CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

"Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales en un Curso Masivo en Línea"

Tesis
Que presenta

WILLIAM ENRIQUE POVEDA FERNÁNDEZ

Para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA

Director de la tesis**: Dr. Luz Manuel Santos Trigo**

Ciudad de México Enero 2019

Agradecimientos

A la Universidad de Costa Rica por su apoyo.

Contenido

Resumen .... **iii**

Abstract .... **iv**

Capítulo I **1**

1.1 Introducción 2

1.2 Antecedentes 2

1.3 Planteamiento del problema de investigación 8

1.4 Preguntas de investigación 10

Capítulo II **13**

2.1 Resolución de problemas y uso de herramientas digitales 14

2.2 Episodios de la resolución de problemas 16

2.3 Cursos masivos en línea y la plataforma digital Open edX 17

2.4 Modelo de diseño RASE 19

2.4.1 Los Recursos 20

2.4.2. Las Actividades 21

2.4.3 El Soporte 24

2.4.4 La Evaluación 26

Capítulo III **29**

3.1 Naturaleza del estudio 30

3.2 El estudio piloto 30

3.3 MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales 31

3.3.1 Diseño de las actividades 32

3.3.2 Información general del curso 40

3.3.3 Los participantes y la implementación del MOOC 41

3.4 Recolección y análisis de datos 45

3.5 Criterios para validar los resultados de la investigación 46

Capítulo IV **49**

4.1 Desempeño de los participantes en el primer grupo de actividades 50

4.1.1 Actividad 1 51

4.1.2 Actividad 2 64

4.1.3 Discusión de primera parte del MOOC y respuesta a la primera pregunta de investigación 74

4.2 Desempeño de los participantes en el segundo grupo de actividades 78

4.2.1 Actividad 3 78

4.2.2 Actividad 4 88

4.2.3 Actividad 5 92

4.2.4 Discusión de la segunda parte del MOOC y respuesta a la segunda pregunta de investigación 101

Capítulo V **109**

Referencias bibliográficas **117**

Anexo 1 ..... **125**

Anexo 2 ..... **141**

Anexo 3 ..... **149**

Anexo 4 ..... **153**

Anexo 5 ..... **165**

Resumen

El objetivo del estudio fue diseñar e implementar un curso en línea, masivo, y abierto (MOOC, por sus siglas en inglés) basado en resolución de problemas matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. El curso se estructuró en torno a tres actividades principales que incluían brindar a todos los participantes la oportunidad de (i) mover objetos matemáticos dentro de representaciones dinámicas de conceptos y problemas matemáticos; (ii) observar y analizar los atributos de los objetos matemáticos para formular conjeturas; y (iii) buscar argumentos empíricos y matemáticos para validar esas conjeturas y relaciones.

Las preguntas de investigación que guiaron el desarrollo del estudio fueron: ¿Cómo diseñar un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario de aprendizaje MOOC, que ofrezca a los participantes diversas oportunidades para involucrarse en actividades del quehacer matemático? ¿Cómo implementar el uso de un conjunto de herramientas digitales coordinadas en un enfoque de resolución de problemas que promueva la construcción del conocimiento matemático de los participantes del MOOC?

El curso se diseñó en torno a los principios de resolución de problemas que incluyen el desarrollo y la práctica de un enfoque inquisitivo en el que los participantes examinaron constantemente las propiedades y atributos de los objetos, formularon conjeturas, compartieron sus ideas, buscaron diferentes formas de apoyar las relaciones y comunicaron sus resultados. Durante el desarrollo de las actividades, los participantes plantearon preguntas, comentarios y soluciones que fueron organizados por el equipo del curso de tal manera que cada integrante del MOOC pudiera participar en la discusión de temas que eran importantes y consistentes con los objetivos del curso.

Los resultados indicaron que los foros de discusión brindaron diversas oportunidades para que los participantes aclararan sus ideas, compartieran sus razonamientos matemáticos y participaran en un enfoque de resolución de problemas en colaboración con otros durante su trabajo en las actividades del curso.

Abstract

The study aims to design and implement a massive, open, online course (MOOC) on mathematical problem solving and the use of digital technology. The course was structured around three main activities that involved providing all participants an opportunity (i) to move mathematical objects within dynamic representations of mathematical concepts and problems; (ii) to observe and analyze mathematical objects attributes in order to formulate conjectures; and (iii) to look for empirical and mathematical arguments to validate those conjectures and relationships.

The research questions that guided the development of the study included: How and what is important in the design of a MOOC that aims to provide the participants diverse opportunities to engage in activities to foster their mathematical thinking? How to implement the participants' use of a set of coordinated digital tool in a problem-solving approach to construct mathematical knowledge?

The course was designed around problem solving principles that include the development and practice of an inquisitive approach in which the participants constantly examined objects' properties and attributes behaviors, formulated conjectures, shared their ideas, looked for different ways to support relations and to communicate their results. During the implementation, the participants posed questions, comments and solutions that were organized by the course team in such a way that each participant could engage in discussing issues that were important and consistent with the course goals.

Results indicated, that the discussion forums provided diverse opportunities for the participants to clarify their ideas, to share their approaches and to engage in a collaboration problem solving approach to work on the course activities.

Capítulo I

El problema de investigación

1.1 Introducción

En las últimas décadas, los avances tecnológicos han cambiado la forma en que los individuos se comunican e interactúan. Un estudiante, con el uso de las tecnologías digitales puede acceder a información sobre contenidos disciplinarios a través de diversas plataformas, compartir y discutir ideas o dudas en cualquier momento y desde cualquier sitio. Gross (2016) argumenta que la conectividad está alterando los espacios y tiempos en los que se produce el aprendizaje.

Las tecnologías digitales abren nuevas rutas en el proceso de aprendizaje, no solo para obtener información sino también para que los estudiantes compartan ideas, discutan y critiquen las opiniones de otros (Santos-Trigo, 2016; Santos-Trigo, Moreno-Armella, & Camacho-Machín, 2016). Por ejemplo, Santos-Trigo (2016b) menciona:

> Un aspecto esencial en la formación del individuo se relaciona con la idea de desarrollar estrategias y caminos para enfrentar dificultades o impases que normalmente se presentan en la tarea de aprender conceptos o resolver problemas. Con el uso de tecnología digital los jóvenes pueden compartir entre ellos sus experiencias relacionadas con la comprensión de contenidos disciplinarios y en particular trabajar en forma conjunta en la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2016, parr 4).

Los constantes cambios de la sociedad demandan a los individuos, en general y sin importar la actividad que realicen, conocer las transformaciones que se producen en su práctica profesional (Huang, Chen, Yang, & Loewen, 2013); y también, en el desarrollo de sus actividades cotidianas. En este sentido, surge la necesidad de un aprendizaje continuo que permita a los individuos ampliar sus conocimientos relacionados con su campo profesional o sus intereses personales (Kirby, Knapper, Lamon, & Egnatoff, 2010; Knapper & Cropley, 2000). Esta necesidad ha originado que algunas instituciones educativas desarrollen o amplíen las opciones de aprendizaje, principalmente, en escenarios de aprendizaje en línea. ¿Cuáles son los retos que las instituciones educativas deben afrontar para promover el aprendizaje de las matemáticas en línea? ¿Cómo identificar nuevas rutas en el diseño de escenarios de aprendizaje en línea?

1.2 Antecedentes

Las tecnologías digitales influyen cada vez más en el desarrollo de las actividades diarias de los individuos; diversas herramientas de comunicación son frecuentemente utilizadas en la búsqueda de información.

Un estudiante, después de su clase formal, puede consultar a través del uso de un celular, tableta o computadora, una serie de desarrollos disponibles en línea (blogs, YouTube, enciclopedia, etc.) para obtener información e interactuar dentro de una comunidad virtual (Santos-Trigo, 2016a).

Diversos sitios en Internet ofrecen contenidos y brindan la posibilidad de interacción entre sus usuarios; sin embargo, pocos de ellos ofrecen una información confiable. El individuo debe desarrollar estrategias y habilidades para distinguir las fuentes de información confiables, para consultar contenidos que le permitan analizar una situación específica en el desarrollo de sus actividades cotidianas (Jones & Inglis, 2015).

La disponibilidad de diversas tecnologías digitales abre nuevas interrogantes sobre el sistema educativo, principalmente, en la manera de incorporarlas en los ambientes de aprendizaje (Conole, 2013).

> El amplio desarrollo y disponibilidad de diversas tecnologías digitales plantean retos importantes a los sistemas de educación relacionados con los contenidos, estrategias y habilidades que los estudiantes deben aprender, y sobre qué tipos de escenarios de enseñanza se deben considerar en el aprendizaje (Santos-Trigo, 2016b, p. 334).

Algunas organizaciones han explorado estas alternativas, como es el caso de KhanAcademy[1] quien a través de su plataforma proporciona una serie de videos que explican conceptos en diversas disciplinas, incluida matemáticas. Así, un alumno puede estudiar a su propio ritmo dentro y fuera de su clase, consultando los videos las veces que considere necesarias. La misión de KhanAcademy es proporcionar un ambiente de aprendizaje disponible en cualquier momento y lugar. Esto está estrechamente relacionado con el énfasis que sugiere la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, por sus siglas en inglés) en garantizar una educación de calidad, equitativa y que promueva oportunidades de aprendizaje permanente para todos (UNESCO, 2015).

> Las tecnologías digitales son omnipresentes y las personas las utilizan en actividades sociales, profesionales y educativas. Las tecnologías de acción específica y de uso múltiple como Internet, tabletas, teléfonos inteligentes, aplicaciones, Dynamic Geometry Systems (DGS) (GeoGebra) y plataformas de aprendizaje en línea (KhanAcademy, WolframAlpha, Wikipedia)

[1] Para más información https://www.khanacademy.org/about

> están transformando las formas en que las personas se comunican, interactúan y llevan a cabo actividades personales y colectivas (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2018, p.1).

Los ambientes de aprendizaje en línea ofrecen la oportunidad a cualquier individuo, sin importar el lugar y la hora en que se encuentre, de consultar y estudiar temas específicos e interactuar con otros participantes durante el proceso de aprendizaje (Baldi, 2014). El desarrollo de escenarios de aprendizaje en línea es favorecido por la conectividad de las tecnologías digitales, es decir, por el fácil acceso a la información o medios de comunicación a través de Internet.

En un esfuerzo por crear nuevos ambientes de aprendizaje, utilizando el potencial de las tecnologías digitales, recientemente diversas universidades han puesto a disposición del público general, cursos a través de diversas plataformas en línea. El propósito es incrementar el acceso a la educación y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos, de forma gratuita y sin importar el lugar geográfico en que se encuentre el participante.

El Instituto Tecnológico de Massachusetts y la Universidad de Harvard crearon la plataforma digital edX para ofrecer sus cursos en línea a cualquier individuo interesado. EdX permite diseñar cursos abiertos a un público amplio que ofrecen: 1) materiales tales como videos, archivos de varios tipos, etc., 2) cuestionarios que comprenden preguntas de opción múltiple o alguna variante como completar con una palabra o expresión matemática y, 3) foros de discusión, entre otros.

Las universidades creadoras de edX compartieron su código dando originen a una nueva plataforma llamada Open edX. El objetivo es que cualquier institución educativa interesada pueda utilizar Open edX y así, incrementen y promuevan oportunidades de aprendizaje, a nivel mundial, en beneficio de los estudiantes[2]. En el caso de México, la Secretaría de Educación Pública, proporciona a las instituciones educativas la plataforma digital MéxicoX (www.mexicox.gob.mx), basada en Open edX. La finalidad es ofrecer distintas oportunidades de aprendizaje permanente a cualquier persona.

Estas plataformas digitales permiten crear Cursos Masivos Abiertos en Línea (*Massive Open Online Course*, MOOC por sus siglas en inglés). Un MOOC es diseñado por una institución

[2] Para mayor información https://open.edx.org/about-open-edx

educativa a través de uno o varios expertos en el tema y puede ser cursado por cualquier individuo como un medio para su propio desarrollo personal (Epelboin, 2017).

El carácter abierto y masivo de un MOOC abre la posibilidad de que la comunidad de participantes sea numerosa (generalmente participan miles de personas) y heterogénea: diferentes niveles de estudios, edad, conocimiento de la tecnología y dominio o conocimiento previo de la materia. En el desarrollo de las actividades de un MOOC no existe un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada participante. Cada integrante está a cargo de su aprovechamiento, desarrollo y participación en las actividades. Dependiendo de las posibilidades de tiempo e intereses puede ser que se involucre de una manera más profunda en una, varias o todas las Actividades.

Zhang et al. (2016) y Sergis, Sampson, y Pelliccione (2016) afirman que los MOOCs generan oportunidades para investigar sobre el proceso de aprendizaje de los participantes y ofrecen nuevas posibilidades para la construcción del conocimiento a través de un ambiente de participación y colaboración. Según Sinclair y Kalvala (2015) la eficacia de un MOOC depende del tipo de actividades o tareas propuestas a sus participantes; sugieren que estas deben generar y promover un ambiente de discusión para el intercambio de ideas de manera que atraigan la atención de los participantes, les planteen retos y fomenten su curiosidad.

¿Cómo diseñar actividades en línea para promover el pensamiento matemático de los participantes en un ambiente de colaboración que incorpore tecnologías digitales? Churchill, King, y Fox (2013; 2016) proponen un marco para el diseño de ambientes de aprendizaje en línea llamado RASE (Resources-Activities-Support-Evaluation)[3], basado en la premisa de que un ambiente de aprendizaje debe incluir e integrar cuatro componentes:

1. *Recursos.* Se refiere a los materiales disponibles para los estudiantes: videos, imágenes, documentos digitales, calculadoras, software, etcétera.
2. *Actividades*. El objetivo es involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje a través del uso de Recursos en diversas tareas, como experimentos y resolución de problemas.
3. *Soporte.* Es necesario incluir medios para proporcionar ayuda a los estudiantes en el momento en que se les presente alguna interrogante relacionada con la tarea que están realizando.

[3] Los cuatro componentes RASE se referencian con la primera letra en mayúscula (Recursos, Actividades, Soporte, Evaluación).

4. *Evaluación*. La evaluación debe permitir a los estudiantes mejorar constantemente su aprendizaje, es decir, una Actividad debe promover que los estudiantes trabajen en tareas, desarrollen y evidencien su aprendizaje mediante algún mecanismo (por ejemplo, comunicar sus ideas, resultados o solución del problema). Se enfatiza que los alumnos puedan analizar la retroalimentación recibida con el objetivo de refinar o ampliar sus conceptos o ideas matemáticas iniciales.

Churchill et al. (2013; 2016) argumentan que, para el logro de un aprendizaje, el diseño de las Actividades debe: 1) contemplar y fomentar la participación de los estudiantes en un ambiente de reflexión, colaboración y discusión y 2) centrarse en un contexto donde las tareas o problemas involucren a los estudiantes en un proceso de resolución de problemas.

En un ambiente de aprendizaje en línea se debe incluir una propuesta sobre los contenidos y una posible ruta de cómo estudiarlos en un ambiente de colaboración, donde cada persona participe activamente en un proceso de discusión ya sea preguntando, comentando o proporcionando sugerencias o diferentes formas de encontrar la solución a un problema (Santos-Trigo, 2016c). En este sentido, la herramienta foro de Open edX*,* se convierte en un medio de comunicación entre sus participantes y les ofrece la oportunidad de plantear y aclarar sus dudas, conocer las ideas de sus compañeros y contrastar sus puntos de vista con los de otros (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017; Poveda, Aguilar-Magallón, & Gómez-Arciga, 2018).

Aramo-Immonen, Kärkkäinen, Jussila, Joel-Edgar, & Huhtamäki (2016) afirman que el foro proporciona la oportunidad para un aprendizaje activo y colaborativo en un MOOC; también, argumentan que el carácter abierto y masivo favorece las interacciones entre sus participantes. Alario-Hoyos et al. (2013) reportan la influencia del foro, parte de la plataforma Open Edx*,* y tres herramientas digitales de comunicación externas (Facebook, Twitter y MentorMob[4]) durante el desarrollo de las actividades de un MOOC. Estos investigadores llegaron a la conclusión que los participantes prefieren realizar su trabajo sin salir de la plataforma y por ello utilizaron la herramienta foro antes que las otras formas de comunicación que implicaban acceder a otros sitios de Internet. Stewart y Shamdasasi (2015) argumentan que la conectividad

[4] MentorMob es una red social que permite a sus usuarios agrupar videos, imágenes, archivos, etc. y compartirlo con otros. Para más detalles https://www.mentormob.com

ha potenciado una creciente práctica de investigación con personas reunidas virtualmente donde interesa la forma en que éstas interactúan alrededor de un problema o tema.

En el campo de la educación matemática, las propuestas curriculares actuales promueven un énfasis en la resolución de problemas y en el uso de herramientas digitales (NCTM, 2000; 2009). Según Santos-Trigo (2014) y Schoenfeld (1992), aprender matemáticas está relacionado con la resolución de problemas ya que es un medio que permite identificar, explorar, probar y comunicar las estrategias de solución. Los procesos que intervienen en la resolución de problemas son: formulación de preguntas, búsqueda de diversos métodos de solución, explorar diferentes representaciones, búsqueda de patrones, variantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentación de argumentos, comunicación de resultados, planteamiento de preguntas y formulación de nuevos problemas (Santos-Trigo, 2014a).

La resolución de un problema va más allá de aplicar un procedimiento mecánico; por lo que es necesario que el estudiante adquiera un hábito de cuestionamiento o método inquisitivo, mediante el cual, pueda resolver problemas matemáticos (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

Santos-Trigo y Reyes-Martínez (2014) afirman que las diversas tecnologías digitales, por ejemplo, el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), proporcionan una base para transformar los materiales de aprendizaje tradicionales y ofrecer a los estudiantes otras formas para que desarrollen su pensamiento matemático. Santos-Trigo (2007) argumenta que un SGD puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas ya que pueden generar representaciones o modelos dinámicos de los problemas matemáticos donde el movimiento de objetos particulares (puntos, rectas, segmentos, polígonos, etc.) resulta importante en la exploración y forma de explicar relaciones matemáticas. Así, las representaciones dinámicas se convierten en una fuente que involucra a los estudiantes en la reflexión e investigación matemática (Santos-Trigo, 2008).

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) proponen una forma para caracterizar el pensamiento matemático de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales en cuatro episodios, basándose en las etapas de Pólya (1945) y Schoenfeld (1985). Los episodios incluyen la comprensión del problema, exploración del problema, búsqueda de múltiples acercamientos (dinámico, algebraico, geométrico, etc.) e integración de los acercamientos hacia la solución del problema (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2011).

Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez (2011) realizaron una investigación en un ambiente de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales observando el trabajo presencial de profesores de matemáticas de nivel bachillerato. Reportan los beneficios de usar un SGD en el proceso de resolución de problemas: 1) facilita la representación dinámica de los objetos matemáticos involucrados en los problemas que les propusieron, 2) permite explorar dinámicamente tales objetos y relaciones entre ellos, 3) fomenta la formulación de conjeturas a partir de la información visual y empírica (medición de atributos tales como longitud de un segmento, perímetro o área de un polígono, entre otros) y 4) proporciona la posibilidad de establecer conexiones entre diversos contenidos matemáticos, por ejemplo el uso de argumentos geométricos y algebraicos en la justificación de conjeturas. Los investigadores concluyen que, el uso de GeoGebra, favorece y promueve la curiosidad del estudiante en el proceso de resolución de un problema y le permite explorarlo en la búsqueda de diversos acercamientos hacia la solución.

Reyes-Martínez (2016) reporta los resultados obtenidos en un escenario de aprendizaje combinando la modalidad presencial y en línea. Los participantes utilizaron GeoGebra y diferentes herramientas digitales tales como el muro digital Padlet[5] y el sistema de mensajería de Google Hangouts para fomentar la interacción durante los procesos de resolución de problemas. El objetivo principal de las sesiones presenciales de trabajo fue explorar y analizar los problemas para continuar la discusión fuera del salón de clases, utilizando Padlet. Este ambiente favoreció la interacción entre los participantes y el investigador. El autor concluyó que el uso sistemático y coordinado de diversas herramientas digitales ofrecen oportunidades para extender la discusión fuera de clase, ya que las ideas de los compañeros sirven como punto de partida para que otros continúen el trabajo y se promuevan nuevas formas de razonamiento.

