UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

SEDE DE OCCIDENTE

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIATURA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Caracterización del sentido numérico en el aprendizaje de la multiplicación con números racionales positivos para docentes de matemática en formación de la Universidad de Costa Rica

Integrantes: Dayana Paola González Mora

Adriana Vanessa Jiménez Ruiz

María Nohely Sibaja Elizondo

Katherine Yuliana Solórzano Jandres

Año 2022

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIATURA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Caracterización del sentido numérico en el aprendizaje de la multiplicación con números racionales positivos para docentes de matemática en formación de la Universidad de Costa Rica

Licda. Melissa Cerdas Valverde	____________________
Lic. José Andrés Cubillo Arrieta	____________________
Dra. Ana Patricia Maroto Vargas	____________________
Lic. Keibel Ramírez Campos	____________________
Licda. Imelda Rojas Campos	____________________

Dayana Paola González Mora

Adriana Vanessa Jiménez Ruiz

María Nohely Sibaja Elizondo

Katherine Yuliana Solórzano Jandres

Dedicatorias

Primeramente, a Dios por la oportunidad de cumplir cada una de mis metas y formar parte en este tipo de experiencias de mucho aprendizaje. Seguidamente, a mis familiares y principalmente a mis padres quienes me han apoyado para poder llegar a esta instancia de mis estudios, ya que ellos siempre han estado presentes para apoyarme moral y psicológicamente. También la dedico a mi hijo quien ha sido mi mayor motivación para nunca rendirme en los estudios y poder llegar a ser un ejemplo para él.

Dayana Paola González Mora

Primeramente, a Dios por la oportunidad de cumplir cada una de mis metas y formar parte en este tipo de experiencias de mucho aprendizaje. A mi familia, amigos, profesores y a todas las personas que creyeron en mí, y las que de alguna manera colaboraron para hacer realidad esta meta.

Adriana Vanessa Jiménez Ruiz

En primer lugar, a Dios y a mi familia por darme la oportunidad de cumplir cada meta profesional, por vivir estas experiencias de aprendizaje y ser parte de este equipo de trabajo. Seguidamente, a los profesores y amigos que han formado parte de este proceso, a nuestra directora de tesis y a nuestros lectores que han colaborado de alguna forma para culminar esta meta. Dedico este trabajo a mi hijo, mi mayor motivación.

María Nohely Sibaja Elizondo

Agradezco a Dios, que me permite sonreír ante mis logros que son reflejo de su ayuda constante, a mi familia por su dedicación, paciencia y estímulo constante esta meta está cumplida. Profundamente agradezco a mi pareja un gran pilar durante todo el proceso de mi carrera. Dedico este trabajo a mis dos hijos, son el detonante y la razón de sentirme tan orgullosa de culminar con éxito este proyecto de tesis.

Katherine Yuliana Solórzano Jandres

Agradecimientos

En primer lugar, a Dios por darnos las fuerzas necesarias para no rendirnos en este proceso y permitirnos alcanzar una meta más en nuestra carrera profesional, a nuestras familias por el apoyo incondicional en todo momento y por ser el motor que nos impulsa a seguir.

Queremos agradecer a la profesora Ana Patricia Maroto Vargas por su disposición para ser nuestra directora de tesis, gracias por guiarnos y motivarnos en la elaboración de esta investigación, por estar en todo momento para apoyarnos, sin ella no hubiésemos logrado finalizar un trabajo del cual nos sentimos muy orgullosas. Agradecemos a los profesores Keibel Ramírez e Imelda Rojas por orientarnos durante el proceso con sus sugerencias y comentarios de motivación. Por último, a la Universidad de Costa Rica por nuestra formación académica, personal y profesional.

Resumen

En el presente Proyecto de Graduación titulado “Caracterización del sentido numérico en el aprendizaje de la multiplicación con números racionales positivos para docentes de matemática en formación de la Universidad de Costa Rica”, se mostrarán algunos antecedentes, datos, resultados y conclusiones que demuestran el uso de estrategias asociadas al sentido numérico que utilizan un grupo de docentes de matemática en formación al emplear la multiplicación con números racionales positivos para dar solución a algunas tareas matemáticas. Se considerará la comprensión del sentido numérico caracterizado por medio de siete componentes, los cuales fueron elegidos como base teórica al elaborar los instrumentos para recolección y análisis de información. Los resultados muestran una baja frecuencia de respuestas correctas en contenidos básicos de números racionales, lo cual refleja vacíos en la formación matemática que tienen estos docentes, cuando se les pide resolver tareas matemáticas sin aplicar reglas o algoritmos.

Tabla de Contenido

Introducción

La educación costarricense puede ser entendida como un proceso evolutivo, pues como lo mencionó el entonces Ministro de Educación, Leonardo Garnier (2012) se aprende de la propia historia, errores y experiencias. En tal caso, los objetivos de estudios en los Programas de Estudio de Matemática del país fueron modificados, adoptando un enfoque que no solo se basa en contenidos matemáticos, con el fin de beneficiar a la población estudiantil incluyendo a niños y jóvenes que forman parte del sistema educativo, por medio del uso de estrategias y propuestas de trabajo que impulsen una mayor participación y desempeño académico en los estudiantes (Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012).

Estas modificaciones en los Programas de Estudio de Matemática que empezaron a regir en el año 2012 son más notorias durante la última década con la elaboración de la nueva Política Educativa. El Programa Estado de la Nación (2019) sustenta lo siguiente:

> con estas reformas a los programas de estudio, se busca promover en los estudiantes un conjunto de habilidades, como comunicación, indagación, resolución de problemas, comprensión lectora, creatividad, innovación, apropiación de las tecnologías digitales, trabajo colaborativo, pensamiento crítico, colaboración y autonomía. (p. 128)

Esta asignatura recibió especial atención con la elaboración de dichos programas de estudio. A pesar de los grandes esfuerzos que se han realizado en el país por mejorar la enseñanza de la Matemática en los distintos niveles educativos, se sigue presentando una problemática, ya que el rendimiento académico de los estudiantes es mucho más bajo en comparación con las demás asignaturas (MEP, 2012).

Algunas de las posibles causas de esta problemática son la deficiente formación académica que presentan los docentes y los métodos de enseñanza que se basan en técnicas o estrategias que no logran profundizar en las habilidades de la asignatura de Matemática.

Castro et al. manifiestan que la formación de los profesores debe ser importante y necesaria en la enseñanza de los estudiantes. Además, debe contemplar el desarrollo de competencias tanto de índole Matemática como didáctica, promoviendo una posible solución a la problemática que se presenta. En particular, en el campo numérico los futuros docentes deben comprender los diversos sistemas numéricos, para fomentar las competencias con respecto al uso de los números, las operaciones y la habilidad para resolver tareas matemáticas que involucren situaciones cotidianas. Además, se usa para desarrollar estrategias útiles, flexibles y eficientes que incluyen cálculos mentales y estimaciones para manejar situaciones numéricas (Castro et al., 2008; MEP, 2015).

> Al realizar una operación aritmética por medio del cálculo mental, cada persona tiene su propia estrategia, sin embargo existen algunas alternativas que le permiten agilizar los procesos de cálculo. Pero la decisión de utilizar un procedimiento o método dependerá de las habilidades adquiridas, de la dificultad de la operación y las posibles estrategias que se puedan establecer. (MEP, 2015, p. 4)

En las últimas décadas, se hace referencia al aprendizaje numérico con el término de sentido numérico, el cual se define como la comprensión que tiene cada persona de los números y las operaciones, además de la capacidad de usar este conocimiento de forma flexible para desarrollar estrategias adecuadas para resolver tareas matemáticas. Para lograr caracterizar el sentido numérico, algunos autores como Almeida, Bruno y Perdomo emplean algunos componentes que consisten en estrategias para dar solución a tareas matemáticas sin tener que recurrir solamente a reglas memorizadas (Almeida et al., 2014).

En esta investigación se pretende caracterizar el sentido numérico por medio del análisis del uso de estrategias acerca del tema multiplicación con números racionales que realiza un grupo de docentes en formación durante la resolución de tareas matemáticas.

La estructura del documento consta de cinco capítulos. En el capítulo I, se detallará el planteamiento del problema, justificación, el objetivo general y objetivos específicos, y antecedentes.

En el capítulo II, se desarrollará el marco teórico, el cual abordará tres referentes conceptuales que fundamentan la investigación, en primer lugar, la formación docente. En segundo lugar, el conocimiento matemático. En tercer lugar, se presenta el concepto de sentido numérico y para reforzar el marco teórico se mencionan los componentes del sentido numérico propuestos por Almeida et al. (2014). Seguidamente, en el capítulo III, se desarrollará el marco metodológico, describiendo el enfoque cualitativo de la investigación, alcance y el diseño que corresponde a un estudio de caso descriptivo. Además, se presentará la población participante y las fases de la investigación. Luego en el capítulo IV se detallará el análisis e interpretación de los datos y resultados, y el análisis de las estrategias de los ítems que conformarán las pruebas. En el último capítulo, se mostrarán las conclusiones, recomendaciones y limitaciones.

Capítulo I

Este capítulo presenta el planteamiento del problema, la justificación del tema de investigación, los objetivos y diversos trabajos sobre el sentido numérico, los cuales serán expuestos en los antecedentes.

Planteamiento del Problema

El aprendizaje del tema de números en las instituciones educativas de primaria y secundaria debe fortalecer el desarrollo continuo de las habilidades numéricas en el cálculo de operaciones básicas y proveer al individuo de los conocimientos necesarios para que pueda decidir de manera autónoma el tipo de estrategia que mejor se adapte a la resolución de algún ejercicio, sin necesidad de utilizar únicamente los procedimientos algorítmicos (Belmonte, 2003).

Sin embargo, Monge y Vallejos (2012) citados por Leguizamón et al. (2015, p. 152) mencionan que:

> en la mayoría de las instituciones educativas de enseñanza básica y media, las matemáticas se trabajan de forma magistral, donde el docente explica la materia, realiza ejemplos y los estudiantes resuelven una serie de ejercicios aplicando los pasos dados hasta lograr el resultado.

El Programa Estado de la Nación (2019) refuerza la idea anterior al afirmar que “los docentes observados y consultados en preescolar, primaria y secundaria siguen impartiendo clases sin integrar las nuevas metodologías y enfoques propuestos en los programas de estudio, y no hacen de estos su partitura de trabajo” (p. 26). Para ello, es relevante que el docente se interese por darle un significado a la materia que se les enseña a los alumnos y no limitarse únicamente a que el estudiante realice tareas matemáticas que involucren el uso de algoritmos básicos o reglas memorísticas. Es fundamental para este estudio tener en cuenta que en el proceso de enseñanza es frecuente priorizar el aprendizaje del estudiante por medio del uso de determinados algoritmos de cálculo, y menos atención en que el alumno sepa identificar dónde y por qué tiene que hacer uso de esas estrategias, lo que produce un aprendizaje vacío de significado y sin utilidad (Belmonte, 2003).

Algunos autores como Almeida mencionan la importancia de enseñar matemáticas desde una forma distinta que pueda tener significado para el estudiante. Este enfoque se denomina sentido numérico, el cual se manifiesta cuando se logra llegar al cálculo mental flexible, se pueden realizar estimaciones numéricas de forma correcta y se hacen inferencias sobre las cantidades, es encontrar el sentido del significado de las cantidades (Almeida et al., 2014).

Asimismo, Yang y Almeida han realizado investigaciones donde han desarrollado algunas ideas del sentido numérico en poblaciones de docentes en formación como en estudiantes, en ambos casos se puede observar que al limitar el uso de reglas memorizadas surgen estrategias diversas que permiten dar solución a las tareas matemáticas y también, parte de estas estrategias permiten evidenciar el grado de comprensión que los estudiantes o los docentes en formación poseen del conocimiento matemático como tal.

La presente investigación tiene como propósito caracterizar el sentido numérico considerando las estrategias que usan un grupo de docentes en formación al resolver tareas matemáticas acerca del tema de multiplicación con números racionales, identificando los componentes del sentido numérico utilizadas en esas estrategias.

Justificación

La educación costarricense ha recibido muchos cambios en los últimos años debido a su carácter evolutivo, los investigadores han replanteado las reformas curriculares existentes por otras más novedosas como, por ejemplo, los Programas de Estudio de Matemática (MEP, 2012), con el propósito de realizar un cambio en la metodología impartida en las aulas y solventar algunos desafíos como el débil desempeño que presentan los estudiantes costarricenses. Una reforma destacada es el Programa de Educación de Matemáticas, el cual tiene como finalidades con respecto al área de Números darle relevancia al desarrollo del sentido numérico, a los cálculos, aproximaciones, y utilización de múltiples representaciones en la resolución de tareas matemáticas (MEP, 2012).

Sin embargo, pese al replanteamiento de las reformas curriculares, en el Programa Estado de la Nación (2019) se menciona que “la calidad de la enseñanza en las aulas dista mucho de los parámetros exigidos por el MEP en las reformas curriculares” (p. 26). En la enseñanza costarricense a pesar del cambio en los Programas de Estudio se siguen dando situaciones en las que los docentes imparten sus clases con métodos tradicionales donde el estudiante no tiene un papel dinámico en la construcción de su conocimiento y no logra profundizar en la comprensión de los nuevos conocimientos, pues enseñar requiere más que solo identificar el error cometido, implica solucionarlo de forma efectiva y fomentar la comprensión de las tareas matemáticas, para que el alumno aprenda y tenga la capacidad de analizar por cuenta propia (Ball et al., 2008).

Asimismo, ciertos desafíos presentes en la enseñanza que imparten los docentes en las aulas pueden ser causados en ocasiones por deficiencias en la formación de los profesores las cuales no se logran solventar con capacitaciones impartidas por el Ministerio de Educación Pública. Como expresa el Programa Estado de la Nación (2019) la gran mayoría de los profesores que contrata el MEP tienen debilidades graves en su formación inicial, y a pesar de las capacitaciones que realiza esta entidad, no se han logrado corregir las carencias de dicha formación.

De acuerdo con la idea anterior, Nieva y Martínez (2016) comentan que el profesor debería ser un transmisor y propiciador del aprendizaje efectivo, participando de la planificación y organización de la enseñanza, pues la formación del docente requiere de un adecuado proceso en los conocimientos didácticos y al presentar debilidades en su formación inicial promueve desafíos en la enseñanza de sus estudiantes.

Además, en ocasiones la formación inicial que se le brinda a los docentes está enfocada en realizar tareas matemáticas de reproducción, basadas en algoritmos tradicionales. Una consecuencia es que la mayoría de los niños y niñas (93,4% del total) que asisten a centros educativos no reciben una educación de calidad, lo cual impide mejorar los aprendizajes de los estudiantes para que logren avanzar con bases firmes, en los ciclos posteriores de la secundaria y la educación superior (Programa Estado de la Nación, 2019).

Como se ha planteado anteriormente la deficiencia en la formación de los profesores puede llegar a ser un problema en la enseñanza, por lo cual esta investigación pretende caracterizar el uso de estrategias que utilizan un grupo de docentes de matemática en formación, al emplear la multiplicación con números racionales para dar solución a algunas tareas matemáticas.

El uso de algunas estrategias se encuentra relacionado con el razonamiento del sentido numérico y sus componentes, los cuales están estrechamente asociados a la resolución de operaciones y cálculos. La comprensión general de los números permite determinar cuáles estrategias son más adecuadas para resolver una tarea matemática, ya sea por medio del cálculo mental o estimación aproximada, y no basarse únicamente en el uso de algoritmos. De esta manera se promueve en los docentes una calidad de formación de enseñanza efectiva (Programa Estado de la Nación, 2019).

El sentido numérico se fortalece inicialmente en el segundo ciclo de la Educación General Básica, el cual pretende profundizar la percepción en la utilidad de las Matemáticas durante las clases. Mientras que para el tercer ciclo propiamente en el nivel de octavo año, el sentido numérico está relacionado con operaciones y cálculos, permitiendo decidir cuál es la estrategia más adecuada para enfrentar una tarea matemática, utilizando el cálculo mental, estimación, trabajo sistemático con papel y lápiz, el uso de calculadora o incluso la computadora (MEP, 2012).

> La adquisición del sentido numérico es gradual y empieza desde los primeros años de escolaridad. Las propuestas para desarrollar sentido numérico buscan que los estudiantes adquieran habilidades en el manejo de los números que les sean útiles en el estudio de la propia matemática y también fuera del contexto escolar, en ocasiones usando métodos menos formales. (Almeida, 2017, p. 29)

Para el caso del tema de números racionales el docente a cargo debería acudir al sentido numérico del estudiante, el cual se puede reforzar mediante el uso de distintas representaciones numéricas, gráficas y simbólicas, para resolver tareas matemáticas en diferentes contextos (MEP, 2012). Sin embargo, el conocimiento de los docentes podría haber sido adquirido por medio de la aplicación de algoritmos tradicionales, lo cual no se considera inadecuado, pero se pretende que el docente utilice distintos métodos para resolver tareas matemáticas como son las representaciones numéricas, gráficas y simbólicas.

Para ello, es importante efectuar un estudio que considere las habilidades propuestas en el Currículo Oficial de Matemática en Costa Rica en el nivel de secundaria, específicamente en octavo año, caracterizando a través del uso de estrategias para resolver tareas matemáticas acerca del tema de multiplicación con números racionales positivos que fomenten el sentido numérico. A partir de lo anterior, se va a considerar el sentido numérico como la comprensión de los números y las operaciones, incluyendo la habilidad de utilizar los números de manera flexible en situaciones cotidianas.

Cabe entonces preguntarse de forma específica, ¿qué tipo de estrategias usan los docentes en formación para resolver tareas matemáticas acerca del tema de multiplicación con números racionales?

Para contestar la pregunta anterior, se plantean los siguientes objetivos.

Objetivo General y Objetivos Específicos

Objetivo General

Caracterizar el uso de estrategias que utilizan un grupo de docentes de matemática en formación de la Universidad de Costa Rica, al emplear la multiplicación con números racionales para dar solución a algunas tareas matemáticas.

Objetivos Específicos

El estudio comprende los siguientes objetivos específicos:

1. Describir las estrategias utilizadas por un grupo de docentes de matemática en formación al hacer uso de sus conocimientos previos para resolver tareas matemáticas acerca del tema de multiplicación con números racionales.
2. Formular una intervención basada en la revisión bibliográfica para promover el uso de diferentes estrategias que fomenten el sentido numérico acerca del tema de multiplicación con números racionales.
3. Identificar los componentes del sentido numérico que utilizan los docentes de matemática en formación al resolver tareas matemáticas antes y después de la intervención para promover el uso de diferentes

estrategias acerca del tema multiplicación con números racionales.

4. Comparar las estrategias utilizadas por los docentes de matemática en formación al resolver tareas matemáticas antes y después de la intervención diseñada para promover el uso de diferentes estrategias acerca del tema multiplicación con números racionales.

Antecedentes

El desarrollo del sentido numérico es un tema de interés en la práctica educativa, el cual requiere de reflexión por parte de los docentes para seleccionar las estrategias que se presentan en la mediación pedagógica para promover una mayor comprensión de los alumnos sobre los contenidos matemáticos. El profesor debe fomentar el desarrollo del sentido numérico en los procesos de aprendizaje en las clases de Matemáticas. De acuerdo con esta forma de plantear el contenido en el aula surgen distintas investigaciones que buscan integrar la comprensión del sentido numérico tanto por parte del docente como del estudiante.

Arteaga et al. (2008) analizan algunos ejemplos de errores en gráficos estadísticos producidos por docentes en formación originados por un sentido numérico insuficiente y que derivan de algún componente del sentido numérico como el razonamiento proporcional o la representación incorrecta de un número sobre la recta numérica. Los resultados de este estudio sugieren conectar el tratamiento de la información con el sentido numérico y analizar la importancia de comprender los números en distintos contextos para entender la globalidad de su significado.

Castro et al. (2008) describen las experiencias de futuros docentes de primaria a quienes se les propone resolver un problema que involucre competencias de razonamiento aritmético y algebraico, también se les pide analizar el proceso de resolución de un problema determinando los objetos matemáticos y significados que se encuentran vinculados en el mismo. Los investigadores pretenden desarrollar competencias del análisis didáctico que promuevan el desarrollo del sentido numérico. Para Castro et al. (2008) "parece claro que si los maestros deben promover el desarrollo del sentido numérico en los niños ellos mismos deben tener ese tipo de conocimiento integrativo sobre los números" (p. 152). En su trabajo, los autores proponen la Guía de Reflexión sobre Objetos y Significados (GROS), la cual es un estudio de la relación entre la resolución correcta de un problema y la elaboración de un análisis epistémico que se usa como recurso para promover la reflexión de los profesores sobre los objetos y significados que se requieren en la resolución de un problema. Una de las conclusiones fue que la GROS logra incentivar el desarrollo de competencias en el análisis didáctico y competencias matemáticas como parte del sentido numérico.

Godino et al. (2008) presentan un significado sistémico de los números racionales relacionado con el sentido numérico. Cuando se relacionan dos números de manera multiplicativa, estas relaciones pueden ser expresadas por razones, fracciones, porcentajes o decimales. Estos autores manifiestan que el análisis semántico de las fracciones ha tenido un gran interés por muchos investigadores que han promovido ciertas interpretaciones a las fracciones y a los números racionales. Algunos de los conceptos centrales de esas investigaciones son: cociente, razón, operador y la relación parte-todo. Estos autores hacen una revisión del modelo ontosemiótico de Ohlsson, quien elaboró un modelo teórico sobre los significados asociados al número racional considerado como un constructo matemático que adquiere significado a partir de la teoría en la que se incluye.

El modelo de Ohlsson considera que un objeto matemático puede situarse en alguna teoría dependiendo del sentido que le otorgue el lenguaje, además de que se realiza una distinción entre sentido y significado. Por otro lado, el modelo menciona cuatro teorías referidas a los números racionales de acuerdo con su aplicación: la función cociente, un número racional, un vector binario y un tipo particular de función compuesta. Los autores mencionan que, desde el punto de vista educativo, conocer los números racionales no debe limitarse a la memorización de axiomas, sino que resulta necesaria la contextualización de estos números en situaciones matemáticas (Godino et al., 2008).

Por otra parte, la iniciativa del Ministerio de Educación de Nueva Zelanda al introducir un proyecto numérico para estudiantes desde los cinco hasta los años en escuelas seleccionadas generó una investigación que buscaba comparar si realmente este proyecto logra fomentar el desarrollo del sentido numérico, ya que impulsa la adopción de estrategias flexibles para la resolución de problemas numéricos y trata de bajar la dependencia de algoritmos de computación. Uno de los resultados que arrojó este trabajo fue que el grupo de estudiantes que participó en este Proyecto Numérico logró resolver problemas numéricos de manipulación con mayor éxito que el grupo que no participó en él (Irwin y Britt, 2005).

Además, Yang (2003) comparó una clase de control y otra clase experimental en una escuela primaria pública. La clase experimental recibió material suplementario como parte de las estrategias para fortalecer el sentido numérico mientras que la clase de control recibió el currículo estándar. Este estudio trató de determinar si se podría fomentar el sentido numérico a partir de una enseñanza apropiada. En la metodología se aplicó una prueba inicial para determinar el nivel de desempeño de cada estudiante. Se observó que existen diferencias estadísticamente significativas entre la prueba inicial y los resultados de las entrevistas después de la intervención. Yang (2003) menciona que “en comparación con la clase de control, la clase experimental progresó mucho más en las pruebas de sentido numérico. Esto indica que la enseñanza del sentido numérico es muy eficaz” (p. 122).

Almeida et al. (2014) realizaron un estudio sobre estrategias de sentido numérico en un grupo de 67 estudiantes universitarios del Grado en Matemáticas en una Universidad de España. Para lograr el objetivo de esta investigación se definieron siete componentes para caracterizar el sentido numérico y formular las tareas a desarrollar en el aula. En la metodología, se elaboró una prueba escrita de 10 preguntas a partir de unos ítems utilizados en otras investigaciones. Las preguntas fueron construidas, de tal forma, que pudieran responderse de acuerdo con el razonamiento basado en los componentes que se habían establecido previamente para caracterizar el sentido numérico. Una de las condiciones para contestar esta prueba consistía en resolver cada ítem sin emplear algoritmos en un tiempo limitado. Uno de los resultados obtenidos para esta investigación fue un bajo uso del sentido numérico al resolver tareas que no involucran algoritmos tradicionales. Sin embargo, se esperaba que los participantes tuvieran un mayor grado de éxito por el nivel de estudio que poseían.

Torres y Román (2013) realizaron una investigación que pretende ampliar el sentido numérico del estudiantado con respecto al tema de fracciones por medio de estrategias didácticas, con el fin de solventar algunas debilidades que se presentan en el aprendizaje de este tema. Algunos factores importantes que los investigadores consideran para desarrollar el sentido numérico son: el lenguaje; porque favorece la comprensión de significados implícitos, los valores de referencia y estimación, el uso de manipulativos que favorezcan la creación de imágenes mentales y el contexto real. Asimismo, estos factores se encuentran relacionados entre sí, por ejemplo, al usar manipulativos se puede requerir del contexto real y el uso de valores de referencia, además al realizar estas actividades matemáticas también interfiere el uso del lenguaje. Como parte de las conclusiones, estos autores recomiendan estrategias contextualizadas en las que el lenguaje de las fracciones adquiera un significado para el estudiante.

Capítulo II: Marco Teórico

En este capítulo se presentan los conceptos y teorías fundamentales referentes al tema de esta investigación, en el cual se destacan la formación docente, conocimiento matemático del profesor y sentido numérico. Además, para reforzar el marco teórico se mencionan los componentes del sentido numérico propuestos por Almeida et al. (2014). Estos referentes teóricos se abordan desde los planteamientos de diversos autores.

Formación Docente

La formación docente es un aspecto primordial en la educación, ya que el profesor es un sujeto que promueve y fomenta en sus alumnos el aprendizaje propio. En otras palabras,

> el proceso educativo configura la cultura, sintetiza las exigencias sociales y laborales, los cambios del desarrollo tecnológico, la sociedad a la que responde y el tipo de educación que ella traza como política. En este proceso, la función del docente no se reduce a reproducir la cultura y sus componentes, sino que implica procesos de asimilación, construcción, reconstrucción y mejora de la actividad, fruto de las interacciones de las personas, la sociedad y la historia. (Nieva y Martínez, 2016, p. 15)

El docente al ser un mediador y formador debe reflexionar sobre su práctica pedagógica para mejorarla o fortalecerla, de esta manera elabora nuevos conocimientos, pues su tarea profesional es continuar enseñando y construyendo saberes al enfrentarse a situaciones particulares del aula. Considerando el papel del docente como agente transformador para lograr colaborar con la educación continua y la cultura humana.

Díaz (2006) menciona que la formación docente está relacionada con crear nuevas formas de concebir el conocimiento y el proceso de la ciencia. Asimismo, el autor expresa que se puede estudiar la formación docente por medio de las siguientes categorías:

- Práctica pedagógica: es toda actividad que se realiza en las clases, la cual es guiada por un currículo que tiene como objetivo la formación de alumnos.
- Saber pedagógico: son aquellos conocimientos formales e informales, valores, creencias, ideologías y prácticas creadas por el profesor.

Además, el mismo autor afirma que la formación docente no es solo el proceso de enseñar, sino que también implica el autodescubrimiento personal y tomar conciencia de sí mismo; en otras palabras, el docente trata de desarrollar actitudes y valores que serán fomentados en determinados contextos educativos.

Por otro lado, Nieva y Martínez (2016) hacen referencia a que la formación del docente tiene que ser de manera permanente y continua, para provocar un cambio en la sociedad. Además, explican que la formación docente desempeña roles en la sociedad y en la cultura, a través de cuatro enfoques:

- Paradigma conductista: se da por la repetición de conceptos.
- Paradigma tradicional de oficio: es cuando el docente tiene conocimiento del tema y puede desempeñarse sin ningún entrenamiento previo.
- Paradigma personalista o humanista: se presenta en la cualidad del

docente como persona, es decir, su autoconcepto.

- Paradigma indagador, reflexivo o crítico: se da cuando el profesor es crítico y reflexiona sobre su práctica.

De acuerdo con lo anterior, esta investigación sitúa al profesor dentro del paradigma indagador, reflexivo o crítico, ya que en el grupo de docentes en formación se buscará promover el fortalecimiento de su aprendizaje por medio del uso de estrategias al dar solución a algunas tareas matemáticas relacionadas con la multiplicación con números racionales.

Conocimiento Matemático del Profesor de Matemática

El conocimiento del profesor se desarrolla desde la formación inicial y se va enriqueciendo con los años. Es fundamental que los docentes utilicen conocimientos pedagógicos y matemáticos en sus clases para buscar promover un aprendizaje en sus estudiantes. Como lo refuerza Ball et al. (2008) el conocimiento matemático es fundamental para llevar a cabo una adecuada enseñanza de las Matemáticas.

Además, se debe tener presente que los conocimientos referidos a la Matemática difieren de un profesional a otro, es decir, “el conocimiento de contenido matemático que necesita el profesor es distinto al que necesita otro profesional o el que se necesita para la vida diaria” (Ball et al., 2008, p. 44).

A partir de las investigaciones relacionadas con la formación del profesorado surge un modelo denominado Conocimiento del profesor de Matemática (MKT, por sus siglas en inglés) desarrollado por Ball y su equipo de investigación en educación matemática de la Universidad de Michigan

(Escudero et al., 2012).

> Es un modelo analítico que ha cobrado relevancia a nivel internacional y cuyo propósito es diferenciar componentes para un tratamiento apropiado de las características del conocimiento matemático para la enseñanza. Este modelo tiene como base el trabajo de Shulman (1986), en el cual se propone un esquema general de la base de conocimientos requeridos para la enseñanza. El MKT surge de la observación, por lo tanto no es prescriptivo, sino descriptivo. (Escudero et al., 2012, p. 35)

Sin embargo, debido a las dificultades detectadas en el uso de dicho modelo, principalmente en cuestión de delimitación entre los subdominios que lo conforman, se origina un nuevo modelo denominado el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) (Escudero et al., 2012).

Al introducir el término Especializado en el modelo MKT, su noción trata de responder con actividades propias del profesor de Matemáticas, es decir, se define en términos de lo que permite adquirir ese tipo de conocimiento (Escudero et al., 2017).

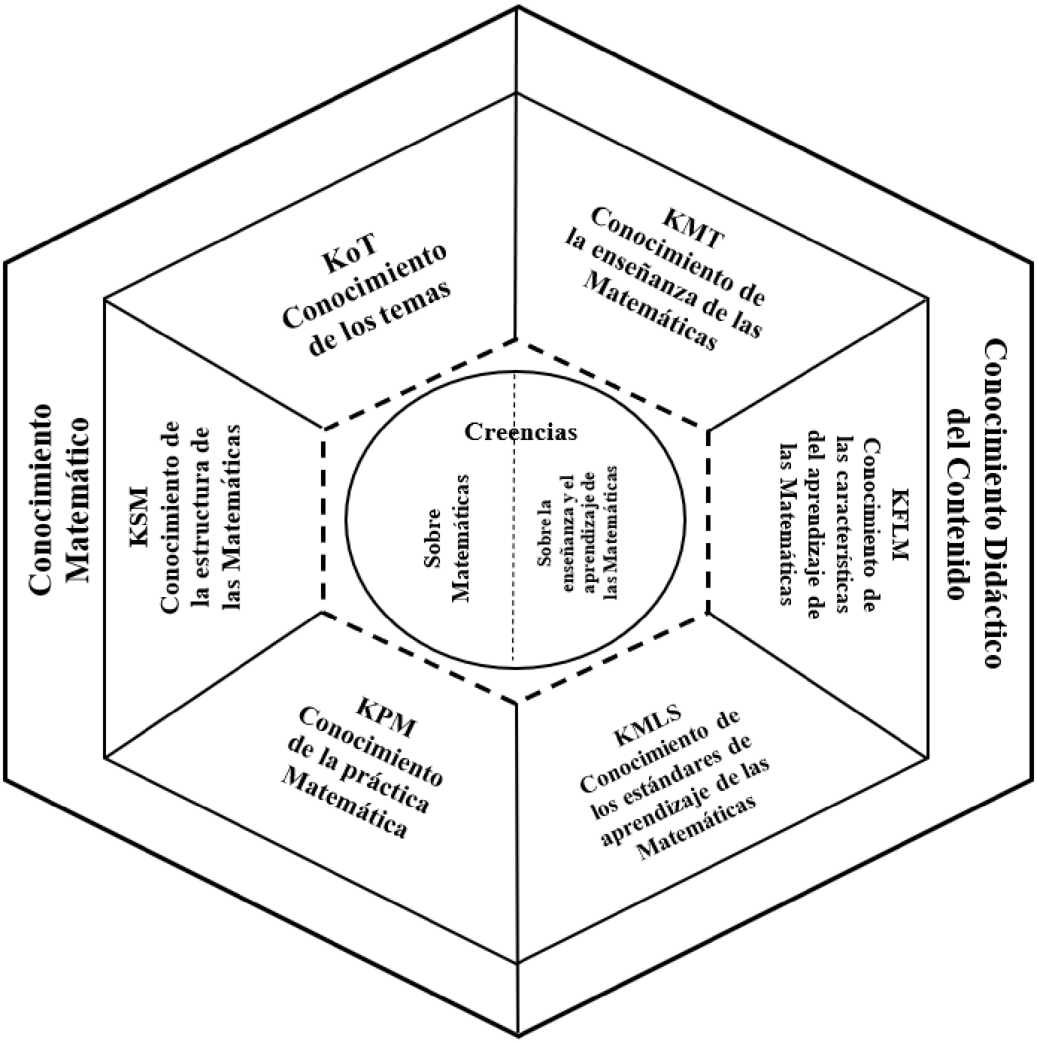
Con base en la propuesta de Shulman presentada en 1986, el término especializado en el conocimiento del profesor de matemáticas se logra distinguir por medio de componentes del conocimiento profesional de un docente, haciendo referencia a la forma en que el profesor enseña, relacionada al objeto de enseñanza y aprendizaje. En este caso el formador se interesa en el área de Didáctica de la Matemática. Mientras que el equipo de Ball propone que es el carácter matemático lo que plantea problemas al aplicarse al conocimiento didáctico del contenido (Escudero et al., 2012).

