que brindar nuevos estudios que permitan el análisis de lo que se está aprendiendo en las aulas permite plantearse otras formas de abordar los diferentes temas que se quieran desarrollar. Además, esta investigación sienta un precedente en el área, pues es la primera investigación sobre significado enfocada en las razones trigonométricas que se realiza en el país.

El hecho de que el estudio se haya centrado en la Trigonometría supone un llamado de atención a los diferentes entes para concientizar sobre el poco estudio que se le está dando al tema en los colegios del país. De esta manera, se está dando un paso sumamente importante para visibilizar una problemática que está presente a nivel nacional y para la cual es urgente trabajar en posibles soluciones.

Los resultados obtenidos muestran la necesidad de dar un mayor énfasis al tema de Trigonometría en los primeros cursos de Matemática a nivel universitario, pues se pudo evidenciar que los estudiantes ingresan con muy pocos conocimientos en el tema. Así como Mora et al. (2014) concluyen la importancia de observar y considerar los diferentes significados que poseen los estudiantes de las razones trigonométricas para elaborar estrategias que contemplen las diferentes necesidades; en la presente investigación, se pudo constatar que el conocimiento que poseen los dicentes es muy vago; no existe una concepción integral del significado, por ejemplo, los estudiantes conocían conceptos o palabras asociadas con las razones trigonométricas, pero no conocían sus representaciones o sus modos de uso.

El trabajo realizado durante la intervención educativa, en donde se abordó el tema de razones trigonométricas desde la terna semántica del significado, generó resultados positivos pues se logró ver una mejora, principalmente en el razonamiento y argumentación que los estudiantes manifestaron en el segundo cuestionario, esto refleja una buena construcción de los contenidos matemáticos ya que como manifiestan Castillo-Céspedes et al. (2017), cuando los estudiantes tienen una adecuada construcción de significado, esto les permite entender y organizar sus ideas en torno a un contenido matemático.

Es importante rescatar el impacto que posee la investigación al haberse realizado con estudiantes que se encuentran en formación para ser educadores, pues la metodología empleada para realizar la intervención educativa les permitió aprender algunas nociones del contenido matemático de razones trigonométricas, desde los tres componentes de la terna semántica del significado, el cual era bastante nuevo para la mayoría; en concordancia con Castillo-Céspedes et al. (2017), para que realmente se comprenda un contenido matemático, es necesario conocer la interacción entre la definición, las representaciones y los modos de uso. Además, el impacto que se generó en ellos, como futuros educadores, puede influir en cómo enseñen el tema a sus estudiantes más adelante, ya que, tal como plantea Thompson (2013), si se espera que los docentes enseñen correctamente los diferentes contenidos matemáticos a sus estudiantes, lo esperable es que ellos estén bien preparados con respecto a los significados matemáticos.

Otro aporte que se puede rescatar de esta investigación fue la metodología y planificación que se realizó para la intervención educativa, el material teórico, los ejemplos y los ejercicios seleccionados, son ahora, documentos de referencia que otros docentes pueden utilizar para planear sus lecciones. Benítez-Galindo (2016) concluye que las intervenciones pedagógicas deben estar adecuadas a las necesidades del estudiantado y del contenido que se desea abordar, esto permitirá buscar la excelencia en el desempeño educativo y, sobre todo, fortalecer el desarrollo de prácticas reflexivas dentro y fuera del aula. Por tanto, los documentos que se aportan con esta investigación poseen un gran valor pedagógico ya que guían el desarrollo de las razones trigonométricas basándose en la construcción del significado a partir de la terna semántica. Además, se pueden utilizar como guía para desarrollar otro contenido matemático, donde le correspondería al nuevo docente establecer los cambios correspondientes en la teoría y ejemplos, pero siguiendo la misma línea de construcción de significado.

5.3 Limitaciones

Como todo trabajo de investigación, siempre existen algunas limitaciones en el desarrollo del estudio, sin embargo, estas no fueron impedimento para alcanzar satisfactoriamente los objetivos planteados. Algunas de las limitaciones encontradas se mencionan a continuación.

Cuando se empezó a trabajar en la investigación, a finales del 2020, mientras se escribía el capítulo I, se tenía la esperanza de poder realizar los cuestionarios y la intervención educativa de forma presencial, donde se pudiera tener una mayor interacción con los estudiantes, sin embargo, como las clases continuaron de forma virtual durante el 2021, se planeó realizar la intervención educativa de forma virtual y se logró llevar a cabo de forma satisfactoria.

Por otra parte, como el segundo cuestionario se realizó de forma asincrónica y un mes después de que el curso había finalizado, solamente seis estudiantes lo contestaron, por lo que no se obtuvieron tantas respuestas como con el primer cuestionario. Por esta razón, la comparación de los resultados no pudo ser tan enriquecedora, sin embargo, se logró realizar una comparación eficiente y notar cambios en el significado manifestado por los estudiantes.

Finalmente, a pesar de que se logró trabajar satisfactoriamente con los tres componentes del significado, lo cierto es que en ambos instrumentos había una mayor presencia de preguntas en torno a la estructura conceptual y una menor presencia de sentidos y modos de uso. Esta podría ser una de las razones por las que se obtuvieron resultados más interesantes con este primer componente y hubo menos variación en las respuestas referentes a sentidos y modos de uso.

5.4 Recomendaciones para futuras investigaciones

Como se comentó en el apartado correspondiente a los aportes, esta es la primera investigación sobre significado de razones trigonométricas que se realiza en Costa Rica, por lo que se espera que en el futuro se sigan desarrollando estudios más a profundidad. Para ello, se presentan algunas recomendaciones.

En primer lugar, ampliar el estudio sobre los sentidos y modos de uso, con el fin de que se puedan obtener más datos para analizar sobre diferentes contextos y situaciones. A pesar de que en la intervención educativa se realizaron bastantes ejemplos y se conectó la materia con los sentidos y modos de uso, en los cuestionarios estuvo menos presente por lo que se recomienda ampliar la investigación en torno a este componente de la terna semántica.

Por otra parte, sería interesante llevar a cabo una investigación donde se busque validar una intervención pedagógica basándose en los componentes del significado, similar a la que se utilizó en este estudio; esto permitiría que otros docentes lo integren en sus lecciones, teniendo así un impacto en la formación de futuros educadores, y por ende, en la enseñanza de la matemática desde la perspectiva del significado.

En el caso de que se realice otro estudio en donde se utilicen un cuestionario inicial y otro final, se recomienda realizar igual cantidad de preguntas en ambos cuestionarios y que las mismas sean análogas entre ellas, es decir, si las preguntas 1 y 2 del primer cuestionario se centran en la estructura conceptual, que en el segundo cuestionario ocurra de la misma forma; esto, para una mayor facilidad a la hora de analizar las respuestas y comparar los resultados de ambos cuestionarios. Además, se recomienda en la medida de lo posible aplicar ambos cuestionarios a los mismos participantes, para poder comparar mejor los cambios.

Por otra parte, si las condiciones se prestaran para realizar una investigación en un mayor lapso de tiempo, sería muy interesante darles un seguimiento a los estudiantes, para conocer qué tanto se va desarrollando su concepción del significado una vez que van adquiriendo mayores herramientas a lo largo de su formación como futuros educadores.