1.3 Planteamiento del problema de investigación

Los MOOCs abren la posibilidad de que cualquier individuo interactúe con otros dentro de una comunidad virtual con el propósito de conocer o ampliar temas que resulten de interés y metas particulares. En el diseño de un ambiente de aprendizaje MOOC, las actividades tienen que ver con las formas en las que se aborda el contenido; es decir, su diseño y estructura están

---

[5] Para más información https://padlet.com/support/whatispadlet.

relacionados con el tipo de ambiente de aprendizaje que se genera a través del uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales (Quinton & Allen, 2014). ¿Cómo afrontar el reto de que los individuos consideren a las tecnologías digitales como herramientas para extender y compartir sus ideas, dentro de una comunidad heterogénea, en un ambiente de resolución de problemas que fomenta la reflexión y la crítica?

En esta investigación, se diseñó e implementó un ambiente de aprendizaje MOOC, el cual se enfocó en el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales, es decir, un escenario donde se promovió que los participantes fueran aprendices activos, desarrollando su pensamiento matemático a través de la exploración, la discusión y la reflexión. La idea fue que los participantes usaran las herramientas digitales como un medio que les apoyara en el proceso de comprender ideas y les permitiera colaborar con otros para probar, discutir y refinar sus ideas. Para esto, se utilizó el marco de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales de Santos-Trigo (2014a) y el modelo RASE de Churchill et al. (2016). El curso se diseñó e implementó en la plataforma MéxicoX.

Los Recursos incluyeron representaciones dinámicas de los problemas a estudiar, elaborados en GeoGebra, vínculos a la plataforma Wikipedia y videos de KhanAcademy para la rápida consulta de conceptos o relaciones matemáticas. Las Actividades involucraron tareas o problemas que sirvieran de guía para que los participantes desarrollaran su pensamiento matemático.

En las Actividades se resaltó: 1) el movimiento y exploración de los objetos presentes en una configuración dinámica, 2) la formulación de conjeturas y, 3) la búsqueda de argumentos para su justificación. Un aspecto fundamental en el diseño de las Actividades fue dar movimiento a figuras geométricas simples como triángulos, rectángulos, entre otros, mediante modelos o configuraciones dinámicas del problema. El propósito fue que el participante observara el comportamiento o variación de algunos objetos o atributos (medida de ángulos, áreas, perímetros, etc.) y propusiera conjeturas que dieran cuenta de su comportamiento y las sustentara con argumentos. Se promovió que la explicación, en un inicio, estuviera respaldada a partir de argumentos visuales o empíricos y, posteriormente, se construyeran y presentaran argumentos que involucraran propiedades y resultados matemáticos. Durante los procesos anteriores, se promovió que los participantes formularan interrogantes como una ruta para comprender ideas y resolver problemas.

En las Actividades se incluyó el foro, como parte del Soporte, con la finalidad de que los participantes tuvieran la oportunidad de comunicar sus ideas, conocer los puntos de vista de otros e involucrarse en discusiones para conocer, sustentar o refinar razonamientos matemáticos.

La Evaluación estuvo presente durante todo el curso, los participantes tuvieron la posibilidad de considerar la retroalimentación proporcionada por otros, a través de los foros, como un medio que les permitiera refinar los conceptos o caminos hacia las soluciones de los problemas propuestos. También se diseñaron cuestionarios con preguntas de opción múltiple, las cuales son revisadas automáticamente por el sistema. El objetivo es que las preguntas sean un punto de partida para que, posteriormente, cada participante les dé seguimiento y las analice en un contexto más amplio. Es decir, presentar actividades donde los integrantes del MOOC continuaran y extendieran la búsqueda de información y el desarrollo de habilidades de resolución de problemas.

1.4 Preguntas de investigación

¿Cómo diseñar un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario de aprendizaje MOOC, que ofrezca a los participantes diversas oportunidades para involucrarse en actividades del quehacer matemático?

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, interesó identificar y documentar los elementos principales que deben incluir las tareas matemáticas basadas en resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales que promuevan el pensamiento matemático de los participantes en un MOOC. Posteriormente, fue importante identificar las ventajas y las limitaciones de MéxicoX que favorecen o condicionan el diseño de las tareas matemáticas en un ambiente de aprendizaje que fomente la comunicación y discusión de las ideas durante el desarrollo de las actividades. Esto es: 1) la manera en que la plataforma permite estructurar el contenido del curso, 2) los Recursos, las herramientas de comunicación y las preguntas de evaluación que se pueden incluir, y 3) las opciones que ofrece el foro y que hacen posible, al ED, seguir y analizar las contribuciones y discusiones que se generan entre los participantes.

¿Cómo implementar un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario de aprendizaje MOOC, que ofrezca a los participantes oportunidades para involucrarse en la exploración de diferentes representaciones de un problema, la formulación de conjeturas, la presentación de argumentos y la formulación de preguntas?

Interesa analizar y documentar cómo las actividades diseñadas, la interacción de los participantes y la intervención del equipo de diseño en el foro ofrecen oportunidades para que una comunidad de características heterogéneas y en línea se involucre en un ambiente de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales. Es decir, cómo los participantes de un MOOC se involucran en las tareas matemáticas y las dinámicas que surgen en el foro relacionadas con los procesos de: 1) exploración de diferentes representaciones, 2) búsqueda de patrones, invariantes y relaciones entre objetos matemáticos, 3) búsqueda de diversos métodos de solución y presentación de argumentos, 4) comunicación de resultados, 5) formulación de preguntas y 6) formulación de nuevos problemas.

Capítulo II

Marco Conceptual

En este capítulo se presentan las bases conceptuales que respaldan este estudio y la manera en que se relacionan para dar soporte a las ideas establecidas en el problema de investigación. Inicialmente, se analiza el marco de resolución de problemas que sustenta las tareas matemáticas y la forma de presentarlas a los participantes. Luego, se expone el marco de diseño de ambientes de aprendizaje utilizando tecnologías digitales RASE de Churchill et al. (2016) y se analizan los elementos relacionados con el diseño de un MOOC bajo el marco de resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales.

2.1 Resolución de problemas y uso de herramientas digitales

Santos-Trigo (2014) y Schoenfeld (1992) afirman que la resolución de problemas es una actividad esencial en el aprendizaje de las matemáticas ya que permite a los estudiantes involucrarse en procesos de formulación, representación, exploración y resolución de problemas. Un aspecto central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes es la adquisición de estrategias, recursos[6] y una disposición para involucrarse en actividades que reflejen la práctica o actividad matemática (Santos-Trigo, 2008a); es decir, identificar y contrastar diversas maneras de representar y explorar un problema, formular conjeturas y justificarlas, extender las condiciones iniciales del problema, y plantear nuevos problemas (Schoenfeld, 1985).

En el proceso de resolución de problemas, se destaca la importancia de la formulación de preguntas, búsqueda de diversos métodos de solución, exploración de diferentes representaciones, búsqueda de patrones, invariantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentación de argumentos, comunicación de resultados y formulación de nuevos problemas (Santos-Trigo, 2014a). Moreno-Armella y Santos-Trigo (2016) comentan: “Los estudiantes deben desarrollar habilidades, recursos matemáticos y formas de pensar que les ayuden a formular y resolver no solo los problemas de la escuela, sino también las situaciones que se encuentran fuera de los marcos institucionales” (p. 7).

Las tecnologías digitales juegan un papel importante en la resolución de problemas, por ejemplo, sitios en línea tales como KhanAcademy, Wikipedia, WolframAlpha y YouTube pueden ser utilizados para consultar y estudiar conceptos o relaciones matemáticas referentes a

[6] Son todos los conocimientos que un individuo puede utilizar cuando se enfrenta a una situación matemática específica (Schoenfeld, 1985).

un tema específico, lo que permite a los estudiantes conectar diversos temas y áreas de las matemáticas (Leung, 2013; Leung & Bolite-Frant, 2015). También, el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), en el proceso de resolución de problemas "se vuelve importante para representar inicialmente el problema en términos de sus propiedades principales y más tarde para visualizar el problema de forma dinámica" (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009, p. 275). De esta manera, esta herramienta puede ser utilizada para cuantificar los valores de áreas, perímetros, ángulos, segmentos, pendientes, etc., y observar cómo cambian instantáneamente cuando se mueven algunos objetos dentro de la representación del problema.

A través de los modelos dinámicos es posible explorar problemas matemáticos desde distintas perspectivas que incluyen representaciones gráficas, numéricas, tabulares y algebraicas (Santos-Trigo, 2010), lo que favorece la búsqueda de patrones, relaciones y formulación de conjeturas.

> El uso del software dinámico puede resultar una herramienta poderosa para los estudiantes en términos de generar representaciones dinámicas del problema que les permitan identificar relaciones matemáticas. Se destaca que, durante la construcción y análisis de las representaciones dinámicas, los estudiantes deben pensar el problema en términos de preguntas que los conducen al planteamiento de conjeturas o relaciones. Este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar, son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas (Santos-Trigo, 2007, p. 51).

La incorporación de la tecnología digital genera retos en la educación matemática, los cambios que se producen en un ambiente de aprendizaje, así como las formas de representar y explorar situaciones matemáticas (Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina, & Bruder, 2016). Respecto a los ambientes de aprendizaje, abren nuevas posibilidades en términos de diseño, creación y presentación de los contenidos a los estudiantes y diversas formas de comunicación durante el desarrollo de las tareas.

Santos-Trigo (2014a) argumenta que, como parte del proceso de enseñanza, se debe ayudar a los estudiantes a ser autónomos en su aprendizaje. En este sentido, mediante el uso de tecnologías digitales, los estudiantes se convierten en participantes activos en su proceso de aprendizaje, ya que cuentan con una gran diversidad de oportunidades para representar y explorar las tareas desde distintas perspectivas y comunicar sus ideas (Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2016). En un ambiente de aprendizaje que utiliza diversas herramientas digitales "las tareas matemáticas deben involucrar a los estudiantes en la representación de objetos, identificación y exploración de sus propiedades con el fin de detectar invariantes o relaciones, es decir, a razonar matemáticamente” (Liljedah et al., 2016, p. 23).

En los procesos de resolución de problemas, el uso coordinado de diversas tecnologías digitales demanda que los estudiantes: 1) busquen información relacionada con los temas de estudio en diferentes medios incluyendo libros digitales y sitios de Internet, 2) aprendan a trabajar en grupo y equipos de manera que escuchen otros puntos de vista, discutan y compartan ideas, 3) desarrollen constantemente nuevas estrategias que les ayuden a representar y explorar diversos problemas y, 4) discutan resultados intermedios y finales (Santos-Trigo, 2016).

Santos-Trigo (2014a) enfatiza que “la comprensión o el desarrollo de las ideas matemáticas conllevan un proceso de reflexión donde el estudiante, constantemente, refina o transforma sus ideas y formas de pensar como resultado de participar activamente en una comunidad de práctica o aprendizaje” (p. 21). Para analizar este proceso, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) proponen un marco que caracteriza los episodios de las formas de razonamiento matemático que surgen como resultado del uso sistemático de la tecnología digital en el proceso de resolución de problemas.

2.2 Episodios de la resolución de problemas

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) argumentan que el uso de las herramientas digitales requiere no solo transformar el trabajo del aula; sino también valorar las exploraciones que los estudiantes pueden realizar y que involucra el razonamiento visual, empírico y formal. Indican que es importante reconocer que la herramienta por sí misma no proporciona los medios o las formas necesarias para que los estudiantes las utilicen eficientemente en las actividades de resolución de problemas, por ello, un elemento esencial es que los estudiantes planteen preguntas relevantes y busquen contestarlas en términos de relaciones matemáticas: “La formulación de preguntas debería conducir al estudiante a identificar e investigar relaciones matemáticas, para buscar evidencia o información que ayude a fundamentar dichas relaciones y para presentar y comunicar resultados” (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009, p. 276).

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) argumentan que el uso de un SGD permite a los estudiantes desarrollar formas de razonamiento, que no serían posibles en un ambiente de papel y lápiz. Presentan un marco para caracterizar las formas de razonamiento matemático en cuatro episodios que surgen como resultado del uso sistemático de la tecnología digital, en particular un SGD, en el proceso de resolución de problemas.

El primero consiste en la *comprensión del problema*, el estudiante debe identificar los objetos matemáticos involucrados y establecer sus propiedades matemáticas, para posteriormente, construir un modelo dinámico que lo represente. Por ejemplo, si el problema contempla un rectángulo, el estudiante debe identificar las propiedades de sus lados, ángulos, diagonales, etc., para representarlo dinámicamente en un SGD.

El segundo episodio comprende *la exploración del problema*. La representación dinámica de la situación matemática se convierte en un medio para que el estudiante observe el comportamiento de los atributos de los objetos matemáticos al mover algunos elementos dentro del modelo dinámico. Esto permite efectuar exploraciones que llevan a la formulación de conjeturas. Por ejemplo, se puede observar la variación del valor del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo cuando se modifica la longitud de uno de sus lados.

El tercer episodio, *diferentes acercamientos hacia la solución del problema,* promueven la búsqueda de diversas estrategias de solución. El uso de un SGD juega un papel importante ya que, por ejemplo, un acercamiento dinámico puede consistir en identificar las propiedades, patrones o invariantes de un objeto cuando se mueve, y argumentarlos por medios visuales (gráfica) o empíricos (datos numéricos y tablas en la hoja de cálculo). El objetivo es utilizar diferentes conceptos y recursos para generar diferentes estrategias de solución: dinámicas, algebraicas, geométricas, entre otras.

El cuarto episodio es la *integración*. Aquí se deben relacionar los diversos acercamientos a la solución del problema, hacer explícitos y relacionar los conceptos matemáticos utilizados. Otra característica importante de este episodio es la extensión del problema; por ejemplo, generalizar los resultados obtenidos mediante el cambio de alguna o varias condiciones del problema inicial.

2.3 Cursos masivos en línea y la plataforma digital Open edX

Un ambiente de aprendizaje en línea es un entorno donde, mediante el uso de diversas tecnologías digitales, los estudiantes se involucran en un conjunto de actividades con el objetivo de aprender conocimiento disciplinario (Gros, 2011). Esta investigación, se enfocó en un ambiente de aprendizaje MOOC, su carácter masivo y abierto implica que no tiene límite de participantes y cualquier individuo interesado puede inscribirse sin requerir una prueba de conocimientos previos. También, supone que los participantes muestren características muy diversas, referentes a los conocimientos de los contenidos, nivel de estudios, intereses profesionales o personales, conocimiento de las herramientas tecnológicas que se incluyen en el curso, ubicación geográfica, edad, etc. (Boyatt, Joy, Rocks, & Sinclair, 2014).

El interés de un participante al inscribirse en un MOOC puede ser, conseguir una acreditación o reconocimiento, o bien, únicamente actualizar sus conocimientos ante una necesidad o inquietud profesional o personal. Es decir, un curso masivo ofrece una oportunidad a cualquier individuo para continuar su formación a lo largo de su vida.

En un MOOC se deja de lado la relación jerárquica entre profesor y alumno, el logro del aprendizaje depende de cada participante (Levy, 2011); es decir, los contenidos, las actividades y los medios de interacción del MOOC deben conducir al participante hacia la construcción del conocimiento (Sergis et al., 2017). Los participantes dejan de ser actores individuales en su proceso de aprendizaje ya que pasan a formar parte de una comunidad virtual que rompe con la limitación de tiempo y espacio (Naaranoja, 2014; Robutti et al., 2016). Además, estos investigadores señalan que el diseño del MOOC está a cargo de un equipo de profesores o expertos en el tema de alguna institución educativa reconocida, lo cual es un factor que influye en la calidad del curso.

La conectividad de las tecnologías digitales ha permitido la creación de plataformas digitales para cursos masivos. Mediante el uso de un teléfono inteligente, tableta electrónica o computadora conectados a Internet, el participante de un MOOC puede acceder a la plataforma digital, trabajar las actividades y participar en discusiones durante el desarrollo del curso. De esta manera, es posible que los participantes puedan plantear su propia agenda de trabajo y avanzar a su ritmo en cualquier momento y lugar.

Existen múltiples plataformas digitales para alojar cursos masivos, en este estudio se utilizó MéxicoX, la cual está basada en Open edX. Originalmente, la Universidad de Harvard y el Instituto Tecnológico de Massachusetts crearon la plataforma digital edX para construir y ofrecer MOOCs a cualquier individuo interesado. Dada la demanda que presentaron los cursos masivos, los creadores de edX decidieron compartir su código fuente con cualquier institución educativa interesada en ofrecer cursos a estudiantes de todo el mundo (Efimchik, Ivaniushin, Kopylov, & Lyamin, 2017), esta nueva plataforma la llamaron Open edX.

Una de las herramientas de Open edX, es el creador de contenido Studio edX mediante el cual es posible: 1) diseñar la estructura del curso, 2) agregar contenidos y actividades, 3) incluir evaluaciones y foros como medios de comunicación y, 4) administrar fechas de inscripciones, inicio y fin de curso, etc., todo esto de manera directa a través de un navegador de Internet sin necesidad de ningún software adicional[7].

En los MOOCs se fomenta que los participantes sean el centro de toda actividad sin depender de la figura de un tutor (Robutti et al., 2016), por ello, las vías de comunicación que ofrece la plataforma digital son únicamente entre tutor-participantes y participantes-participantes. En este sentido, Churchill et al. (2016) plantean que durante el diseño de las actividades, es necesario incluir diversos medios que permitan a los participantes obtener ayuda en el momento en que presenten alguna interrogante relacionada con el curso. A continuación, se analiza el modelo de diseño RASE de Churchill et al. (2016) y cómo puede ser utilizado para crear un ambiente de aprendizaje MOOC basado en resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales.

2.4 Modelo de diseño RASE

Uno de los retos actuales de la educación, es la incorporación de las tecnologías digitales en las prácticas de enseñanza y aprendizaje. Lo anterior, ha provocado que investigadores en el área, fijen su atención en la búsqueda, creación y análisis de propuestas que involucren el uso de herramientas digitales. Gros (2016) señala la necesidad de un cambio en el diseño de las prácticas educativas y sugiere que éstas incluyan el uso de las tecnologías digitales; sin embargo, comenta se debe tener en cuenta que para promover oportunidades de aprendizaje y obtener un máximo potencial de las herramientas digitales, el diseño de las actividades debe alinear la pedagogía y la tecnología en beneficio de los alumnos.

Churchill et al. (2016) y Fox (2016) mencionan que las tecnologías digitales son importantes en el diseño de recursos o materiales digitales educativos que el estudiante puede consultar y estudiar en el momento que desee, dentro o fuera de las aulas. Argumentan que se necesita un modelo aplicable para el diseño de ambientes de aprendizaje que proporcionen a profesores e investigadores, pautas para utilizar tecnologías digitales en el contexto de la enseñanza y aprendizaje. En esta dirección, proponen el modelo de diseño RASE que integra Recursos,

[7] Más información https://open.edx.org/about-open-edx

Actividades, Soporte y Evaluación. En la siguiente sección se analizan cada uno de los componentes de este modelo con el objetivo de estructurar las actividades matemáticas basadas en la resolución de problemas y el uso sistemático de tecnologías digitales en un ambiente MOOC.

2.4.1 Los Recursos

Para Churchill et al. (2016) los Recursos son los materiales o herramientas digitales que ofrece un ambiente de aprendizaje a sus participantes tales como documentos, libros, videos, calculadoras, software especializado en algún área, entre otros.

En un MOOC, el Recurso más utilizado es el video, donde un experto en el tema expone sus conocimientos o resuelve ejercicios (Sinclair & Kalvala, 2015). Sin embargo, en un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales, el reto de las tareas es crear condiciones para generar un ambiente de aprendizaje que refleje la práctica o actividad matemática (Smith & Stein, 2018). Es decir, las tareas que se presenten a los estudiantes deben generar la oportunidad de que éstos se involucren en un proceso de cuestionamiento, búsqueda de relaciones y reflexión matemática conceptual (Santos-Trigo, 2008a).