Un grupo de investigación SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática) de la Universidad de Huelva en España, presentó el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK por sus siglas en inglés), el cual ha sido construido mediante la reflexión teórica y trata de enfocar la especialización del modelo desde otra perspectiva a las presentadas anteriormente por Shulman y Ball. Introdujeron que el conocimiento del profesor de matemáticas sólo tiene sentido para él, considerándose como una propuesta teórica o herramienta metodológica que permite analizar la práctica de un profesor de Matemáticas, estableciendo una relación dinámica dentro del conocimiento profesional del docente de Matemática (Escudero et al., 2012).

El modelo mencionado anteriormente se divide en dos dominios. El primero denominado conocimiento matemático; se refiere al conocimiento de las conexiones entre la estructura de las ideas, conceptos, procedimientos, los medios de prueba y cualquier manera de proceder en matemáticas, incluso aborda el lenguaje matemático y su precisión. Mientras que el segundo dominio llamado conocimiento didáctico del contenido; considera el conocimiento que tiene el profesor sobre el contenido matemático en la enseñanza y aprendizaje. Es importante recalcar que los dominios mencionados también se dividen en subdominios (Escudero et al., 2017). En la figura 1 se muestra el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Figura 1

Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas



Nota. "Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas", por D. Escudero, D. Vasco, y A. González, 2017, VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, p. 84. (http://funes.uniandes.edu.co/19810/1/Escudero2017Relaciones.pdf)

Subdominios del Conocimiento Matemático

El Conocimiento de los Temas (KoT). Escudero et al. (2017) mencionan que es el conocimiento fundamentado y profundo de los contenidos matemáticos que enseña el profesor y se compone de las categorías: fenomenología y aplicación, es decir, el modelo ajustable a un tema, su contexto de uso y aplicación. Este conocimiento también incluye las definiciones, propiedades, fundamentos de un objeto matemático, los registros de representación y procedimientos de resolución, donde el conocimiento del profesor permite otras alternativas en la resolución de tareas matemáticas como algoritmos estandarizados y técnicas de cálculo.

> Este subdominio incluye aspectos de los conceptos que permiten relacionarlos con contextos reales o con el propio contenido matemático en forma de ejemplos, aportando aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permiten al profesor comprender diferentes significados que pueden atribuirse al contenido, así como una amplia variedad de contextos en los que situarlo. (Zakaryan y Riveiro, 2016, p. 305)

El Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM). Este conocimiento permite comprender las características de una estructura matemática previa consolidando las bases de un conocimiento nuevo por medio de las conexiones entre ambas estructuras. Este conocimiento permite conectar y profundizar en los contenidos matemáticos (Escudero et al., 2017).

Además, en este subdominio se integran tanto relaciones de conceptos avanzados como más elementales, permitiendo al profesor trabajar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental. Asimismo, estas ideas permiten estructurar la matemática, generando conexiones de tipo transversal (Zakaryan y Riveiro, 2016).

El Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). En este tipo de conocimiento intervienen distintos aspectos como la jerarquización y planificación para resolver tareas matemáticas, las formas de validar y demostrar propiedades, la construcción de definiciones y el papel que tiene el lenguaje matemático por medio de los símbolos y en el uso de un lenguaje matemático formal (Escudero et al., 2017).

Por su parte, Zakaryan y Riveiro (2016) mencionan que:

> este subdominio abarca aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas que un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, los criterios para establecer una generalización válida, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática. (p. 305)

Subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido

El Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT). Escudero et al. (2017) mencionan que este subdominio “integra el conocimiento de las matemáticas y su enseñanza” (p. 85). El docente debe conocer tan profundamente el contenido, encontrando las estrategias de mediación pedagógica que se ajustan a un tema determinado, y también tiene la posibilidad de reforzar ciertas estrategias que puedan prever errores de los estudiantes en las tareas matemáticas propuestas.

El Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Zakaryan y Riveiro (2016) establece que este subdominio:

> refleja el conocimiento que el profesor posee acerca de cómo se aprenden y piensan los contenidos matemáticos, así como de las formas que tienen los alumnos de interactuar con cada contenido. Este subdominio incluye el conocimiento de diferentes teorías, personales o institucionalizadas, de aprendizaje de las matemáticas, el conocimiento de las fortalezas, dificultades, obstáculos, o errores, asociados a cada contenido, así como el lenguaje o vocabulario habitualmente usado por los estudiantes en cada contenido. (p. 306)

Además, estos autores mencionan que dentro de este subdominio se puede ubicar el conocimiento del profesor acerca de las ideas intuitivas que desarrollan los estudiantes en el proceso de comprensión de algún tema o la actitud del estudiante con la materia, de esta forma el docente podría predecir las dificultades que el estudiante pueda presentar en algún contenido matemática.

El Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Aborda el conocimiento que posee cada docente sobre el currículo oficial de las matemáticas, que se encuentra vigente en el país que imparte su docencia. Incluye el conocimiento de los contenidos y capacidades que deben aprenderse y desarrollarse en un curso o etapa, con respecto a los lineamientos que se deben llevar a cabo para enseñar (Zakaryan y Riveiro, 2016).

En otras palabras, es el conocimiento de los contenidos propuestos en las normativas curriculares. Por ejemplo, en el caso de Costa Rica el Ministerio de Educación Pública determina los programas de estudio y propiamente en la asignatura de Matemática. En este programa se realizaron modificaciones con respecto a la línea de enseñanza y aprendizaje trabajados anteriormente por los profesores, adoptando un enfoque más formativo.

Para efectos de esta investigación se considerarán los siguientes subdominios:

- El conocimiento de los temas (KoT), pues se partirá de una base matemática existente acerca del tema de multiplicación con números racionales.
- El conocimiento de las estructuras de las matemáticas (KSM), ya que se buscará relacionar los conocimientos previos que tienen los docentes en formación que cursan un seminario de enseñanza de la matemática, con los conocimientos nuevos que puedan surgir de las estrategias expuestas en las tareas matemáticas.
- El conocimiento de la práctica matemática (KPM), se indagará por medio de las tareas matemáticas, la construcción y justificación de algunas estrategias empleadas por los docentes en formación.
- El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), se considerarán los lineamientos curriculares presentes en el Programa Oficial de Matemática para el tercer ciclo acerca del tema de multiplicación con números racionales.

Sentido Numérico

El sentido numérico se refiere a la comprensión general de los números y las operaciones efectuadas por una persona, la capacidad de utilizar los números de manera flexible en situaciones de la vida diaria, mostrando el desarrollo de estrategias útiles y eficientes para manejar los números y las operaciones, además la habilidad de evaluar la validez de los resultados (Almeida et al., 2016; Yang, 2003).

Castro (2008) argumenta con respecto al sentido numérico, que este "es una forma especial de pensar sobre los números, no algorítmica, que conlleva una profunda comprensión de su naturaleza, así como de las operaciones que se pueden realizar entre ellos" (p. 27).

En el área de Números y operaciones se procura desarrollar el sentido numérico, comprendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas. Además, los números deberían ser estudiados en diferentes contextos para que los alumnos entiendan el significado de los resultados y no solo los cálculos efectuados (Arteaga et al., 2008; Almeida et al., 2014).

Arteaga et al. (2008) y Berenguer et al. (2008) definen el desarrollo del sentido numérico como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se pueden expresar en capacidades, como la habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar estimaciones, cálculos mentales y razonados. Para Berenguer et al. (2008) "más importante que el ejercicio de destrezas basadas en cálculos descontextualizados, es relacionar las distintas formas de representación numérica con sus aplicaciones y comprender las propiedades de cada conjunto de números para poder realizar un uso razonable de las mismas" (p. 89).

En esta investigación se va a entender como sentido numérico a la forma en que las personas comprenden en general los números y las operaciones. Además, la habilidad de utilizar los números de manera flexible en situaciones cotidianas, así como el desarrollo de distintas estrategias efectivas para utilizar los números y las operaciones con ellos (Almeida et al., 2016; Yang, 2003).

Componentes del Sentido Numérico

Almeida et al. (2014) indica que el sentido numérico se puede caracterizar por medio de siete componentes, los cuales fueron elegidos como base teórica al elaborar los instrumentos, además, fueron usados para analizar la información recolectada en esta investigación.

Tabla 1

Componentes del sentido numérico

Componente	Definición
1. Comprender el significado de los números.	El sentido numérico implica comprender cómo está organizado el sistema de numeración decimal y las múltiples relaciones que se dan entre los números. Un aspecto importante de esta componente es manejar el valor posicional, incluyendo su aplicación a los números naturales y decimales, comprendiendo las distintas expresiones de los números.

2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números.	Es la habilidad para reconocer o estimar el tamaño absoluto de un número, cantidad o medida, o el tamaño relativo en relación con otro número, cantidad o medida. Se suele incluir en esta componente el tener estrategias útiles para comparar, ordenar e identificar números entre dos cantidades dadas.
3. Usar puntos de referencia.	Es la habilidad para utilizar referentes mentales (matemáticos o reales) para pensar sobre los números y resolver problemas. Los puntos de referencia son valores con los que una persona se siente cómoda haciendo comparaciones o cálculos. Muchas veces son personales y están asociados a situaciones reales.
4. Utilizar la composición y descomposición de los números.	Esta componente implica la habilidad para deducir las soluciones de una expresión que no se conoce o no recuerda, por medio de otras que sí se saben. Con el objetivo de obtener el resultado de una operación dominando la amplificación y simplificación de fracciones.
5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones.	El sentido numérico se manifiesta al utilizar diferentes representaciones (gráficas, simbólicas y pictóricas) para resolver problemas numéricos de manera efectiva y flexible.

6. Comprender el efecto relativo de las operaciones.	Se incluye la habilidad para identificar cómo las diferentes operaciones afectan el resultado final de los problemas numéricos, lo que se suele denominar «comprender el efecto relativo de las operaciones» y «saber relacionar las operaciones». También incluye emplear propiedades de los números racionales para obtener fácilmente los resultados.
7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta.	El sentido numérico se refleja cuando se siguen estrategias adecuadas en función de la tarea (método gráfico, cálculo escrito, estimación, cálculo mental, etc.) y se tiene la habilidad para evaluar si un resultado es razonable.

Nota. “Estrategias de sentido numérico en estudiantes del grado en Matemáticas”, por R. Almeida, A. Bruno, y J. Perdomo, 2014. *Enseñanza de las Ciencias,* 32 (2), pp. 11-12 (http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.997).

Capítulo III: Marco Metodológico

En este capítulo se detallan las etapas que se desarrollaron en esta investigación, se hace referencia al enfoque, alcance y diseño de la investigación, descripción de la población participante y fases de la investigación.

Enfoque de la Investigación

El estudio llevado a cabo sigue el enfoque cualitativo, el cual, según Hernández et al. (2014), “se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados ni predeterminados completamente. Tal recolección consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos más bien subjetivos)” (p. 8).

Alcance y Diseño de la Investigación

Esta investigación presenta un alcance descriptivo, la cual para algunos autores como Hernández et al. (2014), tiene una finalidad de:

> describir fenómenos, situaciones, contextos y sucesos; esto es, detallar cómo son y se manifiestan. Con los estudios descriptivos se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Es decir, únicamente pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren, esto es, su objetivo no es indicar cómo se relacionan estas. (p. 92)

El proyecto investigativo correspondió a un estudio de caso, ya que cumple con “una descripción y análisis intensivo y holístico de una sola instancia, fenómeno o unidad social" (Merriam, 1988, citado en Hamilton y Corbett-Whittier, 2013, p. 5). Por otra parte, Yin (2014) señala que un estudio de caso “investiga un fenómeno contemporáneo (el “caso”) en su contexto de la vida real, especialmente cuando las fronteras entre el fenómeno y el contexto podría no estar claro” (p. 2). Para esta investigación el caso a estudiar fue un grupo de docentes en formación matriculados en un seminario sobre Enseñanza de la Matemática.

Se utilizó el estudio de caso descriptivo, ya que según Martínez (2006) “busca identificar los elementos clave o variables que inciden en un fenómeno”. (p. 170). Lo mencionado anteriormente se relaciona con esta investigación porque se examinaron y analizaron las estrategias que utilizaron un grupo de docentes en formación con respecto al tema de multiplicación con números racionales al dar solución a los ejercicios y problemas planteados por las investigadoras.

La descripción y el análisis profundo de las estrategias aplicadas mostraron información que permitió reflexionar sobre la formación de los mismos docentes para que utilizaran otras estrategias y técnicas en la resolución de tareas matemáticas.

Descripción de la Población

Los participantes de la investigación fueron un grupo de nueve docentes de matemática en formación de la Universidad de Costa Rica quienes se encontraban finalizando el plan de estudios de bachillerato.

Fases de la Investigación

En esta sección se detalla el acercamiento a la población participante, la construcción de instrumentos y técnicas utilizadas en el desarrollo de la investigación, y por último se presenta el procedimiento utilizado para la recolección de datos.

Acercamiento a la Población

Primeramente, se coordinó una reunión con el grupo compuesto por los nueve docentes participantes y la profesora encargada del curso mediante una reunión en la plataforma Zoom. Las investigadoras presentaron ideas generales acerca del proyecto e invitaron a los docentes en formación a ser partícipes de esta investigación.

Luego de conocer el interés de los docentes en formar parte de este proceso de investigación, se les explicó la información relevante con respecto a su participación, privacidad, beneficios y otros aspectos considerados en el consentimiento informado (ver anexo 1). Este documento contempló los siguientes aspectos:

- El propósito del proyecto consistió en caracterizar el uso de estrategias que utilizaron los estudiantes de cuarto año en la carrera Enseñanza de la Matemática, al emplear la multiplicación con números racionales para dar solución a algunas tareas matemáticas.
- Los participantes realizaron una prueba diagnóstica para determinar las estrategias que emplearon en la resolución de tareas matemáticas acerca del tema de multiplicación con números racionales, resolvieron tareas matemáticas planteadas por las investigadoras durante la

intervención, contestaron una prueba final que determinó las estrategias de resolución. Se recolectó el material escrito producido por los estudiantes en formación, las grabaciones de audio o video y por último se analizaron las respuestas a las preguntas de las pruebas aplicadas con el fin de obtener conclusiones acerca de los objetivos que se definieron para el desarrollo de la investigación.

- A cada persona participante se le expresó por escrito que al colaborar con esta investigación no se esperaba que existieran riesgos para su salud física o mental. Sin embargo, si la persona participante presentaba alguna incomodidad por participar en el proyecto tenía el derecho de comunicarse con las investigadoras y retirarse del proyecto cuando lo considerara pertinente.
- Los beneficios expuestos a los participantes fueron estrategias nuevas y distintas acerca del uso del sentido numérico al resolver la multiplicación de números racionales para dar solución a algunas tareas matemáticas presentadas por las investigadoras.
- Se le explicó claramente a cada participante que su colaboración era totalmente voluntaria, sin tener represalias por decidir no participar o, en caso contrario, por colaborar con el proyecto de investigación.
- Las investigadoras garantizaron que se haría un estricto manejo de la información, donde las grabaciones y el audio serían guardados con su respectiva clave de seguridad. Al reportar los resultados de la investigación a personas externas siempre se protegerá la identidad de las personas participantes.

Al finalizar la lectura y revisión del documento cada persona aceptó su participación por medio de un enlace creado por la docente del curso, el cual se encontraba en el aula virtual institucional. Además, es importante mencionar que el documento estuvo disponible durante todo el semestre en el aula de mediación virtual del curso para su descarga.

Construcción de Instrumentos y Técnicas

Se elaboró y aplicó una prueba escrita diagnóstica para identificar las estrategias que empleó el grupo de docentes en formación al resolver tareas matemáticas acerca del tema de multiplicación con números racionales.

Después se diseñó una intervención educativa en modalidad virtual, la cual constaba de tres sesiones de dos horas aproximadamente cada una. Spallanzani et al. (2001), citados en Alzate et al. (2003) mencionan que la intervención educativa se entiende como:

> el conjunto de acciones con finalidad, planteadas con miras a conseguir, en un contexto institucional específico (en este caso la escuela) los objetivos educativos socialmente determinados. La intervención educativa en medio escolar incluye, entonces, el conjunto de acciones de planificación (fase preactiva), de actualización en clase (fase interactiva) y de evaluación de la actualización (fase postactiva). Ella es praxis que integra acción, práctica y reflexión crítica; es relación entre dimensiones didácticas (relación con saberes/saber), dimensiones psicopedagógicas (relación con los alumnos/alumno) y dimensiones organizacionales (la gestión de la clase en tanto que relación con el espacio clase, en tiempos y medios organizacionales puestos en marcha), todo esto anclado en una relación con lo social como espacio

> temporal determinado. Además, el concepto de intervención educativa requiere el recurso a otro concepto indisociable, el de mediación. (p. 1)

En las tres sesiones de la intervención educativa se analizó el tema de la multiplicación de fracciones haciendo un breve repaso del concepto de fracción y algunos temas relacionados con los números racionales. Para ello los docentes en formación resolvieron algunas actividades y tareas matemáticas planteadas por las investigadoras.

En cada sesión se recogieron fotos del material escrito que produjeron los docentes en formación al resolver las tareas matemáticas. Además, se realizaron grabaciones de audio o video por medio de la plataforma Zoom. Sin embargo, cabe recalcar que este material no fue utilizado para el análisis de la información recolectada para este informe.

Una semana después de finalizar la intervención, se aplicó una prueba escrita final que determinó las estrategias que emplearon los docentes en formación. Luego de recolectar todos los documentos se prosiguió a realizar el análisis de la información obtenida en ambas pruebas escritas aplicadas, con el fin de caracterizar el uso de estrategias del sentido numérico en los participantes, al emplear números racionales para dar solución a algunas tareas matemáticas e identificar si utilizaron en esas estrategias algún componente del sentido numérico.

Prueba Escrita Diagnóstica. La prueba diagnóstica tuvo como propósito identificar los componentes del sentido numérico que utilizaron los docentes en formación en la solución de tareas matemáticas.

Esta prueba estaba compuesta por 10 ítems basados en los siete componentes definidos por Almeida, Bruno y Perdomo (2014), como fundamentales: comprender el significado de los números, reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números, usar puntos de referencia, utilizar la composición y descomposición de los números, usar múltiples representaciones de los números y las operaciones, comprender el efecto relativo de las operaciones, desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta. Los ítems seleccionados en la prueba se consideraron de forma que pudieran ser resueltos con razonamientos que podrían utilizar los diferentes componentes del sentido numérico.

La tabla 2 muestra la relación de cada ítem con los componentes del sentido numérico que se contemplan a priori, como principales para dar respuesta a cada ítem, aunque esto dependerá del razonamiento que siga cada docente en formación.

Tabla 2

Relación de los diez ítems de la prueba escrita diagnóstica y los componentes del sentido numérico

Ítem	Componentes del sentido numérico
1. Área del terreno	3, 4 y 5
2. Queque de cumpleaños	2, 4, 5 y 7
3. Ordenar fracciones y decimales	2, 3, 4 y 5
4. Área de la granja	2, 3 y 5
5. Área de la tienda	2, 3 y 5
6. Área del cuadrado	2, 3, 5 y 7

7. Recipiente de agua	1, 2, 3, 5, 6 y 7
8. Pintar la habitación	4, 5 y 7
9. Cosecha de arroz	5
10. Colocar la coma	1, 3, 6 y 7

Los ítems seleccionados para elaborar la prueba escrita inicial fueron ejercicios adaptados de algunas investigaciones, detalladas de la siguiente forma:

- Los ítems 1, 3, 4 y 10 fueron adaptados de Almeida, Bruno y Perdomo (2014), en la investigación denominada “Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas” páginas 32 y 33.
- Los ítems 7, 2 y 8 fueron adaptados de Almeida y Bruno (2017), de la página 64, 68 y 72 respectivamente, en la investigación denominada “Estableciendo perfiles en el uso del sentido numérico”.
- El ítem 6 fue una adaptación de Almeida, Bruno y Perdomo (2017, p. 23), en la investigación denominada “Evaluación de sentido numérico en tareas de fracciones”.
- El ítem 5 correspondió a una adaptación de Ramírez y Valdemoros (2019, p. 7), en la investigación denominada "Estrategias de enseñanza para fracciones y problemas multiplicativos".
- El ítem 9 fue una adaptación de Cid, Godino y Batanero (2003, p.

326) de su documento denominado “Sistemas numéricos y su didáctica para maestros”.

Posterior a la selección de los ítems que componen la prueba diagnóstica, se efectuó el proceso de validación, el cual se realizó a través de tres etapas. La primera de ellas correspondió a la selección y adaptación, por parte de las investigadoras, de diez ejercicios ya validados en las investigaciones realizadas por Almeida, Bruno y Perdomo (2014), Almeida y Bruno (2017), Almeida, Bruno y Perdomo (2017), Cid, Godino, y Batanero (2003) y Ramírez y Valdemoros (2019). En una segunda etapa se expuso y detalló la primera versión de la prueba diagnóstica a algunos estudiantes de licenciatura en la carrera de Enseñanza de la Matemática y a estudiantes que se encontraban realizando su trabajo final de graduación para optar al grado de licenciatura. Asimismo, participaron algunos docentes del Departamento de Matemática. Se efectuó un simulacro de la prueba escrita diagnóstica que permitió mejorar aspectos relacionados con la estimación de un tiempo razonable para la resolución de cada ítem, la precisión sobre la redacción de instrucciones para la ejecución de la prueba y el entendimiento de los ítems, logrando revelar fortalezas, debilidades y estrategias de resolución de estos, lo que condujo a reformar la prueba generando así una nueva versión. Para la etapa final, se les brindó una segunda versión de la prueba diagnóstica a la directora y lectores a cargo de este proyecto de investigación, con ello se obtuvo una vez más retroalimentación sobre cada uno de los ítems, logrando precisar detalles que permitieron la validación final antes de la aplicación.

A partir de las conclusiones y los resultados obtenidos en cada una de las etapas se construyó la versión final de la prueba escrita diagnóstica para ser aplicada a los participantes de la investigación (ver anexo 2).

Intervención Educativa. La intervención educativa se desarrolló en tres sesiones de dos horas aproximadamente cada una y durante tres semanas consecutivas, en las cuales se estableció una estructura basada en actividades introductorias y tareas matemáticas.

Las actividades introductorias consistieron en ejercicios matemáticos que fueron propuestos para ser resueltos por los participantes, las investigadoras expusieron ideas para ser resueltas y posteriormente revisadas, haciendo uso del sentido numérico como una alternativa al uso de algoritmos tradicionales. Con respecto a las tareas matemáticas se propusieron ejercicios relacionados con los temas estudiados en la sesión correspondiente, con el fin de que los docentes en formación practicaran las estrategias de sentido numérico expuestas por las investigadoras en las actividades introductorias para ser revisadas posteriormente junto con los participantes.

Durante la primera sesión se trabajaron los temas relacionados con el concepto de fracción, unidad y representaciones de conjuntos tanto discretos como continuos. Se abordaron los temas por medio de tres actividades introductorias y cinco tareas matemáticas. En la segunda sesión se desarrollaron los siguientes temas: composición y descomposición, fracciones, decimales y aproximaciones a través de cinco actividades introductorias y tres tareas matemáticas. En esta sesión se observó un incremento en la participación de los docentes en formación, además de exponer estrategias interesantes durante el desarrollo de esta. Asimismo, los docentes en formación expresaron que esta sesión tenía un nivel de dificultad mayor en comparación con la primera, porque se debía analizar a profundidad cada tarea matemática. Finalmente, en la tercera sesión se abordaron los temas referidos al significado y representaciones en la multiplicación a partir de cuatro actividades y cuatro tareas matemáticas. Esta sesión representaba mayor relevancia, pues correspondía al tema elegido para la investigación, por lo que se enfatizó tanto en las actividades como en las tareas matemáticas sobre el análisis de la representación gráfica de la multiplicación con números racionales (ver anexo 3).

Prueba Escrita Final. La prueba escrita final contempló los mismos 10 ítems descritos en la prueba escrita diagnóstica (ver tabla 2), con el fin de comparar ambas pruebas para recolectar las estrategias empleadas por los docentes en formación al resolver la prueba escrita final, después de participar en las tres sesiones de la intervención (ver anexo 2).

Procedimiento para la Recolección de Datos

El proceso de recolección de datos se llevó a cabo a partir de la aplicación de la prueba diagnóstica y la aplicación de la prueba final, las cuales se realizaron por medio de la plataforma Zoom, con cada docente en formación en su lugar de residencia. Se implementaron las pruebas con el siguiente formato: cada pregunta aparecía en una diapositiva de una presentación en Power Point confeccionada por las investigadoras. Los docentes en formación debían responder las tareas matemáticas con su debida justificación. Las instrucciones específicas de ambas pruebas fueron las siguientes:

- Responder los ítems sin realizar cálculos exactos, es decir, no utilizar algoritmos para resolver la prueba.
- Trabajar en forma clara, ordenada y con letra legible.
- Justificar y explicar la respuesta de cada ítem.

Además, los docentes en formación consideraron lo siguiente:

- Disponían de 3 minutos por ítem.
- No se permitió el uso de calculadora para resolver la prueba.
- Al terminar la prueba adjuntaron un archivo en formato .pdf con la respuesta de cada uno de los ítems al espacio que se les indicó en Mediación Virtual, el cual es una plataforma de la Universidad de Costa Rica donde se gestionan los cursos por parte de los docentes.

El primer manejo para la recolección de la información consistió en descargar las evidencias de Mediación Virtual. Esta información fue accesible para la docente del curso, que a su vez es la directora de este proyecto. Las investigadoras guardaron las evidencias en un espacio al que sólo ellas podían acceder por medio de una clave de seguridad. Se realizaron dos codificaciones, las cuales se explican a continuación:

La primera codificación correspondía a las evidencias de resolución de la prueba escrita diagnóstica, para ello se identificaron los nueve docentes en formación como: “Estudiante 1”, “Estudiante 2”, “Estudiante 3”, “Estudiante 4”, “Estudiante 5”, “Estudiante 6”, “Estudiante 7”, “Estudiante 8” y

“Estudiante 9”. Una vez que se identificaron se mantuvo el mismo orden al clasificar las evidencias de la prueba final y se consideró el hecho de referirse al mismo docente en formación en cada clave, es decir, la clave “Estudiante 1” hizo referencia al mismo docente en formación tanto en la prueba escrita diagnóstica como en la prueba escrita final, lo cual permitió posteriormente lograr una comparación de las estrategias al analizar ambas pruebas.

Posteriormente, en la prueba escrita diagnóstica y final se revisó cada ítem, y se tomaron en cuenta los siguientes componentes del sentido numérico:

- Comprender el significado de los números (c.1).
- Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes (c.2).
- Usar puntos de referencia (c.3).
- Utilizar la composición y descomposición de los números (c.4).
- Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).
- Comprender el efecto relativo de las operaciones (c.6).
- Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7).

En este proceso, las investigadoras revisaron detalladamente cada ítem y clasificaron las estrategias de los docentes en formación de acuerdo con los componentes anteriores en caso de que se detectara su uso. Se agregó la codificación de “nada” si la respuesta no coincidía con alguno de estos componentes, si el estudiante no respondía o usaba algoritmos tradicionales. Es importante recalcar que la codificación “nada” se utilizó únicamente en la segunda revisión. Asimismo, las soluciones dadas por los docentes en formación fueron repartidas por las investigadoras y analizadas primeramente de forma individual. Posteriormente se compararon los resultados y por consenso de grupo se hizo la codificación final.

En la segunda codificación, las respuestas de los ítems dadas por cada participante fueron considerados individualmente por las investigadoras y la directora de este proyecto, con el fin de que cada una analizara cada respuesta. Luego se compararon los resultados, debate, se analizó y llegó a una misma conclusión. Esto se realizó con cada ítem presentado en la prueba escrita diagnóstica y final. Se establecieron tres clasificaciones para el tipo de respuesta y se definieron siete tipos de razonamiento utilizados por los docentes en formación al resolver cada uno de los ítems.

Se analizaron las respuestas de los nueve docentes en formación por separado, identificando la clasificación de la respuesta como:

- Respuesta correcta (RC): responde correctamente a la pregunta de la tarea matemática.
- Respuesta incorrecta (RI): responde incorrectamente a la pregunta de la tarea matemática.
- Sin respuesta (SR): no responde a la pregunta de la tarea matemática.

Además, se señaló el tipo de razonamiento como:

- Sentido numérico (SN): utilizan alguna(s) componente(s) del marco del sentido numérico, debe existir coherencia en la respuesta.
- Parcialmente sentido numérico (PSN): la justificación combina el uso de componentes del sentido numérico con el uso de reglas memorizadas y/o algoritmos, es decir, se utilizan componentes del sentido numérico y también algoritmos. Además, existe coherencia en la respuesta.

- Basado en reglas (BR): hacen uso, exclusivamente, de algoritmos o reglas memorizadas que ayudan a resolver el ejercicio.
- Razonamiento incorrecto (RAI): utilizan argumentos matemáticamente incorrectos que no permitirían resolver el ejercicio.
- Razonamiento incompleto o razonamiento poco claro (RPC): no proporcionan suficientes argumentos para identificar las razones que les llevan a resolver el ejercicio. Puede utilizar componentes del sentido numérico, pero no hay uso de algoritmos.
- Sin argumentar (SA): responde al ítem pero no presenta justificación.
- Blanco (BL): no responde a la pregunta y no presenta justificación.

Los resultados obtenidos en la segunda codificación se revisaron por segunda vez por las investigadoras y la directora del proyecto, con el fin de establecer un acuerdo sobre los resultados obtenidos en el análisis de cada ítem.

Posteriormente, se realizó de forma individual una revisión y clasificación de los ítems realizados por los participantes, se determinó el tipo de razonamiento, el tipo de clasificación de respuesta y en el caso de que la respuesta presentara algún componente del sentido numérico se estableció a cuál correspondía (ver tabla 2). Se realizaron tres revisiones grupales, las primeras dos entre las investigadoras y la última con la directora del proyecto para unificar la información, hasta llegar a un acuerdo grupal acerca de cuál debería ser el tipo de razonamiento y el uso o no de componentes para lograr un consenso general para cada uno de los 10 ítems. Se realizó esta tarea para la prueba diagnóstica y una vez concluido este proceso se realizaron tres revisiones para la misma finalidad de unificar la información con los resultados obtenidos en la prueba final. De igual forma, se realizaron tres revisiones grupales para este objetivo.

Seguidamente, se trabajó para cada prueba la cantidad de respuestas correctas (RC), respuestas incorrectas (RI) y sin respuesta (SR) que se observaron de los razonamientos aportados en los ítems por los docentes en formación. De forma grupal, se contabilizó la cantidad de veces que se usó cada tipo de razonamiento tanto en la prueba diagnóstica como en la prueba final.

Posteriormente, las investigadoras trabajaron en el análisis con cierta cantidad de ítems cada una y la información obtenida en el proceso anterior se consignó en tres tablas distintas: una para la prueba diagnóstica (ver tabla 3), otra para la prueba final (ver tabla 4) y la última que compara los resultados en ambas pruebas (ver tabla 5), las cuales fueron rellenadas por las investigadoras con la información recolectada en el análisis de cada ítem.

Por otra parte, la recolección de datos consistió en explicar el propósito que tenía cada uno de los diez ítems en ambas pruebas, es decir, se explicaba detalladamente lo que requería cada uno de ellos para su solución, también se presentaba una o más estrategias que incluían los componentes de sentido numérico seleccionados en el proceso de validación de la prueba (ver tabla 2).

Asimismo, se seleccionó un docente en particular con la característica de que presentara alguna variación significativa al responder ambas pruebas, por ejemplo, si empleó un razonamiento en la prueba diagnóstica, pero usó otro distinto en la final, si usó componentes del sentido numérico o no los empleó en alguna de las pruebas o en ambas, entre estos aspectos. Además, es importante mencionar que al realizar esta selección se agregó una figura que muestra un extracto del razonamiento empleado por el docente en formación para el ítem respectivo.

Seguidamente, se optó por construir tablas de resumen que permitieran visualizar los razonamientos empleados por todos los docentes en formación, el tipo de respuesta dada al ítem y el uso o no de componentes empleados. Estas tablas fueron revisadas en reuniones virtuales efectuadas por las investigadoras con la finalidad de observar los resultados más detalladamente.

Por último, se hizo una observación general para cada uno de los ítems y se detallaron algunos casos de docentes en formación con variaciones significativas en las pruebas tanto en el tipo de razonamiento como el uso de componentes, en caso de que se hayan usado o no. El análisis ejecutado para cada ítem estuvo sujeto a constantes revisiones por parte de las investigadoras y una vez concluido todo el análisis fue revisado por la directora del proyecto.

Capítulo IV: Análisis de Datos

En este capítulo se aborda el análisis e interpretación de los datos obtenidos en la prueba diagnóstica (PD) y la prueba final (PF). Además, se presentan los resultados y la comparación obtenida de ambas pruebas.

Análisis e Interpretación de Datos

En esta sección se presenta un análisis general de las respuestas dadas por los docentes en formación de la carrera Enseñanza de la Matemática, a los diez ítems que componen la prueba escrita diagnóstica (PD) y la prueba escrita final (PF), además de la comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas (ver anexo 3). Las tablas 3, 4 y 5 que se presentan más adelante muestran todas las respuestas dadas por los nueve participantes en cada ítem y el tipo de razonamiento observado en las soluciones dadas. Además, este razonamiento se clasificó en respuesta correcta, respuesta incorrecta o sin respuesta según sea el caso.

Resultados de la Prueba Escrita Diagnóstica

La tabla 3 presenta un análisis detallado, correspondiente a la clasificación de las respuestas dadas a cada ítem y el tipo de razonamiento usado por los docentes en formación en la prueba diagnóstica (PD).