Bibliografía

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L., y Navarrete, S. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. *Rehuso*, *2*(5), 62–69. https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1684

Benítez-Galindo, L. (2016). Evaluación e intervención pedagógica en la formación de docentes. Una acción reflexiva en el aula de clases. *IE Revista de Investigación Educativa de La REDIECH*, *7*(12), 42–51. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v7i12.81

Braddock-Stradtmann, G. (2020). Fórmulas de “Trigonometría Áurea” para las funciones Seno y Coseno. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *20*(2), 1–30. https://doi.org/10.18845/rdmei.v20i2.5046

Cáceres, P. (2003). Análisis Cualitativo De Contenido: Una Alternativa Metodológica Alcanzable. *Psicoperspectivas*, *II*(1), 53–82. https://doi.org/10.5027/psicoperspectivas-vol2-issue1-fulltext-3

Cañadas, M., Gómez, P., y Pinzón, A. (2016). *Módulo 2-Análisis de contenido*. MAD 5. http://funes.uniandes.edu.co/8453/1/Ca%C3%B1adas2015Apuntes.pdf

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *8*, 9–28. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5672145.pdf

Castillo-Céspedes, M. J., Chaverri-Hernández, J. J., Hernández-Arce, K., y Vallejos-Meléndez, D. (2017). *Estudio de los significados atribuidos al Teorema de Pitágoras que manifiestan profesores de matemática en formación inicial en Costa Rica*. [tesis de licenciatura, Universidad de Costa Rica]. http://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr:8080/jspui/handle/123456789/6015

Castro, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros*. [tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/40316

Cerdas, D. (2021). 96% de alumnos de primer ingreso en UCR reprobó diagnóstico de Matemáticas. *La Nación*. https://www.nacion.com/el-pais/educacion/96-de-alumnos-de-primer-ingreso-en-ucr-reprobaron/NCZZDO5R5NFOBBRDKC32DTC67Y/story/?utm_source=socialflow&utm_campaign=socialflow&utm_medium=social

Cerdas, D. (2022). Diagnóstico de UCR a estudiantes de primer ingreso confirma desastre en Matemática. *La Nación*. https://www.nacion.com/el-pais/educacion/diagnostico-de-ucr-a-estudiantes-de-primer-ingreso/MXEJSSXWURG7BKVGZYFHBCAL4Q/story/

Diéguez, A., Batista, M., y Figueroa, H. (2019). Trigonometría significativa y metacognición. *Opuntia Brava*, *11*(2), 443–464. http://200.14.53.83/index.php/opuntiabrava/article/view/937

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2015). Reasoning based on the concept of finite limit of a function at a point. *Ensenanza de Las Ciencias*, *33*(2), 211–229. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575

Fiallo-Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* [[tesis doctoral, Universitat de Valéncia]]. https://www.educacion.gob.es/teseo/imprimirFicheroTesis.do?idFichero=yuWxCrIh1Kc%3D

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. [tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://funes.uniandes.edu.co/444/

González-Flores, Y., Fernández-Plaza, J. A., y Ruiz-hidalgo, J. F. (2020). Significados del concepto de límite de una función en un punto manifestados por alumnos universitarios de la Universidad Nacional de Costa Rica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 29–38. http://funes.uniandes.edu.co/22457/1/Gonzalez2020Significados.pdf

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., y Baptista-Lucio, M. del P. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta, Issue 4). McGraw Hill. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Lupiáñez-Gómez, J. L. (2016). Sistemas de representación. In L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 119–138). Pirámide. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=660283

Martín-Fernández, E., Ruiz-hidalgo, J. F., y Rico, L. (2014). Concepciones del seno y coseno de manifiesto por estudiantes de bachillerado. *Investigación En Educación*

Matemática XVIII, 455–464. http://funes.uniandes.edu.co/6084/1/Mart%C3%ADn2014ConcepcionesSEIEM.pdf

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de Las Ciencias*, *34*(3), 51–71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas*. San José. Costa Rica. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Molina, Lucía. (2019). Solo 6% de los estudiantes universitarios aprobaron el examen de diagnóstico de matemática de la UCR. *Semanario Universidad*. https://semanariouniversidad.com/universitarias/solo-6-de-los-estudiantes-universitarios-aprobaron-el-examen-de-diagnostico-de-matematica-de-la-ucr/

Mora, M. F., Nieto, E. X., Polanía, D. L., Romero, M. L., y González, M. J. (2014). Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes. In P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (Universida, pp. 261–341). http://funes.uniandes.edu.co/1894/1/Capitulo6_G5_RazonesTrigonometricasMultiplesLentes_.pdf

Naranjo-Triana, W. E., y Triana-Tobar, M. A. (2015). Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en Matemáticas: reflexiones de una indagación en el aula. *Revista Ejes*, *3*, 67–73. http://funes.uniandes.edu.co/9816/

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: Representación y significado. *Enseñanza de Las Ciencias*, *31*(3), 121–134. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/285795

Prada-Núñez, R., Hernández-Suárez, C. A., y Jaimes Contreras, L. A. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. *PANORAMA*, *11*(20), 33. https://doi.org/10.15765/pnrm.v11i20.1008

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 39–63. http://funes.uniandes.edu.co/1986/1/Rico_Avances.pdf

Rico, L., y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. In L. Rico, J. L. Lupiáñez, y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 1–22). Comares, S.L. https://fqm193.ugr.es/descargas/descargar/264/

Rico, L., y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. (L. Rico y A. Moreno, Eds.). Pirámide. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=660283

Rodríguez, M. (2017). *Estrategia didáctica apoyada en GeoGebra y el modelo de Van Hiele para la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas* [[Tesis de licenciatura, Universidad Estatal a Distancia]]. http://aleph23.uned.ac.cr/exlibris/aleph/a23_1/apache_media/PLCA1A3811SKF7E63FMNR8KK94AT4H.pdf

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. In L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139–152). Pirámide. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=660283

Thompson, P. W. (2013). In the Absence of Meaning... *Food, Culture y Society*, *8*(2), 57–93. https://doi.org/10.2752/155280105778055254

Vargas, M. (2020). *La derivada de una función desde la perspectiva de los profesores de Matemática de 1º de bachillerato*. [tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/63624/6494.pdf?sequence=4&isAllowed=y

Vilchez, J., y Ramón, J. (2017). *Aprendizaje personalizado de las funciones trigonométricas en educación secundaria*. II Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe. https://cemacyc.org/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/99/32

Apéndices

Apéndice A. Cuestionario Inicial

Cuestionario 1

Estimado estudiante,

El siguiente cuestionario forma parte de una investigación titulada “Significado que manifiestan estudiantes de primer año de la carrera Enseñanza de la Matemática sobre el tema de razones trigonométricas”; para optar por el grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, en la Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente.

La información aquí brindada será muy útil para poder desarrollar dicha investigación. Es importante que considere lo siguiente:

- Completar el siguiente cuestionario le tomará aproximadamente 30 minutos.
- No es una prueba de evaluación, por lo tanto, realícela con tranquilidad y transparencia.
- Sus respuestas serán confidenciales.
- Procure responder a todas las preguntas.
- Procure que las fotografías sean nítidas y claras.

¡Muchas gracias de antemano por su colaboración!