Algunas tecnologías digitales facilitan la búsqueda de información específica, relacionada con los temas de estudio, que permiten a los individuos contrastar, extender o refinar los conceptos que involucra una tarea o problema matemático. En un ambiente de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales en un escenario MOOC, el diseño de las tareas debe considerar que los participantes tienen características diversas. Algunos pueden tener más conocimientos matemáticos o experiencia en el uso de herramientas digitales que otros. Por ello, es importante incluir Recursos dentro de la misma plataforma digital, para que los participantes los utilicen y se involucren en los procesos de resolución de problemas sin que la falta de conocimientos o experiencia sea una limitante. Con base en las ideas anteriores, los Recursos se pueden definir en dos categorías:

1. *Consulta de información*. Las plataformas digitales KhanAcademy, Wikipedia y WolframAlpha son una fuente de información para que los participantes consulten y estudien los conceptos o relaciones que intervienen durante el desarrollo de las tareas matemáticas (Borba, et al., 2016). Así, los participantes pueden utilizar estos Recursos para actualizar, recordar o refinar su conjunto de conocimientos y poder utilizarlos en el proceso de resolución de problemas.

2. *Modelos dinámicos.* En este estudio, el objetivo de las tareas matemáticas fue involucrar a los participantes en actividades del quehacer de la disciplina, es decir, problematizar o cuestionar las tareas o situaciones matemáticas, utilizar diversas representaciones, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados. Así, una situación matemática al ser representada dinámicamente proporciona a los participantes del MOOC la oportunidad de explorar el problema con el objetivo de generar conjeturas y justificarlas a través de argumentos visuales o empíricos y posteriormente, construir un argumento que involucre propiedades y resultados matemáticos.

El acceso a Internet a través de un dispositivo electrónico (teléfono inteligente, tableta electrónica o computadora) permite que estos Recursos estén disponibles en cualquier momento para ser consultados por los participantes de este estudio.

2.4.2. Las Actividades

Churchill et al. (2016) argumentan que el diseño de una Actividad debe centrarse en lo que los estudiantes van a hacer para aprender un tema específico y no en lo que recordarán para reproducir en los exámenes. Se busca que los estudiantes experimenten y desarrollen habilidades y destrezas durante su aprendizaje. Estos investigadores proponen que una ruta para lograr los objetivos anteriores es a través de la resolución de problemas. En esta investigación, las Actividades se relacionan con las tareas matemáticas propuestas a los participantes del MOOC y las formas de promover su trabajo colaborativo. Es decir, las tareas deben ser el vehículo para que los estudiantes discutan los conceptos e ideas que se desarrollan durante la práctica o actividad matemática (Santos-Trigo, 2014b).

Los problemas son centrales en la práctica matemática para fomentar el aprendizaje en los estudiantes (Pólya, 1945). Mason y Johnston-Wilder (2006) y Watson y Ohtano (2015) mencionan que uno de los objetivos de las tareas es propiciar la participación activa de los estudiantes en el desarrollo de sus habilidades matemáticas. Santos-Trigo y Barrera-Mora (2011) argumentan que los problemas o tareas "son un medio que proporcionan oportunidades a los estudiantes para analizar y reflexionar sobre el desarrollo de estrategias de resolución de problemas" (p. 700). Con estas ideas, Santos-Trigo (2014a) analiza los componentes de un problema:

1. La existencia de un interés. Uno o varios individuos que quieren o necesitan encontrar una solución al problema.

2. La no existencia de una solución inmediata. Su solución debe demandar un plan y una reflexión, es decir, que no se puedan resolver instantáneamente al aplicar una serie de pasos de manera mecánica.

3. Permitan diferentes métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico), es decir, que se puedan utilizar diferentes conceptos, recursos matemáticos y procedimientos durante la resolución. También, se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución o diferentes caminos para resolverlo.

Los Recursos, descritos en la sección anterior, resultan importantes en los procesos de la resolución de un problema, al respecto, el NCTM (2008) resalta:

> La tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje de las matemáticas en el siglo XXI y tanto los profesores como los estudiantes deben tener acceso regular a las tecnologías que apoyan las actividades de dar sentido matemático, razonamiento, resolución de problemas y comunicación (p. 1).

Santos-Trigo y Ortega-Moreno (2013) argumentan que cuando un estudiante utiliza un SGD, en la resolución de problemas, se favorece el desarrollo de estrategias que lo conducen hacia la solución. El movimiento de objetos, la medición y el rastro o lugar geométrico son ejemplos de estrategias en los procesos de resolución de problemas.

El movimiento de los objetos en una configuración proporciona información del comportamiento de algunos atributos (medida de ángulos, áreas, perímetros, etc.) lo que permite identificar patrones, invariantes o relaciones entre los objetos. Con el uso un SGD se puede trazar el camino o lugar geométrico que deja un punto cuando se mueve respecto a otros elementos, dentro de esa misma configuración, y analizar las propiedades del lugar geométrico (Aguilar-Magallón & Poveda, 2017). De esta manera, los estudiantes pueden observar las variaciones instantáneas en los atributos de los objetos involucrados en el modelo del problema que se producen al mover otros y plantear preguntas relacionadas con los patrones o las invariantes observadas que les permitan formular una conjetura que ayude a resolver el problema (Santos-Trigo, 2008).

Santos-Trigo (2014a) comenta que el aprendizaje de las matemáticas implica enfrentarse a dilemas que necesitan resolverse mediante la formulación de preguntas y búsqueda de diferentes caminos para responderlas. Además, señala que:

> El entendimiento o comprensión de las ideas matemáticas no es un proceso final, sino gradual y dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver una serie de cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de la propia comunidad de aprendizaje (Santos-Trigo, 2014a, p. 23).

Santos-Trigo, Reyes-Martínez, y Aguilar-Magallón (2015) argumentan que las tecnologías digitales favorecen en los individuos la comunicación e interacción entre ellos y el desarrollar del conocimiento matemático. Así, "[…] los estudiantes construyen, desarrollan, refinan, o transforman sus formas de comprender y resolver problemas como resultado de formular preguntas relevantes y responderlas con el uso de distintos medios, incluyendo las herramientas computacionales" (Santos-Trigo, 2008a, p. 189).

En este estudio, las Actividades incluyeron preguntas para favorecer y promover que los participantes, en sus intentos de responderlas, evidencien sus recursos matemáticos, extiendan sus ideas, busquen nuevas maneras de solucionar y extender los problemas. Durante el diseño de las Actividades, las tareas matemáticas deben ser vistas como un medio para que los participantes busquen diversas respuestas a las preguntas, interactuando entre ellos o con la ayuda de los Recursos. De esta manera, la idea es fomentar el hábito del cuestionamiento o método inquisitivo en sus integrantes que les ayude a resolver problemas en matemáticas; así como en cualquier otra área.

Un modelo dinámico del problema permite a los participantes identificar relaciones entre objetos y conjeturar una posible solución. Su validación transita desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de una prueba o demostración matemática. Lo anterior indica que tres momentos o elementos importantes de las tareas matemáticas son las siguientes:

1. *Movimiento*. A partir de un modelo dinámico dado que representa una situación matemática, el objetivo es que los participantes exploren el problema y planteen preguntas sobre el comportamiento de los objetos y sus propiedades. Wikipedia y KhanAcademy pueden ser utilizadas por los participantes para consultar y estudiar los conceptos matemáticos involucrados en el problema.

2. *Formulación de conjeturas*. Las preguntas planteadas en la etapa anterior son la base y el camino para identificar y formular conjeturas. En una primera instancia, deben ser

sustentadas o refutadas mediante argumentos visuales o empíricos, para ello se pueden utilizar las estrategias de mover objetos, medición de sus atributos y lugar geométrico.

3. *Justificación de conjeturas*. Toda conjetura identificada debe ser justificada utilizando conceptos y relaciones matemáticas. Por ejemplo, mediante argumentos algebraicos, geométricos, entre otros.

En general, el objetivo del diseño de este estudio promueve la idea de que el aprendizaje de las matemáticas implica resolver problemas en términos de observar una situación, formular preguntas y buscar siempre diferentes caminos para su resolución.

2.4.3 El Soporte

El propósito del Soporte es proporcionar asistencia a los estudiantes para que resuelvan, de manera individual y colaborativa, las dificultades que se vayan presentando durante el desarrollo de las Actividades. El Soporte puede tener lugar en entornos virtuales a través de foros, blogs, chats, etc. y su objetivo es asegurar que los participantes puedan consultar materiales cuando necesiten ayuda. Churchill et al. (2016) recomiendan que el estudiante resuelva sus dudas, en primera instancia, con el apoyo de sus pares. La meta es conducirlos a convertirse en aprendices independientes.

Cuando un estudiante comunica sus ideas a los demás, ya sea la justificación de su razonamiento o la formulación de una pregunta, refleja su aprendizaje y organiza y consolida su forma de pensar en matemáticas (NCTM, 2000). En este sentido, Boston et al. (2017) argumentan que promover la discusión en un aula de matemáticas favorece que los estudiantes puedan conocer los puntos de vista de otros, proporcionándoles una perspectiva mayor de los problemas o temas estudiados. Es decir, una explicación de un individuo ofrece oportunidades adicionales para que otros amplíen y contrasten sus recursos matemáticos y sus estrategias para resolver problemas. También, argumentan que un elemento necesario para garantizar una discusión enriquecedora, es decir, donde se compartan ideas y se debatan con el propósito de desarrollar el pensamiento matemático entre los estudiantes, son las tareas matemáticas basadas en resolución de problemas.

Para propiciar la discusión entre los participantes de un ambiente de aprendizaje en línea es necesario incluir medios de comunicación que permitan la interacción y colaboración durante la resolución de los problemas (Feldmann, 2015). En este proceso, “la comunicación y participación de los estudiantes se debe enmarcar en el respeto a los demás y en la práctica de principios éticos que les permita reconocer y valorar tanto las contribuciones individuales como grupales" (Santos-Trigo, 2015, p. 345). En este sentido, en un MOOC se requiere que el diseño de las Actividades incluya los medios que posibiliten a los participantes, comunicar sus dudas y recibir ayuda de otros. Una herramienta que incluye la plataforma MéxicoX que puede contribuir con este propósito es el foro de discusión.

Varios investigadores reportan que los participantes en un MOOC prefieren los foros antes que otras herramientas de comunicación externas tales como redes sociales, blogs o chats para plantear sus ideas (Alagic & Alagic, 2013; Alario-Hoyos et al., 2013; Breslow et al., 2013; Liang-Cheng, I-Hsien, & Seng-Cho, 2017). Cuando un participante comparte sus observaciones, conceptos, dudas, explicaciones, conjeturas, justificaciones, etc., éstos pueden ser utilizados por otros para comprender el problema y analizar otras estrategias de solución y utilizarlas posteriormente. A partir de estas ideas, surge la pregunta ¿qué características deben contemplarse en el diseño de las Actividades para que los participantes "pongan a la vista" sus ideas a través del foro de discusión?

Los participantes deben gradualmente reconocer y valorar que ellos mismos son responsables de involucrarse en el proceso de desarrollar su pensamiento matemático a través de la exploración, la formulación de conjeturas, la búsqueda de diversos métodos de solución, la formulación de nuevos problemas, la discusión y la reflexión. Con el objetivo anterior, los medios de Soporte utilizados en esta investigación se dividieron en tres categorías:

1. *Modelos dinámicos.* En una etapa inicial, los participantes deben utilizar los modelos de los problemas incluidos en las actividades para explorar el comportamiento de los atributos de objetos matemáticos como resultado del movimiento de algunos elementos dentro de la representación dinámica del problema y así, formular y sustentar conjeturas. Al mover los objetos, el modelo dinámico proporciona a los participantes información visual y numérica que se actualiza instantáneamente, permitiéndoles comprobar o refutar las conjeturas planteadas. En una segunda etapa, el objetivo es que los participantes construyan sus propios modelos dinámicos de los problemas.

2. *Plataformas digitales*. Los participantes pueden utilizar plataformas tales como Wikipedia y KhanAcademy para consultar y estudiar, en cualquier momento, los conceptos o relaciones referentes a la tarea matemática y utilizarlos en la resolución del problema.

3. *El Foro de discusión*. Es un medio de comunicación que ofrece la oportunidad a los participantes de: plantear sus dudas y recibir retroalimentación como parte de la comunidad y compartir ideas, y participar en las discusiones que se generan en el desarrollo de las tareas o problemas propuestos.

El trabajo de los participantes podría ser un punto de referencia para que otros retomen o extiendan las ideas y las contrasten o discutan dentro de la comunidad virtual que genera el curso masivo.

2.4.4 La Evaluación

La Evaluación enfatiza que toda Actividad debe exigir a los estudiantes la producción de evidencias de su aprendizaje y exhibirlas utilizando, dentro de lo posible, medios electrónicos; debe ser parte integral de toda Actividad y verse como un componente formativo, (Churchill et al., 2016). En este estudio se utilizó el foro, parte del conjunto de herramientas que tiene MéxicoX, como medio de Evaluación ya que es una herramienta de comunicación que permite a los participantes comunicar sus ideas y contrastarlas con las de los demás y, así, mejorar su proceso de aprendizaje" (Santos-Trigo, 2008a, p. 189). Siguiendo estas ideas, cuando los participantes contestan las preguntas planteadas por las Actividades en el foro pueden reflexionar sobre la retroalimentación proporcionada por otros y refinar sus recursos matemáticos, ideas, conocer otras maneras de solucionar y extender los problemas.

Santos-Trigo (2014a) describe un modelo de evaluación que incluye tres momentos y que intenta analizar el proceso utilizado por los estudiantes al resolver una tarea matemática:

1. El primero es el entendimiento del problema. Un estudiante debe mostrar si lo entiende y cuestionarse: ¿Las condiciones del problema son razonables? ¿Es posible estimar una solución?
2. El segundo se relaciona con la habilidad del estudiante para seleccionar y usar estrategias de solución, presentar un plan y ejecutarlo.
3. El tercero es revisar la solución: analizar su significado y verificar los procesos que llevaron a esa solución.

En general, en este estudio se promueve que las tareas matemáticas proporcionen las condiciones necesarias para que sus integrantes participen de forma activa, donde el uso sistemático de diversas herramientas digitales promueva un ambiente de discusión en la búsqueda de soluciones. En este proceso, el Soporte y la Evaluación favorecen que los participantes mejoren constantemente su aprendizaje, por ello, es necesario que cuando expresen sus ideas en el foro, analicen la retroalimentación recibida para refinar o ampliar los conceptos o ideas iniciales, como parte de su evaluación.

De esta manera, la idea es que los participantes a través del proceso de Evaluación sean ellos mismos los encargados de monitorear sus avances en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de los problemas. Esto incluye reflexionar sobre las decisiones que se toman durante el desarrollo de las tareas propuestas.

Capítulo III

Elementos metodológicos, diseño del estudio y procedimientos

En este capítulo se presentan los elementos metodológicos y procedimientos de la investigación. Se describe el tipo de estudio, la plataforma digital que fue utilizada para construir el MOOC, el diseño de las actividades, los participantes y la implementación del MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales, así como los métodos para la recolección y el análisis de datos.

3.1 Naturaleza del estudio

La naturaleza de este estudio es de carácter cualitativo, se basa en el proceso inductivo de observación, exploración y análisis de las respuestas de los participantes y las interacciones entre ellos (Hernández, 2014). El objetivo principal de la investigación fue diseñar e implementar un ambiente de aprendizaje MOOC para promover en los participantes una actitud inquisitiva en la comprensión de conceptos matemáticos y la resolución de problemas, considerar un problema como punto de partida para involucrarse en la actividad de razonamiento matemático, desarrollar múltiples estrategias para resolver un problema.

En particular, interesó documentar cómo el diseño de las actividades, en un ambiente de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales en un MOOC, permite que los participantes se involucren en los procesos de plantear y responder preguntas, buscar información, formular conjeturas y justificarlas mediante argumentos visuales o empíricos, tales como el movimiento, la medición y el lugar geométrico, al explorar los modelos dinámicos; y, además, analizar la influencia que tiene la interacción en línea entre los participantes durante el desarrollo de las actividades.

En un estudio inicial (piloto) se analizó el potencial de la plataforma digital MéxicoX; las formas de comunicación que propicia ésta; y, las interacciones entre los participantes durante el desarrollo de las tareas matemáticas.

3.2 El estudio piloto

La plataforma MéxicoX permitió integrar diversas tecnologías digitales, incluyendo GeoGebra, Wikipedia, KhanAcademy y el foro como medio de comunicación de ideas o razonamientos matemáticos. El estudio piloto comprendió cinco actividades matemáticas y un tiempo de siete semanas. Se registraron 2 491 participantes, el único requisito solicitado fue poseer o estar cursando los estudios de bachillerato. En el Anexo 1 se detalla el diseño de las actividades, la implementación y los resultados obtenidos.

El análisis del estudio piloto fue la base para realizar ajustes en las actividades e implementar el MOOC *Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales*, es decir, permitió analizar los tiempos de cada actividad y su nivel de dificultad. En las próximas secciones se detallan los ajustes realizados. Otro elemento importante que permitió el estudio piloto fue observar el comportamiento del grupo de participantes durante el desarrollo de las actividades, a través del foro. Con lo anterior, se estableció una metodología para clasificar el gran número de comentarios según sus ideas y centrar la atención de los participantes en un grupo de razonamientos o ideas matemáticas (la sección 2 del Anexo 1 muestra los detalles).

3.3 MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales

Al inicio de la investigación, se plantearon las siguientes preguntas: ¿De qué manera diseñar tareas matemáticas basadas en un ambiente de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales en un entorno MOOC que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático de los participantes? ¿Cómo lograr que los participantes comuniquen sus ideas y obtengan retroalimentación sin depender de la figura de un profesor o tutor durante el desarrollo de las actividades? Para contestar estas preguntas fue necesario identificar las ventajas y limitaciones de la plataforma digital MéxicoX donde se construyó el MOOC y analizar las tecnologías digitales que permiten incluir y que favorecen la interacción entre los participantes cuando desarrollan las actividades. La Tabla 3.1 describe las herramientas digitales utilizadas en el MOOC y sus usos.

El diseño de las tareas matemáticas se basó en la resolución de problemas y el uso coordinado y sistemático de tecnologías digitales. El objetivo general fue centrar la atención de los participantes hacia el desarrollo y práctica de tendencias o hábitos del quehacer matemático en lugar de abordar de manera puntual una serie de contenidos específicos como generalmente se presentan en un ambiente tradicional de enseñanza.

Así, se enfatizó la idea de que el aprendizaje de las matemáticas requiere que el participante problematice o cuestione las tareas o situaciones, busque distintas maneras de resolver un problema, use distintas representaciones, encuentre el significado e interprete la solución y comunique los resultados. En este proceso, se espera que las preguntas se conviertan en un medio que permitan a los participantes construir, desarrollar, refinar, o transformar sus formas de comprender y resolver problemas.

Tabla 3.1.
Herramientas digitales utilizadas en el estudio.

Herramientas de MéxicoX utilizadas en el diseño del MOOC		¿Qué permitieron estas herramientas?
Compatibilidad HTML5	WIKIPEDIA KHAN ACADEMY	La *compatibilidad con HTML5* permitió integrar una serie de elementos a la plataforma, por ejemplo, archivos GeoGebra, páginas web y videos de KhanAcademy y YouTube. El objetivo fue ofrecer la oportunidad a los participantes de explorar modelos de los problemas elaborados en GeoGebra y buscar información de Wikipedia o videos de KhanAcademy sin salir de la plataforma.
Foros de discusión	Mostrar Discusión	La herramienta *foro de discusión* se incorporó como parte de cada actividad para que los participantes: 1. Comunicaran sus ideas a los demás. 2. Contrastaran su punto de vista con el de los demás para ampliar sus recursos matemáticos y estrategias al resolver un problema. 3. Plantearan sus dudas o interrogantes y obtuvieran retroalimentación de otros como parte de su proceso de evaluación.
Preguntas calificadas en forma automática	En un triángulo acı En un triángulo ob En un triángulo rec	En estas preguntas el participante debía seleccionar, de una lista proporcionada, las opciones que respondían correctamente una pregunta; de manera inmediata, el sistema proporcionaba la calificación.

3.3.1 Diseño de las actividades

En el diseño de las actividades del MOOC se integraron los cuatro componentes del marco propuesto por Churchill et al. (2016): Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación[8].