Tabla 3

Resultados y razonamiento en los diez ítems de la prueba escrita diagnóstica

Resultados obtenidos en la prueba escrita diagnóstica por respuesta correcta según el tipo de razonamiento a los diez ítems																						
ítems	Respuestas correctas	Tipo de razonamiento																				
		SN			PSN			BR			RAI			RPC			SA			BL		
		RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR
1.	2	1	1	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0
2.	3	3	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3.	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	0	2	0	1	0	0	0	1
4.	5	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	3	1	0	0	1	0	0	0	0
5.	2	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	0	2
6.	4	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	3	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7.	6	4	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8.	4	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2
9.	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
10.	3	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	2	0	0	0	0

Nota. RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Nombre del ítem: 1. Área del terreno; 2. Queque de cumpleaños; 3. Ordenar fracciones y decimales; 4. Área de la granja; 5. Área de la tienda; 6. Área del cuadrado; 7. Recipiente de agua; 8. Pintar la habitación; 9. Cosecha de arroz; 10. Colocar la coma.

Resultados de la Prueba Escrita Final

La tabla 4 presenta un análisis detallado, correspondiente a la clasificación de la respuesta a cada ítem y el tipo de razonamiento utilizado por los docentes en formación en la prueba final (PF).

Tabla 4

Resultados y razonamientos en los diez ítems de la prueba escrita final

Resultados obtenidos en la prueba escrita final por respuesta correcta según el tipo de razonamiento a los diez ítems																						
Ítems	Respuestas correctas	Tipo de razonamiento																				
		SN			PSN			BR			RAI			RPC			SA			BL		
		RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR	RC	RI	SR
1.	4	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	2	0	0	0	0	0	0	1
2.	6	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	2	2	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	2	0	1	0	0	0	1
4.	3	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	2	0	0	3	0	0	0	0
5.	3	2	0	0	0	0	0	1	0	2	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6.	3	3	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
7.	5	5	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
8.	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1	0	2	0	0	0	0	0	1
9.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
10.	5	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Nota. RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Nombre del ítem: 1. Área del terreno; 2. Queque de cumpleaños; 3. Ordenar fracciones y decimales; 4. Área de la granja; 5. Área de la tienda; 6. Área del cuadrado; 7. Recipiente de agua; 8. Pintar la habitación; 9. Cosecha de arroz; 10. Colocar la coma.

Comparación por Ítems

La tabla 5 muestra el análisis comparativo correspondiente a las respuestas correctas de los ítems (segunda columna) y el tipo de razonamiento de las componentes utilizadas por cada docente en formación tanto en prueba diagnóstica (PD) como en la prueba final (PF).

Tabla 5

Resultados de la comparación y razonamiento en los diez ítems

Resultados de la comparación con la prueba escrita diagnóstica y prueba escrita final por respuesta correcta según el tipo de razonamiento a los diez ítems

Ítems	Respuestas correctas		Tipo de razonamiento por docente en formación														
	PD	PF	SN		PSN		BR		RAI		RPC		SA		BL	
			PD	PF	PD	PF	PD	PF	PD	PF	PD	PF	PD	PF	PD	PF
1.	2	4	2	2	0	0	2	1	2	1	3	4	0	0	0	1
2.	3	6	3	6	2	0	0	0	2	3	1	0	0	0	1	0
3.	1	2	1	3	0	0	3	1	0	0	3	3	1	1	1	1
4.	4	3	1	2	1	0	2	1	0	0	4	3	1	3	0	0
5.	2	3	1	2	2	0	0	3	2	3	2	1	0	0	2	0
6.	4	3	2	3	0	0	2	2	3	2	2	2	0	0	0	0
7.	6	5	4	5	1	1	3	1	0	0	1	1	0	0	0	1
8.	4	3	3	2	1	0	0	0	1	3	2	3	0	0	2	1
9.	2	1	2	1	0	0	0	0	4	6	2	2	0	0	1	0
10.	3	5	2	4	1	0	0	1	2	2	2	1	2	0	0	1

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Nombre del ítem: 1. Área del terreno; 2. Queque de cumpleaños; 3. Ordenar fracciones y decimales; 4. Área de la granja; 5. Área de la tienda; 6. Área del cuadrado; 7. Recipiente de agua; 8. Pintar la habitación; 9. Cosecha de arroz; 10. Colocar la coma.

Resultados y Análisis de las Componentes en los Diez Ítems

En este apartado se muestra la solución y el análisis de las componentes utilizadas por algunas de las personas participantes, elegidas por el cambio significativo en las respuestas de la PD y PF, en cada uno de los ítems aplicados en ambas pruebas. Se analizó el componente de solución, la comparación de los ítems en ambas pruebas por medio de una tabla, observaciones generales y casos específicos más relevantes. Para ello se presentó primeramente el propósito del ítem junto con las componentes respectivas para su solución de acuerdo con la relación de los diez ítems y los componentes del sentido numérico presentes en la tabla 2. Por último, se realizó el análisis comparativo de ambas pruebas en cada ítem para los docentes en formación seleccionados. En el anexo 5 se pueden observar las imágenes que corresponden a las respuestas dadas por los docentes en formación en la PD y PF.

Ítem 1. Área del Terreno

El propósito de este ítem es utilizar la estimación para encontrar el área de un terreno. Se puede resolver por medio de la composición y descomposición de los números dados como las medidas del terreno (c.4) estimando cuál área es la que más se aproxima a la propuesta por el ítem, sin necesidad de utilizar algoritmos básicos para su solución. Otro método para resolverlo es utilizar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), es decir, realizar una representación gráfica. En este caso se puede utilizar un dibujo. Al resolver este ítem de cualquiera de las dos formas se deben utilizar puntos de referencia (c.3) al reconocer las medidas establecidas.

En la tabla 6 se presentan los resultados del ítem 1 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del sentido numérico empleadas por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 6

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 1

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	RI RPC	RC RPC	RI BR	RI RAI	RI BR	RC SN: c.3	RI SN: c.4, c.5	RI RPC	RI RAI
PF	RI RPC	SR BL	RI BR	RI RPC	RI RAI	RC SN: c.3, c.4	RC RPC: c.5	RC RPC: c.3	RI SN: c.4, c.5

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 6 son las siguientes:

- Se observa que en la PD siete docentes en formación obtuvieron respuestas incorrectas mientras que en la PF la cantidad de respuestas incorrectas fue de cinco.
- Se muestra que el razonamiento que más utilizaron los docentes en formación fue el RPC, y el menos utilizado fue BL en ambas pruebas.
- Se observa menos uso de respuestas BR y uso de algoritmos en la PD con respecto a la PF.
- El uso del razonamiento BR aplicado en la PD no mejoró posterior a la intervención, puesto que en la PF los docentes que obtuvieron este tipo de razonamiento, algunos aplicaron otra vez el mismo razonamiento o un RAI.
- En el caso del SN, se mantiene la cantidad de dos docentes en formación que utilizaron este razonamiento en ambas pruebas, en el cual queda

demostrado un bajo uso del SN al resolver el ítem. Estos dos docentes basaron sus respuestas en los componentes determinados previamente para el ítem 1, los cuales son puntos de referencia (c.3), composición y descomposición de los números (c.4) y múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5) (ver tabla 2), sin embargo, no lograron aplicar el total de los tres componentes contemplados para la solución del ítem.

- En la PD dos docentes en formación aplicaron componentes del SN, y en la PF lo hicieron cuatro, y dos de ellos lo aplicaron en ambas pruebas. Se deduce que en este ítem los docentes en formación presentan debilidades al realizar el producto de números enteros, propiamente al visualizar la composición y descomposición de cantidades, y utilizar las decenas o centenas como puntos de referencia, es decir, los participantes logran aplicar puntos de referencia al resolver tareas matemáticas que involucran expresiones decimales o fracciones, pero al trabajar con números naturales no tienen del todo claro cómo hacer uso de esta estrategia.

Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:

- El DF.4 en la PD utilizó un argumento matemático incorrecto, ya que menciona que: “la opción correcta es la b) porque la diferencia de los dos metros en el ancho del terreno va a dar un poco más grande el área, pero lo va a acercar más”. Sin embargo, en la PF aplicó un componente basado en el RPC, pues expresa que: “la respuesta correcta es 103 m x 50 m, ya que el terreno va a ser más grande, pero es lo más cerca de 103 m x 48 m”, es decir, no proporciona suficientes argumentos para identificar las razones que le lleva a resolver el ítem.

- El DF.6 utilizó en ambas pruebas el razonamiento de SN, cabe resaltar que en la PD su respuesta se basó en el componente de puntos de referencia (c.3), mientras que, en la PF mantuvo el mismo componente, agregando la composición y descomposición de los números (c.4) a su razonamiento.
- El DF.7 es un caso interesante de analizar, se observa como en la PD utilizó en su respuesta componentes del SN como múltiples representaciones (c.5) y descomposición y composición de los números (c.4); sin embargo, en la PF, aunque no logró dar los suficientes argumentos para resolver el ítem, utilizó el componente de múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5). Además, se observa que el DF.7 presentó una respuesta correcta en la PF.
- El DF.8 no proporcionó suficientes argumentos para dar la solución al ítem en ambas pruebas, pero en la PF usó puntos de referencia (c.3).
- El DF.9 presentó argumentos matemáticos incorrectos en la PD. Sin embargo, se observa una mejoría en la PF donde utilizó componentes del SN como composición y descomposición de los números (c.4) y múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).

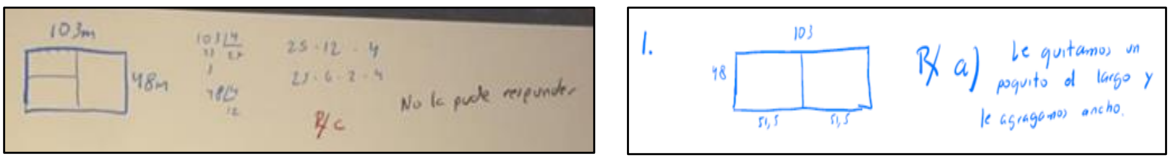
En la figura 2 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.9, y el análisis correspondiente, en ambas pruebas:

Figura 2

Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.9 en el ítem 1

Prueba diagnóstica
Respuesta incorrecta

Prueba final
Respuesta correcta



Se muestra que en la PD el DF.9 trató de encontrar el área del rectángulo, dividiendo el terreno en tres partes. Sin embargo, el razonamiento es incorrecto, porque la estrategia que utilizó no le permitió aproximar de forma correcta el área del terreno, mientras que en la PF el participante presentó un razonamiento con SN al utilizar la composición y la descomposición de las medidas del terreno (c.4) para estimar la posible respuesta sin recurrir al uso de algoritmos como división o multiplicación. Además, reforzó su razonamiento por medio de una representación gráfica colocando las medidas del lado del rectángulo en decimales, el cual le permitió entender de forma más clara lo que planteaba la tarea matemática.

Ítem 2. Queque de Cumpleaños

El ítem consiste en determinar si a Roberto, que estaba celebrando su cumpleaños, le iba a sobrar más de medio queque, después de repartir cierta cantidad de porciones. La estrategia para resolver el ítem debería incluir múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), aplicando la descomposición o composición (c.4) de las porciones que repartió Roberto, sin recurrir al uso de algoritmos como la suma y resta de fracciones. Además, se debe comparar el resultado con $\frac{1}{2}$, ya que en el enunciado se cuestiona si a Roberto le sobrará más de medio queque. Esto conduce a desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7).

En la tabla 7 se presentan los resultados del ítem 2 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del sentido numérico empleadas por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 7

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 2

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	RI	SR	RI	RI	RC	SR	RC	RC	RI
	RAI	RPC: c.4	PSN: c.4, c.5	RAI	SN: c.2, c.4, c.5	BL	SN: c.2, c.4, c.5	SN: c.2, c.4, c.5	PSN: c.2, c.4, c.5
PF	RC	SR	RC	RI	RC	RC	RC	RC	RI
	SN: c.2, c.4, c.5	RAI	SN: c.2, c.4, c.5	RAI	SN: c.2, c.4, c.5	SN: c.2, c.4, c.5	SN: c.2, c.4, c.5	SN: c.2, c.4, c.5, c.7	RAI

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 7 son las siguientes:

- En el caso de la PD se evidencia poca cantidad de respuestas correctas, debido a que sólo tres de los docentes en formación contestaron correctamente. Sin embargo, en la PF la cantidad de respuestas correctas se duplica.

- En las tres respuestas correctas obtenidas en la PD se aprecia el uso de los componentes del sentido numérico como reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2), utilizar la composición y descomposición de los números (c.4) y usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), donde la composición y descomposición (c.4) fue el más empleado. En la PF las seis respuestas correctas presentan componentes del sentido numérico y todas las respuestas repiten los componentes reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2), utilizar la composición y descomposición de los números (c.4), y usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).

- El razonamiento más usado en la PD fue el de SN seguido de PSN, además los docentes emplearon RAI o RPC. En la PF el razonamiento más empleado fue el de SN, el cual fue empleado por los seis docentes que respondieron correctamente (ver tabla 5).
- En la PD el máximo de componentes del sentido numérico empleados fue tres: reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2), utilizar la composición y descomposición de los números (c.4) y usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), los cuales fueron usados por los docentes en formación DF.5, DF.7, DF.8 y DF.9. Sin embargo, para la PF es de relevancia destacar que el DF.8 aplicó los cuatro componentes del sentido numérico contemplados en el diseño de este ítem: reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2), utilizar la composición y descomposición de los números (c.4), usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7).
- El componente utilizar la composición y descomposición de los números (c.4), es el más usado en este ítem para resolver ambas pruebas por seis docentes en formación. Se deduce que los docentes en formación tuvieron la

habilidad para deducir las soluciones de una expresión que no se conoce o no se recuerda, por medio de otras que sí se saben, es decir, utilizan la composición y descomposición de números racionales para resolver este tipo de ítems.

- Se resalta que los docentes en formación que aplicaron PSN emplearon dos o tres componentes del sentido numérico.
- En este ítem no se hace uso de algoritmos en las estrategias empleadas por los docentes tanto en la PD como en la PF.

Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:

- El DF.4 fue el único que no usó componentes en ninguna prueba para resolver este ítem.
- Se destaca el caso del DF.8, el cual en la PF respondió nuevamente de forma correcta, pero esta vez lo hizo justificando su respuesta con un componente del sentido numérico adicional. Desarrolló estrategias apropiadas y evaluó si su respuesta era razonable (c.7), al destacar que: “si se suma el sobrante del queque con la porción que le corresponde, sería posible tener más de medio queque”, al evidenciar que puede haber dos interpretaciones para la respuesta al problema.
- Así mismo se destaca el caso del DF.1 y el DF.3 pues en la PD tuvieron RAI y PSN respectivamente. No obstante, en la PF se observa una mejoría en la forma de contestar el ítem, ya que ambos lograron evidenciar el razonamiento de SN a través de los componentes reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2) al comparar el orden de los números, utilizar la composición y descomposición de los

números (c.4), y usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).

- Por otro lado, el DF.6 no dio respuesta en la PD. Sin embargo, en la PF logró resolver el ítem empleando un razonamiento con SN, al utilizar los componentes de reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2), descomposición y composición de los números (c.4), y usar múltiples representaciones de los números y operaciones (c.5).

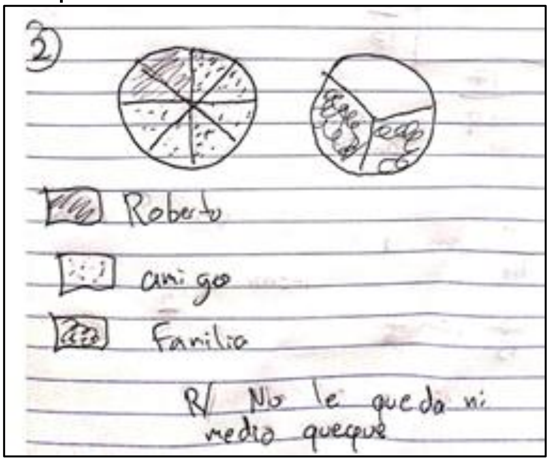
- Los docentes en formación DF.5, DF.7 y DF.8, en ambas pruebas utilizaron componentes del sentido numérico, sus respuestas mantuvieron los componentes de reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2), descomposición y composición de los números (c.4), y múltiples representaciones de los números y operaciones (c.5), con la excepción del DF.8, caso que se detalló anteriormente. Estos tres docentes razonaron tanto en la PD como en la PF, por medio de SN, además lograron responder correctamente en ambas pruebas.

En la figura 3 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.8, y el análisis correspondiente, en ambas pruebas:

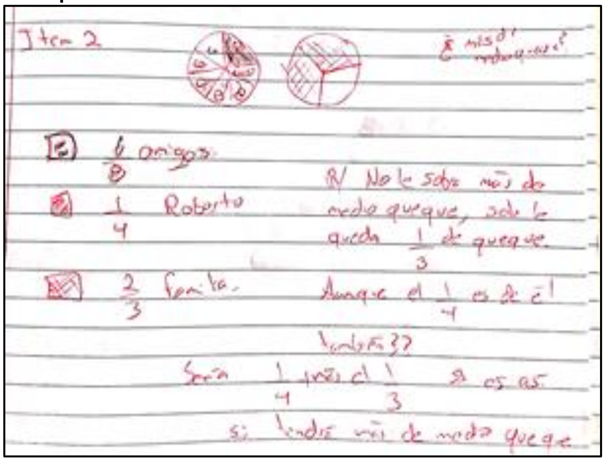
Figura 3

Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.8 en el ítem 2

Prueba diagnóstica
Respuesta correcta



Prueba final
Respuesta correcta



En la PD se observó el uso correcto que realizó el docente en formación al representar gráficamente un número racional, incluso se evidenció el adecuado empleo de amplificar fracciones como es el caso de $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, ya que fue una de las porciones que Roberto repartió. Por lo tanto, este docente en formación logró encontrar la respuesta correcta sin recurrir al uso de algoritmos tradicionales como suma o multiplicación.

Además, el mismo docente en formación en la PF respondió correctamente al mismo ítem y presentó un razonamiento superior en este ejercicio, debido a que se realizó el siguiente cuestionamiento: “al realizar la repartición a Roberto le correspondió $\frac{1}{4}$ de queque y después le sobra $\frac{1}{3}$ ”. Es decir, analizó cada una de las porciones, dándose cuenta de que a Roberto le podría sobrar más de medio queque, si se toman en cuenta ambas porciones. Cabe mencionar que es el único docente que concluye con este razonamiento en su respuesta.

ítem 3. Ordenar Fracciones y Decimales

El ítem se basa en ordenar de mayor a menor las distancias recorridas por Tomás, Juan, María, Julia, David y José aplicando alguna estrategia que permitiera establecer ese orden.

Una forma de resolver este ítem es determinar puntos de referencia (c.3) para las estimar el valor de las fracciones, implícitamente en esta estrategia se utiliza composición y descomposición de las fracciones (c.4) para encontrar el valor que equivale al punto de referencia. Además, se reconoce el tamaño relativo y absoluto de los números racionales (c.2) al realizar una comparación de fracciones con decimales (finalidad del ítem) y ordenarlos de mayor a menor, con el fin de evitar el uso de algoritmos como dividir el numerador entre el denominador para encontrar su representación decimal.

Por ejemplo, una manera sencilla de resolver el ejercicio es determinar que $\frac{17}{16}$ es una fracción impropia (mayor que 1), que $\frac{13}{38}$ es aproximadamente $\frac{1}{3}$ y que $\frac{7}{29}$ se puede comparar con $\frac{1}{4}$ y así ordenarlas de acuerdo con esas aproximaciones obtenidas, evitando el algoritmo tradicional como es la división de números enteros.

En la tabla 8 se presentan los resultados del ítem 3 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del sentido numérico empleados por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 8

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 3

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	SR RPC: c.3	RC RPC: c.2	SR BR	SR BR	SR BR	RI SA	SR BL	SR SN: c.2, c.3, c.5	SR RPC: c.3
PF	RC SN: c.2, c.3	SR RPC: c.3	SR BR	SR BL	RI SN: c.2, c.3, c.4	RI SA	SR RPC: c.3	RI RPC: c.3	RC SN: c.2, c.3

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 8 son las siguientes:

- En comparación con los demás ítems en la PD, se evidencia un mínimo de respuestas correctas (ver tabla 3). En el caso de la PD se observa un bajo número de respuestas correctas, demostrando que las personas participantes tenían debilidades al identificar cuál distancia era mayor que otra, y aplicaron razonamientos como BR o RPC.
- En la PD, se aprecia que en siete ocasiones los docentes en formación no dieron respuesta al ítem, mientras que en la PF la cantidad de docentes que no dio respuesta fue de cuatro.
- Tres docentes en formación que aplicaron el razonamiento BR no dieron respuesta al ítem en la PD y en la PF un docente aplicó el razonamiento de

BR y tampoco dio respuesta. El DF.3 utiliza este razonamiento en ambas pruebas y no da respuesta al ítem.

- En la PD se empleó el tipo de razonamiento RPC y BR tres veces. Para la PF se aplicó el razonamiento de SN y RPC en tres ocasiones.
- En la PF aumentó una respuesta correcta con respecto a la PD.
- Resulta relevante la variedad de componentes que emplearon los docentes en formación en este ítem, como comprender el significado de los números (c.1), reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2), y usar puntos de referencia con las cantidades establecidas en el ítem (c.3).
- Una observación interesante en este ítem fue el bajo uso de algoritmos en la PF, ya que solo el DF.3 aplicó dicho razonamiento en ambas pruebas, mientras que en la PD fueron los DF.3, DF.4 y DF.5.
- Se puede apreciar también que hay un aumento de componentes propios del sentido numérico, ya que en la PD solamente cuatro de los nueve docentes en formación emplearon una o más componentes del sentido numérico, mientras que en la PF fueron seis docentes los que aplicaron este tipo de componentes.
- El componente usar puntos de referencia (c.3) es el más usado en este ítem para resolver ambas pruebas, en la PD es usado por tres docentes en formación distintos, mientras que en la PF es utilizado por seis.
- Ningún docente en formación logró utilizar los cuatro componentes contemplados en el diseño de este ítem. Se puede deducir que en este ítem los docentes en formación presentan debilidades al emplear el uso de la recta numérica para determinar la mayoricidad, menoricidad o igualdad para

comparar dos o más cantidades, debido a que el componente c.5 se usó una vez.

Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:

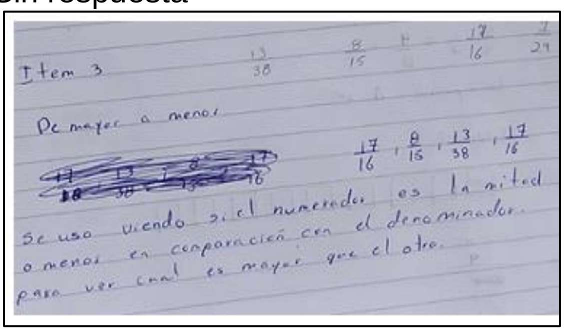
- El DF.1 y DF.9, al aplicar la PD, utilizaron el componente de puntos de referencia (c.3), sin embargo, no lograron justificar adecuadamente los procedimientos que realizaron para responder al ítem. Por otra parte, en la PF lograron justificar adecuadamente, por medio del uso de los componentes del sentido numérico de reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2), y puntos de referencia (c.3). Estos docentes emplearon un razonamiento más elaborado en la PF al lograr trabajar con estas dos componentes del sentido numérico.
- Caso contrario se aprecia en el DF.8, presentó una estrategia con razonamiento de SN y el uso de tres componentes en la PD, pero el mismo docente proporcionó un RPC con puntos de referencia después de la intervención.

En la figura 4 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.1, y el análisis correspondiente, en ambas pruebas:

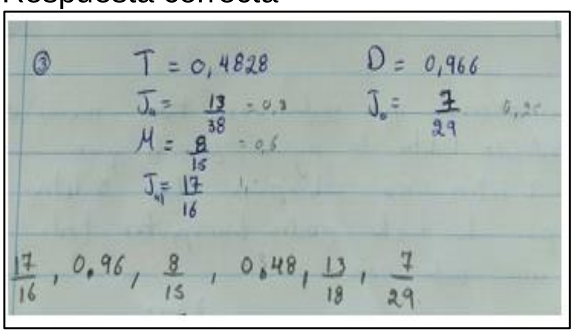
Figura 4

Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.1 en el ítem 3

Prueba diagnóstica
Sin respuesta



Prueba final
Respuesta correcta



En la figura 4, se observa que en la PD el DF.1, ordenó algunas distancias. Sin embargo, mostró un RPC al dar la justificación del procedimiento utilizado y no logró dar una respuesta al ítem. En la PF, el mismo docente en formación, ordenó correctamente las distancias utilizando puntos de referencia (c.3), dado que se aprecia en la imagen de la derecha que encontró algunas representaciones decimales (por ejemplo, sabe que la fracción $\frac{17}{16}$ es mayor que 1 por medio de la comprensión del significado de los números y reconociendo el tamaño relativo y absoluto de los números (c.1 y c.2 respectivamente), los cuales le permiten emplear el razonamiento de SN.

- En el caso del DF.2, en la PD reconoce el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) al ordenar las cantidades propuestas en el ítem. Por otra parte, al responder el ítem en la PF, utilizó puntos de referencia (c.3) al aproximar cada valor. Por ejemplo, al determinar que $\frac{8}{15}$ es mayor que $\frac{1}{2}$ pero menor que 1. Este docente en formación empleó en ambos casos el RPC, ya que no justificó adecuadamente los procedimientos para dar su respuesta.
- El DF.5 presentó un avance al razonar este ítem. En la PD hizo uso de algoritmos tradicionales en el razonamiento BR para responder el ítem, mientras que para la PF logró un razonamiento de SN al argumentar su respuesta, debido a que reconoció el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), usó puntos de referencia (c.3), y utilizó la composición y descomposición de los números (c.4).
- El DF.7 pasó de dejar en blanco este ítem en la PD a emplear en la PF un RPC, por medio del componente puntos de referencia (c.3).
- Únicamente el DF.8 utilizó tres componentes (c.2, c.3 y c.5) para resolver la PD.

Ítem 4. Área de la Granja

El ítem señala que David tenía una granja de forma rectangular y se debe dar una aproximación del área de la granja. Una manera de realizar este ítem fue determinando $\frac{1}{2}$ como punto de referencia (c.3), es decir, $\frac{6}{13}$ es menor que $\frac{1}{2}$ y $\frac{17}{19}$ es menor que 1. Seguidamente se realiza el producto de las medidas anteriormente encontradas $\frac{1}{2}$ y 1, comparando el resultado con las medidas originales del enunciado con respecto al punto de referencia, para determinar que el área es menor que $\frac{1}{2}$, teniendo como respuesta correcta la opción c).

Otra forma de resolver el ítem es usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), en este caso corresponde a la creación de representaciones gráficas, donde se exponga cada una de las medidas de la granja correctamente.

En la tabla 9 se presentan los resultados del ítem 4 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del sentido numérico empleadas por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 9

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 4

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	RI	RC	RI	RI	RI	RC	RC	RC	RC
	SA	RPC: c.2, c.3	BR	BR	RPC: c.3, c.5	RPC	SN: c.5	RPC: c.3	PSN: c.3
PF	RI	RI	RI	RI	RC	RI	RI	RC	RC
	RPC: c.3	RPC: c.3	SA	BR	SN: c.5	SA	SA	SN: c.2, c.3	RPC: c.3

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 9 son las siguientes:

- El número de respuestas correctas disminuyó posterior a la intervención educativa. En la PD cinco de los nueve docentes en formación que participaron respondieron correctamente al ítem y en la PF fueron tres respuestas correctas.
- El tipo de razonamiento que más se utilizó en las respuestas de este ítem fue el RPC en la PD, mientras que en la PF son de igual cantidad los razonamientos SA y RPC.
- Cinco docentes en formación distintos tanto en la PD como en la PF utilizaron componentes del sentido numérico. En ambas pruebas el más empleado es usar puntos de referencia (c.3), se observó cuatro docentes en formación diferentes resolver primero la PD y luego la PF.

- Los DF.2, DF.5, DF.8 y DF.9, utilizaron componentes del sentido numérico en ambas pruebas para este ítem.
- Los componentes reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2) y usar puntos de referencia (c.3) fueron utilizados una vez por dos docentes distintos en cada prueba. Ningún docente en formación logró utilizar los tres componentes contemplados en el diseño de este ítem.
- Se evidencian debilidades en los docentes en formación al estimar cuál era el área de la granja en la PF, ya que no argumentaron las respuestas o usaron RPC.
- Cabe destacar que de todas las veces que se aplicó el razonamiento BR en este ítem no se logró dar una respuesta correcta.

Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:
- El DF.1 presentó razonamientos distintos al justificar su respuesta a pesar de que fue incorrecta la respuesta en ambas pruebas. En la PD no argumentó, únicamente marcó la opción d) como correcta, mientras que en la PF tuvo un RPC, pero usó puntos de referencia (c.3) al aproximar las medidas presentes en el enunciado del ítem para dar su respuesta.
- Casos de los docentes en formación que tuvieron el ítem de la PD correcta y PF
incorrecta:
    - El DF.2, resolvió el ítem en ambas pruebas con RPC. En la PD usó dos componentes: reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números (c.2) y puntos de referencia (c.3),

mientras que en la PF únicamente usó el componente puntos de referencia (c.3) para dar su respuesta.

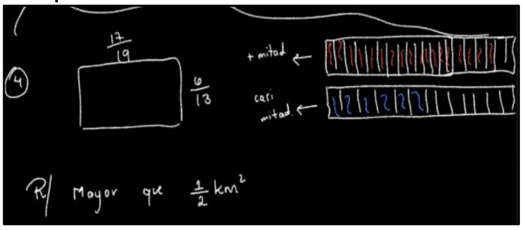
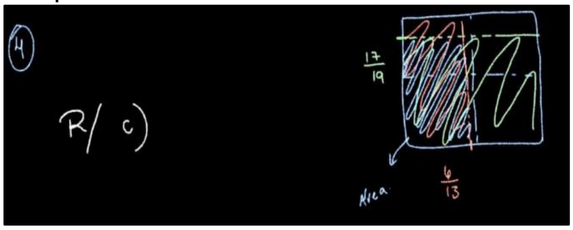
- El DF.6, en la PD usó un RPC, ya que solo brinda la justificación: “el denominador será mucho más grande que el numerador” y en la PF no argumentó, ya que no presentó justificación al responder el ítem.
- El DF.7 es un caso muy interesante, puesto que en la PD logró aplicar el razonamiento SN y fue el único en utilizar el componente de usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5) en esta prueba, encontró la respuesta mediante una representación gráfica, donde se expone cada una de las medidas de la granja. Sin embargo, para la PF marcó la opción d), que menciona: “no puedo decidirlo sin realizar un cálculo exacto”, y no presentó argumentos.

- El DF.5, en ambas pruebas realizó una representación gráfica (c.5), presentando cada una de las medidas de la granja para dar su respuesta, pero usó razonamientos diferentes. En la PD utilizó un RPC incluyendo los componentes: usar puntos de referencia (c.3) y el de usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5). Mientras que en la PF usó SN con el componente usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), cabe destacar que fue el único en utilizarlo en esta prueba.

En la figura 5 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.5 y su análisis correspondiente, en ambas pruebas:

Figura 5

Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.5 en el ítem 4

Prueba diagnóstica Respuesta incorrecta	Prueba final Respuesta correcta
	

En la figura 5, se observa cómo el DF.5 en la PD realizó una representación gráfica de la granja. Sin embargo, no se logró comprender cómo realizó la comparación entre las fracciones y la gráfica, obteniendo un RPC. Seguidamente, en la PF se observó que el DF.5 diseñó la representación gráfica de la granja con las medidas correctamente.

- El DF.8 presentó una mejoría en la PF, puesto que utilizó dos componentes del sentido numérico como lo son reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) al hacer una comparación de las medidas con $\frac{1}{2}$ y 1. Además, usó el punto de referencia $\frac{1}{2}$ para dar la respuesta en ambas pruebas (c.3).

- Por último, el DF.9 en la PD presentó un razonamiento PSN, ya que al resolver la prueba combinó el uso de componentes del sentido numérico al encontrar un punto de referencia (c.3) y también usó el algoritmo de la multiplicación con números naturales. Mientras que en la PF aplicó el mismo componente del sentido numérico usar puntos de referencia (c.3), pero no proporcionó suficientes argumentos para identificar las razones que lo llevaron a resolver el ítem (RPC).

Ítem 5. Área de la Tienda

El propósito de este ítem es la búsqueda de componentes adecuados de estimación para encontrar la fracción de la cuadra que está ocupada por el edificio, el cual se resuelve utilizando puntos de referencia (c.3), así como usar múltiples representaciones de los números y operaciones (c.5), estimando cuál fracción es la que más se aproxima, sin necesidad de utilizar algoritmos para su solución. Al resolver este ítem de cualquiera de las dos formas los docentes en formación deben reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) al utilizar las medidas establecidas.

En la tabla 10 se presentan los resultados del ítem 5 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del sentido numérico empleadas por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 10

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 5

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	RI RAI	SR RA	SR RPC	SR RPC	SR PSN: c.5	SR BL	SR BL	RC SN: c.2, c.3, c.5	RC PSN: c.3, c.5
PF	RC SN: c.2, c.3, c.5	RI RPC: c.3	SR BR	SR RAI	RI RAI	SR RAI	RC SN: c.2, c.3, c.5	SR BR	RC BR

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 10 son las siguientes:

- Se observa que la clasificación de respuesta que más utilizaron los docentes en formación fue SR, mientras que la menos utilizada fue RI en ambas pruebas.
- Se observan más respuestas correctas en la PD en comparación con la PF: dos respuestas correctas en la PD y tres respuestas correctas en la PF. Asimismo, se utilizó menos la categoría SR en la PD donde dos docentes en formación dejaron en blanco este ítem y en la PF no se dio esta categoría de respuesta.
- En la PF los razonamientos más utilizados fueron RAI y BR.
- En la PF se observa que los razonamientos que no se utilizaron en este ítem fueron PSN, SA y BL.