A continuación, se presentan 9 preguntas relacionadas con el contenido matemático Razones Trigonométricas, trabaje cada una de ellas en el espacio indicado.

1. Escriba cuatro palabras que vengan a su mente cuando escucha “razón trigonométrica”.

   ____

   ____

   ____

   ____

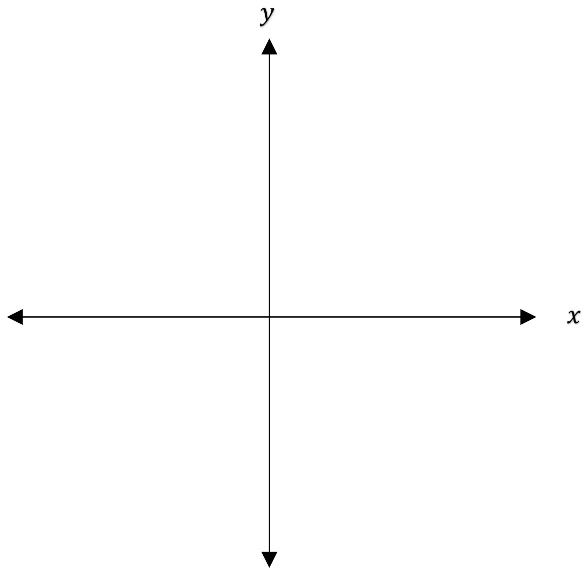
2. Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa y justifique su respuesta:

   “En un triángulo rectángulo, la tangente de un ángulo agudo relaciona las longitudes de los catetos”.

☐ Verdadera ☐ Falsa

Justifique:

3. Dibuje lo que entienda por círculo trigonométrico y determine su radio.



Para las preguntas 4 y 5, considere el triángulo △ABC, con ∢ABC=90º y ∢BCA=30º. Además, se sabe que la medida del lado AC es igual a 10.

4. Represente gráficamente el triángulo △ABC.

5. Determina la medida del lado BC.

6. ¿Se podría representar un triángulo en donde el seno y el coseno de dos de sus ángulos tengan el mismo valor? Si es así, represéntelo

7. ¿Existe alguna relación entre el signo de tangente de un ángulo con el de seno y coseno del mismo ángulo? Justifique.

8. Si en un momento dado, un árbol de 24m de altura proyecto una sombra de 16m, ¿cuál es el ángulo de elevación del sol en ese momento?

9. ¿Se podrían plantear ejercicios similares con problemas en la vida real? ¿Para qué se usarían?

Apéndice B. Cuestionario Final

Cuestionario 2

Estimado estudiante,

El siguiente cuestionario forma parte de una investigación titulada "Significado que manifiestan estudiantes de primer año de la carrera Enseñanza de la Matemática sobre el tema de razones trigonométricas"; para optar por el grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, en la Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente.

La información aquí brindada será muy útil para poder desarrollar dicha investigación. Es importante que considere lo siguiente:

- Completar el siguiente cuestionario le tomará aproximadamente 35 minutos.
- No es una prueba de evaluación, por lo tanto, realícela con tranquilidad y transparencia.
- Puede utilizar hojas adicionales; de ser así, enumere sus respuestas con el número de pregunta correspondiente.
- Sus respuestas serán confidenciales.
- Procure responder a todas las preguntas.
- Si se equivoca, tache la respuesta y corríjala aparte.
- Tome fotos a sus respuestas o escanéelas y envíelas en formato PDF.
-

¡Muchas gracias de antemano por su colaboración!

A continuación, se presentan 6 preguntas relacionadas con el contenido matemático *Razones Trigonométricas*, trabaje cada una de ellas en el espacio indicado.

1. En sus propias palabras, ¿cómo definiría las razones trigonométricas?

2. Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa y justifique su respuesta:

   "Si la medida de un ángulo es distinta de otro, con certeza se sabe que los valores de sus respectivos cosenos también serán distinto"

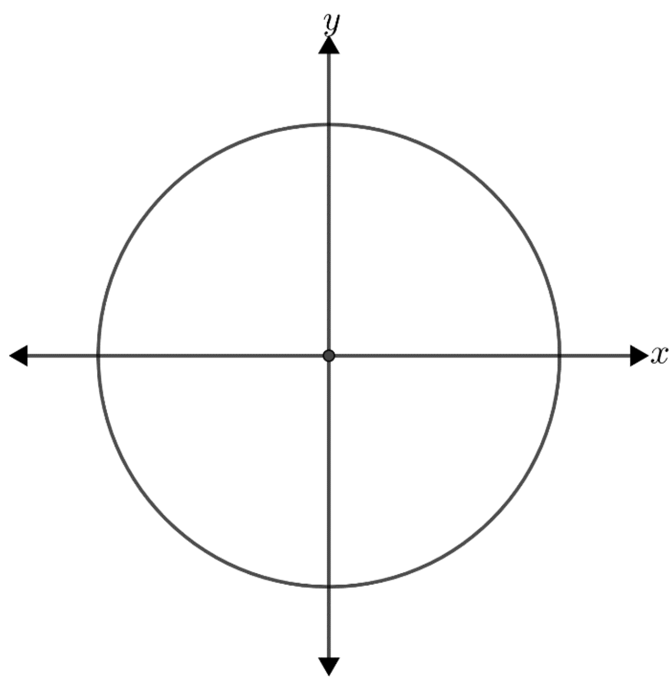
☐ Verdadera ☐ Falsa

Justifique:

3. ¿Se podría representar un triángulo en donde el valor del seno de un ángulo corresponda al valor de coseno del otro ángulo? Si es así, represéntelo.

4. Represente un punto en el circulo trigonométrico donde el seno (de un ángulo α) sea positivo y coseno (del mismo α) sea negativo.

Adicionalmente, indique las coordenadas del punto.



5. Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa y justifique su respuesta.

   Sugerencia: puede utilizar la identidad pitagórica.

$$-(\tan^2(x) - \sec^2(x)) = 1$$

6. Suponga que un estudiante observa la ventana del último piso de la biblioteca con un ángulo de elevación de 45°. Si la altura desde la base del edificio de la biblioteca hasta la ventana es de 35m, ¿a qué distancia se encuentra el estudiante con respecto a la entrada de la biblioteca?

¡Muchas gracias por su colaboración!

Apéndice C. Validaciones del cuestionario inicial

Primera Validación

Validación de instrumento: Cuestionario 1

En el siguiente instrumento se le muestra una tabla que hace referencia a las preguntas del documento **Propuesta de instrumento: Cuestionario 1.** Para cada uno de los componentes de la tabla, conteste la siguiente pregunta: ¿Cree usted que esta pregunta sirve para evaluar el componente del significado en cuestión?; utilizando una escala del 1 al 5 donde:

1: No estoy de acuerdo
2: Ligeramente de acuerdo
3: Parcialmente de acuerdo
4: Bastante de acuerdo
5: Totalmente de acuerdo

	Estructura conceptual*		**Sistemas de representación****		**Sentidos y modos de uso**		
	Conceptual	Procedimental	Simbólico	Gráfico	Modos de uso	Contextos	Situaciones
Pregunta 1	*5*	*1*	*4*	*1*	*5*	*1*	*1*
Pregunta 2	*4*	*4*	*1*	*3 (dependerá de la justificación)*	*1*	*1*	*1*
Pregunta 3	*4*	*4*	*2*	*4*	*1*	*1*	*1*
Pregunta 4	*1*	*4*	*1*	*5*	*1*	*1*	*1*
Pregunta 5	*1*	*5*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
Pregunta 6	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*5*
Pregunta 7	*5*	*1*	*1*	*4*	*1*	*1*	*1*
Pregunta 8	*5*	*1*	*3 (dependerá de la justificación)*	*3 (dependerá de la justificación)*	*1*	*1*	*1*
Pregunta 9	*3*	*5*	*1*	*1*	*1*	*3*	*5*

* Para efectos de esta investigación, no se abordará el ámbito actitudinal.