Recursos

Al inicio del MOOC, se incluyeron algunas lecturas que abordan la importancia de formular preguntas, la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales con la finalidad de que los participantes asociaran la formulación de preguntas como un vehículo para aprender conceptos, explorar lo desconocido y generar nuevas ideas. Los participantes después de leer y analizar los documentos proporcionados, de forma individual, tuvieron la oportunidad de

[8] Los cuatro componentes RASE se referencian con la primera letra en mayúscula (Recursos, Actividades, Soporte, Evaluación).

comentar los contenidos, compartir ideas y participar en discusiones alrededor del tema en el foro.

En las actividades se incorporaron los siguientes Recursos:

1. *Modelos dinámicos.* Se proporcionó una serie de modelos o representaciones dinámicas de los problemas (elaborados en GeoGebra), con el objetivo de que los participantes tuvieran la oportunidad de mover objetos y explorar su comportamiento en la búsqueda de posibles relaciones, invariantes o patrones en sus atributos. Dentro de este proceso se plantearon cuestionamientos a los participantes sobre el significado de algunos de los conceptos matemáticos representados en el modelo.
2. *Wikipedia y KhanAcademy.* Se incluyeron vínculos a Wikipedia y KhanAcademy para la rápida consulta de información relacionada con las propiedades y relaciones de los objetos matemáticos involucrados en los modelos dinámicos. El objetivo fue que el participante tuviera la oportunidad de contrastar, refinar y adquirir un nuevo conjunto de conocimientos y utilizarlos en el proceso de resolución de problemas. Wikipedia proporciona información puntual acerca de definiciones, teoremas y propiedades de objetos matemáticos tales como polígonos, círculos, cónicas, etc. Por su parte, KhanAcademy incluye videos donde se abordan y explican conceptos y demuestran teoremas matemáticos.

Actividades

El diseño de las Actividades o tareas matemáticas se basó en los episodios de Resolución de Problemas y uso de tecnología digital propuestos por Santos-Trigo (2014a) y Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011). El objetivo fue que los participantes, mediante la exploración de modelos dinámicos de los problemas, se involucraran en los procesos de resolución de problemas: (1) exploración de diferentes representaciones, (2) búsqueda de patrones, invariantes y relaciones entre objetos matemáticos, (3) búsqueda de diversos métodos de solución (presentación de argumentos), (4) comunicación de resultados, (5) importancia de formular preguntas y (6) la formulación de nuevos problemas. Se proporcionaron a los participantes los modelos o representaciones dinámicas de los problemas, se intentaba que los exploraran de manera guiada. La Tabla 3.2 muestra los tres elementos propuestos en el diseño de las tareas matemáticas.

Tabla 3.2.
Elementos del diseño de las tareas matemáticas

Movimiento	*Entender la tarea*: 1. Identificar información relevante, 2. dar significado a los conceptos matemáticos involucrados en el modelo del problema. *Identificar de manera explícita las estrategias* esenciales en la búsqueda de patrones o invariantes relacionadas con el comportamiento de objetos y sus atributos: 1. Casos particulares, 2. cuantificación de los atributos (áreas, perímetros, ángulos, longitud de segmentos, etc.) y 3. lugar geométrico.
Conjetura	El objetivo es que al observar el movimiento de las figuras los participantes formulen algunas conjeturas que den cuenta del comportamiento de las propiedades de los objetos involucrados y las relaciones entre ellos. Inicialmente, la validación de una conjetura se basa en argumentos empíricos o visuales.
Justificación	La validación de toda conjetura formulada debe transitar desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de conceptos o relaciones matemáticas a través de procedimientos algebraicos o geométricos.

A partir de estos elementos, en cada una de las tareas matemáticas el participante tuvo la oportunidad de:

1. *Mover objetos*. El objetivo fue que el participante moviera los objetos involucrados en el modelo dinámico con el propósito de identificar y conectar los conceptos o propiedades matemáticas asociadas al problema que representaba; además, observara la importancia que tiene el movimiento de algunos objetos en la exploración y el análisis, de manera inmediata o instantánea, del comportamiento de algunos atributos de otros objetos.
2. *Formular conjeturas*. Durante el desarrollo de las tareas matemáticas, la idea en su diseño fue que los participantes plantearan interrogantes sobre el comportamiento de atributos de los objetos presentes en la representación del problema y formularan conjeturas relacionadas con las propiedades de los objetos. En este camino, en el diseño de las tareas se mostró la cuantificación de los atributos (áreas, perímetros, ángulos, longitud de segmentos, etc.) como elementos que resultan importantes en la búsqueda de relaciones entre objetos de la representación dinámica. También, se resaltó el trazo

del lugar geométrico como una estrategia importante que proporciona información sobre el comportamiento de algunos objetos.

3. *Justificar conjeturas.* En el diseño de las actividades se incluyeron preguntas con la finalidad de que los participantes, en la búsqueda de respuestas, construyeran y presentaran argumentos que involucraran conceptos, propiedades y resultados matemáticos para sustentar las conjeturas. Por ejemplo, se podían incluir resultados geométricos, argumentos de cálculo o geometría analítica.

Medios de soporte

Un componente de las tareas matemáticas fue el foro de discusión, parte de las herramientas que ofrece la plataforma digital, como medio donde los participantes tuvieran la oportunidad de:

1. Compartir sus ideas o razonamientos matemáticos.
2. Plantear las dudas que vayan surgiendo durante el desarrollo de las actividades.
3. Discutir ideas, conceptos o resultados intermedios y finales.
4. Ampliar o contrastar los conceptos o ideas matemáticas tras analizar la retroalimentación que proporcionan otros integrantes del MOOC.

Un objetivo de las actividades fue incentivar que los participantes compartieran sus ideas y exhibieran sus acercamientos hacia la solución de los problemas matemáticos. Así, el trabajo de uno podría ser un punto de referencia para que otros retomaran o extendieran las ideas y las contrastaran o discutieran dentro de la comunidad que generó el curso masivo.

Los participantes podían apoyar o refutar las conjeturas formuladas al mover los elementos involucrados en las representaciones dinámicas de los problemas, ya que, éstas proporcionan información de los atributos de los objetos matemáticos. También, se promovió el uso de los sitios *KhanAcademy y Wikipedia* para consultar y estudiar conceptos o relaciones matemáticas asociadas con la tarea propuesta.

Evaluación

El foro de discusión fue utilizado como un medio para compartir ideas, plantear dudas y recibir retroalimentación, la idea fue que los participantes al plantear sus dudas, ideas o razonamientos matemáticos, durante el desarrollo de las tareas matemáticas, recibieran retroalimentación de otros. Así, tenían la oportunidad de:

1. Contrastar sus recursos o ideas matemáticas.
2. Discutir con otros sus soluciones y, si fuera el caso, reformularlas.

El objetivo fue promover que los participantes continuamente analizaran y dieran seguimiento a las ideas que platearon en el foro, para ello, el equipo de diseño les insistió (en foros y en correos electrónicos masivos) sobre esta necesidad.

Además de los foros de discusión se incluyeron preguntas de selección múltiple (calificadas automáticamente por la plataforma). Cada una incluyó los siguientes elementos:

1. Una representación dinámica de un problema.
2. Un conjunto de afirmaciones.
3. Un foro de discusión.

El trabajo de los participantes consistió en explorar el problema, a través de la representación dinámica proporcionada, y encontrar argumentos visuales o empíricos que les permitieran justificar o refutar las afirmaciones proporcionadas. Como parte del proceso de evaluación, cuando un participante seleccionaba una opción errónea, se le dio la oportunidad de reformular su solución mediante diversos mecanismos: buscar o plantear la interrogante en el foro asociado a la actividad o buscar información en línea, y tras el análisis de las respuestas o de la información, responder de nuevo la pregunta.

La idea de incluir estas preguntas fue que los participantes activaran los resultados aprendidos en las actividades al responderlas. Se incluyeron tres conjuntos de preguntas de selección múltiple, denominados *Cuestionarios*.

A partir de la revisión de la literatura e investigaciones previas en resolución de problemas y uso de tecnologías digitales se seleccionaron las tareas matemáticas del MOOC y se realizó el estudio piloto (Anexo 1). Los datos obtenidos mostraron que el nivel de complejidad de las tareas matemáticas permitió la participación de un grupo con diversos antecedentes matemáticos, para más detalles se puede consultar la Sección 2 del Anexo 1. En el estudio, se mantuvieron las actividades 1, 2, 3 y 5 (Véase la Tabla 1, Anexo 1). Estas involucraron conceptos matemáticos que se estudian a nivel de secundaria tales como segmento, mediatriz, triángulo, cuadrado, rectángulo, parábola, entre otros.

En la actividad 4, el objetivo fue que los participantes resolvieran el problema utilizando diversas representaciones; una involucró un lugar geométrico relacionado con una función irracional como una estrategia para resolver el problema. Se observó que el grupo de participantes que se involucró en esta actividad presentó inconvenientes en la comprensión del lugar geométrico, en la mayoría de los casos, lo relacionaron con una parábola (Véase la Sección 2.3, Anexo 1). Acorde al nivel de dificultad que presentó la actividad, se reemplazó con otra.

Otro aspecto observado durante la implementación del estudio piloto fue que los participantes desarrollaron la actividad 1 (Véase la Tabla 1, Anexo 1) en su mayoría en la mitad de tiempo programado, es decir, leyeron los artículos relacionados con resolución de problemas y tecnologías digitales y participaron en diálogos sobre el tema.

De acuerdo con lo anterior, se diseñaron e implementaron dos nuevas tareas matemáticas:

1. La primera incluyó el problema de dividir el área de un cuadrado en dos regiones de área igual. Uno de los aspectos de mayor relevancia de este problema, es que permite enfocar la atención hacia diversas formas de solución, lo cual posibilita utilizar y contrastar diversas representaciones gráficas, algebraicas y numéricas. En esta ruta, se guio el trabajo de los participantes en la exploración de tres soluciones.

2. La segunda presentó una configuración dinámica que involucraba puntos, rectas paralelas y perpendiculares, puntos simétricos respecto a una recta y también un triángulo. Se resaltó la importancia de la formulación de preguntas y la búsqueda de respuestas para comprender conceptos matemáticos.

Respecto a los cuestionarios, en el estudio piloto, los participantes evidenciaron en el foro que el movimiento y exploración de los objetos presentes en una configuración dinámica les permitió la formulación de conjeturas. Además, un grupo de ellos continuó la discusión de las ideas matemáticas y extendieron los problemas, es decir, exploraron otras relaciones asociadas con el problema (Sección 2.3, Anexo 1). Por ello, los cuestionarios del estudio piloto se mantuvieron iguales en el estudio final.

La Tabla 3.3 describe las actividades y sus objetivos, en todas se proporcionaron a los participantes los modelos dinámicos de los problemas, se intentaba que los exploraran de manera guiada y se involucraran en el proceso de resolución del problema. Se incluyeron seis preguntas de selección múltiple en las actividades 3, 4 y 5. El objetivo fue que los participantes verificaran la validez de sus ideas o tomaran nuevas decisiones en su proceso de aprendizaje y así, avanzar, en el desarrollo de las tareas matemáticas.

Tabla 3.3.
Actividades y sus objetivos del MOOC.

Conjunto de actividades	Objetivos
Actividad 1 Importancia de formular preguntas y la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales. Dividir a un cuadrado en dos regiones de igual área.	Relacionar las actividades de Resolución de Problemas con el aprendizaje de las matemáticas. Se promueve que los estudiantes formulen preguntas como un camino para comprender ideas matemáticas y resolver problemas. Promover la búsqueda, análisis y discusión de información disponible en diversos sitios de Internet relacionada con las tareas matemáticas. Explorar el modelo dinámico del cuadrado, formular y sustentar diversas soluciones.
Actividad 2 El triángulo isósceles. Un triángulo isósceles que se genera a partir de rectas paralelas y puntos simétricos.	Explorar la representación del problema, cuestionar el significado de los objetos que lo conforman y, mediante la formulación de preguntas, establecer relaciones entre las propiedades de sus objetos. Promover una actitud inquisitiva en la comprensión de conceptos y recursos matemáticos, es decir, que los participantes vean un problema como un punto de partida y, a través de la formulación de preguntas, conecten otros conceptos y propiedades ampliando sus recursos y estrategias para resolver problemas.
Actividad 3 1. El segmento y su recta mediatriz. 2. El triángulo isósceles. 3. El triángulo equilátero. 4. El triángulo rectángulo e isósceles. **Cuestionario 1** Las medianas, las alturas y las bisectrices de un triángulo.	Mover objetos, observar el movimiento de las figuras y formular algunas conjeturas relacionadas con sus propiedades. Toda conjetura que se identifique debe justificarse con argumentos. Analizar el movimiento de objetos para comprobar o refutar visualmente algunas relaciones y conjeturas.
Actividad 4 La parábola como lugar geométrico.	Introducir al participante en el estudio de lugares geométricos como una estrategia para resolver problemas.
Actividad 5 Una familia de rectángulos de perímetro fijo.	Modelar la variación del área de un rectángulo de perímetro mediante el uso de un SGD. Explorar el comportamiento del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo que se puede modelar a través de un lugar geométrico.
Cuestionario 2 Extender el problema de la parábola y un problema de variación que se puede resolver utilizando la estrategia de lugar geométrico.	Analizar las propiedades de los objetos cuando se mueven algunos elementos en la configuración del problema, formular conjeturas y utilizar argumentos visuales y empíricos para sustentarlas.

El tiempo destinado para que los participantes desarrollaran las actividades del MOOC fue de siete semanas. La Figura 3.1 muestra la estructura del MOOC, es decir, las actividades y la semana en la cual se implementaron.

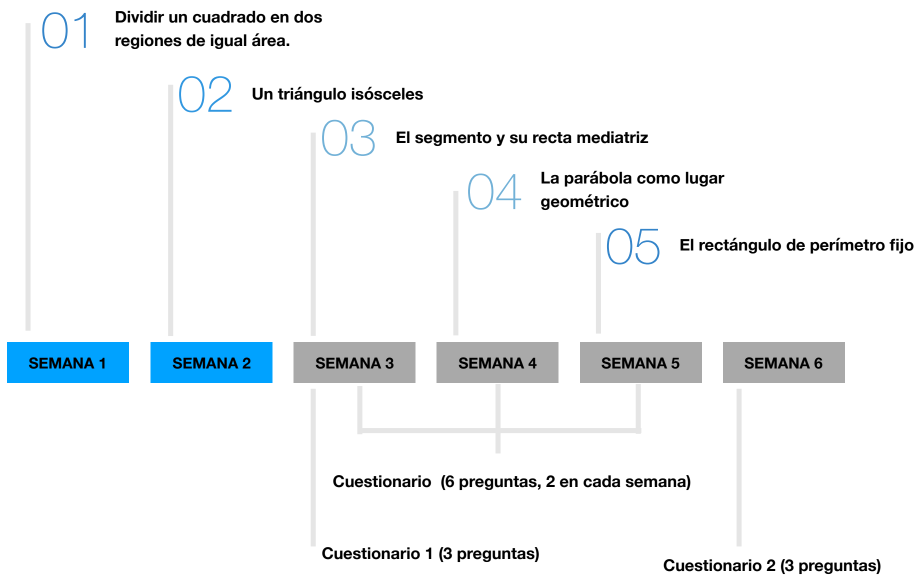


Figura 3.1. Estructura del MOOC

La Figura 3.2 muestra cómo la plataforma digital permitió estructurar las actividades, se resaltan los tres momentos de la tarea matemática, la guía de trabajo, el modelo del problema proporcionado a los participantes, la formulación de preguntas y el foro de discusión como un medio de comunicación entre los participantes. El curso está disponible en https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/actividades-mooc-2/.

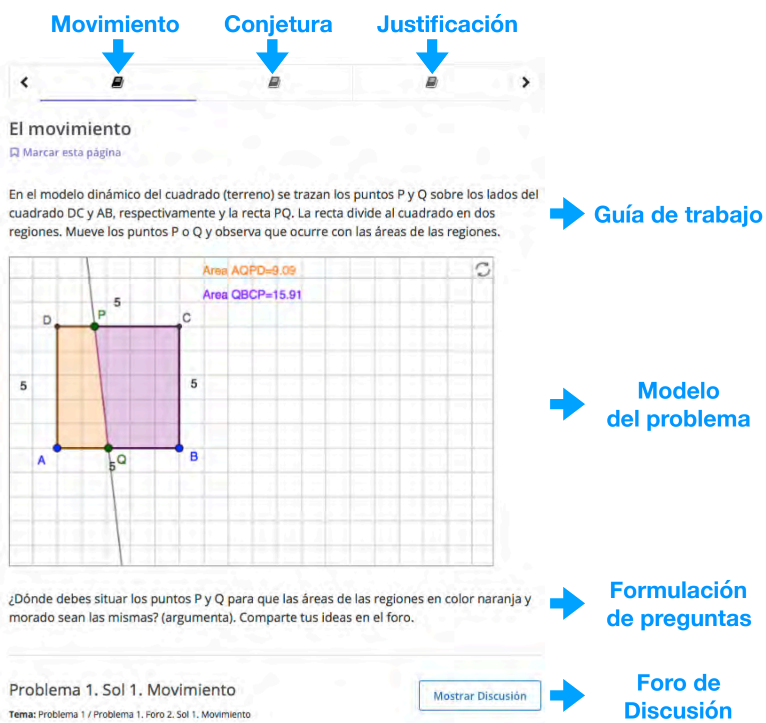


Figura 3.2. Ejemplo de una tarea matemática en la plataforma MéxicoX.

La Figura 3.3 ilustra una pregunta de selección múltiple que incluye un modelo dinámico de un triángulo y sus mediatrices, el trabajo de los participantes consistió en explorar el circuncentro de un triángulo y su relación el tipo de triángulo según sus ángulos.

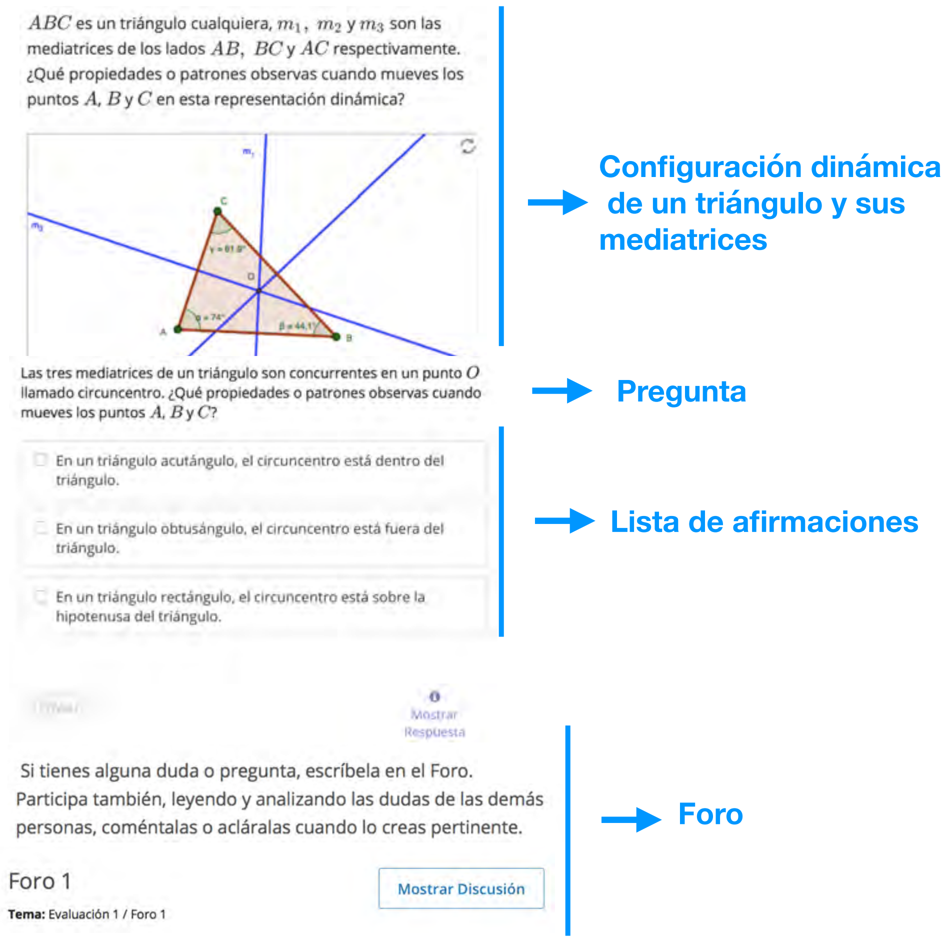


Figura 3.3. Ejemplo de una pregunta de selección múltiple

3.3.2 Información general del curso

Una vez que el MOOC fue diseñado, inició el proceso de inscripción de participantes. Debido a los contenidos abordados en las tareas matemáticas propuestas en el MOOC, el único requisito que se solicitó a los interesados fue poseer estudios correspondientes al nivel de bachillerato en México.