- En la PD se observa que el tipo de razonamiento menos utilizado en el ítem fue el SN.
- En la PD las respuestas correctas involucran el uso de dos o tres componentes del sentido numérico, mientras que, en la PF, de las tres respuestas correctas, solo dos involucran el razonamiento SN con tres componentes del sentido numérico y el otro caso corresponde al razonamiento BR.
- En ambas pruebas se presenta la misma cantidad de respuestas que emplean componentes del sentido numérico: tres docentes en formación. Es importante mencionar que no hay participantes que usaron los mismos componentes del sentido numérico tanto en la PD como en la PF.
- Se observa que algunos docentes en formación utilizaron el razonamiento BR en la PF mientras que en la PD no lo utilizaron.
- Tomando como referencia ambas pruebas sólo tres docentes en formación distintos usaron el razonamiento SN con los mismos componentes: reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), usar puntos de referencia (c.3), y usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), los cuales corresponden a los componentes que se tomaron en cuenta para la creación del ítem (ver tabla 2).
- El componente más usado en este ítem para resolver la PD es usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5) por tres participantes diferentes, mientras que en la PF cambió a usar puntos de referencia (c.3) por tres docentes en formación diferentes.
- Además, el componente más utilizado fue el de múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).

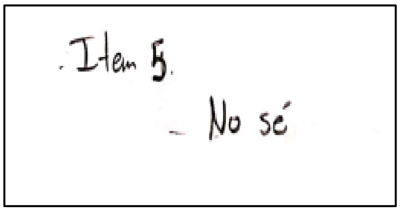
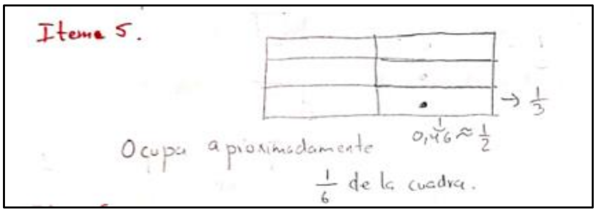
Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:

- El DF.1 en la PD tuvo un RAI, mientras que en la PF aplicó el razonamiento SN con los componentes relacionados a usar puntos de referencias (c.3), reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), y usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), es decir, utilizó en la PF los tres componentes tomados en cuenta para la creación del ítem (ver tabla 2).
- Se muestra un avance por parte del DF.2 y DF.7 al usar componentes del sentido numérico en la PF. Esto quiere decir, que los docentes mencionados presentaron una mejoría en la PF.

En la figura 6 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.7, y el análisis correspondiente, en ambas pruebas:

Figura 6

Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.7 en el ítem 5

Prueba diagnóstica Sin respuesta	Prueba final Respuesta correcta
	

Se muestra en la figura 6 cómo el DF.7 después de la aplicación de las sesiones logró dar una respuesta basada en estrategias del sentido numérico. Se evidenció el uso de la representación gráfica para la fracción aplicada al contexto de la cuadra del establecimiento el “Baratonazo” para poder aproximar el área correspondiente.

- Unos casos interesantes de mencionar son los DF.5, DF.8 y DF.9, debido a que mostraron debilidades al resolver el ítem en la PF. En la tabla 10, se observa que en la PD utilizaron algún componente relacionado al sentido numérico. Los tres docentes en formación realizaron la representación gráfica para apoyar su respuesta y dos de ellos, específicamente DF.8 y DF.9, utilizaron puntos de referencia (c.3). Sin embargo, en la PF se observa que el DF.5 utilizó RAI para resolver el ítem, y los DF.8 y DF.9 dieron su respuesta basándose en el razonamiento BR.

Ítem 6. Área del Cuadrado

La intención de este ítem es que el docente en formación logre idear alguna estrategia adecuada sobre estimación, al determinar mediante la observación de cuatro figuras cuál de estas figuras aproxima más el producto de fracciones dado. Una manera para resolverlo es reconociendo el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) que corresponden al área sombreada y estimando cuál área es la que más se aproxima al producto, sin necesidad de utilizar algoritmos básicos para su solución, es decir, sin efectuar la multiplicación de fracciones. Otra manera de resolver el ítem es utilizar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), y realizar una comparación con cada una de las opciones de respuesta y determinar cuál es la mejor aproximación.

Al resolver este ítem con cualquiera de las dos estrategias los docentes en formación debían hacer uso de los componentes del sentido numérico tales como usar puntos de referencia (c.3), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7) al identificar en las opciones cuál área sombreada es más próxima para dar solución al ítem.

En la tabla 11 se presentan los resultados del ítem 6 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del sentido numérico empleados por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 11

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 6

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	RC BR	RC SN: c.2, c.3, c.7	RI RAI	RI BR	RC SN: c.5	RI RPC	RI RAI	RC RPC: c.3	RI RAI
PF	RI RPC: c.5	RI RPC: c.2, c.3	RI RAI	RI BR	RC SN: c.5	RC SN: c.2, c.3	RC SN: c.5	RI RAI	RI BR

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 11 son las siguientes:

- Este ítem en la PD tuvo cuatro respuestas correctas y cinco respuestas incorrectas, mientras que en la PF tuvo seis respuestas incorrectas y tres correctas. Esto quiere decir, que disminuyó la cantidad de respuestas correctas posterior a la intervención educativa. Sin embargo, se evidencia que hubo un incremento en el uso del razonamiento de SN al dar la respuesta (ver tabla 5).

- Los docentes DF.1, DF.2 y DF.8 lograron resolver correctamente el ítem en la PD incluso el DF.2 refleja el uso del razonamiento de SN, sin embargo, en la PF no lograron resolver el ítem.
- El razonamiento más empleado en este ítem es el incorrecto (RAI) (aplicado por tres docentes en formación) en la PD, posterior a la intervención uno de los participantes empleó RAI. Otro docente usó BR y respondió de forma incorrecta y solo un docente logró llegar al razonamiento de SN aplicando un componente del sentido numérico y respondiendo de forma correcta.
- De los dos casos donde se aplicó un razonamiento BR solo uno de ellos presentó una mejoría posterior a la intervención aplicando RPC y un componente del sentido numérico, el otro participante volvió a utilizar BR para contestar el ítem.
- El razonamiento de SN se aplicó en dos ocasiones en la PD, no obstante, posterior a la intervención solo un participante usó el mismo tipo de razonamiento en la PF, el otro docente en formación empleó un RPC con un componente menos que en el razonamiento anterior (ver tabla 11).
- El RPC se presentó en dos ocasiones durante la PD y posterior a la intervención se observa una leve mejoría en uno de los casos, ya que el docente en formación empleó sentido numérico en la PF y usó dos componentes del sentido numérico. Por otra parte, el otro docente en formación razonó el ítem de forma incorrecta (RAI).
- El componente de sentido numérico más usado en la PD fue el de utilizar puntos de referencia (c.3) y en PF fue usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).

- El componente que permite desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7) se usó una vez en la PD por el DF.2.
- En la PD las respuestas correctas involucran el uso de uno o tres componentes del sentido numérico, así como algoritmos matemáticos, mientras que, en la PF de las tres respuestas correctas los tres docentes emplean razonamiento con SN e involucran el uso de uno o dos componentes del sentido numérico.
- Los componentes reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) y utilizar puntos de referencia (c.3) fueron usados dos veces por dos docentes en formación diferentes en la PF. Además, ningún docente en formación logró utilizar los cuatro componentes contemplados en el diseño de este ítem.

Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:

- Se destaca el caso del DF.6 y el DF.7, pues en la PD tuvieron RPC y RAI respectivamente, mientras que en la PF se observa una mejoría en la forma de contestar el ítem, ya que ambos lograron evidenciar el razonamiento de SN a través de los componentes: reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), usar puntos de referencia (c.3) y usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).
- El DF.6 presenta mejoría en el nivel de respuesta, dado que no dio respuesta en la PD, sin embargo, en la PF logra resolver el ítem empleando un razonamiento con SN, al utilizar los componentes del sentido numérico tales como reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) y usar puntos de referencia (c.3).

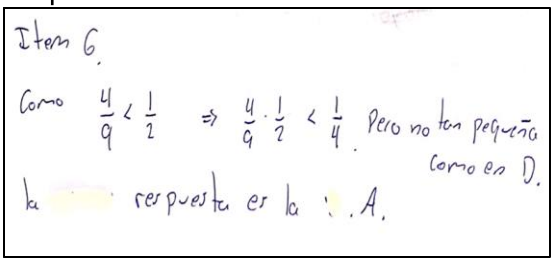
- Otro caso que muestra una mejoría, aunque no se logra alcanzar un razonamiento con SN es DF.1, quien pasó de tener en la PD un razonamiento basado BR a RPC. Además, en su estrategia de solución en la PF se refleja el uso del componente de múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).
- El DF.5 es el único que contestó correctamente ambas pruebas, sus respuestas mantuvieron el componente de hacer uso de múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).

En la figura 7 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.2, y el análisis correspondiente, en ambas pruebas:

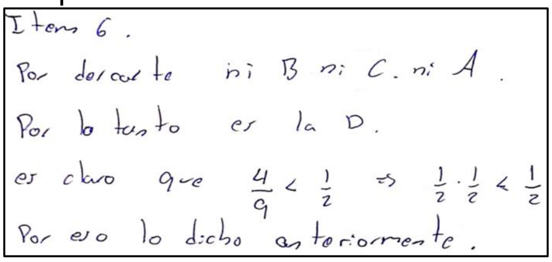
Figura 7

Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.2 en el ítem 6

Prueba diagnóstica
Respuesta correcta


Item 6.
Como $\frac{4}{9} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$. Pero no tan pequeña como en D.
la respuesta es la A.

Prueba final
Respuesta incorrecta


Item 6.
Por descarte ni B ni C. ni A.
Por lo tanto es la D.
es claro que $\frac{4}{9} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$
Por eso lo dicho anteriormente.

Se muestra que en la PD el DF.2, encontró la respuesta correcta aproximando el valor de $\frac{4}{9}$ como $\frac{1}{2}$, posterior a ello, la multiplicación de fracciones la volvió a aproximar con $\frac{1}{4}$, el cual corresponde al punto de referencia encontrado, ya que $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{4}$. Además, se da cuenta que la opción d) no puede ser correcta, ya que evalúa lo razonable de la respuesta. El DF.2 utilizó un razonamiento con SN en la PD y encontró la respuesta correcta sin recurrir a algoritmos, mientras que en la PF el participante presentó un RPC, debido a que reconoce el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) del producto de dos valores dados, además, encuentra el punto de referencia (c.3). Sin embargo, no desarrolla estrategias apropiadas ni evalúa lo razonable de una respuesta (c.7) de cada una de las opciones de respuesta de manera correcta.

Ítem 7. Recipiente de Agua

El propósito de este ítem consiste en analizar si con un recipiente cuya capacidad es de 5 litros, se logra transportar el agua contenida en nueve vasos con capacidad de 0,45 litros. Para este fin, los docentes en formación debían estimar la capacidad del recipiente haciendo uso de puntos de referencia (c.3), por ejemplo aproximar 0,45 a 0,5. Además, como estrategia se podían contemplar 10 vasos en lugar de los 9, lo que permitiría resolver el problema sin necesidad de usar algoritmos, ya que el docente en formación debe analizar que si Raquel tiene 10 vasos con 0,5 litros de agua se llenaría por completo el recipiente, lo cual implica que puede perfectamente llevarlo con una cantidad menor de agua, porque la capacidad de los vasos es menor a 0,5 y en realidad sólo son 9 vasos en total.

De los siete componentes del SN presentados en esta investigación, el único que no es considerado en el diseño de este ítem es el de utilizar la composición y descomposición de los números (c.4), es decir, los componentes: comprender el significado de los números (c.1), reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), usar puntos de referencia (c.3), usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), comprender el efecto relativo de las operaciones (c.6), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7) se pueden utilizar para dar respuesta a este ítem, es en este ítem donde se pueden aplicar más componentes para una misma solución (ver tabla 2).

En la tabla 12 se presentan los resultados del ítem 7 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del sentido numérico empleadas por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 12

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 7

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	SR	RC	SR	RC	RC	RC	RC	RC	SR
	BR	SN: c.3, c.5, c.7	BR	BR	PSN: c.1, c.2, c.3, c.6	SN: c.2, c.3, c.7	SN: c.2, c.3, c.7	SN: c.2, c.3, c.7	RPC
PF	RC	SR	SR	SR	RC	RC	RC	RC	SR
	SN: c.2, c.3, c.7	RPC: c.2, c.3	BR	BL	SN: c.1, c.2, c.3, c.5, c.7	SN: c.2, c.3, c.7	SN: c.2, c.3, c.5, c.7	SN: c.2, c.3, c.7	PSN: c.1, c.2, c.3

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 12 son las siguientes:

- En este ítem se evidenció un alto puntaje de respuestas correctas por parte de los participantes en la PD con seis respuestas correctas, mientras que en la PF las respuestas correctas disminuyeron a cinco (ver tabla 5). De los docentes en formación que tuvieron respuestas correctas, cuatro de ellos son los mismos en ambas pruebas DF.5, DF.6, DF.7 y DF.8. Más adelante se detallan los casos del DF.2 y el DF.4, quienes contestaron correctamente en la PD, pero no dieron respuesta en la PF. Además, quedó demostrado un alto uso del razonamiento SN al dar la respuesta en ambas pruebas.

- El componente de SN más usado en la PD fue usar puntos de referencia (c.3) por cinco participantes, y en la PF es reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) y también usar puntos de referencia (c.3) por siete.
- El razonamiento más empleado en la PD corresponde a SN (empleado cuatro veces), posterior a la intervención solo tres participantes lo vuelven a emplear en la PF y el otro docente aplicó un RPC. Se observa que uno de los docentes en formación que aplicaron SN posterior a la intervención empleó un componente más en su respuesta.
- El uso de reglas (BR) se presentó en las respuestas de tres docentes en formación en la PD y solo en uno de los casos la respuesta fue correcta, ya que los demás docentes no dieron una respuesta. Posterior a la intervención, uno de los participantes aplicó reglas (BR), otro docente no respondió el ítem (BL) y el último docente presentó una leve mejoría al responder con SN y hacer uso de tres componentes distintos.
- El docente en formación que empleó PSN en la PD presentó una leve mejoría en la PF, debido a que razonó con SN y fue el participante que más usó componentes del sentido numérico.
- Solo un docente en formación aplicó RPC en la PD y no usó ningún componente del sentido numérico. Posterior a la intervención, el participante

empleó PSN con tres componentes distintos. Solamente el DF.9 utilizó el razonamiento PSN en toda la PF.

- En la PD cinco docentes en formación aplicaron componentes del SN, mientras que en la PF fueron siete docentes en formación de un total de nueve participantes, es decir, solo dos docentes no usaron componentes del sentido numérico al dar su respuesta. Ningún docente en formación logró utilizar los seis componentes contemplados en el diseño de este ítem.
- Es curioso que en el caso de los docentes en formación que optaron por un razonamiento BR no dieron una respuesta al ítem.

Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:

- El DF.1 no dio una respuesta al ítem empleando el razonamiento BR en la PD, sin embargo, en la PF contesta de manera correcta al ítem utilizando el tipo de razonamiento de SN. Para contestar el ítem, el docente en formación empleó puntos de referencia (c.3), reconoce el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) al determinar que si le alcanza la cantidad de agua en el recipiente y logra desarrollar una estrategia apropiada para evaluar lo razonable de su respuesta (c.7) al pensar que Raquel solo ocupará llevar una vez el recipiente.
- El DF.2 aplica un razonamiento de SN en la PD dando una respuesta correcta al ítem por medio de los componentes: usar puntos de referencia (c.3), usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5) y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7). Sin embargo, al responder la PF utiliza un RPC empleando los componentes al reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) y usar puntos de referencia (c.3). Su razonamiento en la PF consiste en que

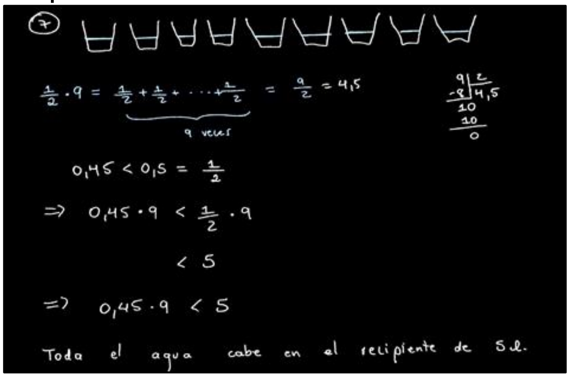
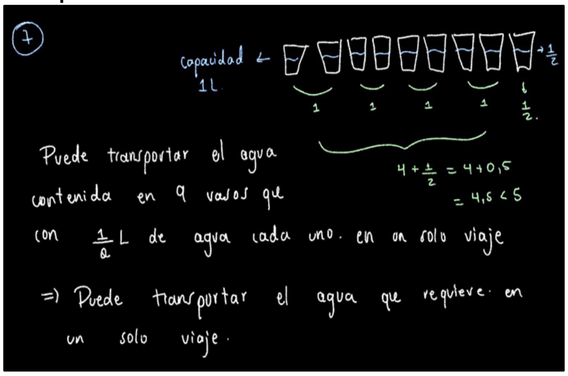
“si cada vaso tiene una capacidad de 0,45 litros y tiene un recipiente de 5 litros cómo 9 x 0,45 < $\frac{9}{2}$” sin ofrecer una respuesta.

- El DF.4 da una respuesta correcta al ítem en la PD usando el algoritmo de la multiplicación para obtener el resultado de 9 x 0,45 por lo que su razonamiento se clasifica como BR y en la PF no realiza ningún procedimiento para responder ni justificar.
- El DF.5 utiliza PSN para resolver el ítem 7 en la PD, emplea algoritmos y utiliza algunos componentes de sentido numérico como comprender el significado de los números (c.1) al reconocer las representaciones de los números (decimal y fracción), reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), usar puntos de referencia (c.3) y comprender el efecto relativo de las operaciones (c.6). Sin embargo, en la PF se puede apreciar que usa un razonamiento de SN empleando los componentes: comprender el significado de los números (c.1), reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) y el uso de puntos de referencia (c.3), pero en este caso no aplica el componente comprender el efecto relativo de las operaciones (c.6). En la PF este participante aplica dos componentes diferentes como usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5) y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7).

En la figura 8 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.5, y el análisis correspondiente, en ambas pruebas:

Figura 8

Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.5 en el ítem 7

Prueba diagnóstica Respuesta correcta	Prueba final Respuesta correcta
	

Se muestra en la figura 8 que, en la PD, el DF.5 encuentra la respuesta correcta aproximando el valor de 0,45 a 0,5 y utilizándolo como punto de referencia (c.3), del mismo modo aproximó el valor de los nueve vasos con la capacidad de los 0.45 litros, comprendiendo el significado de los números (c.1) al determinar que $0{,}5 = \frac{1}{2}$, y reconociendo el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) al determinar que $0{,}45 \times 9$ es menor que 5.

Al efectuar la multiplicación como una suma sucesiva de $\frac{1}{2}$, el docente en formación comprendió el efecto relativo de las operaciones (c.6), ya que relacionó una multiplicación con una suma. Sin embargo, utilizó algunos algoritmos para dar solución al ítem, lo cual mostró un razonamiento que corresponde a PSN. Mientras que en la PF el DF.5 dio la respuesta correctamente utilizando un procedimiento similar a la PD incluyendo la representación gráfica para mayor comprensión, evidenciando el uso del SN sin necesidad de recurrir a algoritmos.

- El DF.6 y el DF.8 emplean los mismos tipos de razonamiento en ambas pruebas. En la PD y la PF emplean el razonamiento de SN con los componentes: reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), usar puntos de referencia (c.3) y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7).

- El DF.7 responde con el razonamiento SN tanto en la PD como en la PF, sin embargo, al realizar la PD emplea tres componentes de sentido numérico: reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), usar puntos de referencia (c.3) y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7). En la PF hace uso de los mismos componentes anteriores y aplica uno nuevo, el cual corresponde a usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).
- Por último, DF.9 aplica un RPC en la PD que no evidencia uso de componentes de SN. Sin embargo, en la PF aplica el razonamiento de PSN el cual usa componentes de SN y algoritmos, además se evidencia el uso de componentes de sentido numérico (SN) como comprender el significado de los números (c.1), reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), y usar puntos de referencia (c.3).

Ítem 8. Pintar la Habitación

Este ítem presenta una situación que el docente en formación debía analizar, la cual era que si María tardaba tres horas en pintar una habitación y Carlos tardaba seis horas pintando la misma habitación, cuánto tiempo tardarían en terminar de pintar si trabajaban juntos.

Algunas de las estrategias que se podían usar para resolver este ítem consisten en usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), utilizar la composición y descomposición de los números (c.4) para desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7). Por ejemplo, si consideramos que María dura tres horas pintando ella sola la habitación, entonces debe durar menos tiempo si trabaja junto con Carlos y se puede resolver el ítem descartando las opciones de respuesta.

En la tabla 13 se presentan los resultados del ítem 8 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del sentido numérico empleadas por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 13

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 8

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	RC	RC	RI	RI	SR	SR	SR	RC	RC
	SN: c.4, c.5, c.7	RPC	PSN: c.5	RAI	RPC	BL	BL	SN: c.4, c.5, c.7	SN: c.7
PF	RI	RI	RC	SR	SR	SR	RI	RC	RC
	RAI	RAI	SN: c.4, c.5, c.7	BL	RPC	RPC	RAI	SN: c.4, c.5, c.7	RPC

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 13 son las siguientes:

- En la PD este ítem tiene cuatro respuestas correctas, mientras que en la PF son tres respuestas correctas (ver tabla 5).

- Tres docentes en formación presentan el tipo de razonamiento con SN y contestan empleando componentes del sentido numérico establecidos previamente para llegar a la respuesta correcta en la PD, mientras que en la PF sólo lo emplean dos docentes. Es importante mencionar que un docente es el mismo que emplea razonamiento con SN en ambas pruebas.

- Solo dos participantes contestan correctamente en ambas pruebas, uno usando razonamiento con SN en ambas pruebas (DF.8) y el otro usando un razonamiento de SN en la PD y en la PF aplica el razonamiento RPC sin el uso de algún componente del sentido numérico que le permitiera contestar correctamente el ítem (DF.9).
- El razonamiento de SN fue el más utilizado en la PD y los más empleados en la PF son el RAI por tres docentes en formación con respuesta incorrecta en este ítem, y tres participantes con razonamiento RPC, de los cuales dos no presentan respuesta y uno obtiene respuesta correcta.
- El docente en formación que empleó PSN en la PD presentó una leve mejoría posterior a la intervención al razonar con SN y tres componentes del sentido numérico. Cabe destacar que en la PD solo usó un componente del sentido numérico.
- Un docente en formación empleó un RAI en la PD y posteriormente no realizó ningún procedimiento para responder el ítem (BL).
- Dos participantes no realizaron ningún procedimiento (BL) para responder al ítem en la PD, mientras que en la PF uno de ellos aplicó un RPC y el otro razonó de forma incorrecta el ítem (RAI).
- Cuatro docentes en formación utilizaron componentes del sentido numérico en la PD. Dos de ellos, específicamente DF.1 y DF.8 utilizaron los tres componentes del sentido numérico contemplados en la creación del ítem:

utilizar la composición y descomposición de los números (c.4), usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7) (ver tabla 2). Mientras que, en la PF solo el DF.3 y el DF.8 usaron los componentes del sentido numérico que se habían contemplado en la creación del ítem (ver tabla 2).

- Este ítem evidencia debilidad en la PF al analizar ejercicios de selección única, debido a su razonamiento sin el uso de algoritmos o reglas tradicionales, tres participantes no dieron respuesta y tres la escribieron de forma incorrecta. Además, se reduce el uso de componentes del sentido numérico, ya que se aplicaron solamente en dos ocasiones por dos docentes en formación diferentes.

Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:

- El DF.1, utilizó en la PD el razonamiento de SN con los tres componentes contemplados en la creación de la prueba: utilizar la composición y descomposición de los números (c.4), usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7), analizando que en dos horas María ha pintado $\frac{2}{3}$ de la habitación y Carlos en dos horas ha pintado $\frac{1}{3}$ de la misma habitación. Sin embargo, en la PF el DF.1 presentó un RAI, pues su respuesta se basó en que entre María y Carlos durarían cuatro horas pintando la misma habitación, lo cual es incorrecto porque María sin apoyo tarda en pintar la habitación tres horas.
- El DF.3, presentó mejoría en la PF, puesto que utilizó los tres componentes del SN consideradas en la creación de este ítem, como lo son utilizar la

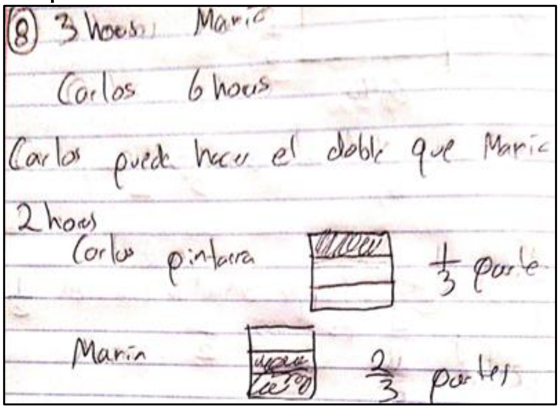
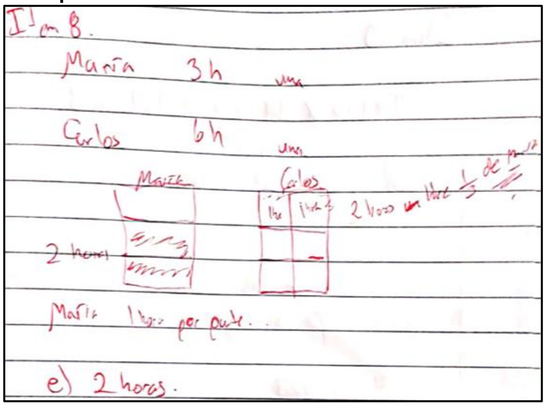
composición y descomposición de los números (c.4), usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), y desarrollar componentes apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7). En la PD había usado solamente el componente de múltiples representaciones (c.5) combinándolo con el uso de algoritmos al resolverlo con una suma de fracciones, en este caso aplicando el razonamiento PSN.

- El DF.6, pasó de tener en la PD un razonamiento BL, pues no respondió a la pregunta y no presentó justificación a usar un razonamiento RPC, brindando únicamente una frase: “Carlos tarda el doble que María”.
- El DF.8 presenta el mismo razonamiento SN y utiliza los mismos componentes: usar la composición y descomposición de los números (c.4), múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7) en ambas pruebas. Es importante destacar que estos componentes son los contemplados para la creación del ítem (ver tabla 2).

En la figura 9 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.8 y su análisis correspondiente, en ambas pruebas:

Figura 9

Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.8 en el ítem 8

Prueba diagnóstica Respuesta correcta	Prueba final Respuesta correcta
	

En la figura 9 se puede apreciar que logra contestar correctamente al ítem con el razonamiento SN al usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5). A pesar de que ambas pruebas contenían los mismos ítems algunas de las respuestas de los docentes en formación variaron y sólo dos docentes en formación respondieron con la misma clasificación de respuesta y razonamiento en ambas pruebas: DF.5 y DF.8.

- El DF.9, presentó en la primera prueba un razonamiento de SN al desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7), pero en la segunda prueba su razonamiento es RPC y no utiliza ningún componente del sentido numérico.

Ítem 9. Cosecha de Arroz

El ítem muestra que durante una tormenta se pierde $\frac{1}{3}$ de la cosecha de arroz, y $\frac{1}{10}$ de lo que se tenía se perdió por una plaga, entonces se desea analizar cuál es el total de cosecha perdida. Este ejercicio puede resolverse por medio del componente: usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5) empleando una gráfica con las cantidades de cosecha perdida. Es relevante mencionar que este era el único componente del SN que se anticipó para poder resolver el ejercicio.

En la tabla 14 se presentan los resultados del ítem 9 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del SN empleadas por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 14

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 9

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	RC SN: c.5	RI RPC	RI RAI	RI RAI	SR RPC: c.5	SR BL	RI RAI	RC SN: c.5	RI RAI
PF	RI RAI	RI RPC	RI RAI	RI RPC: c.5	RI RAI	SR RAI	RI RAI	RC SN: c.5	RI RAI

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 14 son las siguientes:

- Se evidencia un bajo desempeño al resolver este ítem en comparación con los demás ítems de la PF, debido a que fue el que obtuvo menos respuestas correctas (ver tabla 5).

- La cantidad de respuestas correctas que presenta este ítem en la PD fueron dos y baja a una en la PF.

- El tipo de razonamiento que más se presentó en la PD fue RAI, aplicado en cuatro ocasiones. Posterior a la intervención, solo uno de los docentes en formación de los que razonó de forma incorrecta inicialmente tuvo una leve mejoría al responder con RPC en la PF.
- Un docente en formación no realizó ningún procedimiento para responder el ítem en la primera prueba (BL) y no logró cambios significativos en la segunda, ya que usó un RAI.
- El razonamiento de SN fue aplicado por dos docentes en formación, posterior a la intervención solo uno de ellos volvió a emplear el mismo razonamiento en la PF. El otro participante contestó este ítem con RAI en la PF.
- Dos docentes en formación aplicaron RPC en la PD y posterior a la intervención uno de ellos mantuvo el mismo razonamiento anterior y el otro participante respondió con un RAI.
- En la PD, solo tres docentes en formación emplearon componentes del SN, dos participantes emplearon el razonamiento de SN y uno de ellos empleó un RPC al justificar su respuesta.
- En la PF, sólo dos personas emplearon el componente de sentido numérico, uno de ellos fue el mismo que lo aplicó en la prueba diagnóstica y en ambos casos razonó con SN (DF.8), el otro participante que aplicó un componente de sentido numérico en la PF obtuvo un RPC sin argumentos de peso para justificar los pasos de su respuesta.
- Se aprecia que los ítems que tienen respuestas correctas tanto en la PD como en la PF corresponden al tipo de razonamiento de SN.
- Se puede deducir que en este ítem los docentes en formación presentan

debilidades al representar gráficamente el producto de fracciones.

Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:

- Los DF.3, DF.7 y DF.9 contestaron con RAI al ítem, tanto en la PD como en la PF. Algunos de esos razonamientos consistieron en no visualizar adecuadamente la partición de la unidad con la que se encuentran trabajando. Por ejemplo, el DF.7 en la PD realiza una representación gráfica rectangular y señala la fracción $\frac{1}{30}$, la cual dice que corresponde a la pérdida total de la cosecha. Para la PF el DF.7 realizó una representación gráfica rectangular representando la fracción $\frac{4}{30}$ y mencionó que esa fue la pérdida de la cosecha.
- El DF.1 usó el razonamiento del SN con el componente de usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5) en la PD, pero al realizar el mismo ítem en la PF incurre en un RAI. En la PD el DF.1 determinó la respuesta del ítem con una sola representación gráfica y de forma correcta, sin embargo, en la PF construyó dos gráficas que no le permitieron resolver el problema. En la primera representación gráfica rectangular representa la fracción $\frac{2}{6}$ y menciona que corresponde a la tercera parte de la cosecha que se estropea, luego realiza una representación gráfica para la fracción $\frac{1}{10}$. Por último, concluye que en total “se perdió $\frac{3}{10}$ de la cosecha”.
- Otro caso que se detalla a continuación es el del DF.5. En la PD responde al ítem con RPC, pero aplica un RAI en la PF. En la PD se acerca más a la respuesta correcta, ya que realiza una representación gráfica rectangular, luego la divide en tres partes iguales, descarta una tercera parte y las dos terceras partes restantes las divide en cinco partes cada una, al final comenta que no le dio tiempo de terminar. En la PF la representación gráfica no le

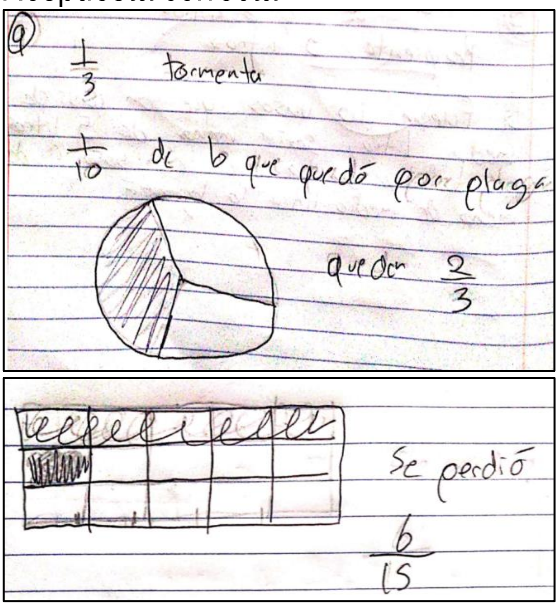
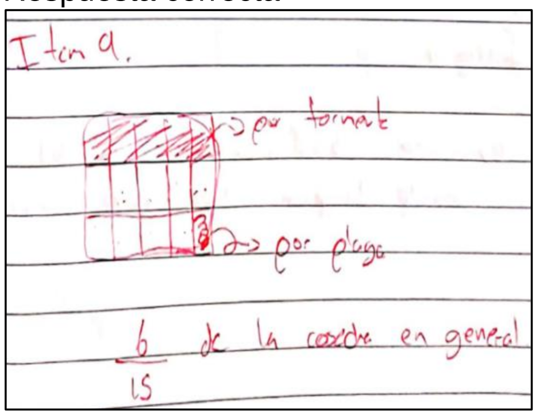
permite encontrar la respuesta correcta, ya que representa la fracción $\frac{11}{30}$, es decir que divide cada tercera parte en diez partes iguales.

- El DF.8 en ambas pruebas logra representar correctamente las fracciones correspondientes a la pérdida de la cosecha. Cabe destacar que el DF.8 fue el único en utilizar un componente del sentido numérico en ambas pruebas y obtener el razonamiento de SN.