**Para efectos de esta investigación, la representación verbal y numérica se incluye dentro de la simbólica.

Por favor, responda a las siguientes preguntas:

¿Considera que el instrumento Cuestionario 1 logra evaluar el significado que manifiestan los alumnos sobre el contenido matemático Razones trigonométricas? Tome en cuenta que comprender el significado de un concepto implica "conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades, sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas" (Rico, 2016, p. 94).

Considero que es un buen acercamiento.

Si gusta agregar cualquier comentario o sugerencia, puede utilizar este espacio:

Quizá es demasiado ambicioso. Menos preguntas permitirían enfocar al investigador a los organizadores del significado de una manera más clara. En el caso de muchas preguntas, algunas de las respuestas pueden generar amalgama de elementos de significado que pueden ser difíciles de interpretar.

Segunda Validación

Validación de instrumento: Cuestionario 1

En el siguiente instrumento se le muestra una tabla que hace referencia a las preguntas del documento **Propuesta de instrumento: Cuestionario 1.** Para cada uno de los componentes de la tabla, conteste la siguiente pregunta: ¿Cree usted que esta pregunta sirve para evaluar el componente del significado en cuestión?; utilizando una escala del 1 al 5 donde:

1: No estoy de acuerdo
2: Ligeramente de acuerdo
3: Parcialmente de acuerdo
4: Bastante de acuerdo
5: Totalmente de acuerdo

	Estructura conceptual*		**Sistemas de representación****		**Sentidos y modos de uso**		
	Conceptual	Procedimental	Simbólico	Gráfico	Modos de uso	Contextos	Situaciones
Pregunta 1	*4*	*1*	*2*	*1*	*1*	*1*	*2*
Pregunta 2	*5*	*3*	*3*	*1*	*4*	*2*	*2*
Pregunta 3	*5*	*5*	*5*	*5*	*4*	*2*	*3*
Pregunta 4	*5*	*4*	*5*	*4*	*3*	*3*	*3*
Pregunta 5	*4*	*5*	*4*	*2*	*4*	*2*	*2*
Pregunta 6	*2*	*2*	*1*	*1*	*4*	*5*	*5*
Pregunta 7	*5*	*5*	*5*	*4*	*5*	*5*	*5*
Pregunta 8	*5*	*5*	*5*	*5*	*5*	*5*	*5*
Pregunta 9	*5*	*4*	*5*	*2*	*5*	*5*	*5*

* Para efectos de esta investigación, no se abordará el ámbito actitudinal.

**Para efectos de esta investigación, la representación verbal y numérica se incluye dentro de la simbólica.

Por favor, responda a las siguientes preguntas:

¿Considera que el instrumento Cuestionario 1 logra evaluar el significado que manifiestan los alumnos sobre el contenido matemático Razones trigonométricas? Tome en cuenta que comprender el significado de un concepto implica "conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades, sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas" (Rico, 2016, p. 94).

Sí claro, Con las preguntas 1,2,3,4, y 5 se evalúa la parte conceptual, procedimental y gráfica. Y para responder las preguntas como la 6, 7, 8 y 9, debe existir un razonamiento para llevar a cabo un proceso, donde interviene además del concepto y procedimientos, más aspectos tales como relaciones, modos de uso, interpretación y resolución de problemas.

Si gusta agregar cualquier comentario o sugerencia, puede utilizar este espacio:

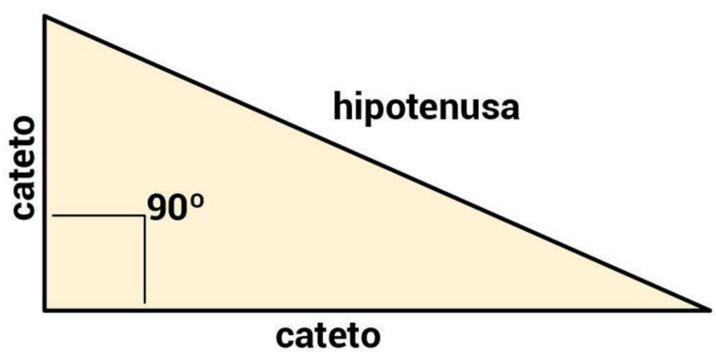
Apéndice D. Documentos de apoyo en la intervención educativa

Clase 1: Razones trigonométricas en triángulo rectángulos

Recordemos

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (es decir, que mida 90°), y sus otros dos ángulos son agudos.

Los lados que conforman el ángulo recto se llaman **Catetos,** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **Hipotenusa.**

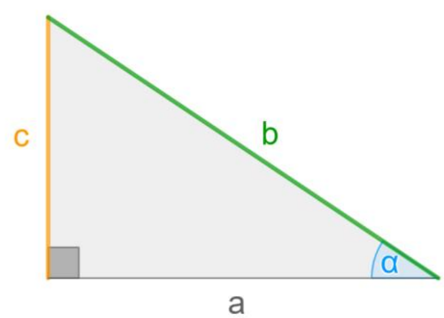


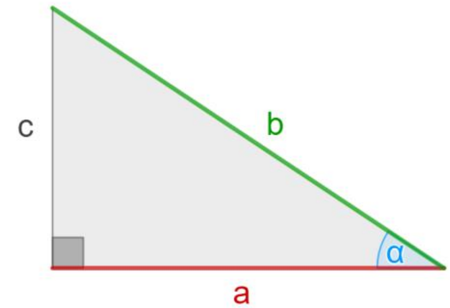
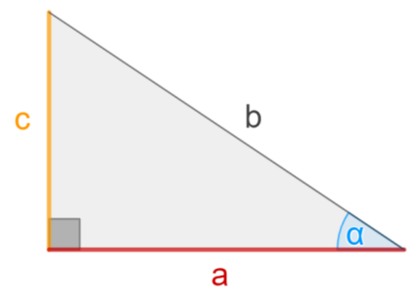
Razón trigonométrica

Una razón trigonométrica se refiera a la relación que existe entre la medida de los lados de un triángulo rectángulo con la medida de uno de sus ángulos agudos.

Existen 3 razones trigonométricas principales:

Seno, Coseno y Tangente.