Un mes antes de iniciar el MOOC, MéxicoX publicó en su página digital el resumen, los objetivos, los contenidos y los requisitos del curso para que los interesados pudieran inscribirse.

El día de inicio del curso, el ED envió un correo electrónico a todas las personas inscritas dando la bienvenida y explicando la forma de trabajo (Anexo 5).

Al inicio del curso, únicamente estuvo visible la actividad 1, una semana después se visualizaba la actividad 2 y así sucesivamente, sin restringir el acceso a las anteriores. En otras palabras, si un participante no realizó alguna de las actividades durante la semana programada, podía retomarlas posteriormente.

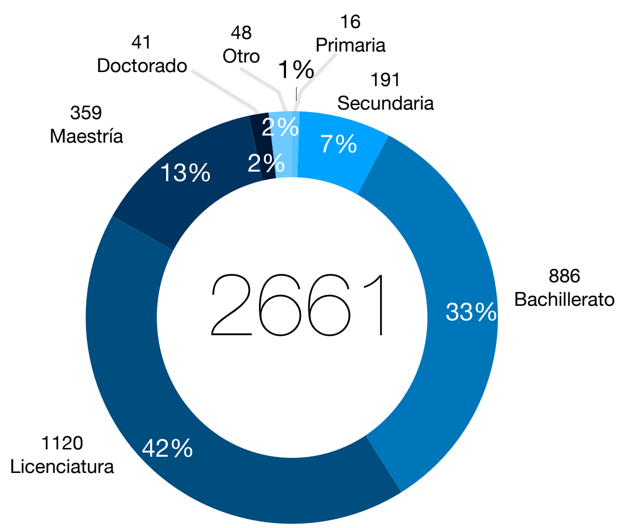
Para las consultas técnicas sobre el curso, tales como problemas al iniciar sesión en la plataforma, dudas respecto a los tiempos de las actividades o de evaluación, se habilitó un correo electrónico y le fue proporcionado a los participantes desde el inicio del curso.

Al final de cada actividad, el equipo de diseño escribió un resumen con las ideas y comentarios expresados en los foros, y envió un correo electrónico con la información a los participantes. La finalidad fue enfatizar los conceptos fundamentales abordados y la importancia de las estrategias de solución utilizadas. El Anexo 5 muestra los correos que se enviaron a los participantes después de trabajar cada actividad.

3.3.3 Los participantes y la implementación del MOOC

En el curso se registraron 2 661 participantes, la Gráfica 3.1 muestra el nivel máximo de estudios que declararon los participantes al registrarse.

Gráfica 3.1. Nivel máximo de estudios de los participantes inscritos en el MOOC



Para obtener una constancia de participación al término del MOOC, los participantes debían obtener 60 puntos o más como promedio en las respuestas a los tres cuestionarios. La Tabla 3.4 muestra el número de participantes, según su nivel máximo de estudios, que contestaron correctamente 60% del total de cada cuestionario; así como la cantidad que obtuvo constancia de participación.

Tabla 3.4.
Participantes que recibieron constancia de participación.

Estudios completos	**Participantes que respondieron correctamente 60% o más de las preguntas del**			**Obtuvieron constancia**
	Cuestionario 1	**Cuestionario 2**	**Cuestionario intermedio**	
Primaria	4	1	1	1
Secundaria	20	11	14	15
Bachillerato	93	59	76	75
Licenciatura	173	143	157	156
Maestría	79	65	69	71
Doctorado	8	7	5	7
No responde	2	0	1	2
Total	380	287	325	327

El estudio piloto permitió observar el comportamiento de los participantes en el foro durante el desarrollo de las actividades (para más detalles véase la Sección 2 del Anexo 1), en este sentido, fue posible establecer una ruta para seguir y guiar su trabajo: durante el desarrollo de cada una de las actividades, el ED fue clasificando los comentarios en el foro, los criterios de selección fueron:

1. Respuestas que dieron los participantes a las preguntas planteadas en las guías de trabajo de las actividades.
2. Errores cometidos o dudas en los diferentes procesos de la resolución del problema.
3. Ideas matemáticas erróneas o incompletas.
4. Otras (propuestas de otros métodos de solución al problema o nuevos problemas).

Luego, *fijó* un comentario representativo (para efectos de este estudio se denomina *comentario inicial*) de cada conjunto de ideas, es decir, se colocó de tal manera que siempre se visualizara al inicio del foro, para ello, se utilizó la herramienta "*Fijar*", parte del foro. El objetivo fue centrar la atención de los participantes en la idea o razonamiento matemático que incluía el comentario inicial y así, promover una discusión de ideas matemáticas relacionadas con el tema del comentario inicial. En esta investigación se denomina *diálogo* a la discusión de la idea del comentario inicial. La Figura 3.4 muestra un *comentario inicial* y la cantidad de respuestas o comentarios de otros participantes.

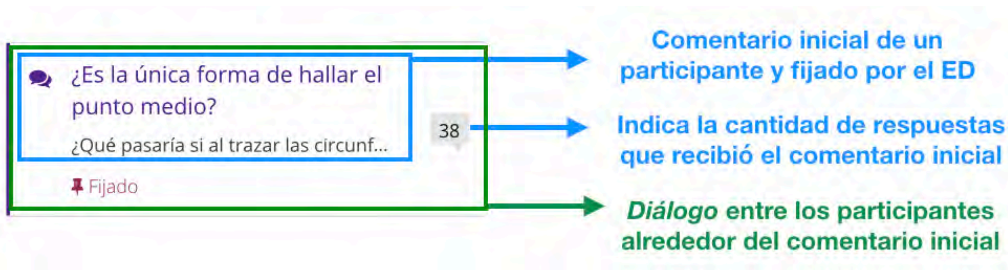


Figura 3.4. Captura de pantalla de un comentario fijado por el ED.

En la actividad 1 (https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-1/), los participantes respondieron las preguntas planteadas a través del foro. El ED, durante el tiempo programado para la actividad, clasificó los comentarios, según los criterios de selección descritos anteriormente en esta sección. En la Figura 3.5 se enlistan los primeros nueve comentarios seleccionados o comentarios iniciales de la actividad 1 del MOOC, los restantes se pueden consultar en el Anexo 2.

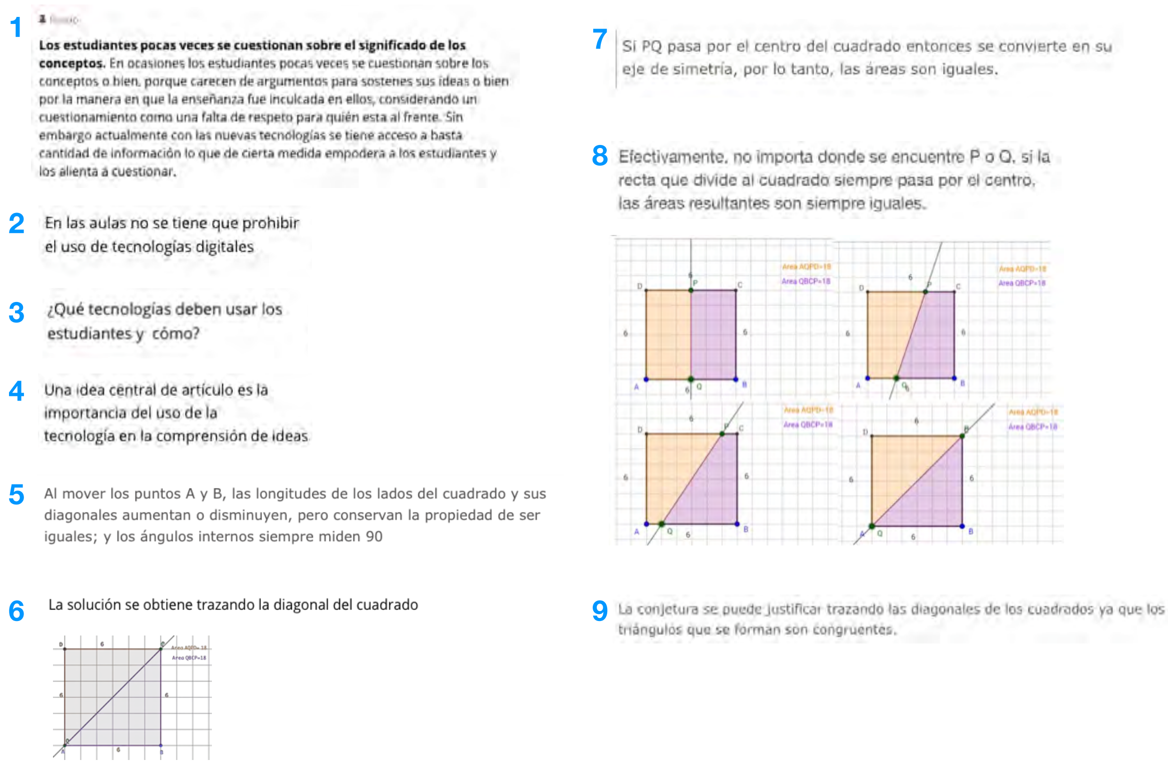


Figura 3.5. Primeros nueve comentarios iniciales de la actividad 1.

Las ideas matemáticas de los comentarios iniciales de las actividades del MOOC se detallan en el Anexo 2. La Tabla 3.5 muestra el número de comentarios iniciales de los diálogos en cada una de las actividades curso.

Tabla 3.5.
Cantidad de comentarios iniciales en las actividades y cuestionarios del MOOC.

Conjunto de actividades	Número comentarios iniciales
Actividad 1	21
Actividad 2	20
Actividad 3	16
Actividad 4	16
Actividad 5	21
Cuestionario 1	12
Cuestionario 2	12
Total	118

Otro aspecto importante observado durante la implementación del estudio piloto fue el papel que jugaron las preguntas formuladas en los diálogos por parte del ED ya que promovieron la discusión de los procesos de la resolución de los problemas. En el estudio, durante el tiempo programado de cada actividad, el ED dio seguimiento a los diálogos:

1. Cuando detectó una idea o razonamiento matemático erróneo o incompleto formuló preguntas para guiar las discusiones y que los mismos participantes solventaran la situación; cuando algún participante compartió una duda, el ED nunca proporcionó respuestas.
2. Tiempo antes (2 o 3 días) de que la actividad finalizara, formuló preguntas con el objetivo de que los participantes buscaran otras soluciones o extensiones del problema.

La Figura 3.6 resume las tareas del ED, en el foro, durante el tiempo programado de cada actividad.

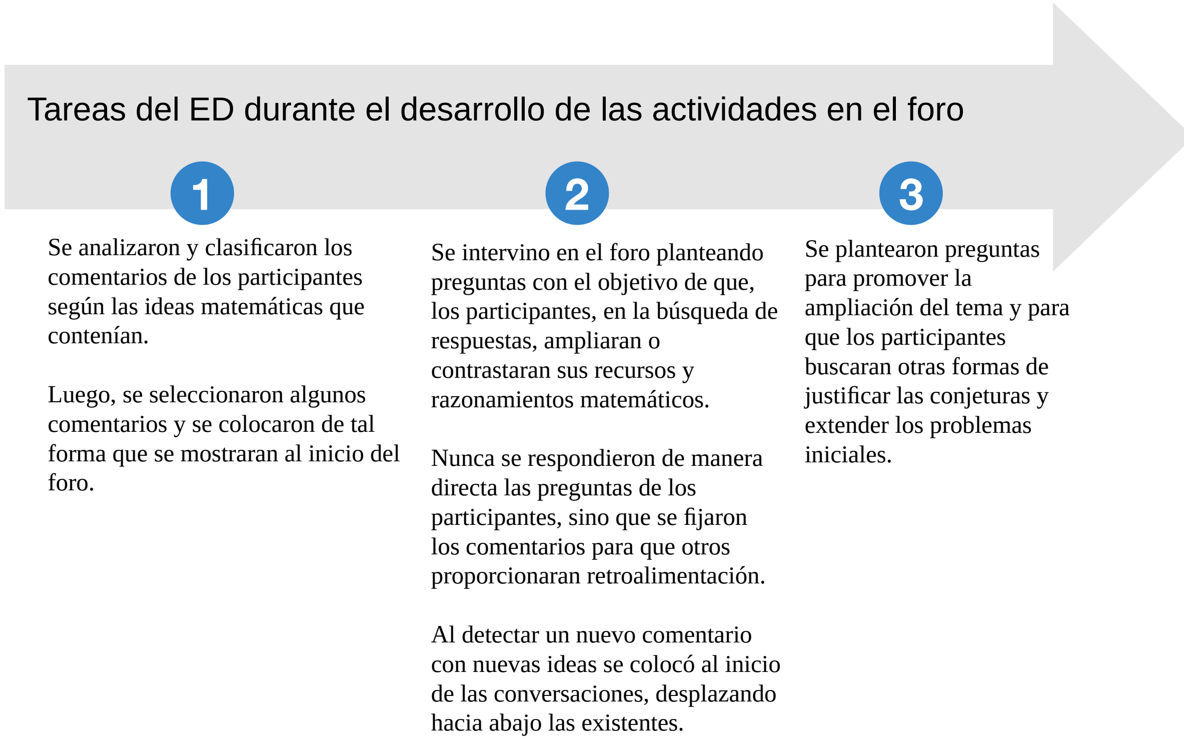


Figura 3.6. Tipos de intervención del equipo de diseño en el foro.

3.4 Recolección y análisis de datos

La unidad de análisis de esta investigación fueron los *diálogos* entre los participantes durante el desarrollo de actividades del curso. Ernest (2016) argumenta que en un diálogo como unidad de análisis intervienen: un hablante/proponente, un oyente/crítico y un Texto Matemático. El hablante/proponente plantea una idea (Texto Matemático) y el oyente/crítico responde proporcionando su punto de vista, aceptando o modificando la idea original. Posteriormente, el hablante/proponente puede asumir el rol de oyente/crítico, de esta manera, se alternan sus roles. Este proceso se manifiesta y complementa con la incorporación de otros participantes. En un diálogo se requiere que el número de personas involucradas sean dos o más y se pueden dar a través de textos escritos utilizando medios de comunicación electrónicos asíncronos, por ejemplo, el foro (Ernest, 2016).

El análisis se realizó en dos partes. En la primera, se pretende caracterizar el comportamiento inicial de los participantes durante el desarrollo de las actividades 1 y 2 del MOOC y cómo el diseño de las actividades favorece la exploración de los problemas, a través de sus modelos dinámicos, la formulación de conjeturas y las formas de sustentarlas utilizando argumentos visuales, empíricos y formales, en una comunidad en línea y masiva.

En la segunda parte, se analiza y documenta la forma en que una comunidad en línea y heterogénea, a través de los diálogos de las actividades 3, 4, 5 y de los cuestionarios, exhibe, cuestiona, proporciona retroalimentación o modifica sus ideas matemáticas al usar diversas tecnologías digitales en el proceso de resolución de los problemas.

3.5 Criterios para validar los resultados de la investigación

La validez de los resultados de la investigación se basa en los criterios establecidos por Lincoln y Guba (1985) y Schoenfeld (2007). La *credibilidad* es un criterio que permite examinar la validez de los elementos de la investigación empírica tales como: la recolección, la organización, el procesamiento y la interpretación de los datos (Lincoln & Guba, 1985). Para evaluar la credibilidad de los resultados de esta investigación se utilizaron los siguientes criterios:

a. *Compromiso prolongado***.** Se refiere a que el investigador observe a los participantes durante el tiempo que demore el estudio y sin implicarse en el desarrollo de su trabajo, es decir, esto permitirá al investigador aprender sobre la forma en que se comportan o trabajan los participantes. Durante la implementación del MOOC, se observaron los procesos de la exploración de los problemas, a través de sus modelos dinámicos, la formulación de conjeturas y las formas de sustentarlas utilizando argumentos visuales, empíricos y formales, que mostraron los participantes durante la resolución de los problemas de las actividades. El ED centró la atención en el comportamiento de los participantes durante el desarrollo de las actividades, es decir, observó su comportamiento en el foro y orientó las discusiones, a través de la jerarquización de comentarios y el planteamiento de preguntas. Nunca respondió las preguntas o dudas puntuales de los participantes.

b. *Observación persistente.* La observación durante la implementación del estudio permite al investigador recabar información que responda a los objetivos de la investigación, y así, identificar en los participantes cualidades constantes y atípicas. En este estudio, el investigador monitoreó el trabajo de los participantes durante el desarrollo de las actividades por medio del foro, esto le permitió observar las dinámicas de trabajo y definir comportamientos constantes.

c. *Triangulación*. Se refiere a que una investigación debe tener una variedad de métodos de recolección de datos y fuentes de información con el fin de contrastar los datos e interpretaciones. Toda la información se recolectó a través de los comentarios realizados por los participantes en el foro y permitieron observar y analizar cómo el diseño de las actividades y las interacciones de una comunidad en línea y heterogénea promueven la discusión de los procesos de la resolución de los problemas matemáticos. En los foros, los participantes comunicaron sus ideas, compartieron imágenes y construcciones de modelos dinámicos de los problemas que evidenciaban su pensamiento y uso de estrategias en la resolución de los problemas. Además, para el diseño del MOOC, se utilizó el marco de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales, así como el modelo de diseño RASE. Los datos se analizaron con el apoyo de los fundamentos del marco de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales.

d. *Interrogatorio con un colega (Peer debriefing).* Es un proceso que consiste en discutir ideas de la investigación con uno o varios colegas. En este contexto, el diseño de las actividades se hizo en conjunto con el Director de Tesis, las ideas iniciales fueron expuestas a otros expertos en un seminario especializado en resolución de problemas y uso sistemático de tecnologías digitales. También, durante y después de que se implementó la investigación, se discutieron los resultados parciales y finales obtenidos en dicho seminario.

e. *Referentes adecuados (referential adequacy).* Se refiere a la recolección de documentos, archivos u otros datos para contrastar los resultados de una investigación. En este estudio se utilizó la información que proporcionaron los participantes a través del foro, para observar el comportamiento que exhibieron durante el desarrollo de las actividades. Las interpretaciones se pueden comprobar mediante la consulta de los archivos digitales que contienen los comentarios de los participantes en el foro.

Otro criterio de Lincoln y Guba (1985) es la *Transferencia*. Se refiere a la posibilidad de aplicar los resultados del estudio a otras poblaciones o contextos. Para ello, se requiere proporcionar información descriptiva del lugar (en esta investigación de la plataforma MéxicoX en la cual trabajaron los participantes) y el trabajo de los participantes del fenómeno investigado para que otros investigadores interesados puedan replicar el estudio (Lincoln & Guba, 1985). En esta investigación se proporciona información relacionada con el diseño de actividades para un ambiente de aprendizaje masivo y en línea (Capítulo III); características y comportamiento de los participantes durante la implementación de las actividades (Capítulo IV); y decisiones tomadas por el equipo de diseño en el foro para guiar y extender las discusiones (Capítulo IV).

Schoenfeld (2007) menciona que un tema central respecto a cualquier investigación es su *importancia*, es decir, el interés que una comunidad puede tener en la relevancia basada en la contribución que realice a la teoría o a la práctica.

En esta investigación, se puede evaluar su importancia a partir de las preguntas de investigación relacionadas en cómo diseñar tareas matemáticas para ser aplicadas en un ambiente de aprendizaje MOOC y en la metodología implementada por el ED durante el desarrollo de las actividades en el monitoreo y jerarquización de comentarios. Se publicaron varios reportes de investigación basados en el análisis de los datos del estudio, éstos fueron evaluados y aceptados por investigadores, quienes valoraron su importancia y pertinencia dentro del campo de Educación Matemática. Algunos de los resultados publicados se relacionan con el diseño de las actividades matemáticas (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017, Poveda, Aguilar-Magallón, & Gómez-Arciga, 2018); las formas de pensar de los participantes en un ambiente de aprendizaje masivo (Poveda & Gómez-Arciga, 2017; Poveda, Aguilar-Magallón, & Olvera-Martínez, 2017); y, el papel de las intervenciones del Equipo de Diseño en el foro durante el desarrollo de las actividades (Poveda, Aguilar-Magallón, & Gómez-Arciga, 2018; Poveda, Aguilar-Magallón, & Olvera-Martínez, 2018).