En la figura 10 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.8 y su análisis correspondiente, en ambas pruebas:

Figura 10

Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.8 en el ítem 9

Prueba diagnóstica Respuesta correcta	Prueba final Respuesta correcta
	

En la PD el docente utilizó dos gráficas, la representación circular no le brindó información suficiente para dar una respuesta, ya que representa $\frac{1}{3}$ de la cosecha perdida y por aparte en otra representación gráfica representó correctamente la fracción $\frac{6}{15}$ lo que le permitió encontrar la respuesta correcta. Para la PF el docente utilizó únicamente una gráfica rectangular donde realizó su razonamiento y logró responder correctamente usando el razonamiento de SN y el componente: usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5).

Ítem 10. Colocar la Coma

El propósito de este ítem es comprender el significado de los números y el efecto relativo de las operaciones (c.1 y c.6 respectivamente), haciendo uso del componente puntos de referencia (c.3), además, desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7) para estimar un producto de números decimales. El docente en formación debe identificar que:

0,4975 se aproxima a $\frac{1}{2}$ = 0,5 (utilizando a $\frac{1}{2}$ = 0,5 como punto de referencia).

Posteriormente, se procede a realizar la multiplicación sin realizar el algoritmo exacto.

0, 4975 x 9428,8 $\simeq$ 0,5 x 9428,8 = $\frac{9428,8}{2}$ (comprendiendo el efecto relativo de las operaciones al observar una multiplicación como una división).

Otra estrategia para resolver el ítem es aproximar 9428,8 a 10 000, una estimación del producto de los números decimales es 0,4975 x 10 000 o también 0,5 x 10 000, a partir de ello se selecciona la respuesta correcta en las opciones establecidas.

En la tabla 15 se presentan los resultados del ítem 10 con respecto al tipo de razonamiento empleado por los docentes en formación, el tipo de clasificación de respuesta y los componentes del sentido numérico empleados por cada persona participante en caso de ser utilizados en su respuesta.

Tabla 15

Comparación de los resultados obtenidos en ambas pruebas y razonamiento en el ítem 10

Pruebas	Docentes en formación								
	DF.1	DF.2	DF.3	DF.4	DF.5	DF.6	DF.7	DF.8	DF.9
PD	RI	RC	RI	RC	RC	RI	RI	SR	RI
	RAI	SN: c.3, c.6, c.7	SA	RPC	SN: c.3, c.6, c.7	RAI	SA	RPC: c.3	PSN: c.1, c.3, c.6
PF	RI	RC	RI	SR	RC	RI	RC	RC	RC
	RAI	SN: c.3, c.6, c.7	BR	BL	SN: c.1, c.3, c.6, c.7	RAI	SN: c.3, c.6, c.7	SN: c.2, c.3, c.6, c.7	RPC: c.3

Nota. PD: Prueba diagnóstica; PF: Prueba final.

RC: Respuesta correcta; RI: Respuesta incorrecta, SR: Sin respuesta.

SN: Sentido numérico; PSN: Parcialmente sentido numérico; BR: Basado en reglas; RAI: Razonamiento incorrecto; RPC: Razonamiento poco claro; SA: Sin argumentar; BL: Blanco.

Algunas observaciones generales de la tabla 15 son las siguientes:

- En este ítem se evidenció un bajo puntaje de respuestas correctas por parte de la población en la PD (tres respuestas), lo contrario ocurrió en la PF donde las respuestas correctas aumentaron a cinco. Además, quedó demostrado un bajo uso del razonamiento de SN al dar la respuesta en la PD, mientras que en la PF se duplicaron las respuestas con ese razonamiento.
- Se visualiza que los razonamientos más empleados en la PD son RPC, SN y RAI. Sin embargo, posterior a la intervención realizada se observa que para la PF el razonamiento más empleado corresponde al de SN usado por cuatro docentes en formación.

- A pesar de que en la PD ninguno de los docentes en formación recurrió al uso reglas o algoritmos para resolver el ítem, en la PF un docente en formación si aplicó este tipo de razonamiento.
- En la PD se obtuvo que la misma cantidad de docentes en formación utilizaron los razonamientos poco claros o incompletos (RPC), sin argumentar (SA), razonamiento incorrecto (RAI) y sentido numérico (SN).
- En la PF se observa que los razonamientos que no se utilizaron en este ítem fueron parcialmente sentido numérico (SN) y sin argumentar (SA). Al contrario de los razonamientos sentido numérico (SN) y razonamiento incorrecto (RAI) que fueron los más empleados.
- En la PF se obtuvo que la misma cantidad de docentes en formación utilizaron los razonamientos sentido numérico (SN) y razonamiento incorrecto (RAI).
- En la PF cinco docentes en formación utilizaron componentes del sentido numérico, donde un docente en formación usó los componentes establecidos por las investigadoras para este ítem.
- En el caso de la comparación con la PD y PF se observa lo siguiente:

  - Del razonamiento SN aumentó en la PF.
  - Del razonamiento PSN disminuye en la PF.
  - Del razonamiento BR aumentó en la PF.
  - Del RAI se mantiene en ambas pruebas.
  - Del RPC disminuyó en la PF.
  - Del razonamiento SA disminuyó en la PF.
  - Del razonamiento BL aumentó en la PF.

- En la PD la cantidad de componentes del sentido numérico empleados por los docentes fue de tres, en la PF en dos de los docentes aumentó la cantidad de componentes empleados. Utilizaron cuatro componentes del sentido numérico para resolver el ítem.

- De tres respuestas correctas que obtuvo este ítem en la PD sólo dos de ellas presentan componentes del sentido numérico y en ambos casos se usaron los mismos: puntos de referencia (c.3), comprender el efecto relativo de las operaciones (c.6), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7). Para la PF, las cinco respuestas correctas presentan entre uno o cuatro componentes del sentido numérico.

- El componente c.1 fue utilizado una vez por dos docentes distintos en cada prueba. Uno de los docentes en formación logró utilizar los cuatro componentes contemplados en el diseño de este ítem para resolver el ítem en la PF.

- El componente de sentido numérico más empleado corresponde a puntos de referencia (c.3), utilizado por cinco docentes en formación diferentes para resolver el ítem tomando como referencia ambas pruebas. Seis docentes en formación diferentes usaron los mismos componentes utilizar puntos de referencia (c.3), comprender el efecto relativo de las operaciones (c.6) y el desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7), para resolver el ítem.

Por otra parte, algunos casos específicos son los siguientes:

- El DF.2 responde en ambas pruebas con el tipo de razonamiento SN y en ambos casos emplea los componentes: puntos de referencia (c.3), comprender el efecto relativo de las operaciones (c.6), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7). El docente explica lo siguiente: “como 0,4975 < $\frac{1}{2}$ al efectuar la operación x con 9428,8 el resultado debería ser cercano a la mitad de 9428,8”.

- En su mayoría, cinco de los nueve docentes en formación, no lograron llegar al razonamiento de SN en sus respuestas. Uno de ellos, el DF.4 en la PD menciona que la respuesta correcta es la opción c) argumentando que “por cada mil se pone la coma”, lo cual no es adecuado para este tipo de ítem, por lo tanto, se clasificó como RPC, sin componentes de SN. En la PF el DF.4 menciona claramente “No me acordé como era”.

- El DF.5 contestó con SN en ambas pruebas. En la PD aplica los componentes: usar puntos de referencia (c.3), comprender el efecto relativo de las operaciones (c.6), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7). En la PF además de los componentes anteriores también hace uso del componente referido a reconocer distintas representaciones de un mismo número. En la PD el docente responde lo siguiente: “0,4975 es aproximado a 0,5, no pueden ser la a y b porque no están ni cerca de ser la mitad de 9428 y la d es una cantidad mucho más grande. La respuesta es la c”. Para la PF, el docente emplea una respuesta similar y hace la relación de que: “0,4975 es aproximado a 0,5 = $\frac{1}{2}$”. Además, el DF.5 aplica un punto de referencia (c.3) al reconocer que $0{,}4975 < 0{,}5$ y deja en evidencia que comprende el significado de los números (c.1) porque encuentra dos presentaciones diferentes del mismo número $0{,}5 = \frac{1}{2}$.

- El DF.7 contestó el ítem en la PD, pero no argumentó cómo logró llegar a esa respuesta. Sin embargo, en la PF obtuvo una respuesta correcta con el tipo de razonamiento de SN aplicando en su estrategia cuatro de los componentes del sentido numérico: reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), usar puntos de referencia (c.3), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7). En la PD marca la opción: “No puedo elegir la respuesta sin realizar el cálculo exacto”. Para la PF realiza lo siguiente: “0,4975 es casi la mitad y 0,4975 x 9428,8 es la mitad de 9428,8 por lo tanto la opción más cercana sería la c, 4690,828”.

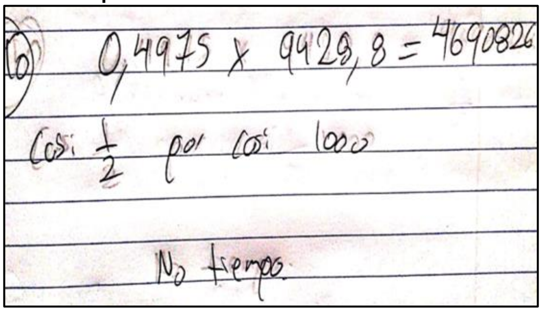
- El DF.8 emplea un RPC en la PD, aplicando el componente usar puntos de referencia (c.3). Para la PF emplea un razonamiento de SN con los componentes: reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2), puntos de referencia (c.3), comprender el efecto relativo de las operaciones (c.6), y desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta (c.7) logrando obtener una respuesta correcta en el ítem. En la PD sólo logra hacer lo siguiente: “0,4975 x 9428,8 es casi $\frac{1}{2}$ por casi mil. No tengo tiempo”. Para la PF realiza el cálculo adecuadamente de $\frac{1}{2}$ x 10000 y menciona que la respuesta correcta es la opción c). El componente reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (c.2) puede apreciarse en el razonamiento inicial cuando el DF.8 menciona que 0,4975 x 9428,8 es aproximado a $\frac{1}{2}$ x 10000 en la PF. Lo más relevante es que ese componente no se contempló a priori para dar respuesta a este ítem.

En la figura 11 se muestra un extracto de una respuesta dada por el DF.8, y el análisis correspondiente, en ambas pruebas:

Figura 11

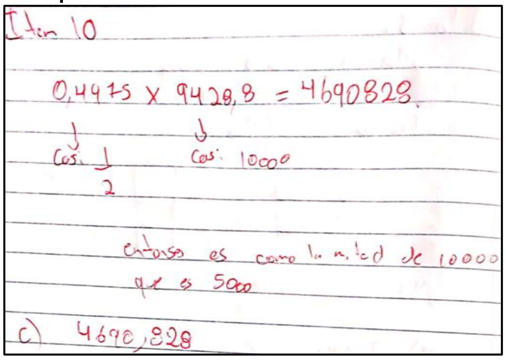
Resultados obtenidos en ambas pruebas por el DF.8 en el ítem 10

Prueba diagnóstica
Sin respuesta



10) 0,4975 x 9428,8 = 4690826
Casi $\frac{1}{2}$ por casi 1000
No tiempo.

Prueba final
Respuesta correcta



Ítem 10
0,4975 x 9428,8 = 4690828
Casi $\frac{1}{2}$ Casi 10000
entonces es como la mitad de 10000 que es 5000
c) 4690,828

Se muestra en la PD que el DF.8, utilizó el punto de referencia $\frac{1}{2}$. Sin embargo, no encontró la respuesta presentando un RPC al dar la solución. Mientras que, en la PF el participante presentó un razonamiento con SN, ya que encuentra los puntos de referencia $\frac{1}{2}$ y 10 000, comprendiendo el significado de los números (c.1), pues analiza que 4690 es menor que 5000. Además, el docente en formación desarrolla una estrategia apropiada y evalúa lo razonable (c.7) al estimar el producto de números decimales por números naturales.

Capítulo V

En este capítulo se abordan las conclusiones, limitaciones y recomendaciones de la información obtenida en los resultados de la investigación.

Conclusiones

De acuerdo con el objetivo general de la presente investigación, en el cual se establece caracterizar el uso de estrategias que utiliza un grupo de docentes de matemática en formación de la Universidad de Costa Rica, al emplear la multiplicación con números racionales para dar solución a algunas tareas matemáticas con base en los objetivos específicos, se pudieron obtener las siguientes conclusiones.

Conclusiones con Respecto al Primer Objetivo Específico

Con respecto al primer objetivo específico, se elaboró una prueba escrita diagnóstica que pretendía describir las estrategias que utilizaban un grupo de docentes al resolver tareas matemáticas. Se aplicó la misma prueba escrita a los docentes en formación tanto al inicio (PD) como al final (PF) de la intervención. Las conclusiones que se desprenden sobre las estrategias utilizadas por los docentes en formación en la prueba escrita diagnóstica son las siguientes:

- El ítem 7 presentó la mayor cantidad de respuestas correctas, mientras que el ítem 3 mostró la menor cantidad de respuestas correctas.
- En el ítem 2 se observó que la mayor cantidad de docentes en formación empleó componentes del sentido numérico.

- El ítem 7 presentó la mayor cantidad de estrategias con razonamiento de sentido numérico (SN).
- El ítem 2 y el ítem 5 presentaron la mayor cantidad de estrategias con razonamiento parcialmente sentido numérico (PSN).
- El ítem 3 y el ítem 7 mostraron la mayor cantidad de estrategias con razonamiento basado en reglas (BR).
- En el ítem 9 se observó la mayor cantidad de estrategias con razonamiento incorrecto (RAI).
- En el ítem 4 se muestra la mayor cantidad de estrategias con razonamiento poco claro o incompleto (RPC).
- El ítem 10 presentó la mayor cantidad de estrategias con razonamiento sin argumentar (SA).
- En los ítems 5 y 8 se muestra la mayor utilización de estrategias con razonamiento en blanco (BL).
- El razonamiento más utilizado por los docentes en formación en la PD fue el poco claro o incompleto (RPC), donde los docentes en formación no daban argumentos suficientes para justificar su respuesta.
- El razonamiento menos usado por los docentes en formación fue sin argumentar (SA).

Observaciones con Respecto al Segundo Objetivo Específico

Para abarcar el segundo objetivo específico, se formuló una intervención de tres sesiones aplicadas de forma virtual y dos sesiones más donde se aplicaron la PD y PF. Al cumplir con este objetivo específico se obtuvieron las siguientes observaciones:

- Algunos docentes en formación lograron completar las tareas matemáticas propuestas durante la intervención por las investigadoras, esto permite deducir que los docentes en formación tienen cierto conocimiento de algunas estrategias aplicadas a los números racionales que no necesariamente implica el uso de reglas o algoritmos.
- Mediante las discusiones que surgieron durante la intervención al resolver las tareas matemáticas se observaron algunas debilidades que los docentes en formación presentaron en el momento y que podrían influir al resolver la PF.
- Una conclusión relevante fue la dificultad que presentaban los docentes en formación al representar gráficamente el producto de números racionales, y también al representar un número mixto, decimal y fracción.

Conclusiones con Respecto al Tercer y Cuarto Objetivos Específicos

Con respecto al tercer y cuarto objetivo específico, los cuales hacen referencia a los componentes del sentido numérico que los participantes emplearon antes y después de la intervención, y comparar las estrategias utilizadas por los docentes de matemática en formación al resolver tareas matemáticas antes y después de la intervención diseñada para promover el uso de diferentes estrategias acerca del tema multiplicación con números racionales respectivamente, se obtienen las siguientes conclusiones:

- Se observa un bajo uso del componente c.7: desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta en tareas matemáticas que poseen un grado de complejidad más alto, por ejemplo, el ítem 8. No obstante, los estudiantes logran emplear este componente en tareas matemáticas de menor nivel de complejidad como el ítem 7.

- Los docentes en formación presentan un buen uso del componente c.3: puntos de referencia, pero presentan dificultades para emplear este componente en tareas matemáticas como la que se expone en el ítem 1, es decir, la multiplicación de números enteros. Los participantes al enfrentarse a tareas matemáticas con expresiones decimales logran emplear algún punto de referencia adecuado para resolver los ítems, pero no logran visualizar que las unidades, decenas y centenas más cercanas al número también se podrían considerar como punto de referencia.
- Con respecto al componente comprender el significado de los números (c.1) se observa un bajo uso por parte de los docentes en formación en los ítems que contemplaban esta estrategia, por lo que se podría intuir que los participantes no suelen usar distintas representaciones de un mismo número, es decir, al presentar expresiones matemáticas con fracciones continúan trabajando con ellas y si se les presenta decimales continúan con estas mismas expresiones para dar respuesta a los ítems. Incluso, durante la intervención algunos docentes no recordaban cómo trabajar con números mixtos y sus distintas representaciones.
- El ítem que tuvo mayor dificultad en la PD fue el “ordenar fracciones y decimales”. Se intuye que la complejidad del ejercicio es por ordenar las cantidades tomando en cuenta cuáles son mayores y sus distintas

representaciones (fracciones propias, fracciones impropias y decimales). La solución de este ítem podría incluir los componentes c.2, c.3, c.4 y c.5 y ningún docente en formación logró utilizar todos los componentes. El ítem con menos dificultad fue “Recipiente de agua” ya que los docentes en formación utilizaron los componentes c.1, c.2, c.3, c.5, c.6 y c.7, y pareciera que se intuye su resultado por medio de una representación gráfica.

- A pesar de que el ítem “Recipiente de agua” presentó menor dificultad para la mayoría de los docentes, se observa que después de la intervención un docente no realizó ningún tipo de razonamiento. Varios docentes no respondieron la pregunta inicial de esta tarea matemática en la PF.
- Se puede apreciar en algunos ítems, que posterior a la intervención al menos un docente en formación logró aplicar mínimo un componente del sentido numérico en la PF que no había usado en el razonamiento anterior. Se puede observar este comportamiento para todos los ítems. Los nueve participantes aplicaron al menos un componente en la PD o en la PF.
- La mayoría de las respuestas correctas dadas tanto en la PD como en la PF están relacionadas con el uso de al menos un componente del sentido numérico. A su vez, el razonamiento más utilizado por los docentes en formación en ambas pruebas fue SN, donde algunos docentes presentaron en sus respuestas el total de componentes contemplados para resolver cada ítem (ver tabla 2). En forma general, los razonamientos que les permitieron a los participantes brindar una

respuesta correcta fueron los de SN, RPC, PSN y BR, siendo este último en el que se evidencia menos cantidad de respuestas correctas.

- En los ítems 1, 4 y 6, aunque los docentes en formación aplicaron un razonamiento de BR, no incluyeron una respuesta y son pocos los casos donde se aprecia una respuesta correcta en ambas pruebas. Esto indica que el uso de algoritmos tampoco ayudó a algunas personas a poder resolver el ejercicio. Por ejemplo, en el ítem 1 dos docentes en formación usaron un razonamiento BR en la PD y en la PF un participante usó este mismo razonamiento, en los tres casos se observa que la respuesta fue incorrecta. Sucede de forma similar en el ítem 4.
- El razonamiento menos utilizado en ambas pruebas fue SA, es decir que los docentes en formación trataron de resolver el ítem y brindaron alguna idea para validar sus procedimientos en la mayoría de los casos. Se puede intuir que los docentes buscan justificar todos sus argumentos en las tareas matemáticas, debido a que una de las indicaciones en las pruebas menciona que se debe justificar y explicar la respuesta de cada ítem. Fomentar esta práctica podría ser útil para que las personas se acostumbren a argumentar sus respuestas en los ejercicios de desarrollo.
- En tres ítems (5, 8 y 9) aumentó el uso de argumentos matemáticos incorrectos (RAI). La solución de estos ítems implica usar múltiples representaciones de los números y las operaciones (c.5), por lo cual la

dificultad para trabajar con esta estrategia pudo influir en el razonamiento de algunos de los participantes.

- De acuerdo con el nivel curricular de los contenidos matemáticos, los cuales corresponden al Tercer Ciclo de la Educación General Básica de Costa Rica, se esperaba que los docentes en formación lograran un desempeño más alto al resolver los ítems de ambas pruebas. Sin embargo, se observan ciertos vacíos con respecto a contenidos básicos de números racionales, por ejemplo, al representar la multiplicación de números racionales, ordenar la posición de los números al determinar la mayoricidad y menoricidad de las cantidades, y el uso de expresiones decimales en las pruebas aplicadas.
- Al limitar el uso de reglas o algoritmos en ambas pruebas, los docentes en formación lograron emplear distintas estrategias para dar respuesta a los ítems, dentro de estos razonamientos se pudo observar el uso limitado de componentes del sentido numérico.
- La población elegida desconocía la información relacionada al tema de sentido numérico, a pesar de que el Programa de Estudio de Matemática hace énfasis en abarcar este tipo de habilidades, al indicar que se debe “dar un lugar relevante al desarrollo del sentido numérico, a los cálculos y aproximaciones, y a la utilización de múltiples representaciones en la resolución de problemas”. (MEP, 2012, p. 12)
- Los resultados muestran que, a pesar del grado de formación matemática que tienen estos docentes, manifiestan baja frecuencia de

respuestas correctas a contenidos básicos de números racionales, cuando se les pide resolver tareas matemáticas sin aplicar reglas o algoritmos.

- A pesar de la iniciativa de esta investigación de fomentar los componentes del sentido numérico al diseñar una intervención aplicada a los docentes en formación, no se logró realizar un cambio significativo. Esta situación podría deberse a que la intervención se dio en un periodo muy corto de tiempo y podría ser necesario generar este tipo de espacios en un periodo más largo de tiempo como en cursos propios de la carrera.
- Algunos docentes en formación que lograron resultados con SN en la PD no contestaron correctamente posterior a la intervención, por lo que algunos factores que pudieron presentarse fueron falta de interés o tiempo al resolver la PF.
- Se aprecia el uso de ideas incorrectas que no se han modificado y que han sido arraigadas en el conocimiento de los docentes en formación, las cuales podrían influir en su formación matemática superior, por lo que se invita a reflexionar sobre la matemática escolar que poseen los docentes en formación, que en muchos casos se ve dominada por el uso de reglas más que por un uso flexible de conceptos y propiedades numéricas. Al solicitar a los participantes no usar algoritmos, hemos visto que aparecen ideas intuitivas o procedimientos básicos que han surgido al razonar de forma rápida, por ejemplo:

- Comparar fracciones observando el tamaño de los números y utilizando reglas del tipo “la fracción es mayor cuanto mayor es la diferencia entre el numerador y denominador”. Por ejemplo, para el ítem 3 el DF.1 ofrece una justificación de este tipo al mencionar que “se usó viendo si el numerador es la mitad o menos en comparación con el denominador para ver cuál es mayor que el otro”.
- Utilizar reglas incorrectas para colocar la coma en el resultado del producto de dos números decimales. Para el ítem 10, el DF.1 menciona que para responder el ítem “se suman la cantidad de números a la derecha de la coma de cada factor entonces: el primero tiene 4 y el segundo 1. En total son 5 números a la derecha para poder colocar la coma”.
- Emplear dos gráficas distintas para visualizar la multiplicación de fracciones; en algunos casos los participantes emplearon dos gráficas para representar dos fracciones distintas; como una representación circular y otra rectangular, en muy pocos casos algunos docentes en formación lograron representar la multiplicación de números racionales a partir de una misma gráfica. Algunos docentes en formación, en la PF con las respuestas del DF.1, DF.3 y DF.6 en el ítem 9 se puede apreciar este tipo de ideas acerca de la multiplicación.

Recomendaciones

- Se recomienda incluir en los cursos de la carrera Licenciatura y Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática, herramientas o estrategias para el análisis del tema de números racionales a través de los componentes del sentido numérico, por medio de tareas matemáticas que permitan deducir distintas soluciones sin recurrir a algoritmos tradicionales, para promover un aprendizaje y comprensión a profundidad de los conceptos matemáticos del tema en cuestión evitando el uso de reglas que reproducen los algoritmos tradicionales.
- Incluir en los cursos de la carrera Licenciatura y Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática algunos espacios que refuercen los contenidos escolares de secundaria, según el Programa de Estudios de Matemática que propicien la reflexión y conexión entre lo conceptual y procedimental, puesto que los cursos actuales se enfocan más en enseñar temas de matemática avanzada y los docentes en formación no tienen claro ciertos conocimientos de los contenidos básicos, al menos para el tema de fracciones. En los resultados de esta investigación se evidencia que los participantes presentaban debilidades en los temas relacionados con las representaciones de conjuntos, expresiones decimales, número mixto y representación gráfica de la multiplicación con números racionales.
- Para profundizar en los resultados de este estudio, se podrían realizar entrevistas detalladas con aquellos docentes que presentaron cambios significativos de la prueba diagnóstica a la prueba final, ya que es interesante indagar en cómo los docentes en formación analizaron los

ítems la segunda vez. Además, muy pocos participantes notaron que los ítems eran los mismos en ambas pruebas.

- Es recomendable categorizar el nivel de complejidad de los ítems o tareas matemáticas de acuerdo con la argumentación que estos requieran, para generar un tiempo razonable y acorde con cada ítem específico tratando de evitar que los participantes dejen partes de la prueba incompletas o en blanco por falta de tiempo.

Limitaciones

- Se puede destacar como limitante que el tiempo previsto para las sesiones de la intervención no fue óptimo para abarcar todo lo planteado y con la profundidad deseada. Incluso se tuvieron que eliminar algunos ejercicios por el corto tiempo de las sesiones.
- El tiempo destinado para cada uno de los ítems presentes en las pruebas fue una limitante, debido a que se otorgó un mismo tiempo para cada ítem dejando de lado el tipo de dificultad en el razonamiento según los componentes contemplados a priori para su resolución (ver tabla 2).
- Debido al distanciamiento por la emergencia COVID-19, no hubo interacción presencial con los docentes en formación prevista para las intervenciones, en consecuencia, las mismas se modificaron para realizarse de forma virtual. A su vez, esta modalidad generó factores importantes como el acceso a internet, donde la calidad de este o fallas típicas de este medio de comunicación afectaron en algunos casos la participación por parte de los docentes en formación.

Además, las investigadoras no lograron monitorear el desempeño de los participantes en el desarrollo del ítem en ambas pruebas. En la PF se aprecia que al menos un docente en formación no da respuesta a las tareas matemáticas, excepto en los ítems 4 y 6.

- Otro aspecto que limitó la investigación fue que se aplicó la prueba escrita final en los días del cierre de semestre, por ende, los docentes en formación podrían priorizar los otros cursos, lo cual pudo haber sido contraproducente al obtener los datos necesarios para el análisis de la investigación. Además, esto no permitió tener una sesión final para realizar comentarios o aclarar dudas e incluso no se lograron resolver los ítems de la prueba final posterior a la aplicación de esta con los docentes en formación, lo cual fue una petición de ellos.

Referencias

Almeida, R., Bruno, A., y Perdomo, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(2), 9-34. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.997

Almeida, R., Bruno, A., y Perdomo, J. (2016). Strategies of number sense in preservice secondary mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 14(5), 959-978.

Almeida, R. (2017). Sentido numérico en futuros profesores de matemáticas y alumnado de secundaria [Tesis de doctorado]. Universidad de La Laguna.

Almeida, R., y Bruno, A. (2017). Estableciendo perfiles en el uso del sentido numérico [Establishing profiles on the use of number sense]. *REDIMAT*, *6*(1), 56-84. doi: 10.17583/redimat.2017.1910

Almeida, R., Bruno, A., y Perdomo, J. (2017). Evaluación del sentido numérico en tareas de fracciones. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 12, 9–30. http://fpiem.webs.ull.es/index.php/fpiem/article/viewFile/152/201

Álvarez, C., y San Fabián, J. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa. *Gazeta de Antropología*, 28(1), 1-1200. http://hdl.handle.net/10481/20644

Alzate, M., Arbelaez, M., Gómez, M., y Romero, F. (2003). Intervención, mediación pedagógica y los usos del texto escolar. Instituto Kennedy, Pereira, Colombia. https://rieoei.org/historico/deloslectores/1116Alzate.pdf

Arteaga, P., Contreras, J., y Ruiz, B. (2008). Sentido numérico en la lectura y elaboración de gráficos estadísticos. En J. Cardeñoso y Peña, M. (Eds.), *Investigación en el aula de Matemáticas. El sentido numérico* (pp. 119-125). SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. https://www.researchgate.net/publication/267982176

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: ¿What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Belmonte, J. (2003). El cálculo en la Enseñanza Primaria. La adición y la sustracción. En M. Chamorro (Ed.), *Didáctica de la Matemática* (pp. 134-158). Pearson- Prentice Hall.

Berenguer, M., Cobo, P., Berenguer, J., y Berenguer, L. (2008). Materiales para la enseñanza del sentido numérico. En J. Cardeñoso y Peña, M. (Eds.), *Investigación en el aula de Matemáticas. El sentido numérico* (pp. 89-108). SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. https://www.researchgate.net/publication/267982176

Castro, E. (2008). Pensamiento numérico y educación matemática. En J. Cardeñoso y Peña, M. (Eds.), *Investigación en el aula de Matemáticas. El sentido numérico* (pp. 23-32). SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. https://www.researchgate.net/publication/267982176

Castro, W., Godino, J., Rivas, M., y Roa, R. (2008). La reflexión epistémica y cognitiva como recurso para el desarrollo del sentido numérico en futuros profesores. En J. Cardeñoso y Peña, M. (Eds.), *Investigación* *en el aula de Matemáticas. El sentido numérico* (pp. 151-157). SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. https://www.researchgate.net/publication/267982176

Cid, E., Godino, J., y Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. https://lainmaculada.edu.co/wpcontent/uploads/2020/01/2_Sistemas_numericos.pdf

Díaz, V. (2006). Formación Docente, Práctica Pedagógica y Saber Pedagógico. *Laurus, Revista de Educación*, *12*, 88–103. http://www.redalyc.org/pdf/761/76109906.pd

Escudero, D., Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas. [Sesión de congreso] Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Ciudad de México. http://funes.uniandes.edu.co/16540/1/Escudero2012El.pdf

Escudero, D., Vasco, D., y Aguilar, A. (2017, julio 10-14). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. [Sesión de congreso] VIII Congreso Iberoamericano De Educación Matemática, Madrid, España. http://funes.uniandes.edu.co/19810/1/Escudero2017Relaciones.pdf

Godino, J., Font, V., Konic, P., y Wilhelmi, M. (2008). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. Cardeñoso y Peña, M. (Eds.), *Investigación en el aula de Matemáticas. El sentido numérico* (pp. 177-183). SAEM Thales y

Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. https://www.researchgate.net/publication/267982176

Hamilton, L., y Corbett-Whittier, C. (2013). Defining case study in education research. In Hamilton, L., y Corbett-Whittier, C. *Bera/sage Research Methods in Education: Using case study in education research* (pp. 3-21). London: SAGE Publications Ltd. doi: 10.4135/9781473913851

Hernández, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. (6ª ed.). Mcgraw - hill.

Irwin, K. C., y Britt, M. S. (2005). The Algebraic Nature of Students' Numerical Manipulation in the New Zealand Numeracy Project. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(2), 169-188. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2755-y

Leguizamón, J., Patiño, O., y Suárez, P. (2015). Tendencias didácticas de los docentes de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en el aula*. Educación Matemática*. 27(3), 151-174.http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665- 58262015000300151

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento & Gestión*, 20, 165-193. https://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudios de Matemática: Primer Ciclo, Segundo Ciclo, Tercer Ciclo y Educación Diversificada. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/mate matica.pdf

Ministerio de Educación Pública. (2015). Estrategias y actividades didácticas para el cálculo mental. https://mep.go.cr/sites/default/files/page/adjuntos/calculo-mental.pdf

Nieva, J., y Martínez, O. (2016). Una nueva mirada sobre la formación docente. Revista Científica Universidad y Sociedad, 8(4), 14–21. http://scielo.sld.cu/pdf/rus/v8n4/rus02416.pdf

Programa Estado de la Nación. (2019). *Estado de la Educación Costarricense* (7 ed.). San José C.R. http://hdl.handle.net/20.500.12337/7773

Ramírez, M., y Valdemoros, M. (2019, mayo 5 - 10). Estrategias de enseñanza para fracciones y problemas multiplicativos. [Comunicación]. XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Medellín, Colombia.

Torres, J., y Román, Z. (2013). Sentido numérico en las operaciones con fracciones: estrategias didácticas y factores. *Revista Paideia Puertorriqueña*, *8*(2), 1-23. http://paideia.uprrp.edu/wp-content/uploads/2014/11/CO_Operaciones_de_frac_en_Proceso_de_Revisiu00F3n_81.pdf

Yang, D. (2003). Teaching and learning number sense – An intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *1*(1), 115-134. https://doi.org/10.1023/a:1026164808929

Yin, R. (2014). Case study research. Desing and methods. SAGE.

Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetike*, *24*(3), 301-321. https://doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095

Anexos

Anexo 1

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
COMITÉ ÉTICO CIENTÍFICO
Teléfono/Fax: (506) 2511-4201

Universidad de Costa Rica
Sede de Occidente

FORMULARIO PARA EL CONSENTIMIENTO INFORMADO BASADO EN LA LEY N° 9234 "LEY REGULADORA DE INVESTIGACIÓN BIOMÉDICA" y EL "REGLAMENTO ÉTICO CIENTÍFICO DE LA UNIVERSIDAD DE COSTA RICA PARA LAS INVESTIGACIONES EN LAS QUE PARTICIPAN SERES HUMANOS"

Caracterización del sentido numérico en el aprendizaje de la multiplicación con números racionales positivos para docentes de matemática en formación de la Universidad de Costa Rica

Nombre de las investigadoras principales: González Mora Dayana Paola, Jiménez Ruíz Adriana Vanessa, Sibaja Elizondo María Nohely y Solórzano Jandres Katherine Yuliana.