Razón	Definición	Representación algebraica	Representación gráfica
Seno	$\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$sen(\alpha) = \frac{c}{b}$	

Coseno	$\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$cos(\alpha) = \frac{a}{b}$	
Tangente	$\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	$tan(\alpha) = \frac{c}{a}$	

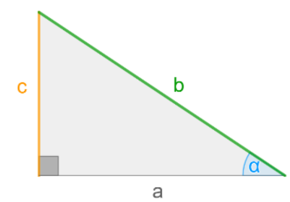
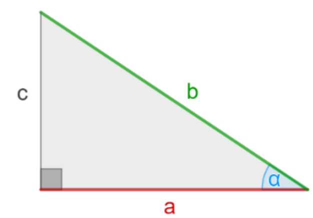
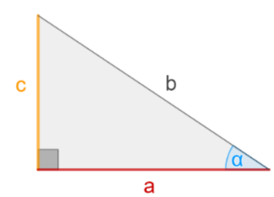
➔ **Actividad en Geogebra**

Cateto AB	Cateto BC	Hipotenusa AC	Medida del Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
5	3		59.04°			
6	6		45°			
3.48	2		60°			
7	2.4		71°			
6.96	4		60°			

Razones trigonométricas

Estas razones son las recíprocas de las anteriores, corresponde respectivamente con

Cosecante, Secante y Cotangente

Razón	Definición	Representación algebraica	Representación gráfica
Cosecante	$\frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$	$csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} = \frac{b}{c}$	
Secante	$\frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$	$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$	
Cotangente	$\frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$	$cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)} = \frac{a}{c}$	

➔ **Actividad en Geogebra**

Cateto AB	Cateto BC	Hipotenusa AC	Medida del Ángulo	Cosecante	Secante	Cotangente
5	**3**		**59.04°**			
6	**6**		**45°**			
3.48	**2**		**60°**			
7	**2.4**		**71°**			
6.96	**4**		**60°**			

Clase 2: Círculo Trigonométrico

Radianes

Los radianes son una unidad de medida de los ángulos. Para comprender mejor su defínción veamos el siguiente vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=MgbKapLpgUA

Conversiones entre Grados y Radianes

Como $\mathbf{180° = \pi\, rad}$, entonces $\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi\, rad}} = \mathbf{1} = \frac{\boldsymbol{\pi\, rad}}{\mathbf{180°}}$, por lo que podemos multiplicar alguna de estas razones por el ángulo que queremos convertir.

Ejemplo: Realice las converciones de los siguientes ángulos.

60°= $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{3} =$

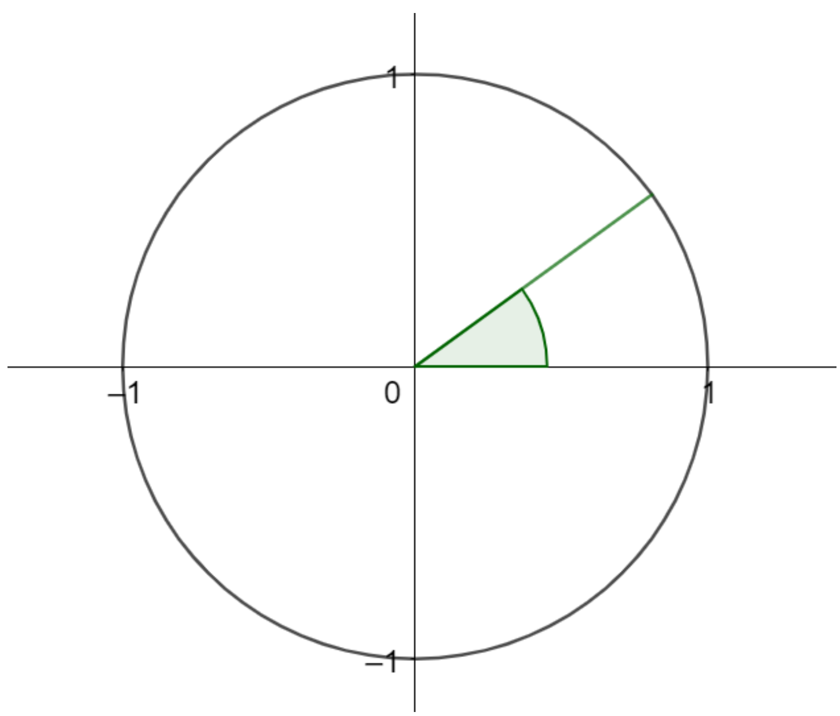
45°= $\qquad\qquad$ $\frac{4\pi}{3} =$

85°= $\qquad\qquad$ $\frac{7\pi}{2} =$

Problema 1: Si en una naranja, cada gajo forma un ángulo de $\frac{\pi}{5}$, ¿cuántos gajos de naranja se pueden obtener?

El círculo trigonométrico

También llamado circunferencia trigonométrica o círculo unitario; es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen del plano cartesiano. En ella, se pueden representar las razones trigonométricas.



Medida del Ángulo		Seno	Coseno	Tangente
Grados	Radianes			
59°				
45°				
60°				
71°				
120°				
235°				
323°				

Problema 2: Utilice el círculo trigonométrico para analizar si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas.

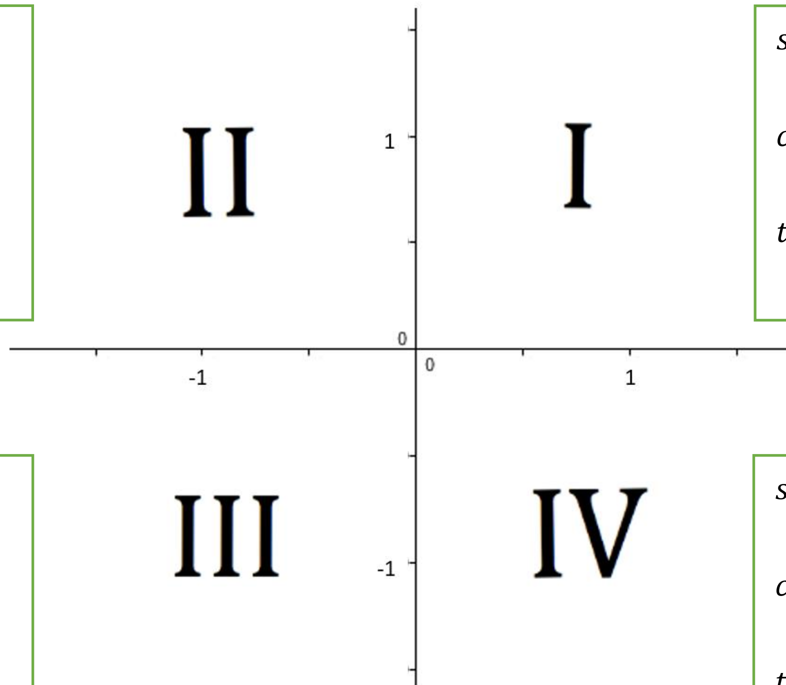
1. $\text{sen}(20º) < \text{sen}(70º)$
2. $\cos(20º) < \cos(70º)$
3. $\tan(20º) < \tan(70º)$
4. $\text{sen}(45º) < \text{sen}(135º)$