Capítulo IV

Resultados

En este capítulo se analizan los procesos y resultados que mostró el grupo de participantes en los diálogos durante el desarrollo de las actividades del MOOC ***Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales***. El análisis se llevó acabo en dos partes. En la primera, se pretende caracterizar el comportamiento inicial del grupo de participantes en los diálogos, durante la resolución de actividades 1 y 2 del curso, relacionados con la exploración de los problemas matemáticos, a través de sus modelos dinámicos; la formulación de conjeturas; y, las formas de sustentarlas utilizando argumentos visuales, empíricos y formales. Luego se da respuesta a la primera pregunta de investigación.

En la segunda parte, se analiza y documenta la forma en que una comunidad en línea y heterogénea, a través de los diálogos de las actividades 3, 4, 5 y en las respuestas a los cuestionarios, exhibe, cuestiona, proporciona retroalimentación o modifica sus ideas matemáticas al usar diversas tecnologías digitales en el proceso de resolución de los problemas. Este análisis, en conjunto con los resultados de la primera parte, son la base para contestar la segunda pregunta de investigación.

Los resultados obtenidos, a través de los diálogos, se organizaron en términos del desarrollo de las actividades, con la finalidad de observar cómo el diseño de las actividades, la participación en los diálogos de la comunidad virtual que generó el MOOC y el papel que asumió el ED ofrecen oportunidades a los participantes para involucrarse en las actividades del quehacer matemático. Los problemas del MOOC se pueden consultar en el sitio https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/actividades-mooc-2/.

4.1 Desempeño de los participantes en el primer grupo de actividades

Se analiza el trabajo realizado por los participantes en los diálogos durante el desarrollo de las actividades 1 y 2. Para ello, se documenta cómo el diseño de las actividades y la intervención del ED en el foro y en los diálogos ofrecieron a los participantes diversas oportunidades para involucrarse en la exploración de los modelos dinámicos, la formulación de conjeturas y las formas de sustentarlas utilizando argumentos visuales, empíricos y formales. Al final, se elaboró un resumen con la intención de identificar los elementos en común observados en los diálogos.

El tiempo destinado al desarrollo de cada actividad fue de una semana. En los dos primeros días, el ED clasificó los comentarios del foro y fijó algunos comentarios (estos se denominan *comentarios iniciales*), el criterio de selección fueron las ideas de los participantes relacionadas con las respuestas de las preguntas que incluyeron las actividades del MOOC, dudas, razonamientos matemáticos erróneos o incompletos. Luego, durante el desarrollo de cada una de las actividades, el ED dio seguimiento a los diálogos y, en caso de que se detectaran dudas o ideas erróneas o incompletas, formuló preguntas con la intención de orientar la discusión. Una vez que las ideas o razonamientos matemáticos estuvieron correctos, se promovió la búsqueda de otros argumentos para justificar la conjetura o extender los problemas a través de preguntas. La Figura 4.1.1 resume la intervención del ED en los diálogos.

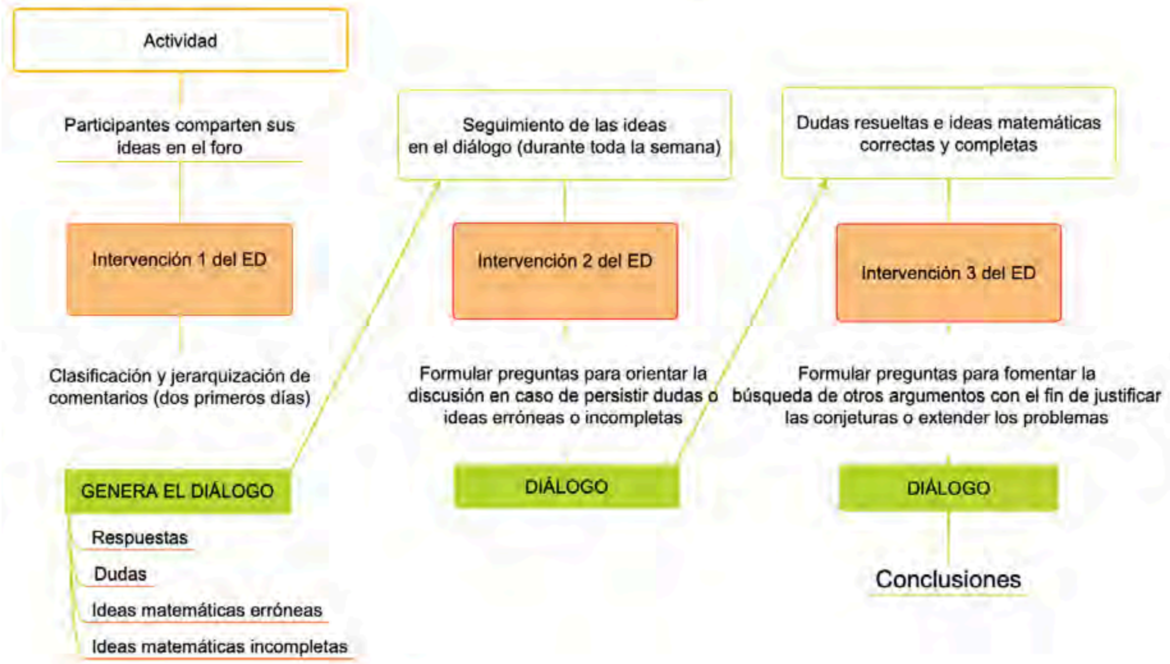


Figura 4.1.1. Intervenciones del ED en un diálogo.

4.1.1 Actividad 1

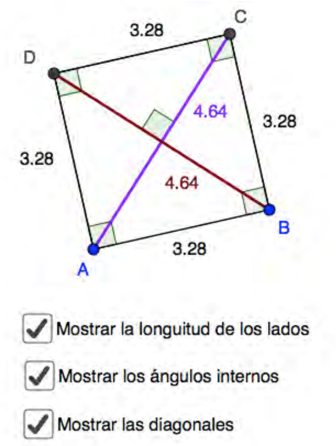
La primera tarea matemática fue:

Dos granjeros desean sembrar un terreno que tiene forma de un cuadrado. ¿Cómo dividir el terreno para que cada granjero siembre exactamente la misma área? ¿Existen varias formas de hacer esa división?

El objetivo fue que los participantes analizaran y discutieran tres soluciones del problema y, luego, buscaran y presentaran otras soluciones. Las tareas se pueden consultar en: https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-1/.

En la parte inicial de la actividad, se incluyó la configuración dinámica y el conjunto de preguntas que muestra la Tabla 4.1.1.

Tabla 4.1.1.
Exploración del modelo que representa un cuadrado.

<table>
<tr><th colspan="2">El movimiento de objetos</th><th>Preguntas planteadas</th></tr>
<tr><td>Propiedades del cuadrado</td><td>
</td><td>Se construye un modelo dinámico del terreno, mueve los puntos A y B ¿qué sucede? ¿qué cambia? ¿se mantienen las propiedades del cuadrado? ¿Qué propiedades caracterizan a un cuadrado? En Wikipedia puedes encontrar más información sobre el cuadrado: https://es.wikipedia.org/wiki/Cuadrado.</td></tr>
</table>

En el foro, una respuesta común de los participantes se relacionó con la idea de que los cuatro lados del cuadrado, al mover los puntos *A* o *B*, son congruentes. El ED seleccionó un comentario con las ideas anteriores y lo fijó en el foro (*comentario inicial*), otros participantes centraron su atención en el comentario inicial y compartieron otras propiedades del cuadrado. Para ello, se observó que utilizaron Wikipedia (Figura 4.1.2) para consultar la definición de cuadrado, en el diálogo compartieron: (1) Los ángulos internos suman 360^0, (2) sus diagonales son perpendiculares entre sí, (3) las diagonales se bisecan y (4) es un paralelogramo, ya que es un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son paralelos. También, señalaron que al mover los puntos *A* ó *B*, se genera una familia de cuadrados con perímetros variables. La Figura 4.1.2 muestra el comentario inicial y algunas opiniones de los participantes en el diálogo.

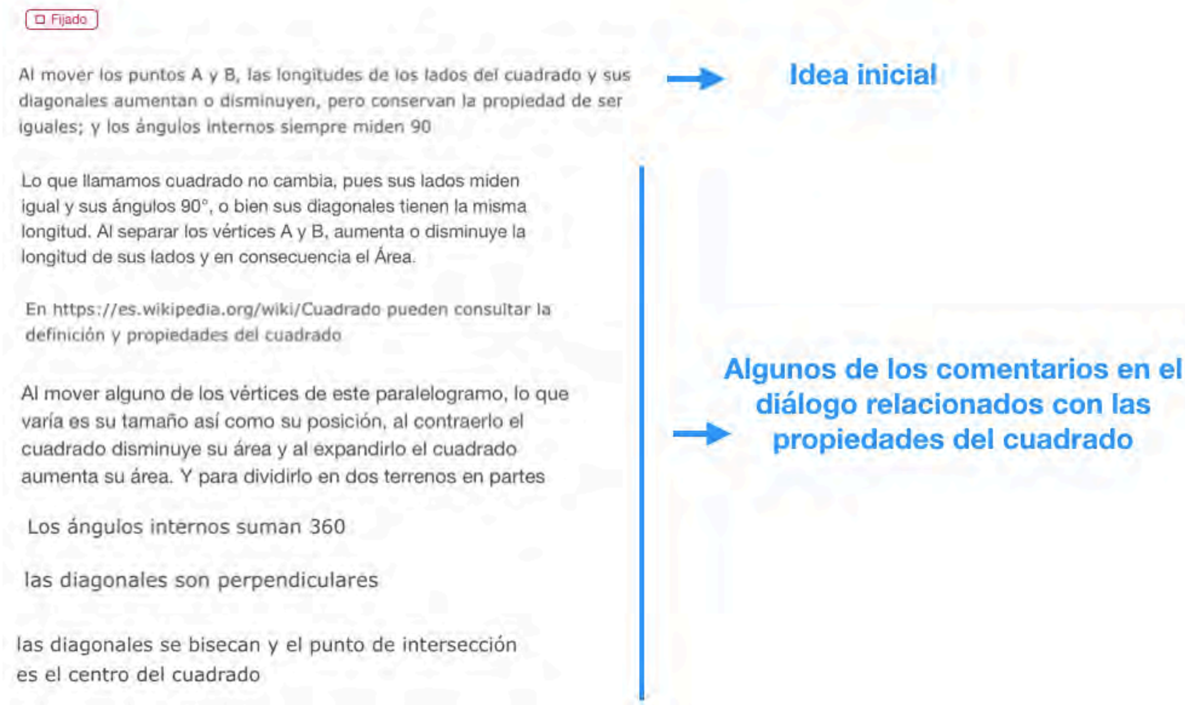
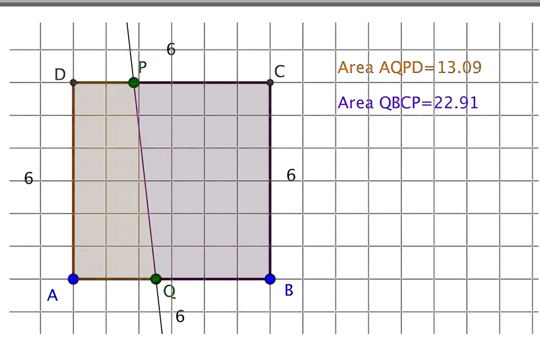


Figura 4.1.2. Un diálogo donde se comentan las propiedades del cuadrado.

Solución 1

La Tabla 4.1.2 muestra el modelo dinámico del cuadrado y una recta que pasa por dos de sus lados y las preguntas que incluyó la parte inicial de la primera solución en la fase de movimiento de objetos.

Tabla 4.1.2.
Exploración del modelo que representa el problema de los granjeros.

	El movimiento de objetos	**Preguntas**
Solución 1		Al mover los puntos A y B ¿qué sucede? ¿qué cambia? Al mover los puntos A, B, P y Q ¿Qué ocurre con las áreas de las regiones? ¿Dónde situar los puntos P y Q para que las áreas de las regiones $AQPD$ y $QBCP$ sean las mismas?

Del foro se seleccionó: *la solución se obtiene trazando la diagonal del cuadrado*, en el diálogo, sus participantes compartieron una captura de pantalla donde mostraron que el trazo de la diagonal era una solución al problema. También, identificaron a la recta perpendicular a uno de los lados y que pasa por su punto medio como otra solución. Esta recta fue asociada con el concepto de mediatriz de un segmento. La Figura 4.1.3 muestra el resumen del diálogo.

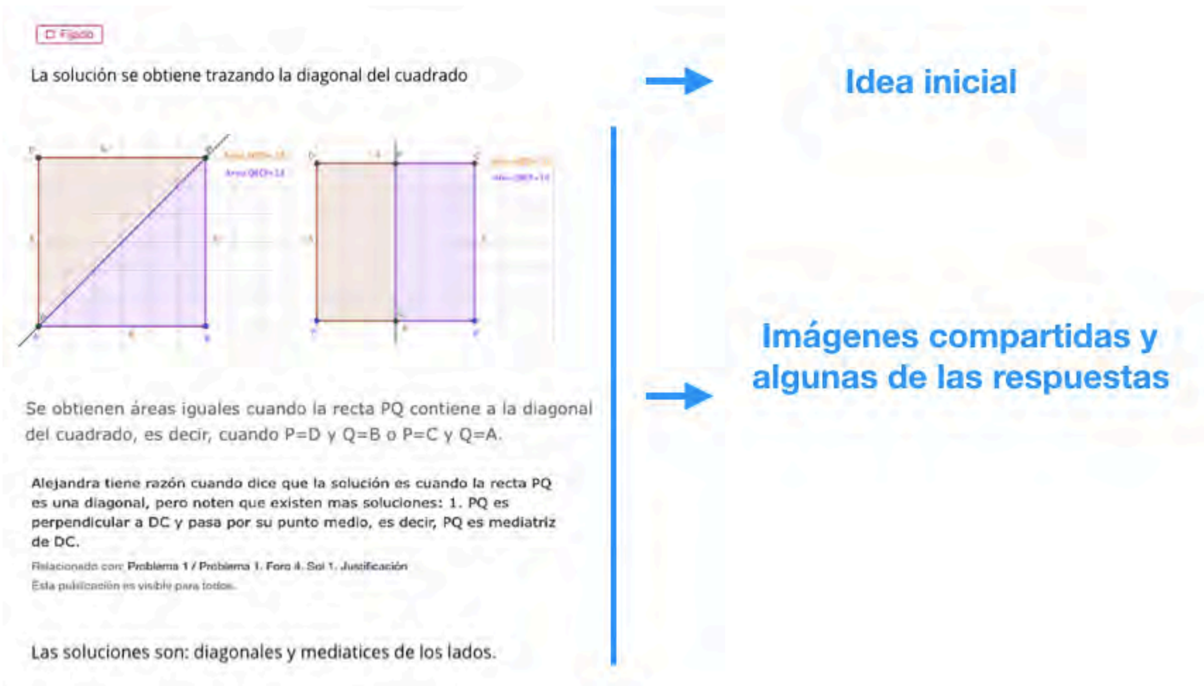


Figura 4.1.3. Soluciones presentadas por los participantes.

En el diseño de la actividad, el siguiente objetivo fue orientar la discusión de los participantes hacia la siguiente la formulación de una conjetura, para ello, se incluyó la pregunta:

¿Qué propiedad cumple la recta PQ (Ver Tabla 4.1.2) para aquellos casos en que las áreas de las regiones son las mismas? ¿Resulta importante el centro del cuadrado y la posición de la recta que divide al terreno en regiones de la misma área?

Se seleccionó la siguiente idea errónea: *Si PQ pasa por el centro del cuadrado entonces se convierte en su eje de simetría, por lo tanto, las áreas de las figuras en que lo divide son iguales*. En el diálogo, algunos participantes señalaron que, el eje de simetría de un cuadrado pasa por su centro, sin embargo, si una recta pasa por el centro del cuadrado no es, necesariamente, un eje de simetría. Para clarificar el concepto, el ED cuestionó en el diálogo:

1. *¿Cómo se define el eje de simetría de un cuadrado?*
2. *¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado?*

Los participantes consultaron información de Wikipedia relacionada con la definición de eje de simetría de un cuadrado (Figura 4.1.4) para refutar la idea del comentario inicial y concluyeron que los ejes de simetría de un cuadrado son sus diagonales y las mediatrices de sus lados.

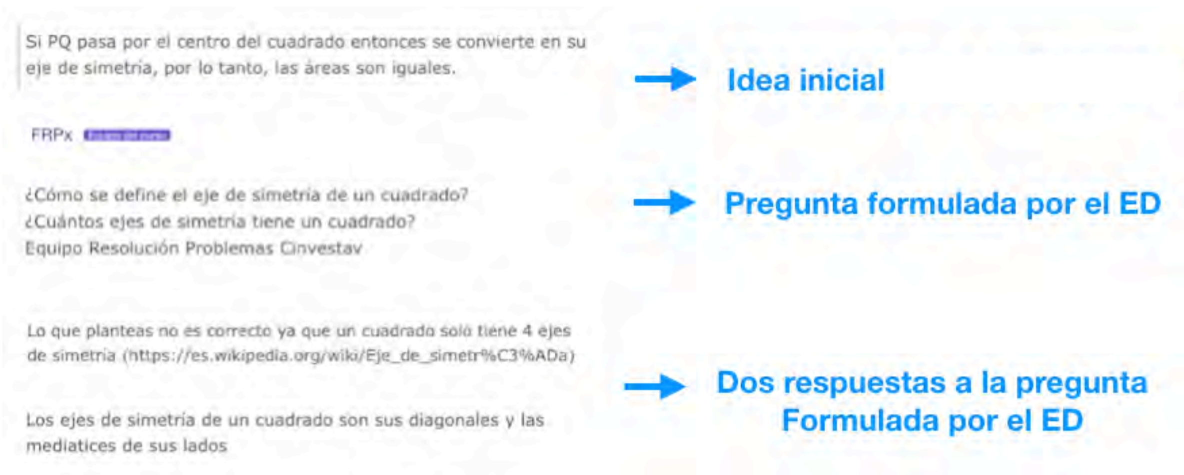


Figura 4.1.4. Resumen del diálogo donde sus participantes discuten el concepto de eje de simetría de un cuadrado.

En otro diálogo, los participantes se basaron en el movimiento y los valores de las áreas de las figuras involucradas en el modelo del problema (Tabla 4.1.2) para formular una conjetura de cómo dividir el cuadrado en regiones de igual área. Señalaron que si PQ pasa por el centro del cuadrado entonces lo divide en dos figuras de área iguales.

Para promover la discusión de ideas, el ED planteó la pregunta: *"¿Cuántas soluciones es posible encontrar?"*. En el diálogo se proporcionaron argumentos visuales para responder la pregunta, coincidiendo en que al mover los puntos P y Q de tal manera que la recta PQ pasara por el centro del cuadrado se podía observar cómo cambiaban las formas de las figuras en que se dividía el cuadrado, pero siempre las dos conservaban la misma área (Figura 4.1.5).