Nombre del/la participante: ____

Medios para contactar a la/al participante, números de teléfono: _______________

Correo electrónico: ____

Contacto a través de otra persona _____________________________________

A. PROPÓSITO DEL PROYECTO

La investigación en que usted participará estará a cargo de González Mora Dayana Paola, Jiménez Ruíz Adriana Vanessa, Sibaja Elizondo María Nohely y Solórzano Jandres Katherine estudiantes de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática, Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica. El objetivo del estudio es caracterizar el uso de estrategias que utilizan los estudiantes de cuarto año en la carrera Enseñanza de la Matemática, al emplear la multiplicación con números racionales para dar solución a algunas tareas matemáticas. Se espera que participen todos los estudiantes del curso FD0555 Seminario de Enseñanza de la Matemáticas.

B. ¿QUÉ SE HARÁ? Se espera que cada persona participante del estudio:

- Realice una prueba escrita diagnóstica para determinar cuáles estrategias emplea en la resolución de tareas matemáticas acerca del tema de multiplicación con números racionales.

- Resuelva tareas matemáticas acerca del tema de la multiplicación con números racionales planteadas por las investigadoras durante la intervención.
- Conteste una prueba escrita final, en la cual se analizará el éxito y se determinarán las estrategias empleadas en la resolución.
- Para todas estas actividades se recogerá el material escrito que produzcan los docentes en formación. También se grabará el audio y video de las sesiones de trabajo utilizado la herramienta zoom.
- Toda la información recogida en las actividades será analizada al finalizar el proyecto con el fin de obtener conclusiones acerca de los objetivos definidos para esta investigación.

C. RIESGOS

- No se espera que haya riesgos para la salud física y mental de las personas participantes del proyecto.
- Si la persona siente alguna incomodidad con respecto a la participación del proyecto puede conversar con las investigadoras o con la directora del proyecto Ana Patricia Maroto Vargas a quien puede contactar al correo ana.maroto@ucr.ac.cr.

D. BENEFICIOS

- Se desea que el proceso de trabajo realizado con esta indagación le permita conocer nuevas y distintas estrategias para multiplicar números racionales para dar solución a algunas tareas matemáticas, lo que podría fortalecer el desarrollo del sentido numérico.
- Los resultados obtenidos de este estudio se darán a conocer al finalizar la investigación por el medio pertinente, lo cual podría aumentar sus conocimientos para enseñar matemática a sus futuros estudiantes.

E. VOLUNTARIEDAD

Es relevante mencionar que la participación es totalmente voluntaria y usted puede negarse a participar o retirarse en cualquier momento sin perder los beneficios a los cuales tiene derecho, ni a ser castigado de ninguna forma por su retiro o falta de participación.

F. CONFIDENCIALIDAD

Las indagadoras de este proyecto garantizan un estricto manejo y confidencialidad de la información, la cual será utilizada solo con fines académicos. Toda la información será grabada de manera digital y guardada, con su respectiva clave de seguridad. Cuando se reporten los resultados de esta investigación a personas externas, siempre se protegerá la identidad de las personas participantes. Únicamente las investigadoras y la directora del proyecto tendrán acceso a la información guardada.

G. INFORMACIÓN

Antes de dar su autorización para recoger la información las investigadoras responsables del estudio conversarán con el grupo participante. Se abordarán todas sus dudas acerca del estudio y de sus derechos.

Si quisiera información más adelante, puede obtenerla comunicándose con la directora del proyecto y profesora del curso Ana Patricia Maroto Vargas al correo ana.maroto@ucr.ac.cr, o bien con alguna de las investigadoras encargadas del proyecto a los siguientes correos electrónicos adrivanej29@gmail.com, nohelysibaja@gmail.com, pao6634@gmail.com, kathisoja@gmail.com

Cabe recalcar que usted NO perderá ningún derecho por firmar este documento y tendrá acceso a una copia digital de esta fórmula firmada para su uso personal.

H. CONSENTIMIENTO

He leído o se me ha leído toda la información descrita en esta fórmula antes de firmarla. Se me ha brindado la oportunidad de hacer preguntas y estas han sido contestadas en forma adecuada. Por lo tanto, declaro que entiendo de qué trata el proyecto, las condiciones de mi participación y accedo a participar como sujeto de investigación en este estudio

____

Nombre, firma y cédula del sujeto participante

____

Lugar, fecha y hora

Dayana Paola González Mora, Cédula 2-0742-0147
Adriana Vanessa Jiménez Ruiz, Cédula 6-0440-0655
María Nohely Sibaja Elizondo, Cédula 1-1591-0207
Katherine Yuliana Solórzano Jandres, Cédula 2-0698-0565

____

Nombre, firma y cédula del/las investigador/as que solicitan el consentimiento

____

Lugar, fecha y hora

____

Ana Patricia Maroto Vargas, Cédula 2-0450-0764

____

Lugar, fecha y hora

Anexo 2

Universidad de Costa Rica
Sede de Occidente
I Ciclo 2021

Prueba diagnóstica

Nombre de la persona estudiante:
____

Fecha: 25/ 06/ 2021

Instrucciones específicas:
En esta prueba de diagnóstico se presentan 10 ítems sobre el tema de números racionales, los cuales debe:

- Responder sin realizar cálculos exactos, es decir, no utilice algoritmos para resolver la prueba.
- Trabajar en forma clara, ordenada y con letra legible.
- Justificar y explicar la respuesta de cada ítem.

Además, considere que:

- Dispone de 3 minutos por ítem.
- No se permite el uso de calculadora para resolver la prueba.
- Al terminar la prueba adjunte un archivo en formato .pdf con la respuesta de cada uno de los ítems realizados en Mediación virtual.

Ítem 1.

Elena tiene un terreno de forma rectangular que mide 103 m de largo y 48 m de ancho. ¿Cuál es la mejor estimación del área del terreno?

a) 100 m × 50 m.
b) 103 m × 50 m.
c) 100 m × 48 m.
d) No puedo decidirlo sin realizar un cálculo exacto.

Ítem 2.

Imagine que Roberto está celebrando su cumpleaños y su mamá le horneó <u>dos queques</u>. Es momento de soplar las candelas y el cumpleañero debe cortar y repartir cada uno de los queques. Determine si a Roberto le sobrará más de medio queque después de repartir las siguientes porciones:

- $\frac{1}{4}$ de queque para Roberto.
- $\frac{2}{3}$ de queque para su familia.

- $\frac{6}{8}$ de queque para sus amigos.

Ítem 3.

Tomás caminó 0,4828 km, Juan caminó $\frac{13}{38}$ km, María caminó $\frac{8}{15}$ km, Julia caminó $\frac{17}{16}$ km, David caminó 0,966 km y José caminó $\frac{7}{29}$ km.

Ordene de **mayor a menor** las distancias que recorrieron las personas.

Ítem 4.

David tiene una finca de forma rectangular con largo $\frac{17}{19}$ km y $\frac{6}{13}$ km de ancho. Sin calcular el valor exacto. ¿Cuál es la mejor estimación del área de la finca?

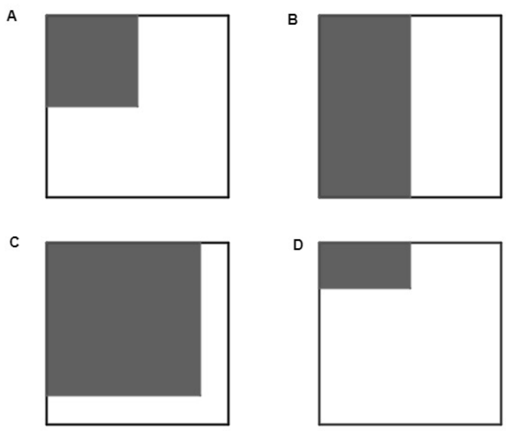
a) Mayor que $\frac{1}{2}\, km^2$.
b) Igual a $\frac{1}{2}\, km^2$.
c) Menor que $\frac{1}{2} km^2$.
d) No puedo decidirlo sin realizar un cálculo exacto.

Ítem 5.

El terreno donde se ubica el edificio de la tienda Baratonazo es de forma rectangular y hace esquina con dos calles. Uno de sus frentes ocupa una tercera parte de la calle, y el otro frente ocupa 0,46 de la otra calle. Estime la fracción de la cuadra que está ocupada por el edificio del Baratonazo.

Ítem 6.

Si el lado de cada uno de los siguientes cuadrados mide 1 cm, ¿cuál área sombreada se aproxima más al producto de $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}$?



Ítem 7.

Raquel quiere transportar el agua contenida en 9 vasos de capacidad 0,45 litros cada uno. Para hacerlo, dispone de un recipiente que tiene capacidad de 5 litros. Ella asegura que tendrá que llevar el recipiente una vez para poder transportar toda el agua. ¿Qué razonamiento llevó a cabo Raquel para hacer dicha afirmación?

Ítem 8.

María tarda 3 horas en pintar una habitación, mientras que Carlos tarda 6 horas pintando la misma habitación.

Si las dos personas trabajan juntas, ¿cuánto tiempo les llevará terminar el trabajo?

a) 18 horas.
b) 9 horas.
c) 4 horas.
d) 3 horas.
e) 2 horas.
f) 1 hora.
g) ½ hora.

Ítem 9.

Si $\frac{1}{3}$ de la cosecha de arroz se estropea por causa de una tormenta y $\frac{1}{10}$ de lo que quedó se perdió por causa de una plaga, ¿qué fracción de la cosecha de arroz se perdió?

Ítem 10.

Carlos utilizó una calculadora para efectuar la operación

$$\mathbf{0{,}4975 \times 9428{,}8 = 4690828}$$

Pero olvidó escribir la coma. Use estimación para encontrar el lugar de la coma.

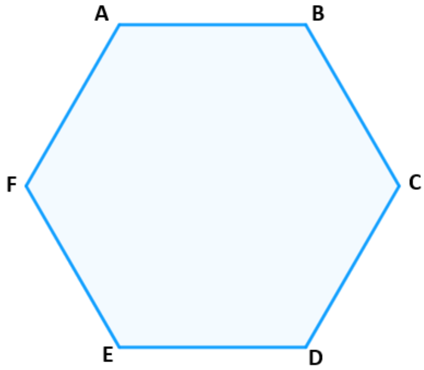
a) 46,90828
b) 469,0828
c) 4 690,828
d) 46 908,28
e) No puedo elegir la respuesta sin realizar el cálculo exacto.

Anexo 3

Planeamiento de la intervención: Tercera sesión

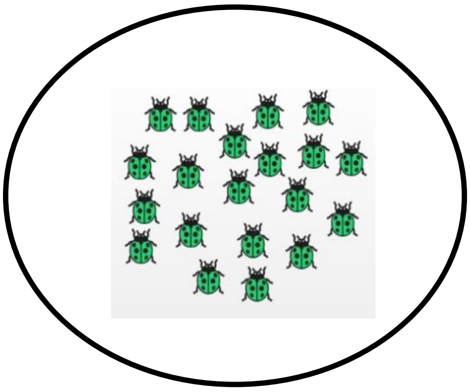
- **Título:** Multiplicación de números racionales.
- **Temas:** Significado y representaciones en la multiplicación.
- **Investigadoras:** Adriana Jiménez, Paola González, Nohely Sibaja y Katherine Solórzano.

Actividad 1:
Considere el hexágono regular ABCDEF como una unidad.



a) Trace y determine seis doceavos de la unidad.
b) Resalte una sexta parte de seis doceavos.
c) ¿Qué parte de la unidad representa la sexta parte de los seis doceavos de la unidad?

Actividad 2:
1. Considere el siguiente conjunto como una unidad.



a) Seleccione la parte que corresponde a la mitad de $\frac{1}{10}$.
b) Escriba la fracción que corresponde a la mitad de $\frac{1}{10}$.
c) Seleccione la parte que corresponde a $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.
d) Escriba la fracción que corresponde a $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.

Actividad 3:
Sin realizar el cálculo exacto, ¿cuál opción se acerca más al resultado de $\frac{4}{9} \cdot 94$?

a) 200
b) 150
c) 100
d) 50

Justifique su respuesta.

Actividad 4:
Jorge y Diana discuten sobre cuál de los dos recibió más pastel. Jorge recibe la tercera parte de medio pastel y Diana recibe un medio de la tercera parte del pastel. De dicha repartición, Diana opina que Jorge recibió más pastel. ¿Cómo razonarías la respuesta?

TAREAS MATEMÁTICAS

T#1: Dos tercios de un hato de ganado tienen un año; de esos solo cinco sétimos son hembras. Determine la fracción que representa las hembras y los machos de un año en el hato.

T#2: Se necesita 1 litro de jarabe de limón para hacer 15 litros de limonada. Estime cuánta limonada se puede hacer con 0,75 litros de jarabe de limón.

T#3: ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $\frac{1}{2} \cdot 3$ no es un producto de fracciones porque el término "tres" no es una fracción.
b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ es menor que la unidad.
c) $\frac{3}{4} \cdot 8$ es mayor que una unidad.
d) El producto de 3 fracciones es mayor que la unidad.
e) $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{4}$ es mayor que la unidad porque $\frac{10}{4}$ es mayor que dos unidades.

T#4: Modele mediante una representación gráfica el producto de $\frac{3}{2}$ por $\frac{1}{4}$.

Anexo 4

Componentes encontrados en los ítems de la prueba diagnóstica y prueba final

Ítem 1. Elena tiene un terreno de forma rectangular que mide 103 m de largo y 48 m de ancho. ¿Cuál es la mejor estimación del área del terreno? a) 100 m × 50 m. b) 103 m × 50 m. c) 100 m × 48 m. d) No puedo decidirlo sin realizar un cálculo exacto.

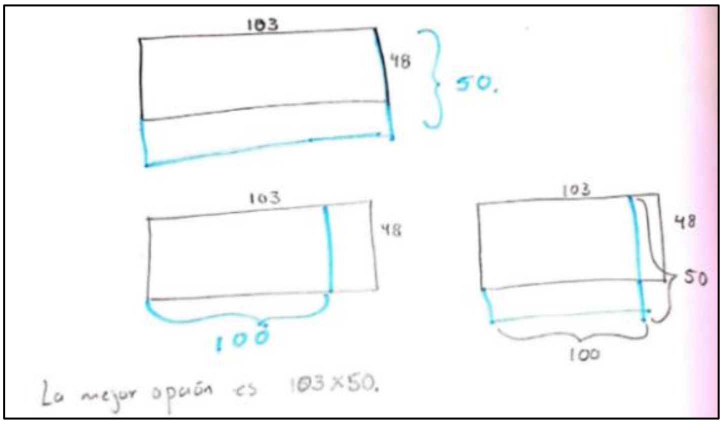
Los componentes del sentido numérico presentes en este ítem son: c.3, c.4 y c.5.

- C.3. Puntos de referencia: Se observa al redondear a la decena y centena más próxima. Por ejemplo:

- Si $103 - 2 = 101$ y $48 + 2 = 50$, entonces 101×50 es la mejor aproximación para dar la respuesta al ejercicio.

- C.4. La composición y descomposición de los números: Se presenta cuando se descompone el 103 como 100+3 y 48 como 50-2.

- C.5. Múltiples representaciones de los números y las operaciones: Se muestra cuando el docente realiza una gráfica para dar solución al problema. Por ejemplo, en la siguiente imagen se muestra como el docente 7 en la prueba diagnóstica realiza la gráfica de cada una de las posibles respuestas del ítem y observa cual es la más aproximada al terreno.



Respuesta del docente en formación 7, prueba diagnóstica.

Ítem 2.

Imagine que Roberto está celebrando su cumpleaños y su mamá le horneó dos queques. Es momento de soplar las candelas y el cumpleañero debe cortar y repartir cada uno de los queques. Determine si a Roberto le sobrará más de medio queque después de repartir las siguientes porciones:

- $\frac{1}{4}$ de queque para Roberto.
- $\frac{2}{3}$ de queque para su familia.
- $\frac{6}{8}$ de queque para sus amigos.

Los componentes del sentido numérico presentes en este ítem son: c.2, c.4, c.5 y c.7.

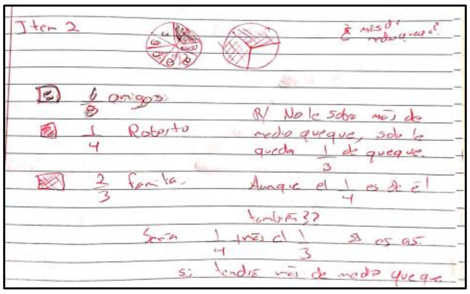
- C.2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes: Este componente se puede observar al comparar el resultado final con un $\frac{1}{2}$, según lo establece el ítem al preguntar ¿le sobrará más de medio queque?

- C.4. Utilizar la composición y descomposición de los números: Se presenta al utilizar la simplificación fracciones para resolver el ítem. Por ejemplo:

- Ver $\frac{6}{8}$ como $\frac{3}{4}$.

- C.5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones: Se observa al representar de forma gráfica las porciones del queque dadas a Roberto, familia y amigos.

- C.7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta: Este componente permite determinar la validez de una respuesta para una determinada situación, como se aprecia en este caso: Si se toma en cuenta la porción que le corresponde a Roberto más el sobrante del queque, juntas ambas porciones si forman más de medio queque.



Respuesta del docente en formación 8, prueba final.

Ítem 3.

Tomás caminó 0,4828 km, Juan caminó $\frac{13}{38}$ km, María caminó $\frac{8}{15}$ km, Julia caminó $\frac{17}{16}$ km, David caminó 0,966 km y José caminó $\frac{7}{29}$ km. Ordene de **mayor a menor** las distancias que recorrieron las personas.

Los componentes de sentido numérico presentes en este ítem son: c.2, c.3, c.4 y c.5.

- C.2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números: El uso de esta estrategia o componente se observa cuando los docentes en formación realizan representaciones en una misma recta numérica para determinar el orden y la comparación con otros números: si es mayor, menor o igual. En este caso nos permite comparar, por ejemplo, las fracciones $\frac{17}{16}$ y $\frac{8}{15}$.

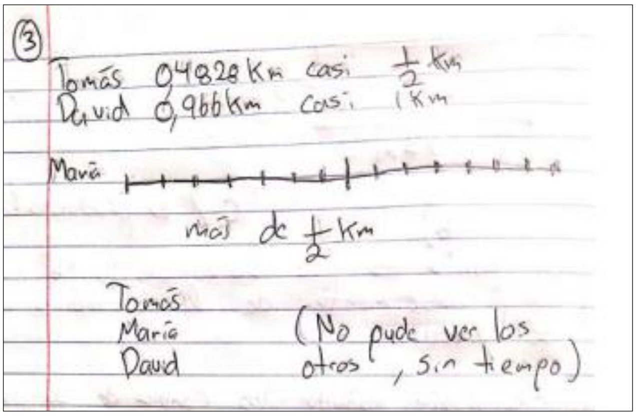
- C.3. Usar puntos de referencia: Este tipo de estrategia se puede observar al buscar aproximaciones de un número dado. Por ejemplo:

- La distancia que recorre María es de $\frac{8}{15}$, la cual es mayor que $\frac{8}{16}$, esta última fracción simplificada corresponde al valor $\frac{1}{2}$. Por último, podemos afirmar que $\frac{8}{15} > \frac{1}{2}$.
- Con la misma deducción anterior podemos concluir que la distancia recorrida por Juan es un poco más de $\frac{1}{3} = \frac{13}{39}$.
- La distancia que recorre David es menor a un kilómetro, pues 0,966 < 1.
- Otro punto importante de este ítem es recordar que las fracciones impropias son mayores que la unidad, así $\frac{17}{16}$ >1.

- C.4. Utilizar la composición y descomposición de los números: Algunos puntos de referencia se pueden obtener al descomponer algún número en otro más simple, en el caso de las fracciones la composición y descomposición son un ejemplo de esta estrategia:

- $\frac{13}{39} < \frac{13}{38}$, equivale a afirmar que $\frac{1}{3} < \frac{13}{38}$.
- $\frac{8}{16} < \frac{8}{15}$ es equivalente a afirmar que $\frac{1}{2} < \frac{8}{15}$.
- $\frac{7}{28} > \frac{7}{29}$ equivale a $\frac{1}{4} > \frac{7}{29}$.

- C.5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones: En este caso podemos encontrar el uso de la recta numérica para determinar la mayoricidad, menoricidad o igualdad para comparar dos o más cantidades.



Respuesta del docente en formación 8, prueba diagnóstica.

Ítem 4.
David tiene una finca de forma rectangular con largo $\frac{17}{19}$ km y $\frac{6}{13}$ km de ancho. Sin calcular el valor exacto. ¿Cuál es la mejor estimación del área de la finca?
e) Mayor que $\frac{1}{2}\,km^2$.
f) Igual a $\frac{1}{2}\,km^2$.
g) Menor que $\frac{1}{2}\,km^2$.
h) No puedo decidirlo sin realizar un cálculo exacto.

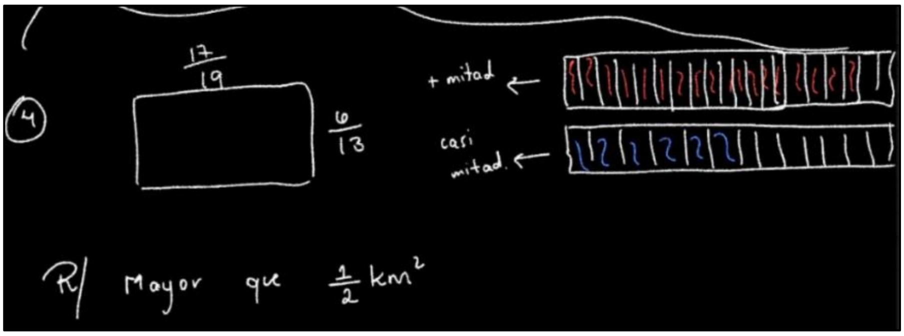
Los componentes del sentido numérico presentes en este ítem son: c.2, c.3 y c.5.

- C.2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes: Este componente se puede observar al comparar $\frac{1}{2}$ y 1 con las fracciones dadas en el ítem:

- $\frac{6}{13}$ se compara con $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, significa que $\frac{6}{13}$ es un poco más pequeño que $\frac{1}{2}$.
- $\frac{17}{19}$ se compara con $\frac{17}{17}=1$, significa que $\frac{17}{19}$ es un poco más pequeño que 1.

- **C.3. Usar puntos de referencia:** Se presenta al utilizar la fracción $\frac{1}{2}$ como punto de referencia para resolver el ítem.

- **C.5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones:** Se observa al representar de forma gráfica las medidas de la granja.



Respuesta del docente en formación 5, prueba diagnóstica.

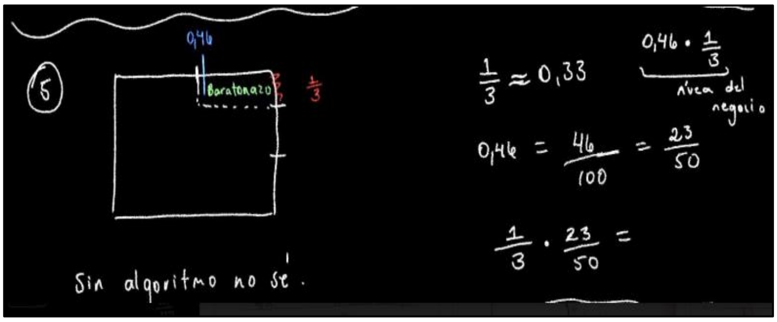
Ítem 5. El terreno donde se ubica el edificio de la tienda Baratonazo es de forma rectangular y hace esquina con dos calles. Uno de sus frentes ocupa una tercera parte de la calle, y el otro frente ocupa 0,46 de la otra calle. Estime la fracción de la cuadra que está ocupada por el edificio del Baratonazo.

Los componentes del sentido numérico presentes en este ítem son: c.2, c.3 y c.5.

- **C.2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes:** Se presenta cuando se realiza la aproximación de 0,46 a $\frac{1}{2}$ y se realiza $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ observando que la fracción de la cuadra es menos que un sexto.

- **C.3. Puntos de referencia:** Se observa cuando se aproxima 0,46 a $\frac{1}{2}$

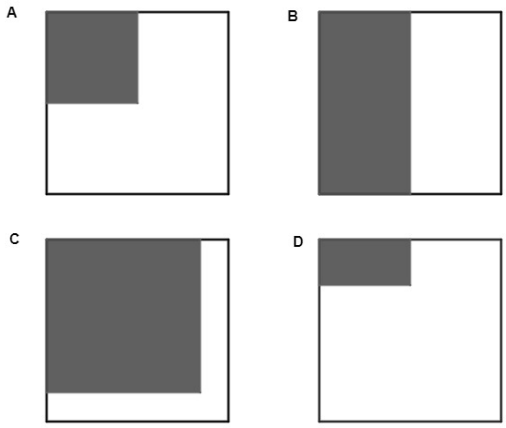
- **C.5. Múltiples representaciones de los números y las operaciones:** Se muestra cuando el docente realiza una gráfica para dar solución al problema. Por ejemplo, en la siguiente imagen se muestra como el docente 5 en la prueba diagnóstica realiza la gráfica de cada una de las posibles respuestas del ítem, pero no logra observa cual es la fracción de la cuadra.



Respuesta del docente en formación 5, prueba diagnóstica.

Ítem 6.

Si el lado de cada uno de los siguientes cuadrados mide 1 cm, ¿cuál área sombreada se aproxima más al producto de $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}$?



Los componentes del sentido numérico presentes en este ítem son: c.2, c.3, c.5 y c.7.

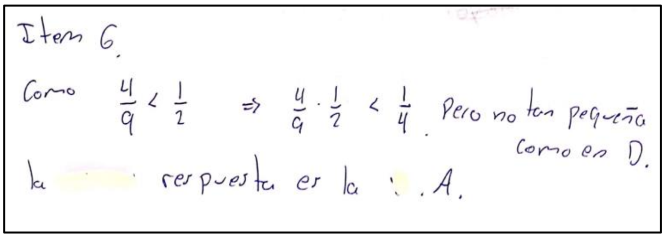
- C.2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes: Este componente se puede observar al comparar $\frac{4}{9}$ con un $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ determinando así la relación de orden $\frac{4}{9}$ menor a $\frac{1}{2}$.

- C.3. Usar puntos de referencia: Se presenta al utilizar la fracción $\frac{1}{2}$ como punto de referencia para resolver el ítem. Por ejemplo:

- Ver que $\frac{4}{9}$ es menor que $\frac{1}{2}$.

- C.5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones: Se observa al realizar el gráfico para encontrar el resultado.

- C.7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta: Este componente permite determinar la validez de una respuesta para una determinada situación, como se aprecia en este caso


Ítem 6.
Como $\frac{4}{9} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$. Pero no tan pequeña como en D.
la respuesta es la . A.

Respuesta del docente en formación 2, prueba diagnóstica.

Ítem 7. Raquel quiere transportar el agua contenida en 9 vasos de capacidad 0,45 litros cada uno. Para hacerlo, dispone de un recipiente que tiene capacidad de 5 litros. Ella asegura que tendrá que llevar el recipiente una vez para poder transportar toda el agua. ¿Qué razonamiento llevó a cabo Raquel para hacer dicha afirmación?

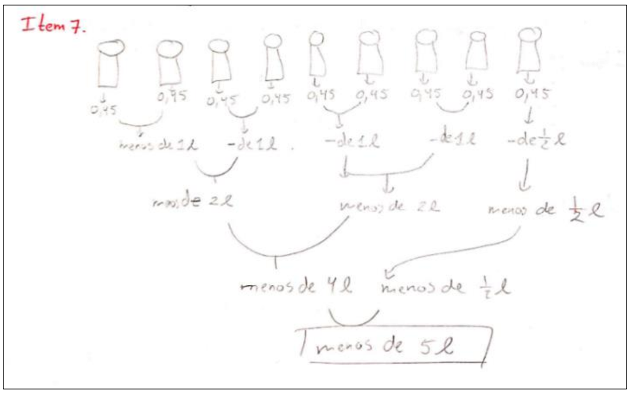
Los componentes del sentido numérico presentes en este ítem son: c.1, c.2, c.3, c.5, c.6 y c.7.

- C.1. Comprender el significado de los números: Un ejemplo donde puede apreciarse este componente es la relación de algunas expresiones escritas decimales y fracciones: $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

- C.2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes: Este componente permite realizar aproximaciones de decimales a una cantidad más trabajable o conocida. Por ejemplo, en el ítem 7 permite comparar la capacidad de 0,45 litros con 0,5 litros. Al final, si se tienen 9 vasos de 0,5 litros y estos caben en el envase de 5 litros al tener vasos de una capacidad menor a 0,5 litros también van a entrar en el envase.

- C.3. Usar puntos de referencia: Permite determinar en el ejercicio que 0,45 litros son menos cantidad de agua que 0,5 litros, lo cual se puede interpretar que cada vaso de agua es poco menos de medio litro de agua.

- C.5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones: Esta situación que detalla el ítem puede ser representada por un dibujo acorde que muestre la solución del problema, donde el docente en formación puede determinar la solución del ejercicio sin emplear algoritmos.



Respuesta del docente en formación 7, prueba final.

- C.6. Comprender el efecto relativo de las operaciones: En este caso se trata de establecer relaciones entre operaciones básicas, por ejemplo, poder observar que 9 vasos de 0,5 litros es una multiplicación pero que puede trabajarse gráficamente sumando nueve veces la cantidad de 0,5 litros.

- C.7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta: Este componente permite determinar la validez de una respuesta para una determinada situación, en este caso se trata de que aún con la cantidad de agua de los nueve vasos de 0,5 litros se puede llevar sólo una vez, por lo tanto, siendo los vasos de 0,45 litros puede ser llevada sin problema en el envase.

Ítem 8.

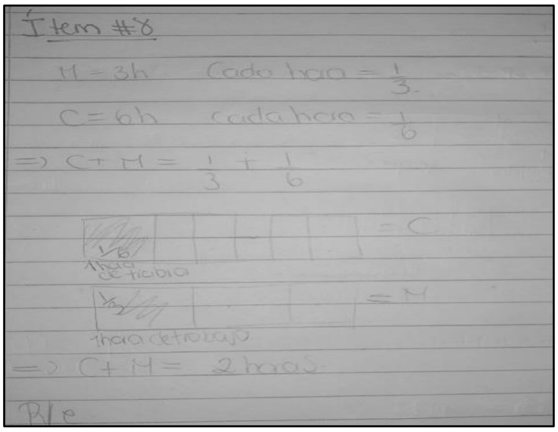
María tarda 3 horas en pintar una habitación, mientras que Carlos tarda 6 horas pintando la misma habitación.

Si las dos personas trabajan juntas, ¿cuánto tiempo les llevará terminar el trabajo?

h) 18 horas.
i) 9 horas.
j) 4 horas.
k) 3 horas.
l) 2 horas.
m) 1 hora.
n) ½ hora.

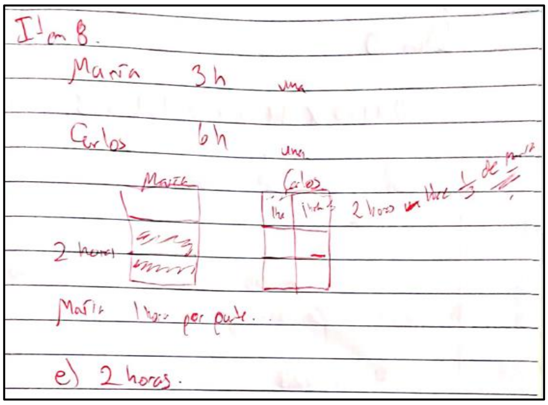
Los componentes del sentido numérico presentes en este ítem son: c.4, c.5 y c.7.

- C.4. Utilizar la composición y descomposición de los números: Se puede observar cuando el docente en formación 3, en la prueba final realiza una simplificación.



Respuesta del docente en formación 3, prueba final.

- C.5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones: Este componente se observa cuando se elabora la representación gráfica. Además, se analiza que $\frac{1}{3}$ corresponde a una hora de María y $\frac{1}{6}$ es una hora, pero de Carlos.



Respuesta del docente en formación 8, prueba final.

- C.7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta: Se presenta al descartar opciones de las respuestas. Ejemplo:

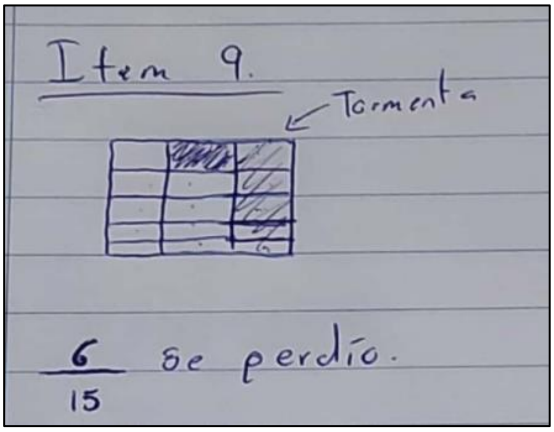
- Si María y Carlos trabajan juntos para pintar la habitación no pueden durar más de 3 horas, por lo tanto, descarto las opciones a), b) y c).
- Además, 3 horas no pueden durar, pues solamente María dura 3 horas, entonces descarto d).

- Las opciones f) y g) tienen muy poco tiempo para realizar el trabajo completo.

Ítem 9. Si $\frac{1}{3}$ de la cosecha de arroz se estropea por causa de una tormenta y $\frac{1}{10}$ de lo que quedó se perdió por causa de una plaga, ¿qué fracción de la cosecha de arroz se perdió?

El componente presente en este ítem es: c.5.

- C.5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones: Esta estrategia requiere que los docentes en formación sepan realizar operaciones con la unidad e interpretar las situaciones que se requieran representar, Por ejemplo:



Respuesta del docente en formación 9, prueba diagnóstica.

Ítem 10. Carlos utilizó una calculadora para efectuar la operación **0,4975 × 9428,8 = 4690828** Pero olvidó escribir la coma. Use estimación para encontrar el lugar de la coma. f) 46,90828 g) 469,0828 h) 4 690,828 i) 46 908,28 j) No puedo elegir la respuesta sin realizar el cálculo exacto.

Los componentes del sentido numérico presentes en este ítem son: c.1, c.3, c.6 y c.7.