Signo de las razones

sen

cos

tan



sen

cos

tan

sen

cos

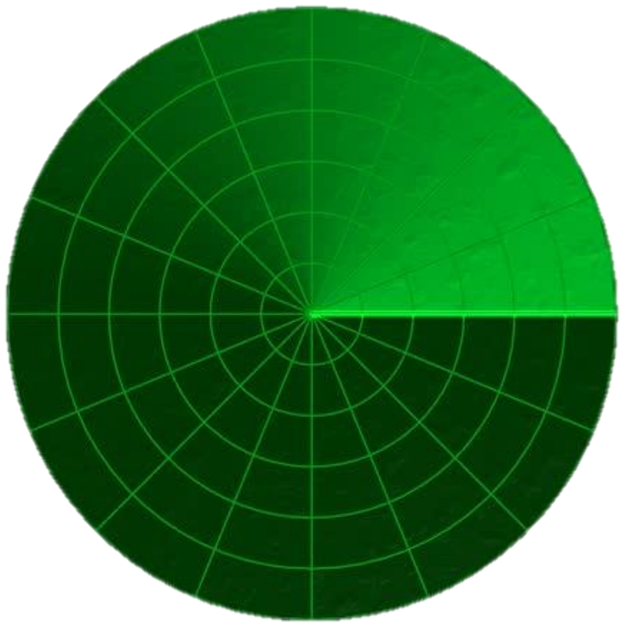
tan

sen

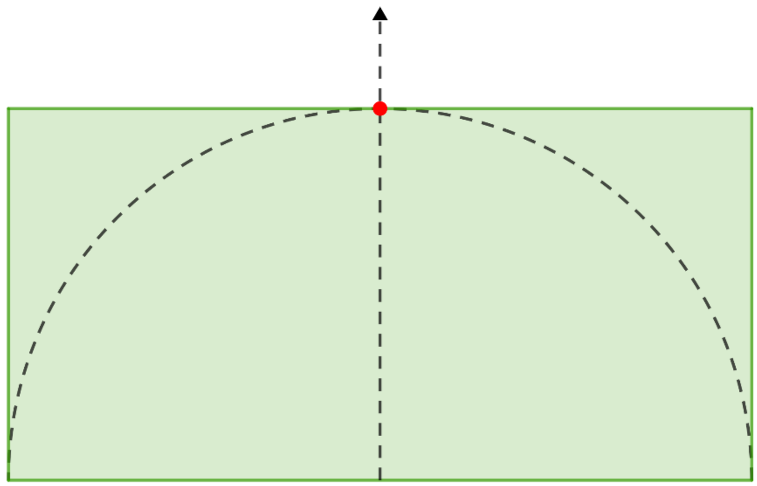
cos

tan

Problema 3: Imagine que está en un barco anclado en el mar. Dicho barco, como casi todos, tiene un radar. El radar ha detectado la presencia de otro barco en un punto, a un kilómetro de distancia con un ángulo de 135º. Determine la coordenada en la que se encuentra el barco detectado en el radar.



<u>Problema 4:</u> Esteban quiere colocar algunas plantas en su jardín. Desea que sus plantas formen una semicircunferencia sobre el terreno separas por la **misma distancia**. Para ello, hace un croquis sobre un círculo unitario donde el punto rojo se refiere a la única planta que sabe con certeza donde colocar:



Ayude a Esteban a determinar las coordenadas de las otras cuatro plantas.

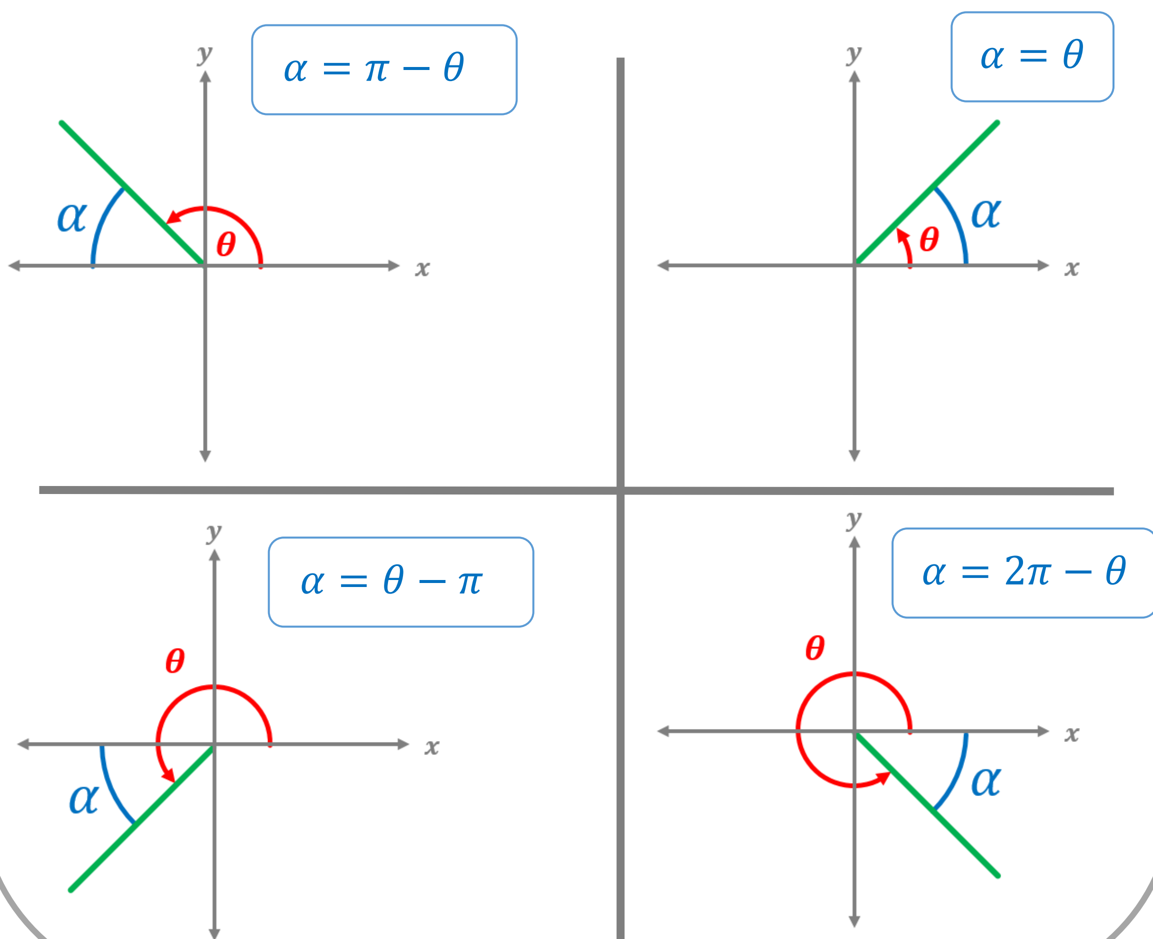
Clase 3: Ángulos de referencia

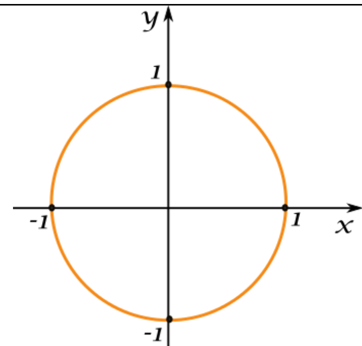
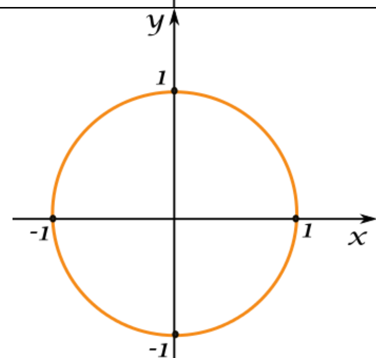
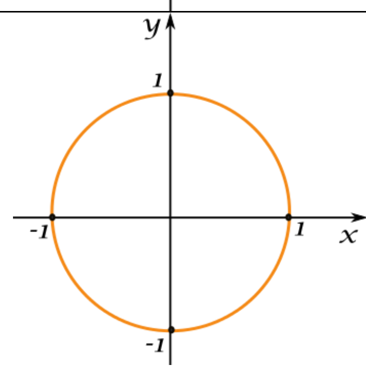
Ángulo de referencia