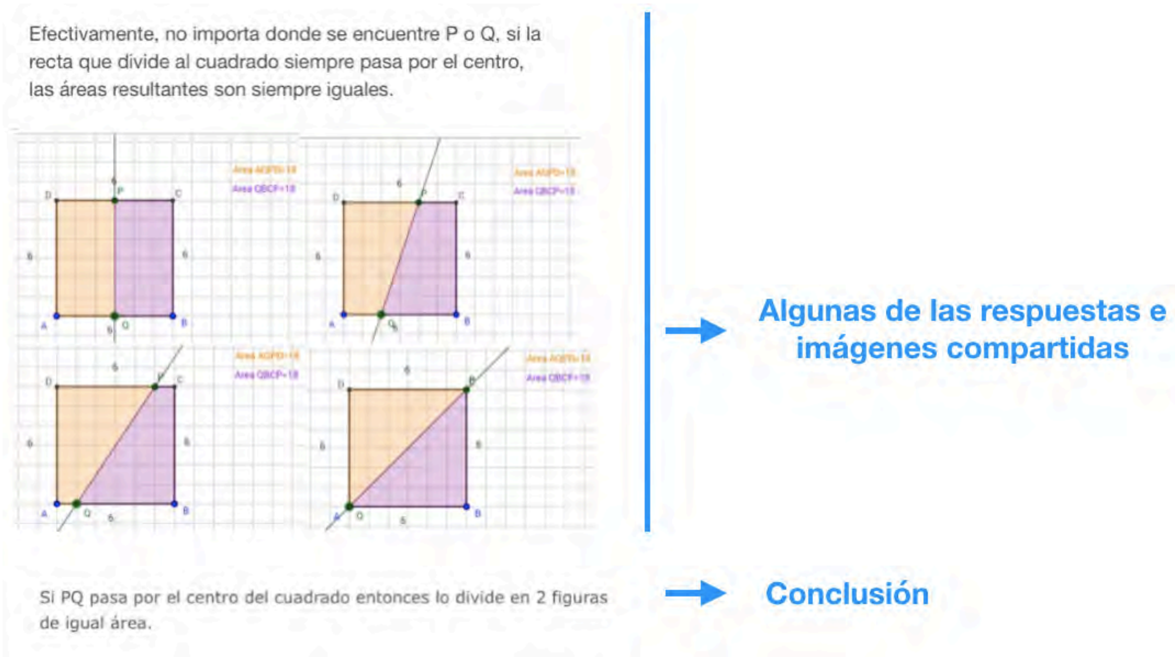
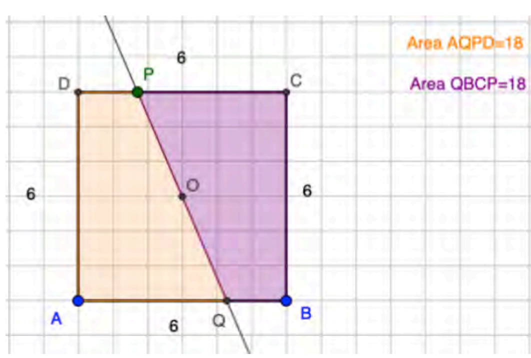


Figura 4.1.5. Formulación de una conjetura inicial basada en casos particulares.

La siguiente parte de la actividad estuvo relacionada con la búsqueda de argumentos formales para sustentar la conjetura (Tabla 4.1.3).

Tabla 4.1.3.
Justificación de la conjetura de la Solución 1.

	Justificación	Preguntas planteadas
Solución 1		Analiza la siguiente conjetura: *Sea ABCD un cuadrado y el punto O su centro. Si la recta PQ pasa por O entonces siempre divide al cuadrado en dos figuras que tienen la misma área.* ¿Por qué la conjetura anterior siempre es válida? ¿Cómo se sustenta matemáticamente? ¿Qué conceptos, propiedades y recursos matemáticos podemos usar para sustentar y demostrar la conjetura?

En el modelo del problema, P es un punto móvil sobre el lado DC de tal manera que la recta PQ siempre pasa por el centro del cuadrado, es decir, el movimiento de la recta depende de P y no de Q.

De los comentarios del foro, se seleccionó: *Se puede justificar trazando las dos diagonales AC y BD del cuadrado y observar los triángulos congruentes que se forman*. En el diálogo, los argumentos para sustentar la conjetura se basaron en las propiedades del cuadrado y sus diagonales, ángulos entre paralelas, ángulos opuestos por el vértice y congruencia de triángulos. Mostraron que $\Delta DOP \cong \Delta BOQ$, por el criterio ALA (Figura 4.1.6) y señalaron que los trapecios $AQPD$ y $QBCP$ eran congruentes ya que tenían las bases congruentes y la misma altura (AD=BC) por lo cual sus áreas eran iguales. Las ideas principales del diálogo las muestra la Figura 4.1.7.

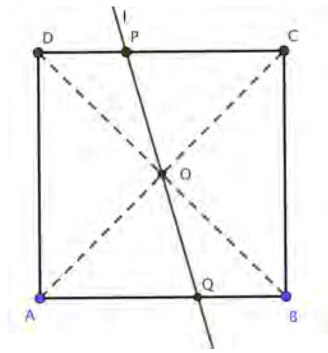


Figura 4.1.6. Imagen utilizada en el diálogo para justificar la conjetura.

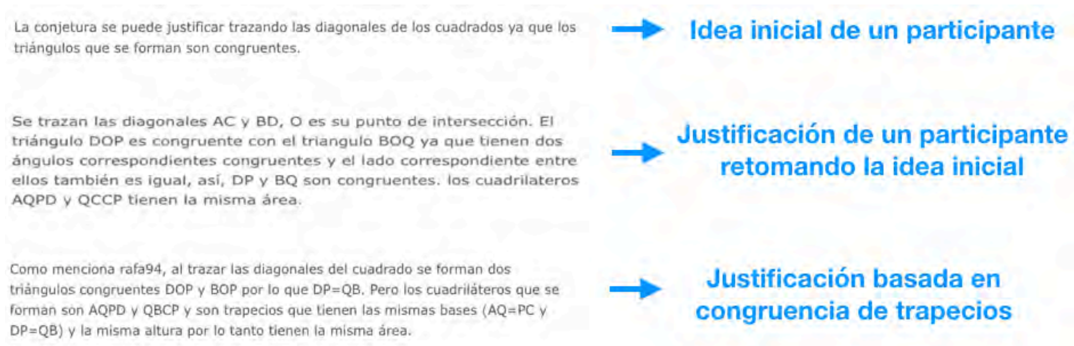


Figura 4.1.7. Justificación de cómo dividir un cuadrado en dos figuras de igual área.

Luego, el ED solicitó justificar la conjetura de la Tabla 4.1.3 utilizando argumentos diferentes a los expuestos en el diálogo anterior (Figura 4.1.7). Algunos participantes discutieron y proporcionaron retroalimentación a las ideas matemáticas del participante P_x, quien construyó y presentó un modelo del cuadrado y la justificación que muestra la Figura 4.1.8. cuestionó

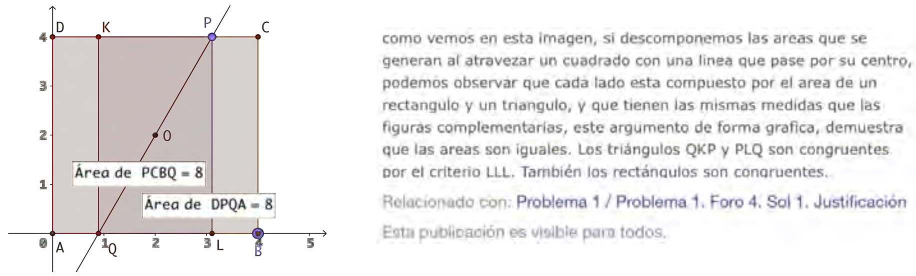


Figura 4.1.8. Justificación presentada por P_x.

Un participante afirmó que faltaba sustentar la congruencia de los rectángulos $AQKD$ y $LBCP$. El ED formuló la pregunta: "*¿Cómo sabes que los rectángulos tienen la misma área? ¿Cómo sustentar $AQ = PC$ para cualquier posición de P?*". En las respuestas señalaron que se debía trazar la mediatriz de AB (Figura 4.1.9) y observar que $\Delta QFO \cong \Delta PEO$ (criterio LAL) y así, concluir $AQ=PC$.

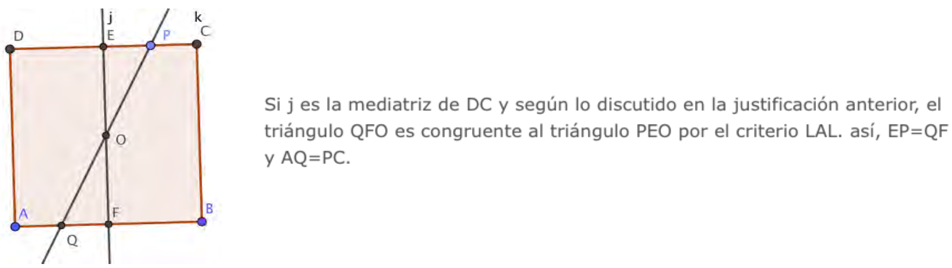


Figura 4.1.9. Argumentos presentados para completar la justificación de P_x.

El participante P_x indicó que las ideas propuestas eran correctas (Figura 4.1.10). Con esto, el seguimiento que dio P_x a sus comentarios le permitió completar la justificación que planteó inicialmente.

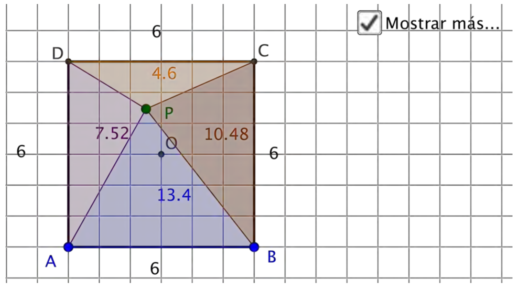
> sus observaciones son correctas, gracias. Es necesario demostrar que los rectángulos son iguales.

Figura 4.1.10. Comentario de P_x donde señala que su justificación estaba incompleta.

Solución 2

En la búsqueda de otra solución al problema de los granjeros, se proporcionó el modelo del cuadrado y la guía de trabajo de la Tabla 4.1.4. La actividad se puede consultar en https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-1-sol2-mov/.

Tabla 4.1.4.
Exploración de una segunda solución al problema de los granjeros.

	El movimiento de los objetos	Preguntas planteadas
Solución 2		Mueve el punto *P* y ayuda a los granjeros a encontrar una solución del problema. ¿Qué regiones les asignarías para que cada uno siembre la misma área?

Al igual que en la solución 1, los participantes centraron su atención en casos particulares del punto *P*, por ejemplo, el ED fijó un comentario que incluía las siguientes soluciones:

1. *P* es cualquiera de los vértices.
2. *P* es el punto medio de un lado.

En el diálogo, los participantes identificaron otras soluciones:

1. *P* pertenece a la diagonal del cuadrado.
2. *P* pertenece la mediatriz de un lado.

Un participante hizo un resumen de las soluciones y las compartió en el diálogo (Figura 4.1.11).

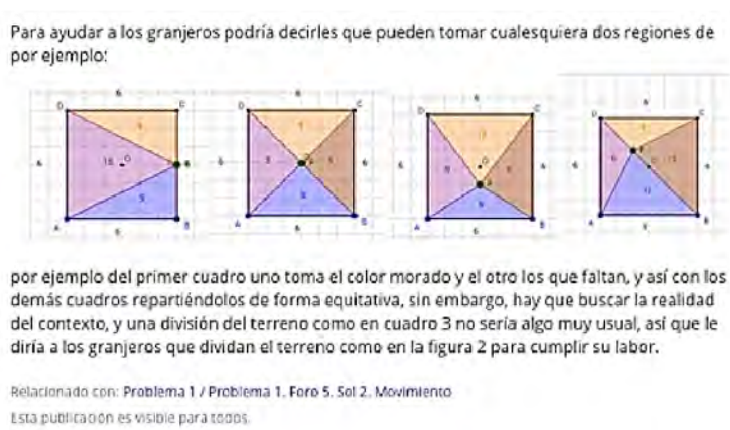


Figura 4.1.11. Resumen de las soluciones que compartió un participante.

Otros comentarios seleccionados fueron: (1) *al mover P siempre se forman cuatro triángulos* y (2) *la solución se obtiene cuando P coincide con algún vértice.* Se observó que los participantes proporcionaron retroalimentación a las ideas anteriores, por ejemplo, en el primero de los casos, mencionaron que la afirmación no era correcta ya que si *P* coincidía con alguno de los vértices (o *P* pertenecía a alguno de los lados) no se formaban cuatro triángulos. En el segundo de los casos, señalaron que al mover el punto *P* se podían verificar la existencia de otras soluciones. La Figura 4.1.12 muestra las ideas iniciales y la retroalimentación que recibieron.

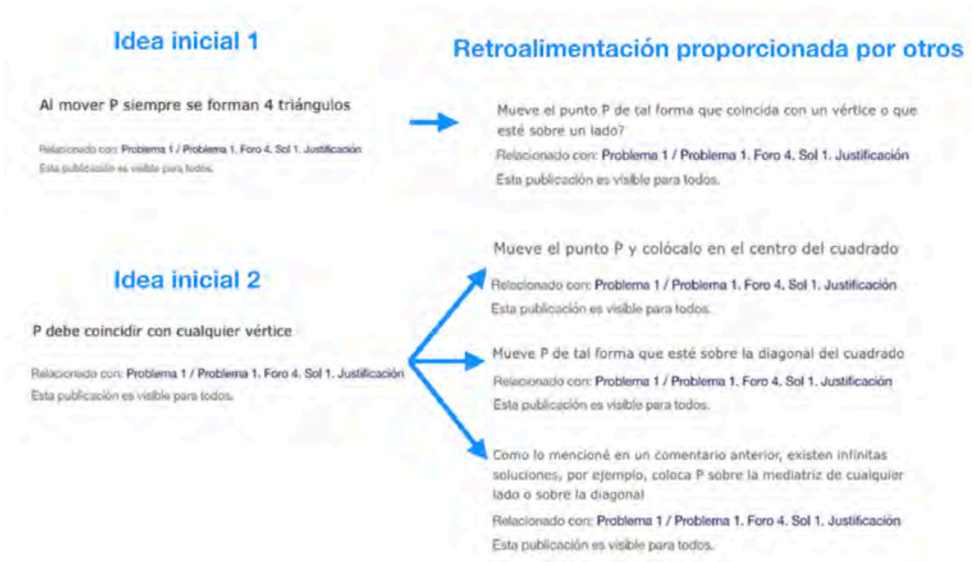
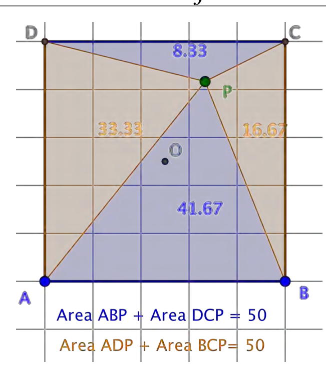


Figura 4.1.12. Ideas iniciales de dos participantes y retroalimentación proporcionada por otros.

La siguiente parte de la actividad tenía como objetivo guiar a los participantes hacia la formulación de una conjetura de cómo hacer la división del cuadrado (Tabla 4.1.5).

Tabla 4.1.5.
Hacia la formulación de una conjetura de segunda solución al problema de los granjeros.

Solución 2		¿Es posible identificar alguna relación entre los valores de las áreas? ¿Se cumple esta relación para cualquier posición del punto *P*? ¿Al variar la posición del punto *P*, qué ocurre con la suma de las áreas de los triángulos *APB* y *DCP*?

En los comentarios del foro, se observó que un participante centró su atención en un caso particular: "*al mover el punto P la suma de las áreas de APB y CPD siempre da como* *resultado 18".* Al seleccionar tal comentario, otros proporcionaron retroalimentación y ampliaron la idea, señalaron que al mover los puntos A o B se modificaba el valor del área del cuadrado y formularon la conjetura: *Si P es un punto que está dentro del cuadrado, la suma de las áreas de los triángulos APB y DCP es la mitad del área del cuadrado*.

El comentario inicial y algunas de las ideas del diálogo se presentan en la Figura 4.1.13.

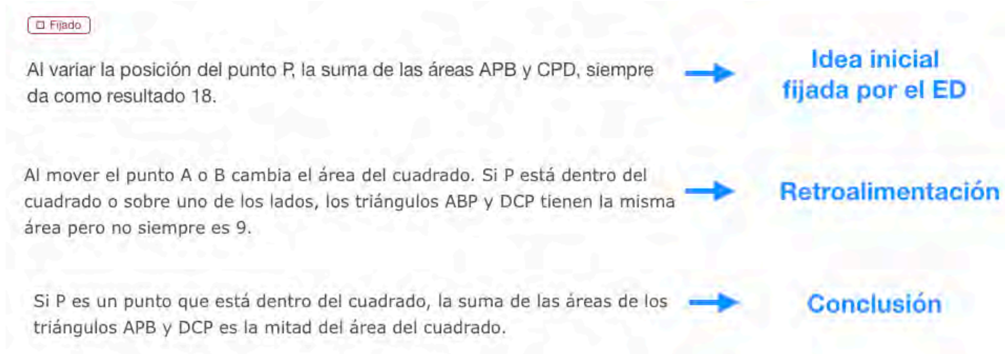
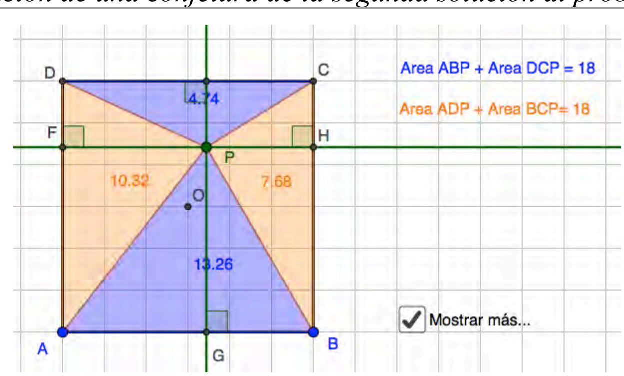


Figura 4.1.13. Retroalimentación proporcionada a un participante y formulación de una conjetura.

La siguiente tarea de los participantes consistió en presentar argumentos formales para sustentar la conjetura, para ello, se proporcionó el modelo dinámico y las preguntas de la Tabla 4.1.6.

Tabla 4.1.6.
Justificación de una conjetura de la segunda solución al problema de los granjeros.

Solución 2		Conjetura: *En el cuadrado ABCD, si P está en su interior, entonces siempre se cumple que: área APB+ área CPD= área APD + área BPC.* ¿Es posible identificar alguna relación entre los valores de las áreas? ¿Se cumple esta relación para cualquier posición del punto *P*? ¿Al variar la posición del punto *P*, qué ocurre con la suma de las áreas de los triángulos *APB* y *DCP*?

El ED identificó y seleccionó del foro: *al trazar las rectas perpendiculares que pasan por P y mediante congruencia de triángulos, se puede justificar la relación de igualdad entre las áreas de los triángulos APB y DCP*. En el diálogo algunos participantes:

1. Señalaron casos particulares y argumentos para sustentarlos, por ejemplo, cuando *P* coincide con uno de los vértices o está sobre uno de los lados del cuadrado.

2. Utilizaron las propiedades de rectas paralelas y perpendiculares y los criterios de congruencia de triángulos LLL y LAL para mostrar que $\Delta AGP \cong \Delta AFP$ (por LLL, AP es diagonal del rectángulo $AGPF$), $\Delta FPD \cong \Delta EPD$ (por LLL), $\Delta PEC \cong \Delta PHC$ (por LLL) y $\Delta GBP \cong \Delta HPB$ (por LLL). Esto les permitió concluir:

$$Area\Delta DCP + Area\Delta ABP = Area\ \Delta APD + Area\Delta BCP.$$

La Figura 4.1.14 muestra el comentario inicial y las conclusiones a las cuales llegaron los participantes.