- C.1. Comprender el significado de los números: Un ejemplo donde puede apreciarse este componente es la relación de algunas expresiones escritas decimales y fracciones: tomando que la multiplicación se da entre los números casi 10000, y el otro casi 0,5 el resultado no puede ser un número que tenga más de 4 dígitos, aproximadamente 5000.

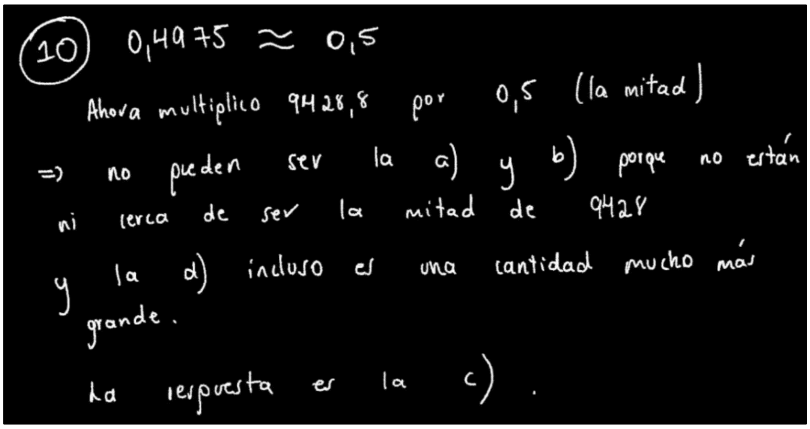
- C.3. Usar puntos de referencia: Se presenta al utilizar la simplificación fracciones para resolver el ítem. Por ejemplo:

- Ver $0{,}4975$ como $\frac{1}{2}$. Aproximadamente 0,5.

- C.6. Comprender el efecto relativo de las operaciones: En este caso se trata de establecer relaciones entre operaciones básicas, por ejemplo, poder observar que es una multiplicación pero que puede trabajarse como una división

$$0.4975 \times 9428.8 = \frac{1}{2} \times 9428.8$$

- C.7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta: Este componente permite determinar la validez de una respuesta para una determinada situación, como se aprecia en este caso

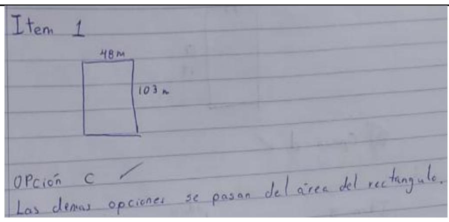
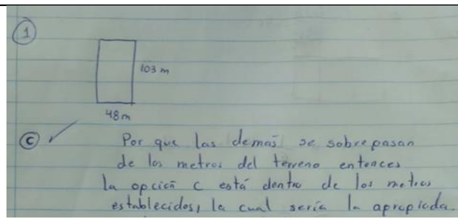
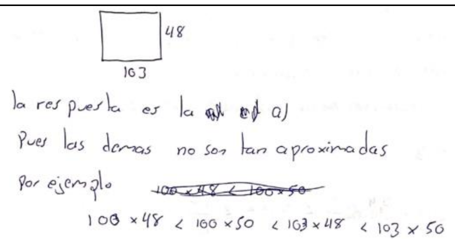
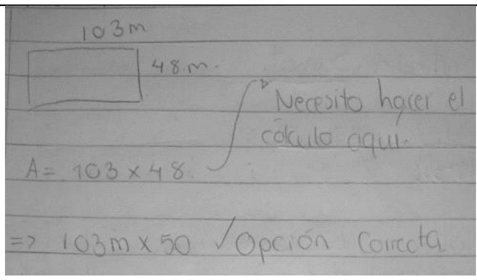
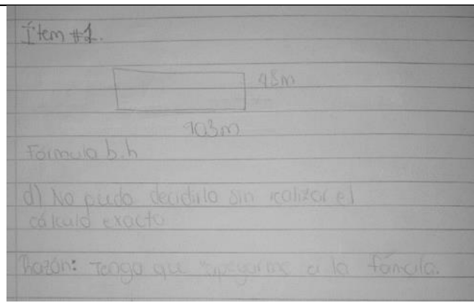
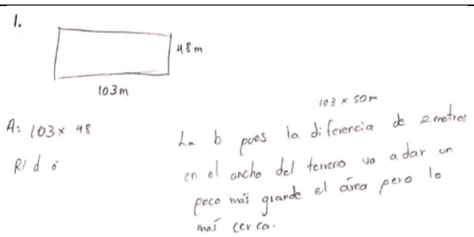
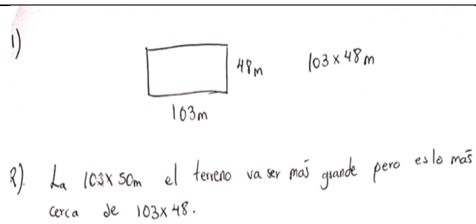
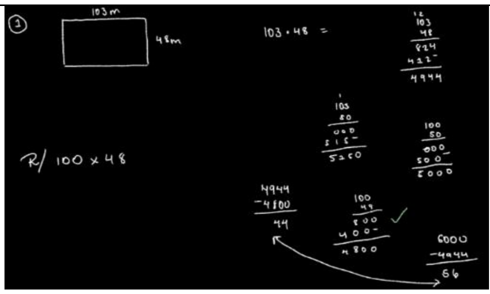
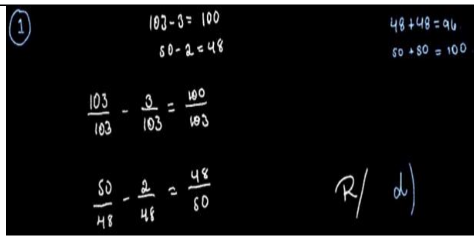

10 $0{,}4975 \approx 0{,}5$
Ahora multiplico 9428,8 por 0,5 (la mitad)
$\Rightarrow$ no pueden ser la a) y b) porque no están ni cerca de ser la mitad de 9428
y la d) incluso es una cantidad mucho más grande.
La respuesta es la c).

Respuesta del docente en formación 5, prueba diagnóstica.

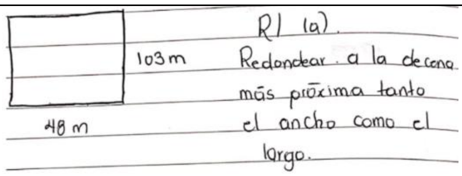
Anexo 5

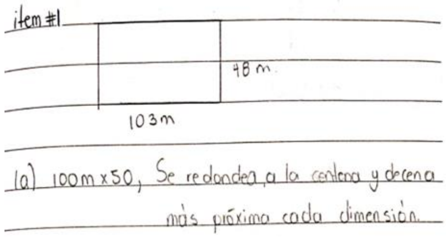
Imágenes de las respuestas dadas por los docentes en formación (DF) en la prueba diagnóstica (PD) y prueba final (PF)

ítem 1

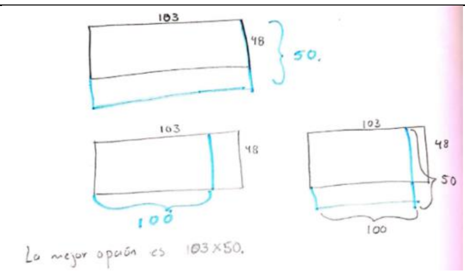
<table>
<tr><th></th><th>PD</th><th>PF</th></tr>
<tr><td>DF.1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>DF.2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>DF.3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>DF.4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>DF.5</td><td></td><td></td></tr>
</table>

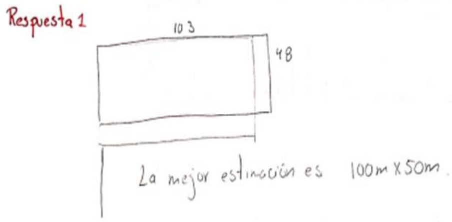
DF.6



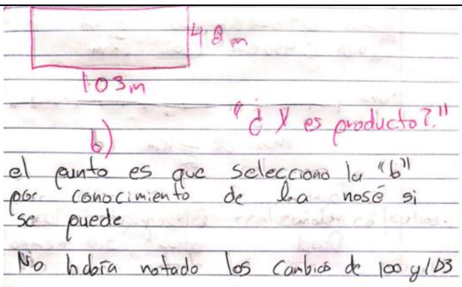


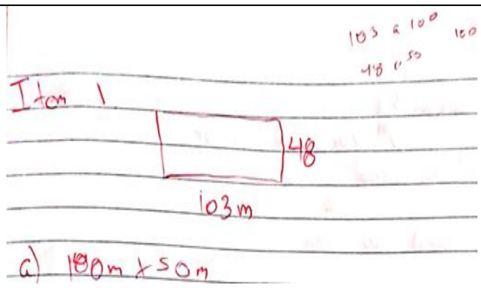
DF.7



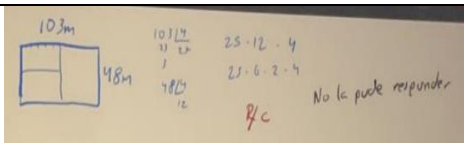


DF.8





DF.9

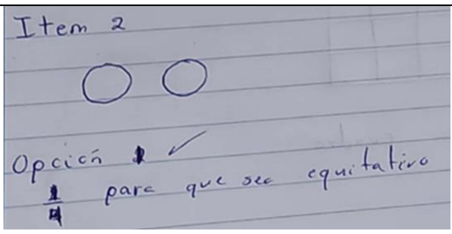


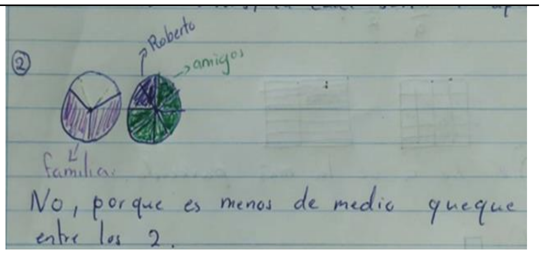
ítem 2

PD

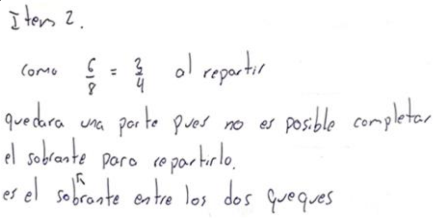
PF

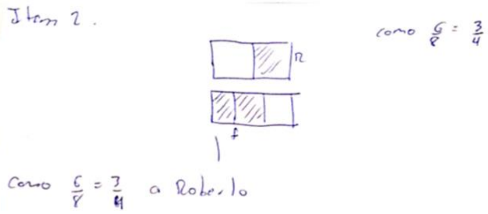
DF.1



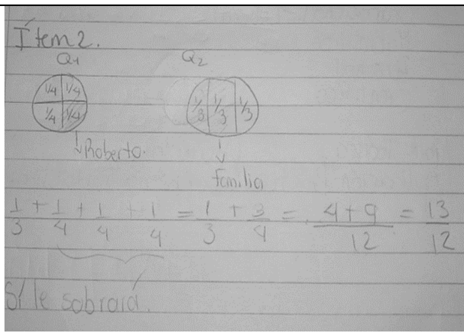


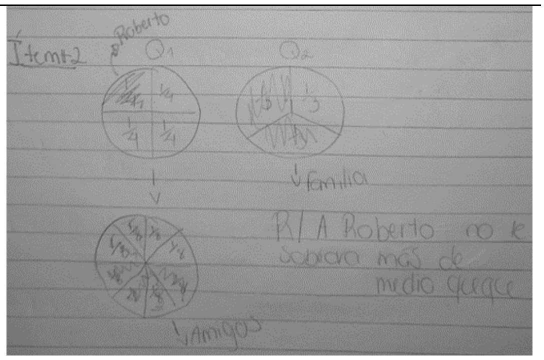
DF.2



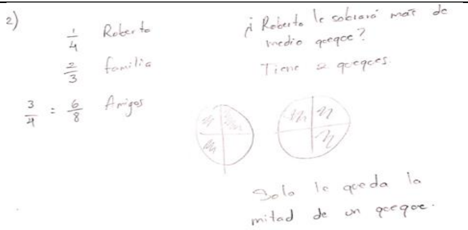


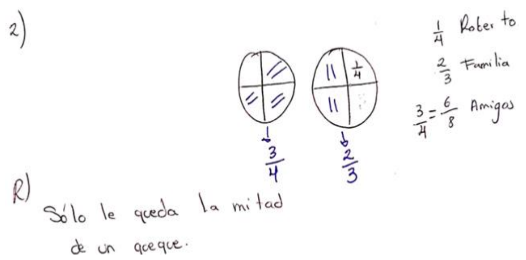
DF.3



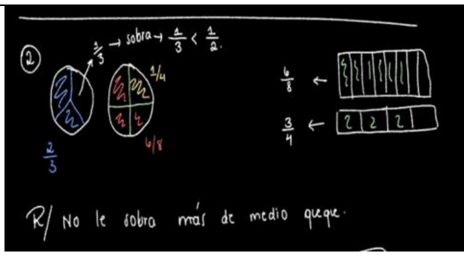


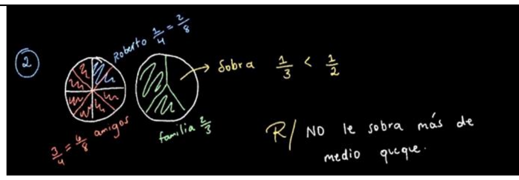
DF.4



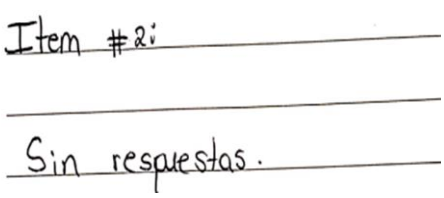


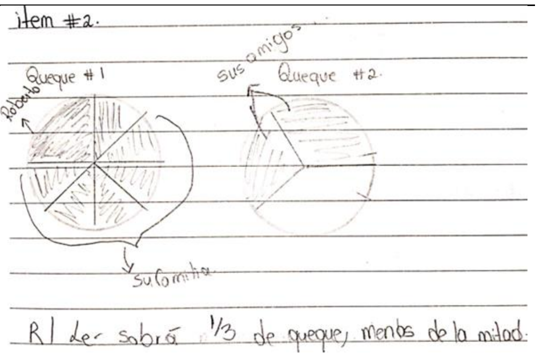
DF.5



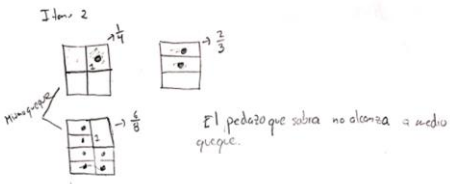


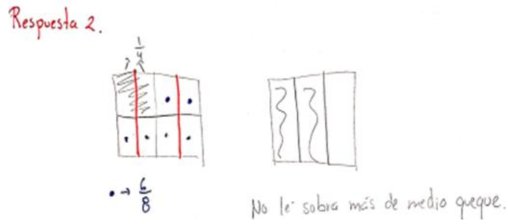
DF.6



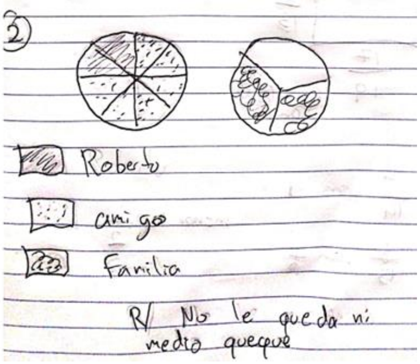


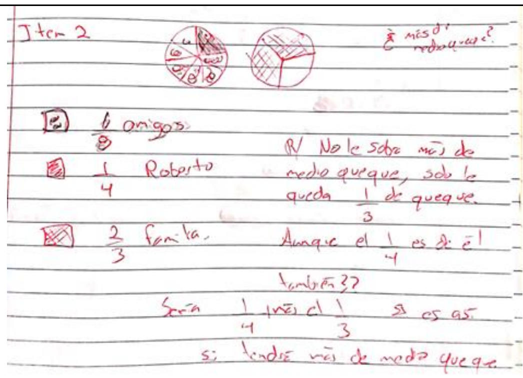
DF.7



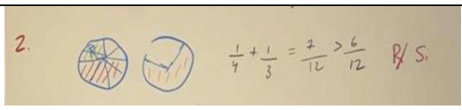


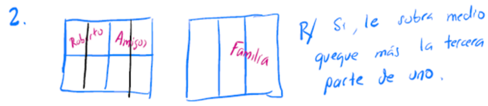
DF.8





DF.9

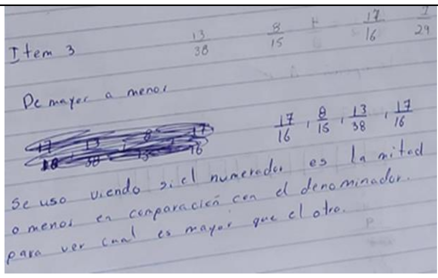


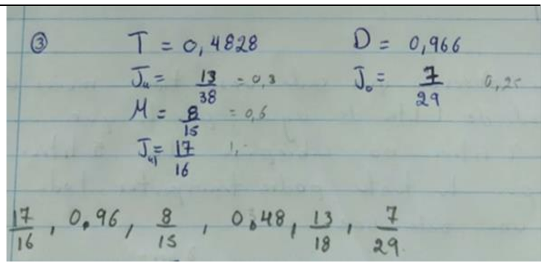


ítem 3

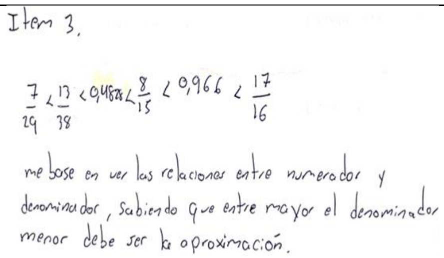
	PD	PF

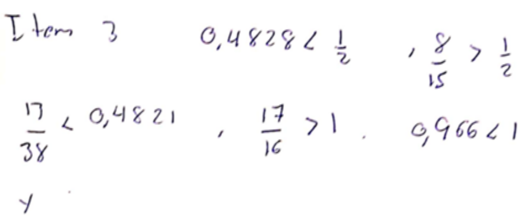
DF.1



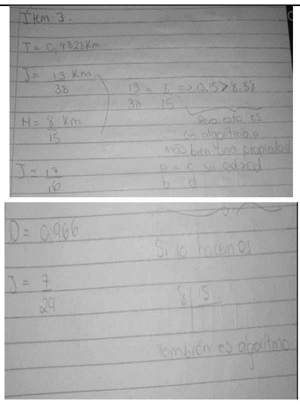


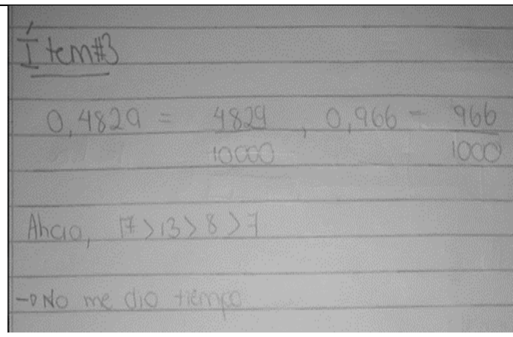
DF.2



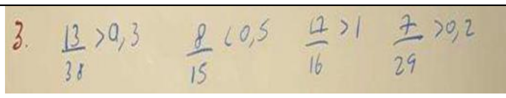
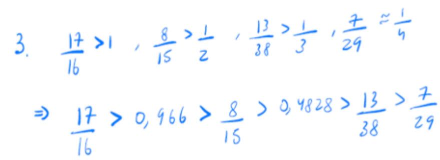


DF.3

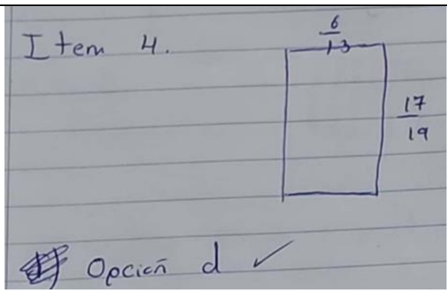
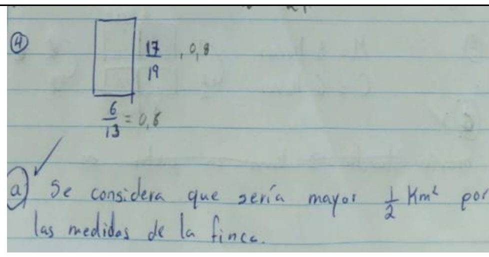
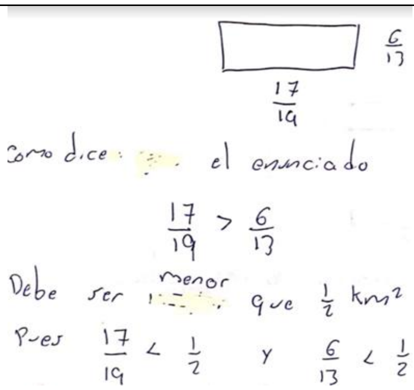
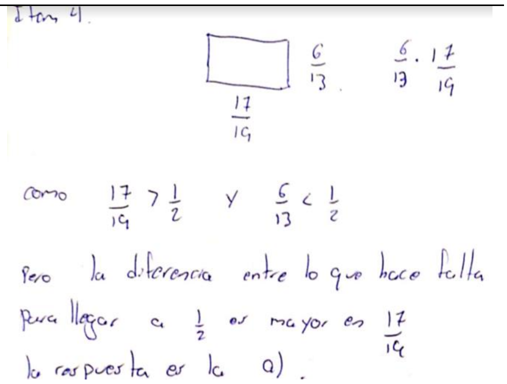
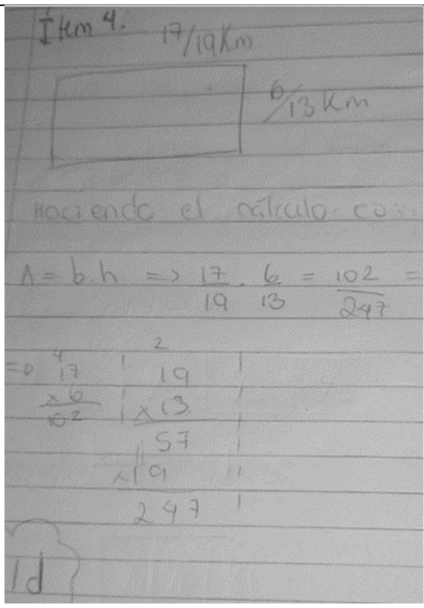
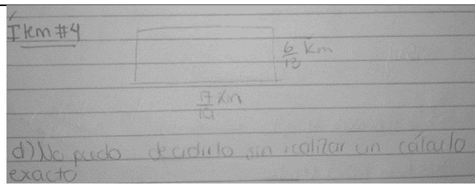




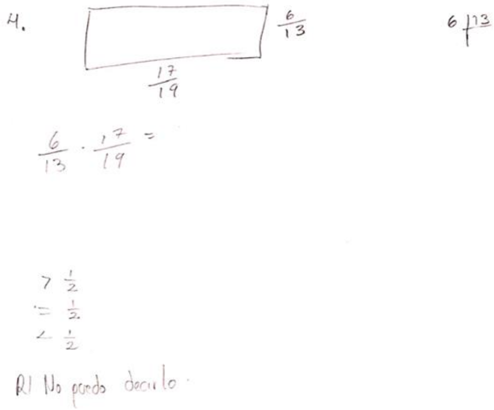
DF.4	3. 0,4828 , $\frac{13}{38}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{17}{16}$, 0,966 , $\frac{7}{29}$	3) Tomás 0,4828 Km Juan $\frac{13}{38}$ km María $\frac{8}{15}$ Km Julia $\frac{17}{16}$ Km David 0,966 Km José $\frac{7}{29}$ Km Mayor a menor.
DF.5	③ 0,4828 $\frac{13}{38} \approx 0,3$ $\frac{8}{15} \approx 0,5$ $\frac{17}{16} \approx 1$ $\frac{7}{29} \approx 0,2$.	③ $\frac{17}{16} > 0,966 > \frac{8}{15} > 0,4828 > \frac{7}{29} > \frac{13}{38}$ +13 = 39 13+13 = 26 < 38 8+8 = 16 > 15 7+7 = 14 < 29 +7 = 28
DF.6	Item #3: 17/16. 0,996 8/15. 13/38 0,4828 7/29.	item #3. 1) $\frac{17}{16}$ 2) 0,966 3) 0,4028 4) $\frac{8}{15}$ 5) $\frac{13}{38}$ 6) $\frac{7}{29}$
DF.7	Item 3. No sé como hacerlo	Respuesta 3. Tomás camina menos de medio Km Juan camina menos de medio Km María más de medio Km Julia más de 1 Km David camina más que Juan pero menos que Julia ⇒ Julia,
DF.8	③ Tomás 0,4828 Km casi $\frac{1}{2}$ Km David 0,966 Km casi 1 Km María más de $\frac{1}{2}$ Km Tomás María David (No pude ver los otros, sin tiempo)	Item 3. Mayor a menor. Tomás casi $\frac{1}{2}$ Km David casi 1 Km María un poco más de $\frac{1}{2}$ Km Julia más de 1 Km José $\frac{7}{29}$ Julia, ~~David~~, ..., Julia, María, David, ..., José, Tomás

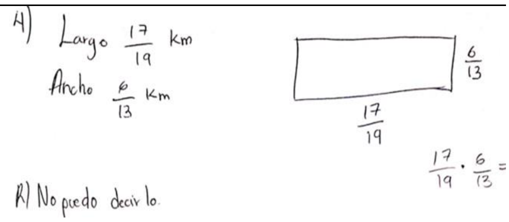
DF.9	 3. $\frac{13}{38} > 0,3$ $\frac{8}{15} < 0,5$ $\frac{17}{16} > 1$ $\frac{7}{29} > 0,2$	 3. $\frac{17}{16} > 1$, $\frac{8}{15} > \frac{1}{2}$, $\frac{13}{38} > \frac{1}{3}$, $\frac{7}{29} \approx \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{17}{16} > 0,966 > \frac{8}{15} > 0,4828 > \frac{13}{38} > \frac{7}{29}$

ítem 4

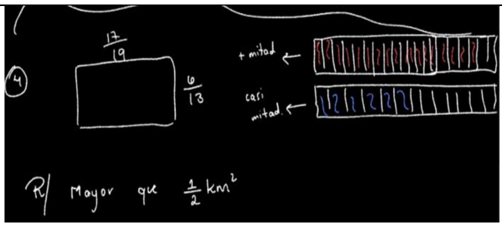
	PD	PF
DF.1	 Item 4. $\frac{6}{13}$ $\frac{17}{19}$ Opción d	 ④ $\frac{17}{19}$, 0,8 $\frac{6}{13} = 0,6$ a) Se considera que sería mayor $\frac{1}{2}$ Km² por las medidas de la finca.
DF.2	 $\frac{6}{13}$ $\frac{17}{19}$ Como dice el enunciado $\frac{17}{19} > \frac{6}{13}$ Debe ser menor que $\frac{1}{2}$ km² Pues $\frac{17}{19} < \frac{1}{2}$ y $\frac{6}{13} < \frac{1}{2}$	 Item 4. $\frac{6}{13}$. $\frac{6}{13} \cdot \frac{17}{19}$ $\frac{17}{19}$ como $\frac{17}{19} > \frac{1}{2}$ y $\frac{6}{13} < \frac{1}{2}$ Pero la diferencia entre lo que hace falta para llegar a $\frac{1}{2}$ es mayor en $\frac{17}{19}$ la respuesta es la a).
DF.3	 Item 4. 17/19 Km 6/13 Km Haciendo el cálculo así: $A = b.h \Rightarrow \frac{17}{19} \cdot \frac{6}{13} = \frac{102}{247}$ 17 x 6 = 102 ; 19 x 13 = 57, 19 = 247 d	 Item #4 $\frac{6}{13}$ Km $\frac{17}{19}$ Km d) No puedo decidirlo sin realizar un cálculo exacto