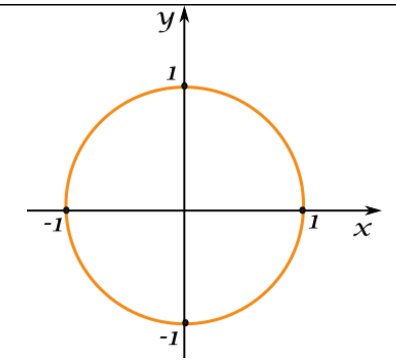
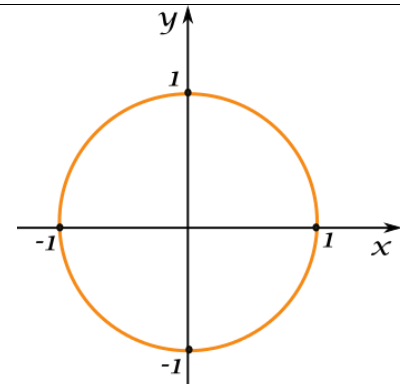
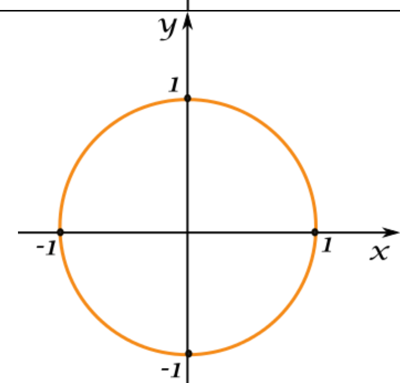
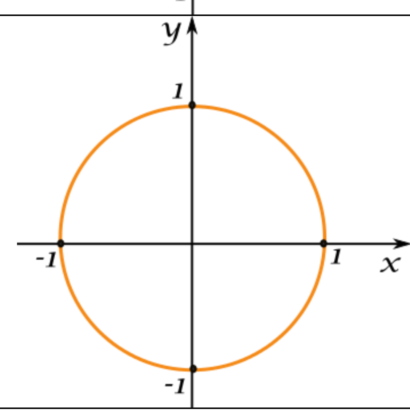
Un ángulo de referencia es un ángulo agudo positivo α que representa un ángulo θ de cualquier medida.

Este es el ángulo más pequeño formado entre el lado terminal de θ y el eje x.

Ángulos de referencia en cada cuadrante

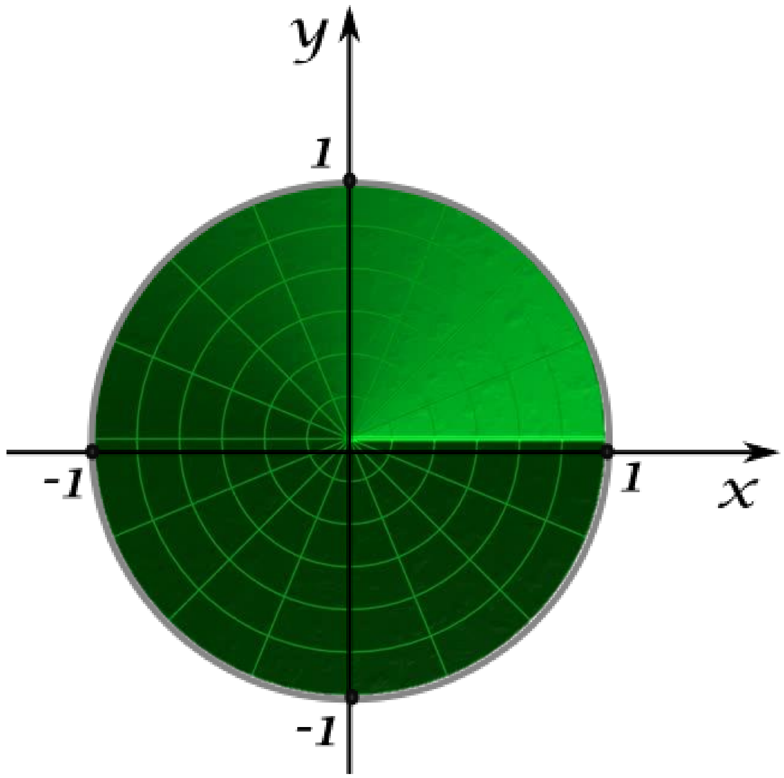


Medida del Ángulo		Representación	Ángulo de referencia	Sen	Cos	Tan
Grados	**Radianes**					
120°						
135°						
210°						

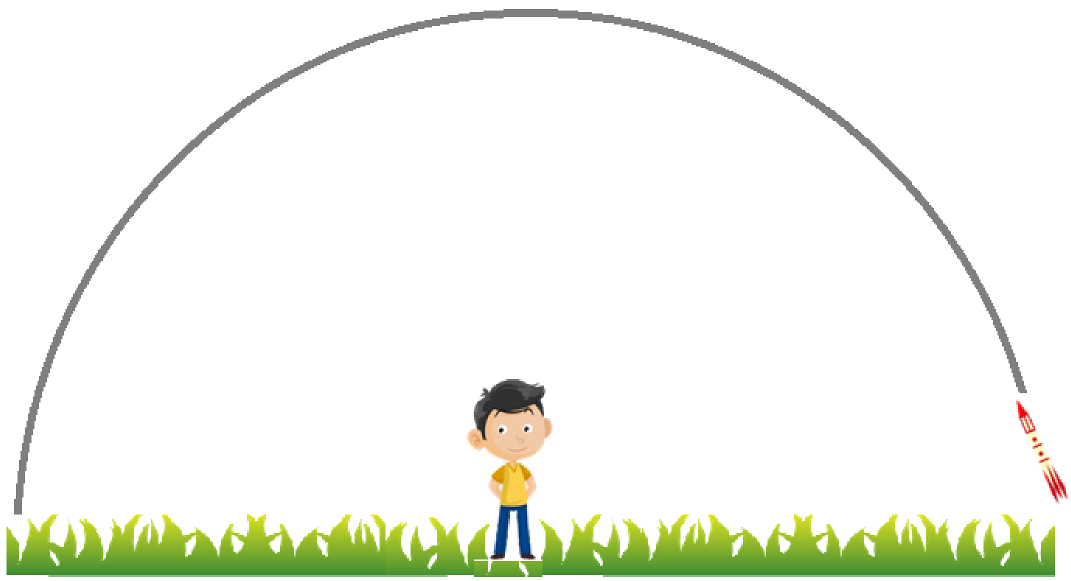
252°						
300°						
330°						
450°						

Algunos problemas aplicados a los ángulos de referencia

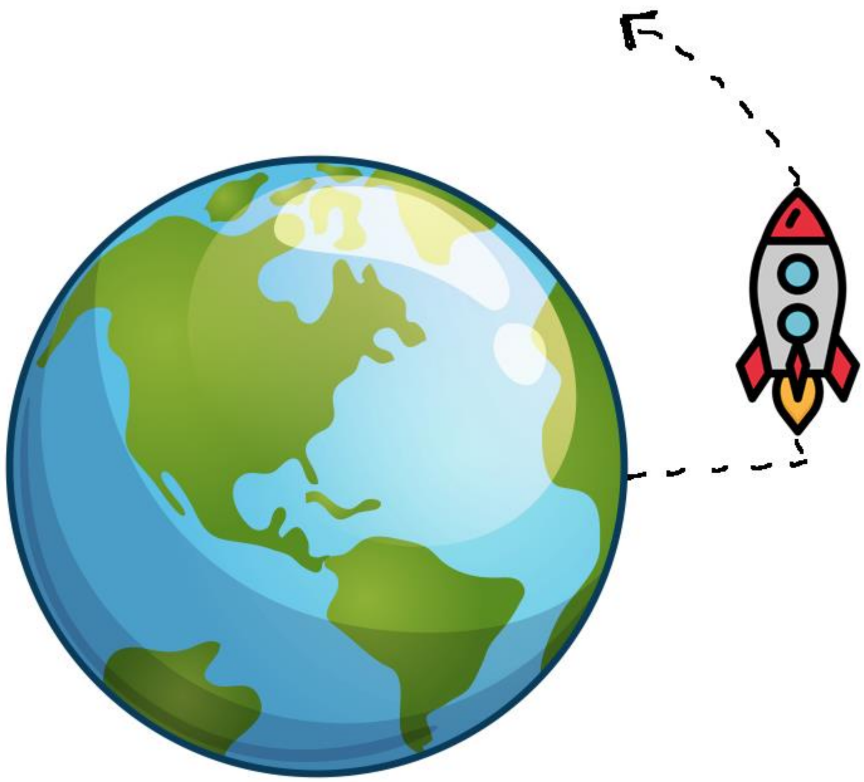
Problema 1: El radar de un barco se activa para buscar la presencia de otro navío. Después de producir un ángulo de 480º grados detecta una embarcación. Represente el ángulo en el plano cartesiano y determine la coordenada de la embarcación detectada.



<u>Problema 2:</u> Gabriel observa a lo lejos como un proyectil es lanzado y recorre el cielo mediante un movimiento circular sin que cambie la distancia entre Gabriel y el proyectil. El proyectil pasa por encima de Gabriel, y explota antes de llegar al suelo; él observa esa explosión con un ángulo de elevación de aproximadamente 45º. Determine el ángulo que forma el proyectil desde su salida hasta su explosión y la coordenada donde sucede.



<u>Problema 3:</u> Un cohete espacial sale de la base de lanzamiento y realiza un recorrido circular alrededor del planeta para poder preparar la salida de la Tropósfera. Si inicia el ascenso en la coordenada $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, determine el ángulo que produjo la trayectoria del cohete antes de su ascenso.



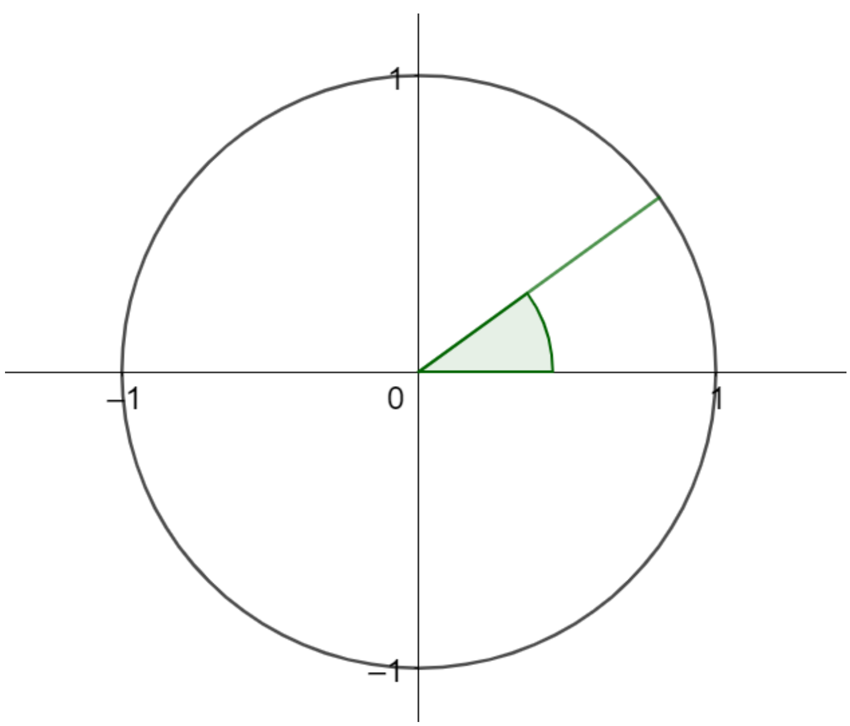
Identidades trigonométricas

Identidades pitagóricas

Recordemos

El teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo de catetos a y b, de hipotenusa c, se cumple que

$$\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$$



$$\boldsymbol{sec^2\theta = 1 + tan^2\theta}$$

$$\boldsymbol{csc^2\theta = 1 + cot^2\theta}$$

Clase 4: Identidades trigonométricas

Recordemos

Identidades pitagóricas

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$$

$$csc^2\theta = 1 + cot^2\theta$$ c

Algunos valores ya conocidos

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{3\pi}{2}$			

Suma y resta de ángulos

Seno

$$\boldsymbol{sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta - sen\beta \cdot cos\alpha}$$

Ejercicio: Utilice las identidades anteriores para calcular el valor de las siguientes razones.

1. $sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$=

2. $sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$=

Suma y resta de ángulos

Coseno

$$\boldsymbol{cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta}$$

$$\boldsymbol{cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sen\alpha \cdot sen\beta}$$

Ejercicio: Utilice las identidades anteriores para calcular el valor de las siguientes razones.

1. $cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) =$

2. $cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) =$

Suma y resta de ángulos

Tangente

$$\boldsymbol{tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}}$$

$$\boldsymbol{tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}}$$

Ejercicio: Utilice las identidades anteriores para calcular el valor de las siguientes razones.

1. $tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) =$

2. $tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) =$

Problema:

Utilice las identidades de suma de ángulos de seno y coseno para demostrar que

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\alpha \pm \ tan\beta}{1 \mp tan\alpha \cdot tan\beta}$$

Ángulo doble

$$\boldsymbol{sen(2\alpha) = 2\ sen\alpha \cdot cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

Problemas:

1. Considere un ángulo α en posición estándar cuyo lado terminal se encuentra en el II cuadrante, si se sabe que el valor de $sen(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, determine el valor de $\cos(\alpha)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

2. Determine el valor exacto de $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ considerando que $\frac{11\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$

3. Compruebe que $\mathbf{cos(2\alpha) = 2\,cos^2\,\alpha - 1}$ y que $\mathbf{cos(2\alpha) = 1 - 2se}$