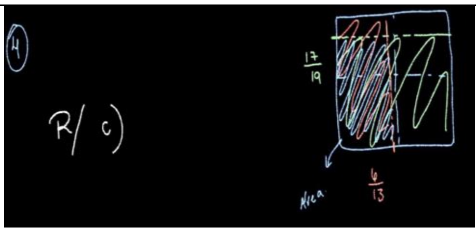
DF.4



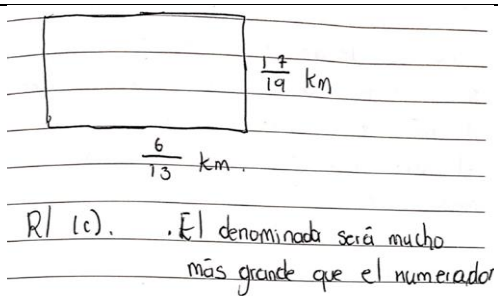


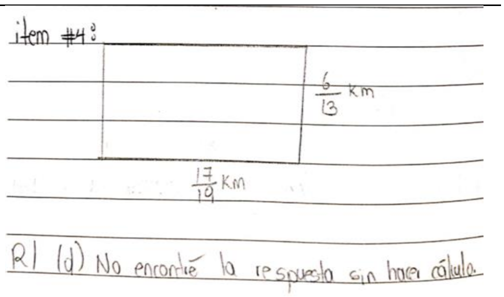
DF.5



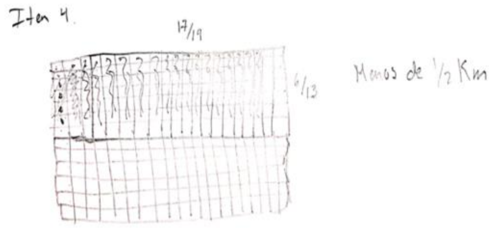


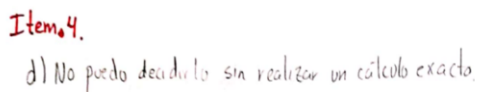
DF.6



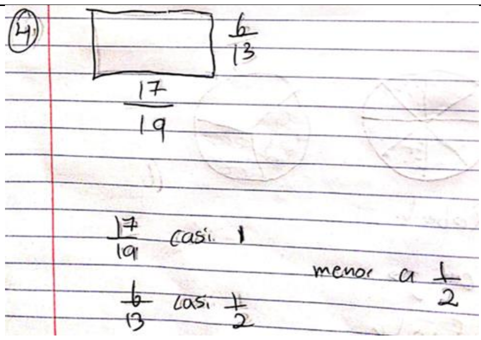


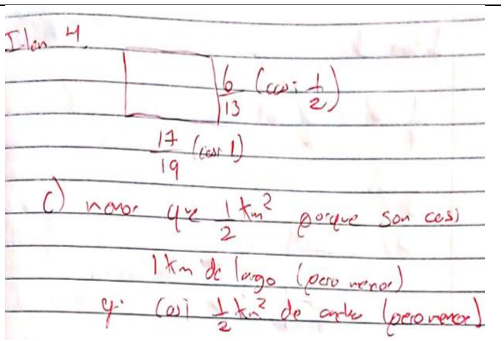
DF.7



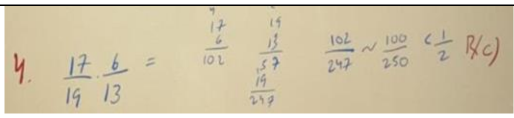


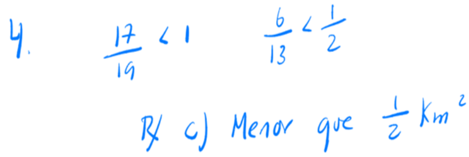
DF.8





DF.9

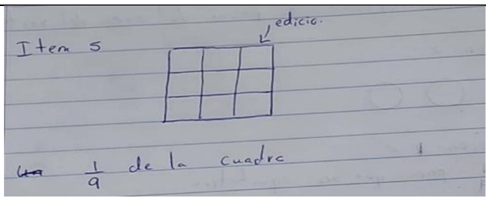


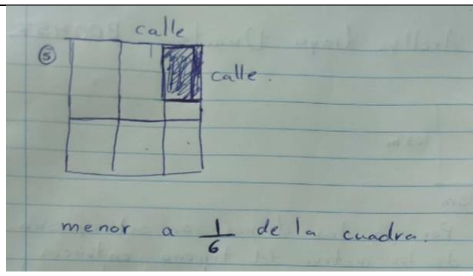


ítem 5

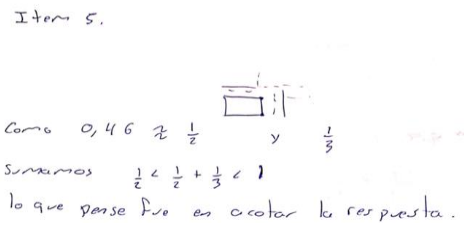
	PD	PF

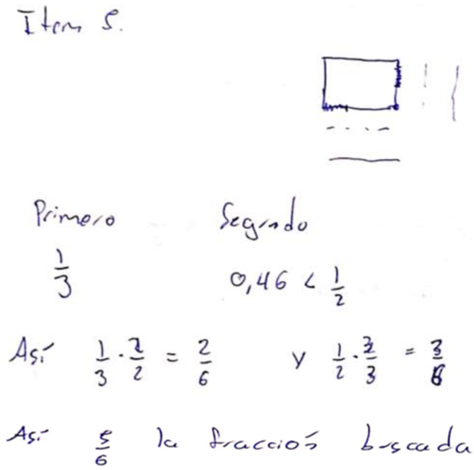
DF.1



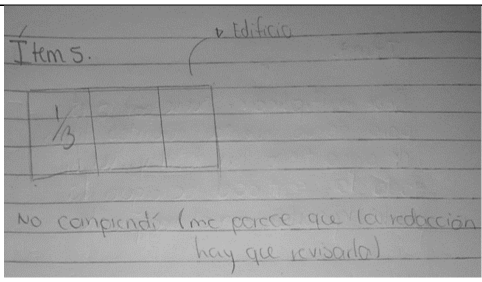


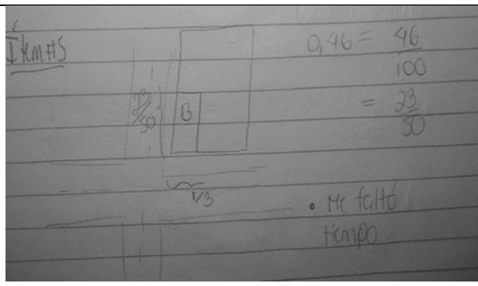
DF.2



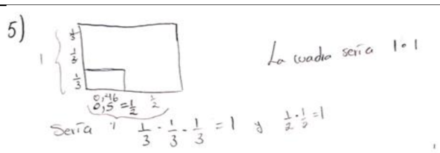


DF.3

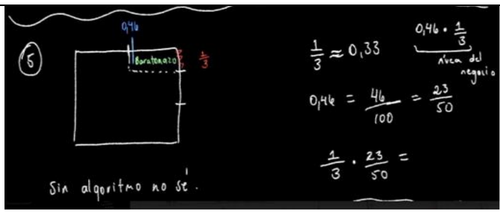


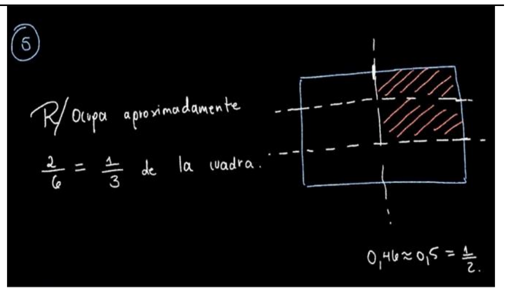


DF.4

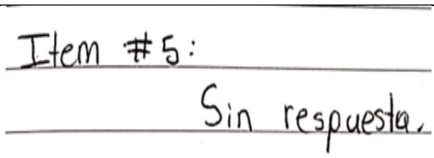


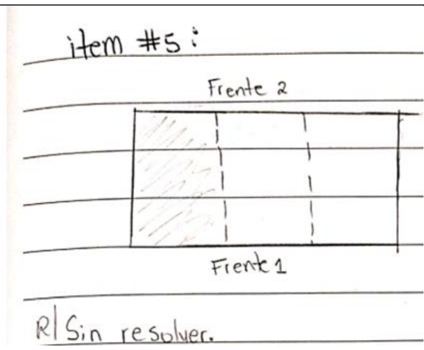
DF.5



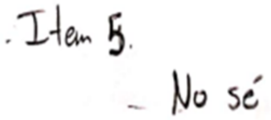


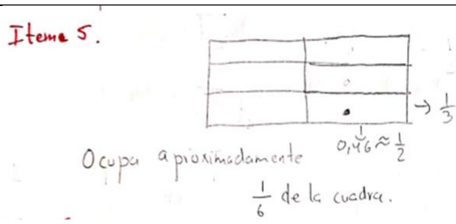
DF.6



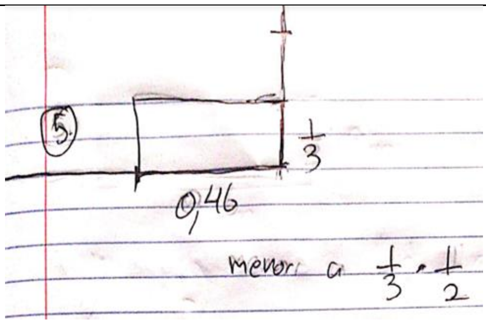


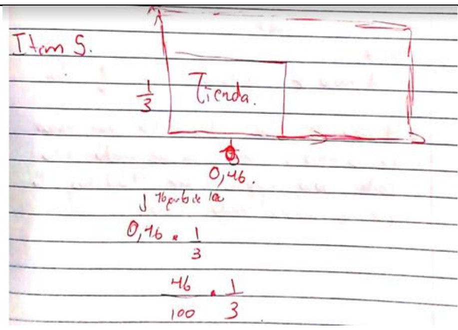
DF.7



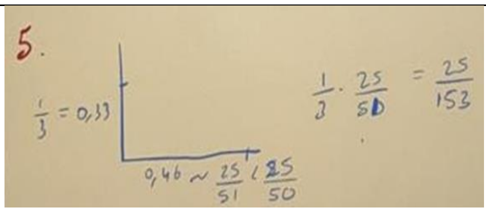


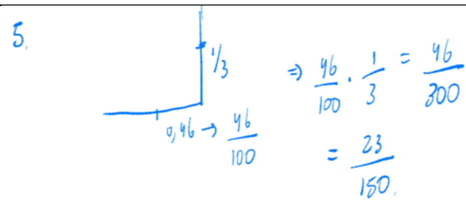
DF.8



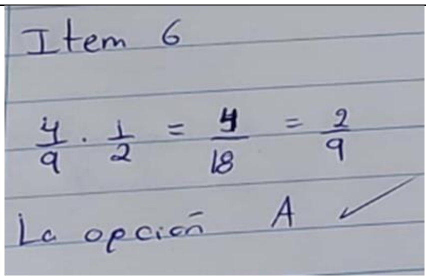
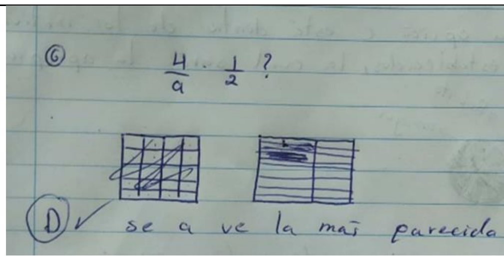
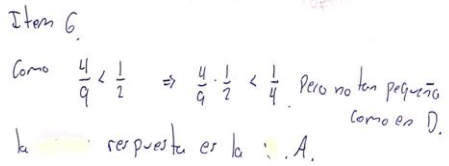
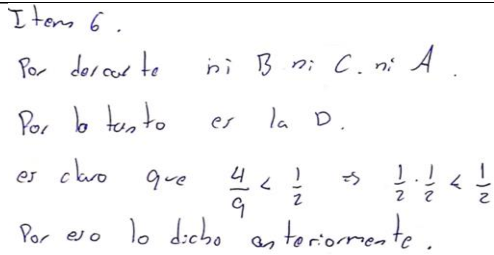
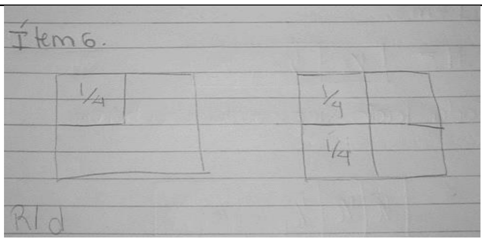
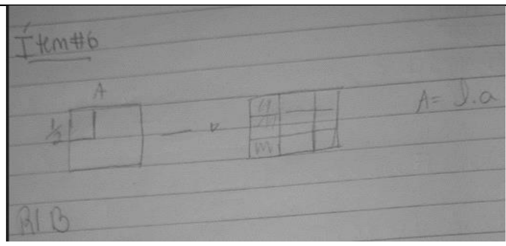
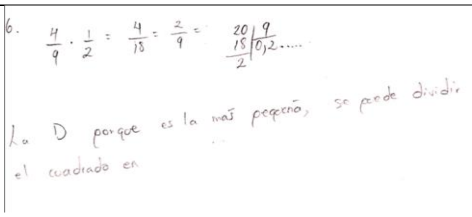
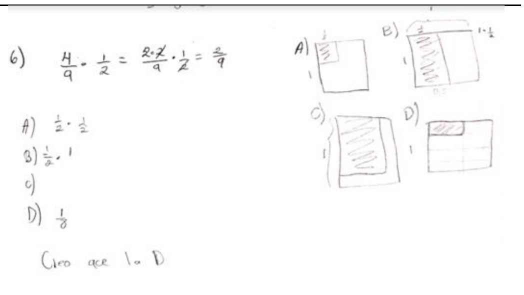
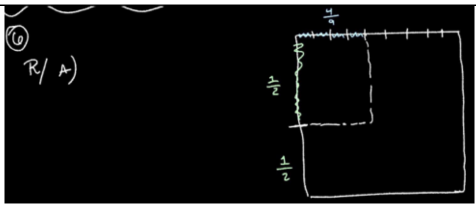
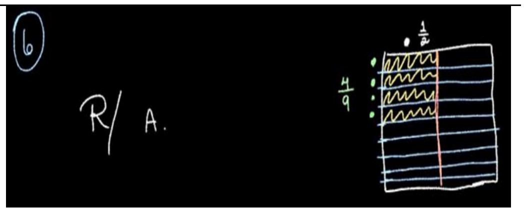
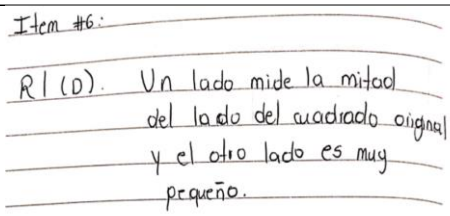
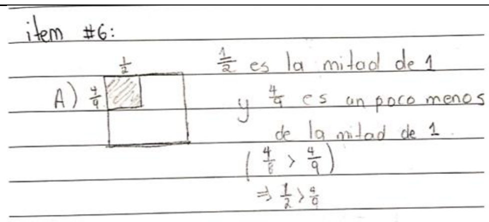


DF.9

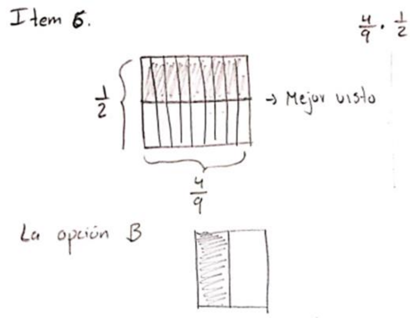


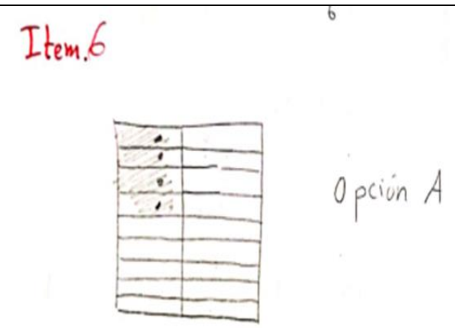


ítem 6

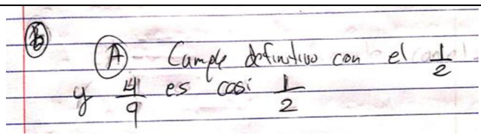
<table>
<tr><th></th><th>PD</th><th>PF</th></tr>
<tr><td>DF.1</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DF.2</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DF.3</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DF.4</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DF.5</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DF.6</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

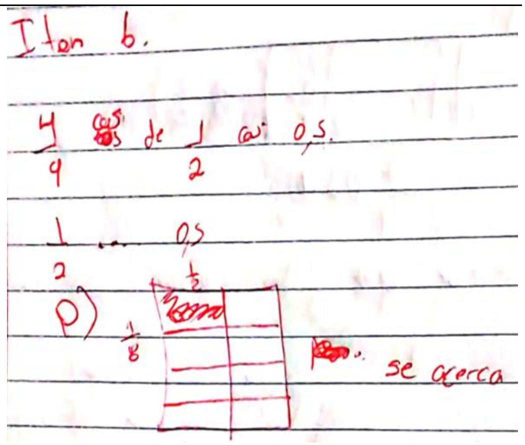
DF.7



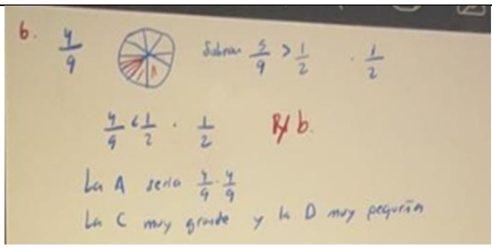


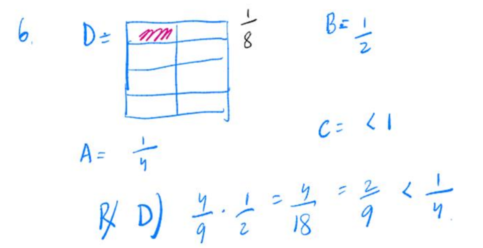
DF.8



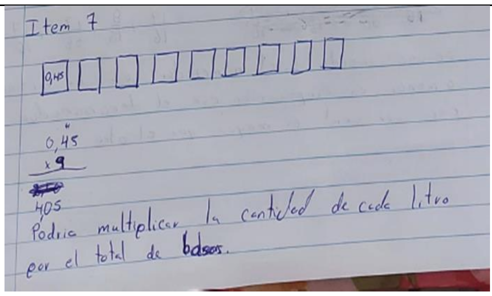
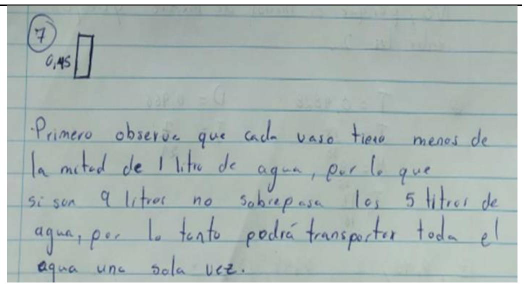


DF.9





ítem 7

	PD	PF
DF.1		

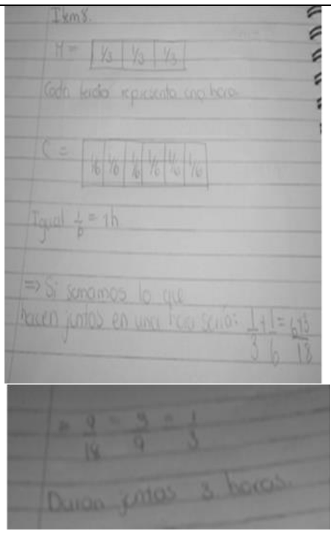
DF.2	Item 7, Como $0{,}45 < \frac{1}{2}$ cada x corresponde a un valor menor que $\frac{1}{2}$ | x | x | x | x | x | | x | x | x | x | | vemos que apesar que el valor de $x < \frac{1}{2}$ nos esta sobrando un campo para otra x, Por lo tanto podemos concluir que Raquel solo necesitara llevar solo una vez el recipiente.	Item 7. O O O O O O O O O Si cada vaso tiene una capasidad de 0,45 litros y ~~[illegible]~~ tiene un recipiente de 5 litros como $9 \cdot 0{,}45 < \frac{9}{2}$
DF.3	Ítem 7. Debe multiplicar nueve por 0.45. para darse cuenta cuántos litros de agua tiene en total y ver si toda la cantidad de agua la puede depositar en el recipiente	Item #7 0,45 l $\Rightarrow$ Tenemos $9.0{,}45 = 9.\frac{45}{100}$ Aquí hago uso de Algoritmo $\Rightarrow$ NO Esto para ver la cantidad total de Agua
DF.4	7. $0{,}45 \times 9 = 4{,}05$ 5 litros Supongo que sumó o multiplicó la cantidad de litros de cada vaso o bien hecho los nueve Vasos en un recipiente de 5 litros y no le faltó espacio.	7) 0,45 l. por vaso 5 litros
DF.5	7 $\frac{1}{2} \cdot 9 = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{9 \text{ veces}} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ $9 \div 2 = 4{,}5$ (-8, 10, 10, 0) $0{,}45 < 0{,}5 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow 0{,}45 \cdot 9 < \frac{1}{2} \cdot 9$ < 5 $\Rightarrow 0{,}45 \cdot 9 < 5$ Toda el agua cabe en el recipiente de 5 l.	7 capacidad 1L $\frac{1}{2}$ 1 1 1 1 $\frac{1}{2}$ $4 + \frac{1}{2} = 4 + 0{,}5 = 4{,}5 < 5$ Puede transportar el agua contenida en 9 vasos que con $\frac{1}{2}$ L de agua cada uno. en un solo viaje $\Rightarrow$ Puede transportar el agua que requiere. en un solo viaje.
DF.6	Item #7: Cada vaso contiene menos de medio litro, por lo que transportar ocho vasos sería menos de 4 litros y aún dispone de más de un litro para transportar el vaso restante que es menos de medio litro.	item #7: Si cada vaso contiene menos de medio litro (0.45 l) entonces en 9 vasos habría menos de 4 l y medio, Por lo tanto si puede transportar todo el agua en el recipiente de 5 l.

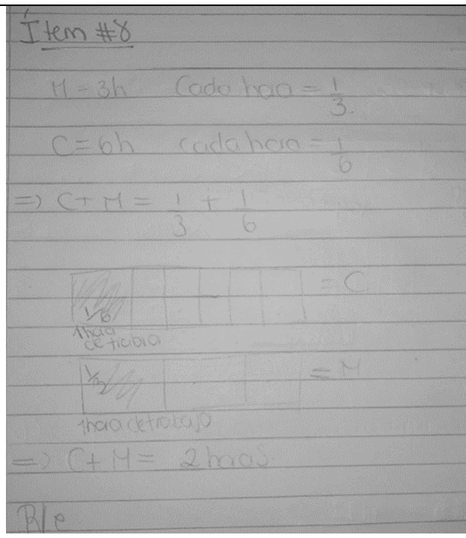
DF.7	Ítem 7. 0,45 0,45 Dos vasos 0,90 litros Dos vasos 0,90 litros Dos vasos 0,90 litro. Dos vasos 0,90 litros Casi 4 litros entonces más un vaso de 0,45 litros si alcanzo la botella de 5 litros.	Ítem 7. 0,45 0,45 0,45 0,45 0,45 0,45 0,45 0,45 0,45 menos de 1 ℓ -de 1 ℓ -de 1 ℓ -de 1 ℓ -de $\frac{1}{2}$ ℓ menos de 2 ℓ menos de 2 ℓ menos de $\frac{1}{2}$ ℓ menos de 4 ℓ menos de $\frac{1}{2}$ ℓ menos de 5 ℓ
DF.8	7 9 de 0,45 litros Recipiente 5 litros Si fueran los vasos que son casi de medio litro, sería menos de 5 litros en total, por lo que con solo 9 de menos de medio litro lo lograrí.	Ítem 7 9 vasos de 0,45 ℓ casi $\frac{1}{2}$ litro. 9 vasos de casi medio litro son menos que 5 litros. Si fueran de medio litro cada vaso, apenas hace 4,5 litros lo que le sobra medio litro.
DF.9	7. Debe dividir los 5 litros por 9 (vasos) $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$ Entonces a cada vaso le echa menos de la mitad	7. Cada vaso tiene capacidad menor a $\frac{1}{2}$ litro y si multiplicamos $9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$ es menor a 5 litros

ítem 8

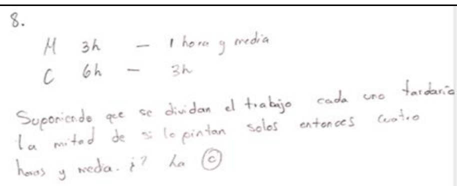
	PD	PF
DF.1	Ítem 8 María 3 horas Carlos 6 horas c) 2 horas en 2 horas María a pintado $\frac{2}{3}$ de la habitación y carlos en 2 horas a pintado $\frac{1}{3}$ de la habitación	8 M = 3 horas C = 6 horas 1 $\frac{1}{2}$ 3 horas 6 horas c ✓ maría ~~tarda 3 horas en pintar~~ en
DF.2	Ítem 8. Creo que son 2 horas, me base en realizar comparaciones entre ambos números 3 y 6.	Ítem 8. M C 3 6. la respuesta es la g. Pues en $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{2}$

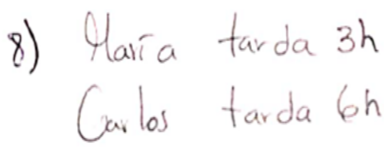
DF.3



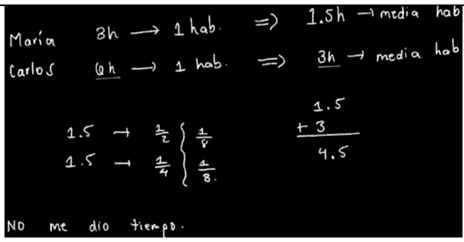


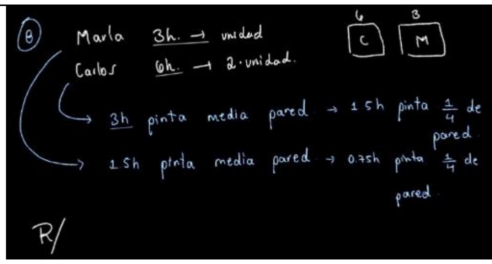
DF.4



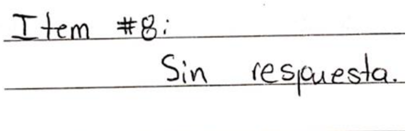


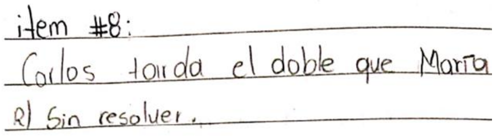
DF.5



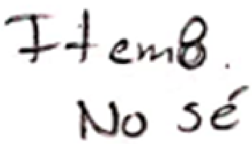


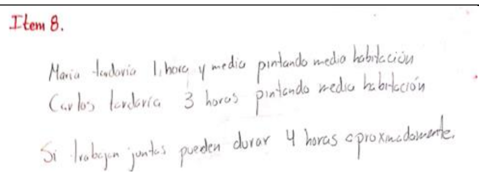
DF.6



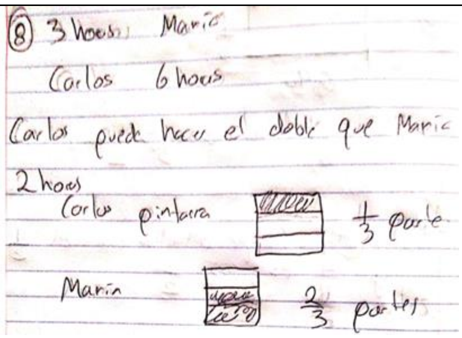


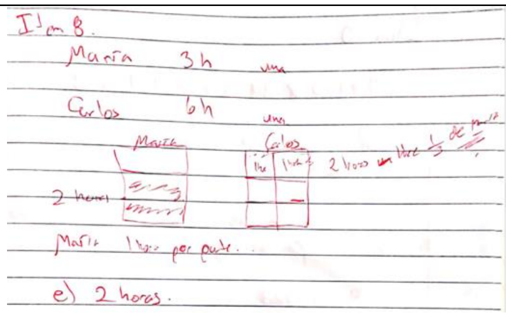
DF.7



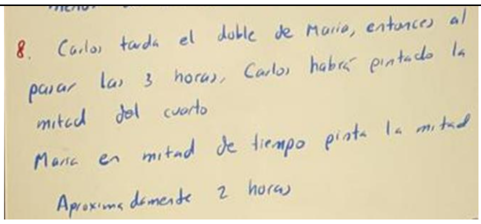


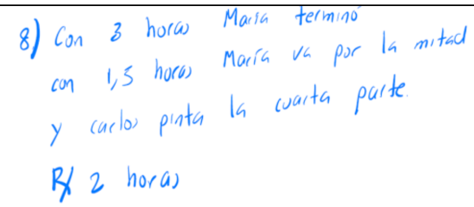
DF.8





DF.9

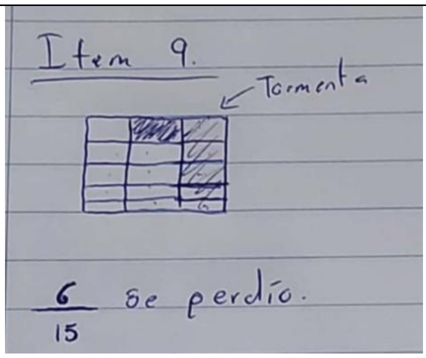


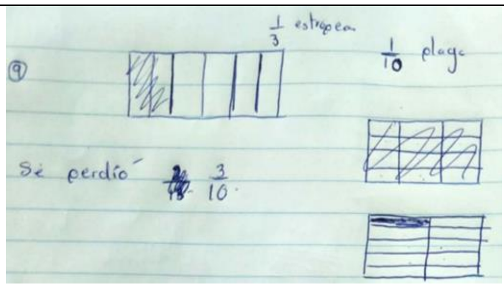


ítem 9

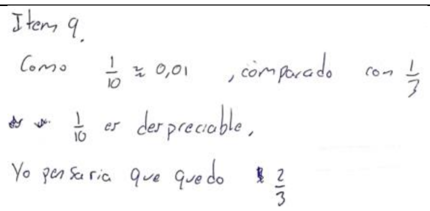
	PD	PF

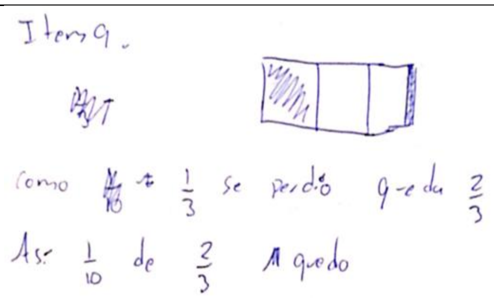
DF.1



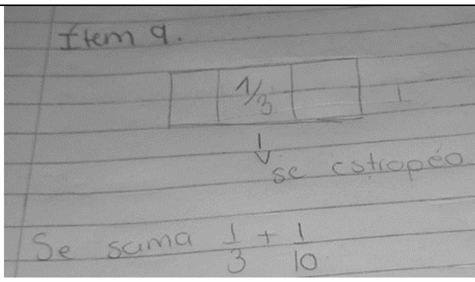


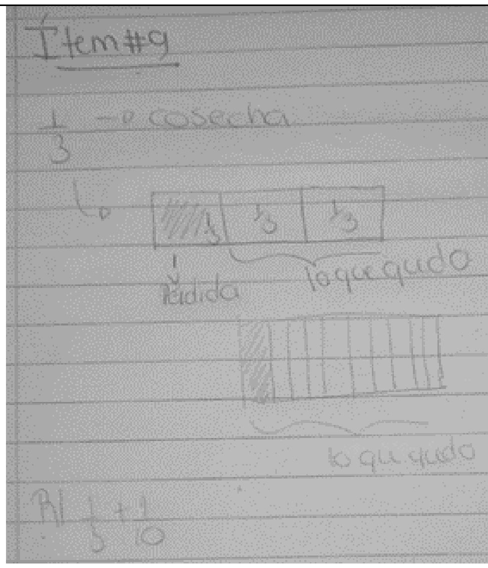
DF.2



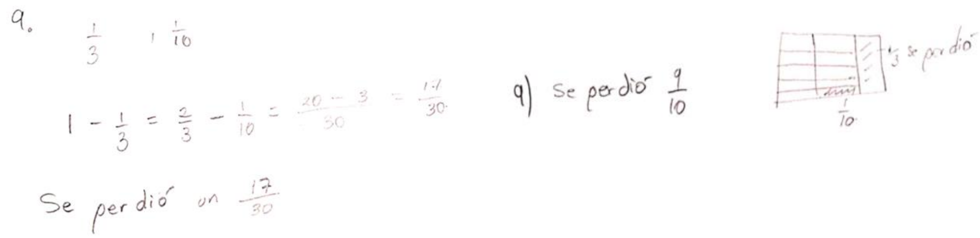


DF.3

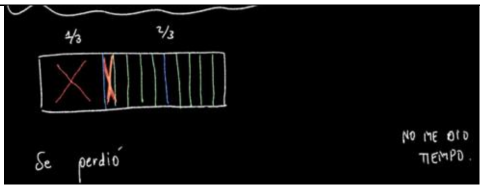


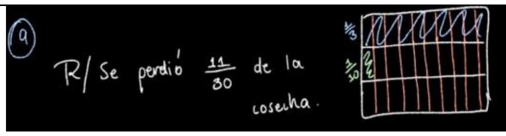


DF.4

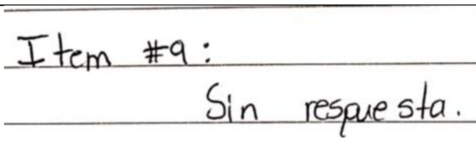


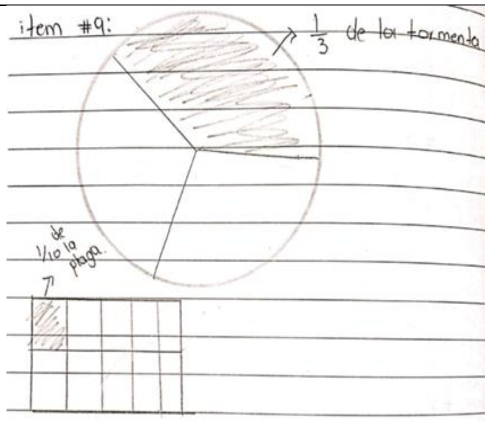
DF.5



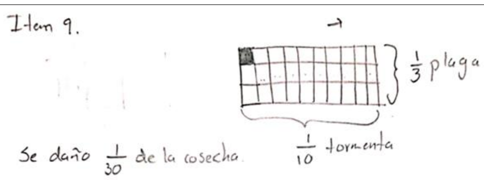


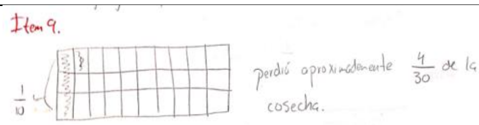
DF.6

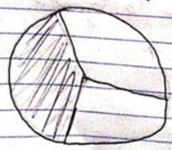
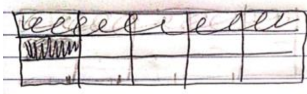
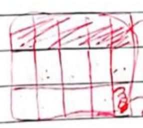




DF.7



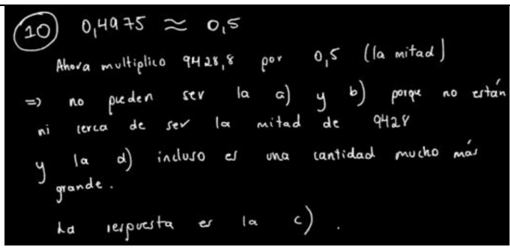


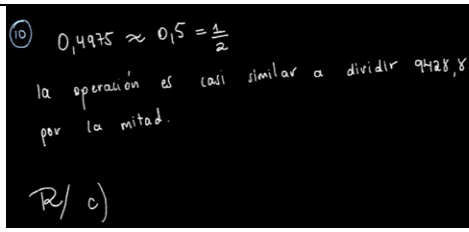
DF.8	9 $\frac{1}{3}$ tormenta $\frac{1}{10}$ de b que quedó por plaga  quedan $\frac{2}{3}$  Se perdió $\frac{6}{15}$	Item 9.  → por tormenta → por plaga $\frac{6}{15}$ de la cosecha en general
DF.9	9. $\frac{1}{3} \cdot \frac{10}{10} = \frac{10}{30}$ $\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{30}$ Se perdió $\frac{3}{30}$	9) $\frac{1}{3} \cdot \frac{10}{10} = \frac{10}{30}$ $\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{30}$ Se perdió $\frac{13}{30}$

ítem 10

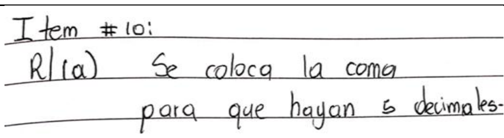
	PD	PF
DF.1	Item 10 Se suman la cantidad de numeros a la derecha ~~de todo~~ de la coma de cada factor entonces: el primero tiene 4 y el segundo 1 En total son 5 numeros a la derecha para poder colocar la coma. La opción a. ✓	10 a) 46, 90828 se suman la cantidad de números que están a la derecha de la coma
DF.2	Item 10. Como 0,4975 < $\frac{1}{2}$ al efectuar la operación × con 9428,8 el resultado debería ser cercano a la mitad de 9428,8. Por lo tanto el resultado es la c) 4 690,828.	Item 10 0,4975 × 9428,8 = 4690828 Como 0,4975 < $\frac{1}{2}$ el resultado debe ser menor que la mitad de 9428,8 Así tenemos que la respuesta es la C.
DF.3	Item 10 0,4975 × 9428,8 = 4690828 R/c	Item#10 0,4975 = $\frac{4972}{10000}$ 9428,8 e) No puedo elegir respuesta sin hacer el cálculo exacto
DF.4	10. 0,4975 × 9428,8 = 4690828 La C, por cada mil se pone la coma. 4.690,828	10) No me acordé como era.

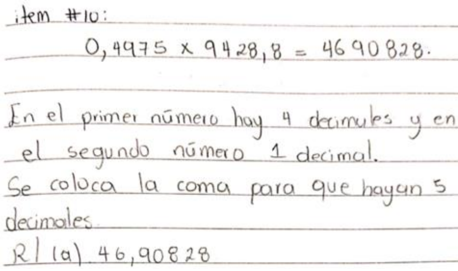
DF.5



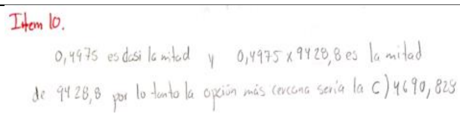


DF.6

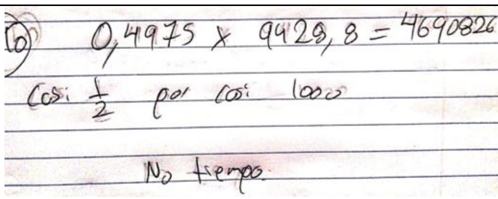


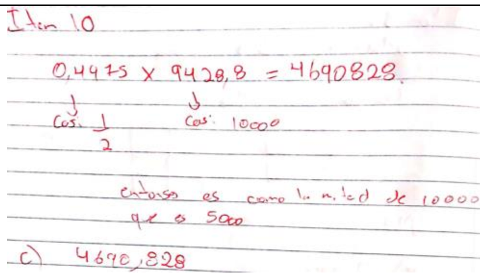


DF.7



DF.8





DF.9