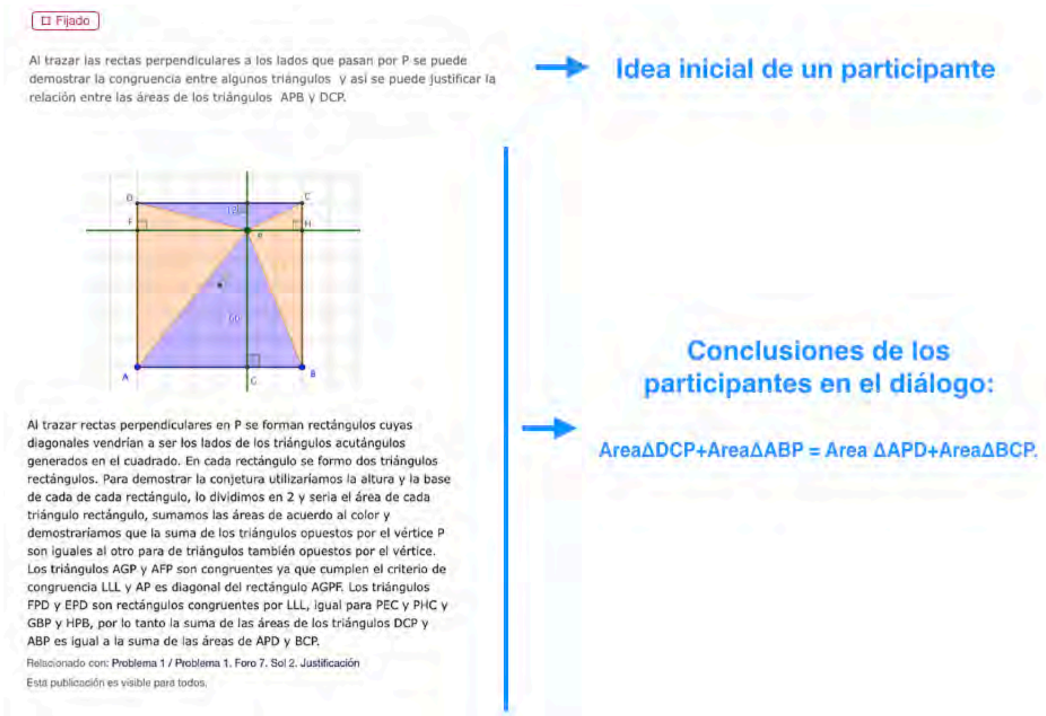
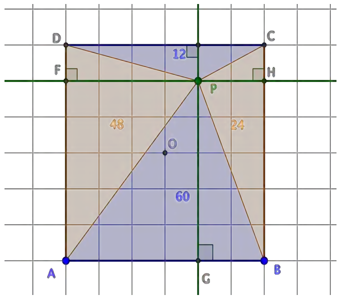


Figura 4.1.14. Una justificación de la Solución 2.

En otro diálogo, la atención se enfocó en las alturas de los triángulos $DCP\ y\ ABP$, cuando un participante afirmó: "*Sin importar la posición del punto P la suma de las alturas de los triángulos $DCP\ y\ ABP$ (de bases iguales) es igual al lado del cuadrado por lo tanto la suma de sus áreas es igual a la mitad del área del cuadrado"* (Figura 4.1.15), los demás estuvieron de acuerdo y señalaron que la relación entre las alturas de los triángulos $DCP\ y\ ABP$ resultó importante para justificar

$$Area\Delta DCP + Area\Delta ABP = \frac{Area\ ABCD}{2}.$$



Las suma alturas de los triángulos DCP y ABP se mantienen constantes cuando se mueve P, y su valor es igual a la longitud del lado del cuadrado. La suma de las áreas de los triángulos DCP y ABP es igual a la mitad del área del cuadrado ya que la suma de esas áreas es AB*GP/2 + DC*EP/2=AB(GP+EP)/2=AB(BC)/2=AB*AB/2.

Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 7. Sol 2. Justificación

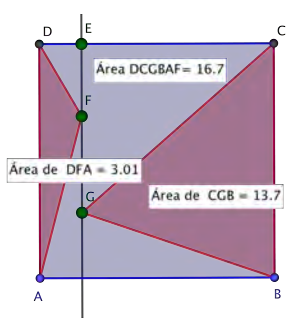
Esta publicación es visible para todos.

Figura 4.1.15. Justificación basada en el movimiento y la observación de invariantes.

Solución 3

La tercera solución del problema y los comentarios de los participantes se pueden consultar en el Anexo 4. Se observó que los participantes, basados en el movimiento de objetos, formularon una conjetura y la sustentaron apoyados en las ideas discutidas en los diálogos anteriores (Figura 4.1.15). Para extender la discusión del problema, el ED formuló las siguientes preguntas: *Dividimos el cuadrado en dos regiones de igual área, ¿qué otras preguntas podemos plantear?*

Algunos participantes utilizaron la idea discutida en la Solución 2: *Sin importar la posición del punto P, la suma de las alturas de los triángulos ADF y BCG es igual al lado del cuadrado* (Figura 4.1.14) para encontrar otra solución al problema. La estrategia que utilizaron fue colocar un punto móvil E sobre DC, trazar la recta perpendicular a DC que pasa por E y colocar dos puntos móviles F y G sobre esa recta (Figura 4.1.16).



Como mencionó Diego, la suma de las alturas de los triángulos AFD y BCG es constante y es igual al lado del cuadrado, sin importar la medida de su lado. Si sumamos las áreas de los triángulos DFA y CGB se tiene que es igual a la mitad del área del cuadrado, anteriormente Diego lo justificó: área DFA + área CGB= AD*AB/2=AB*AB/2 (AD=AB).

Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 5. Sol 2. Movimiento

Esta publicación es visible para todos.

Figura 4.1.16. Una nueva solución presentada por un participante.

Además, justificaron que área$\Delta AFD + área\Delta BGC$ es la mitad del área del cuadrado dado que, la suma de las alturas de ΔAFD y ΔBCG es igual a AB sin importar la posición de

$E, F\ y\ G$.También, utilizaron la idea, discutida en los diálogos anteriores, de que la suma de las alturas $\Delta AFE\ y\ \Delta DHE$ sobre AF y DH, respectivamente, era invariante e igual al lado del cuadrado para concluir: Area1=$área\Delta AFE + área\Delta DHE = \frac{1}{4}áreaABCD$.

Al final de la actividad, se envió un correo electrónico a todos los participantes del MOOC con un resumen del trabajo realizado en los diálogos. En general, todos coincidieron en que el aprendizaje de las matemáticas implica enfrentarse a un dilema que necesita resolverse en términos de observar la situación o concepto, formular preguntas y buscar siempre diferentes caminos para responderlas. El planteamiento de preguntas es un proceso que evoluciona y mejora cuando el estudiante constantemente se involucra en esta actividad. El resumen se puede consultar en el Anexo 5 (Comunicado 2).

4.1.2 Actividad 2

La tarea matemática presentada a los participantes incluyó un modelo que involucró rectas paralelas, perpendiculares, puntos simétricos y un triángulo. La Figura 4.1.7 muestra capturas de pantalla del modelo (los participantes avanzaban en su construcción utilizando las flechas resaltadas en color verde). La tarea se puede consultar en (https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-2/).

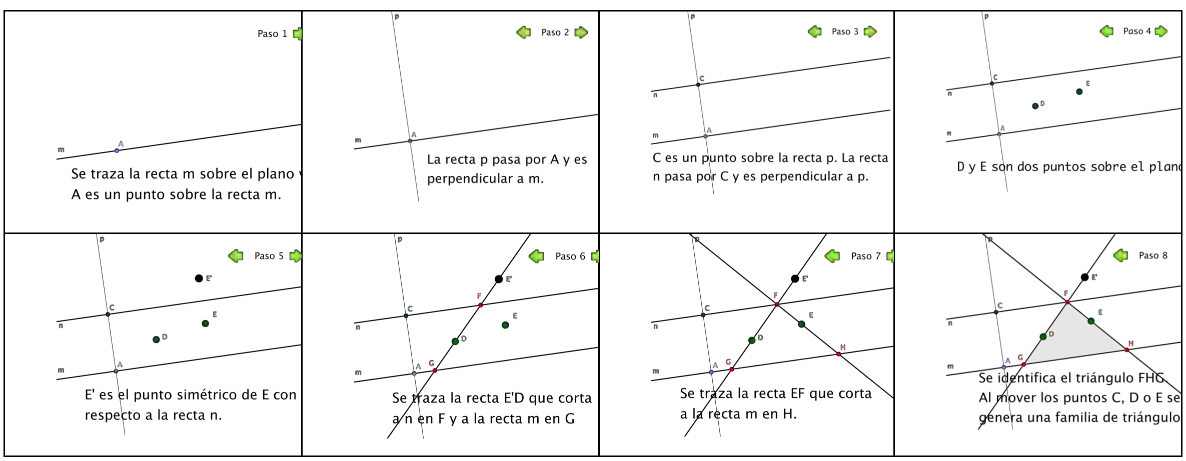


Figura 4.1.7. Modelo dinámico de la actividad 2.

En la fase del entendimiento del problema, se solicitó a los participantes mover los puntos *A, D* y *E* y analizar: *¿Se puede afirmar que la recta* n *es paralela a* m*? ¿Qué significa que* E' *sea el punto simétrico de* E *respecto a la recta* m*? ¿Qué propiedades cumple?*

En un diálogo, la idea inicial fue el V postulado de Euclides, se compartió el enlace a Wikipedia https://es.wikipedia.org/wiki/Quinto_postulado_de_Euclides). Esta información fue un punto de partida para que los participantes señalaran:

1. p es perpendicular a m,
2. los ángulos formados entre estas dos rectas miden 90^o y lo mismo sucede con p y n,
3. p es una recta transversal de m y n de tal manera que la medida de los ángulos internos del mismo lado suma 180^o,
4. Por lo tanto, m y n son rectas paralelas por el V postulado de Euclides (Figura 4.1.17).

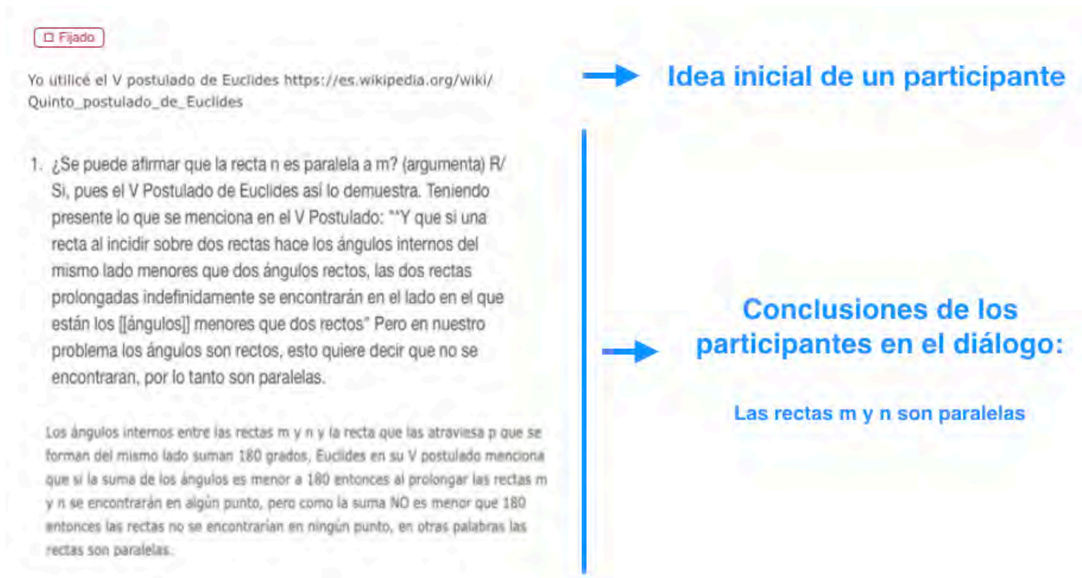
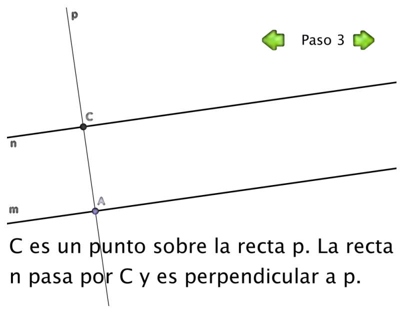


Figura 4.1.17. Justificación: las rectas *m* y *n* son paralelas utilizando el V Postulado de Euclides.

En el mismo diálogo, el ED cuestionó: *"¿Existe otra forma de justificar que las rectas m y n son paralelas?"*. En la búsqueda de respuestas, un participante construyó y presentó una justificación basada en geometría analítica (Figura 4.1.18). Utilizó los siguientes recursos: pendiente de recta, pendientes de rectas paralelas y pendientes de rectas perpendiculares y la estrategia de solución consistió en relacionar algebraicamente las pendientes de las rectas m, n y p para concluir que las pendientes de m y n son iguales.



> Si, las rectas m y n son paralelas. Sean p', p1 y p2 las pendientes de p, m y n respectivamente. Como m y p son perpendiculares se cumple que p' * p1= -1, de esta manera se obtiene que p1= -1/p'. De igual forma p' * p2= -1, así p2=-1/p'. Por tanto p1=p2, y esto garantiza el paralelismo entre m y n.

Figura 4.1.18. Otra forma de justificar que las rectas *m* y *n* son paralelas.

Algunos participantes señalaron que, pese a saber el concepto de pendiente de una recta y las relaciones entre rectas paralelas y perpendiculares, no hubieran logrado conectar tales recursos y concluir que *m* y *n* son rectas paralelas (Figura 4.1.19).

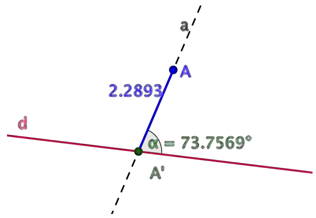
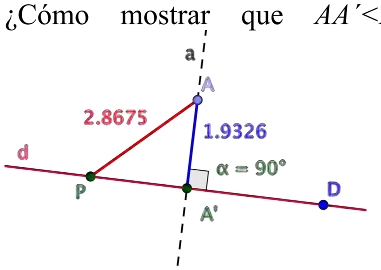
> Interesante forma de resolverlo, yo sabía el concepto de pendiente de una recta y las relaciones entre paralelas y perpendiculares, no hubiera logrado conectar las ideas como se hizo en la demostración anterior.

Figura 4.1.19. Evidencia de que un participante comprendió el razonamiento matemático expuesto en el foro.

La siguiente discusión se relacionó con la pregunta que incluyó la actividad: *¿Qué significa que E′ sea el punto simétrico de E respecto a la recta n?* Del foro se seleccionó el comentario: "*Si E' es simétrico a E significa que equidistan de la recta n"*. En el diálogo, el ED observó que no se mencionó el significado de distancia de un punto a una recta, por lo que presentó dos modelos dinámicos y un conjunto de preguntas para guiar el trabajo de los participantes hacia la comprensión del concepto. Se discutieron las siguientes ideas (la Tabla 4.1.8 muestra los modelos y las preguntas planteadas por el ED en los diálogos, también, presenta un resumen de las ideas planteadas por los participantes y las conclusiones):

1. La distancia de un punto *A* a una recta *d* se mide sobre la perpendicular a *d* que pasa por *A*.
2. Al mover el punto *A'*, la mínima distancia de *A* a la recta es cuando α mide 90^0.
3. Justificación de distancia de un punto a una recta: *El triángulo PA′A es rectángulo, por lo tanto, la hipotenusa AP siempre es mayor que AA′*.

Tabla 4.1.8.
Discusión sobre el concepto de distancia de un punto a una recta.

Intervención del ED	Comentarios en el foro	Conclusiones de los participantes
Wikipedia proporciona la definición de distancia de un punto a una recta como la distancia más corta entre un punto A y un punto A' perteneciente a la recta d, ¿cómo obtener tal distancia?  Al mover el punto A', ¿es posible obtener un segmento AA' de longitud mínima?	Los participantes mencionaron que al mover *A'* la distancia más corta de A a la recta *d* se obtiene cuando el ángulo α mide 90^0, es decir, la distancia se debe medir sobre la recta perpendicular a *d* que pasa por *A* (Parte del diálogo se presenta en la Figura 4.1.20).	La distancia de un punto *A* a una recta *d* se mide sobre la recta perpendicular a *d* que pasa por A.
¿Cómo mostrar que *AA´<AP*? 	La discusión inició cuando un participante señaló: "*Si P es diferente de A′ no es posible que AP sea menor que AA′*". Los demás coincidieron en: *El triángulo PA′A es rectángulo, por lo tanto, la hipotenusa AP siempre es mayor que AA′* (Algunos comentarios del diálogo se muestran en la Figura 4.1.21)	El segmento de menor distancia entre un punto *A* y una recta *d* se localiza sobre la recta perpendicular a *d* que pasa por *A*.

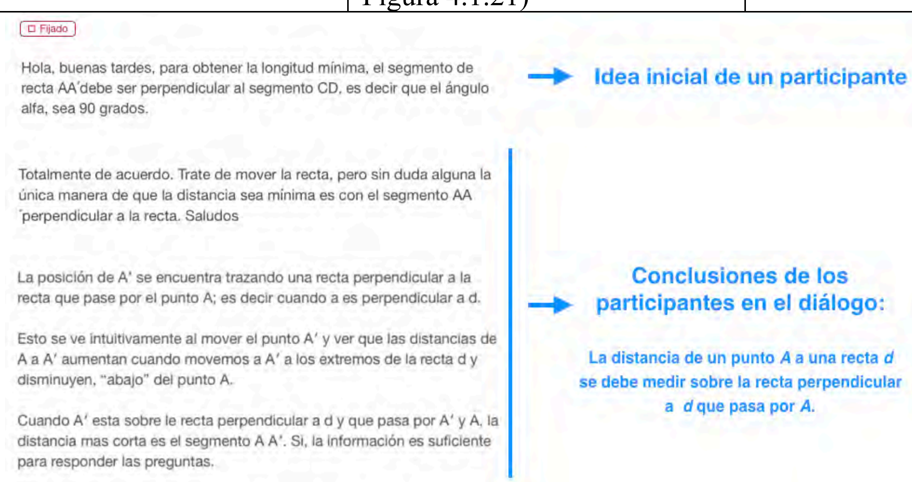


Figura 4.1.20. Discusión relacionada con la distancia de un punto a una recta.

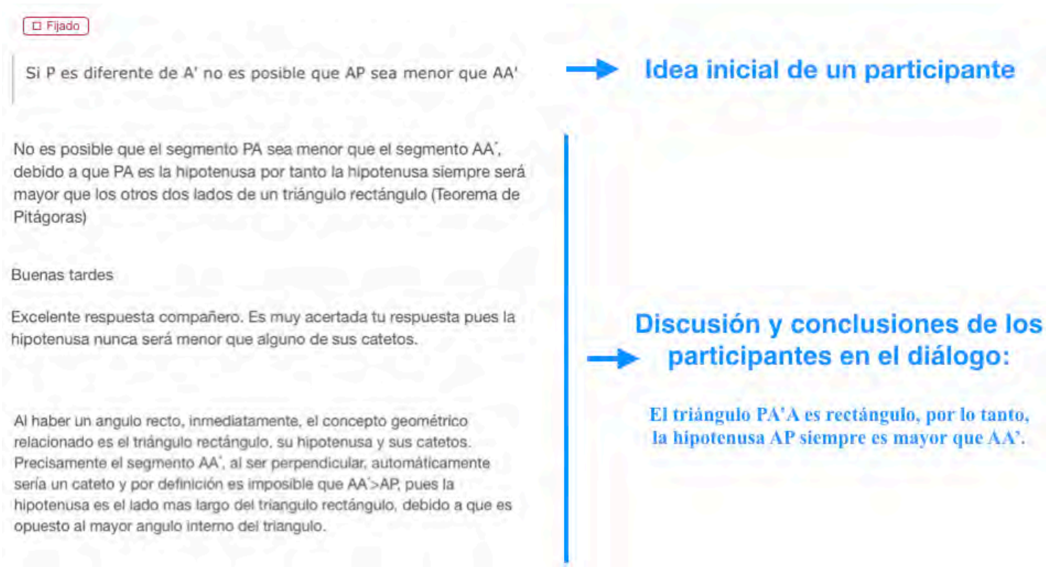


Figura 4.1.21. ¿Por qué el segmento de menor distancia entre un punto A y una recta d se localiza sobre la recta perpendicular a d que pasa por A?

En otro diálogo, un participante presentó una captura de pantalla de una representación dinámica que incluyó dos rectas paralelas m y n, el punto simétrico E' de E respecto a una de las rectas, el segmento EE' y su intersección E_1 con la recta n, además incluyó la longitud de los segmentos $E'E_1$ y EE_1 (Figura 4.2.7). El ED solicitó al participante compartir el modelo dinámico y así lo hizo. Algunos señalaron que al mover el punto E se mantenía la relación *E1E'=EE1*, además, las rectas n e i eran perpendiculares. La conclusión fue:

"*Si E' es simétrico a E respecto a la recta* n *significa que la recta EE' corta a* n *en E_1 de tal manera que las longitudes de E_1E y E_1E' son iguales y, además, EE' es perpendicular a* n". (Figura 4.1.22). También, emergió el concepto de mediatriz de un segmento (dada la construcción del modelo, la recta n es mediatriz de *EE'*)

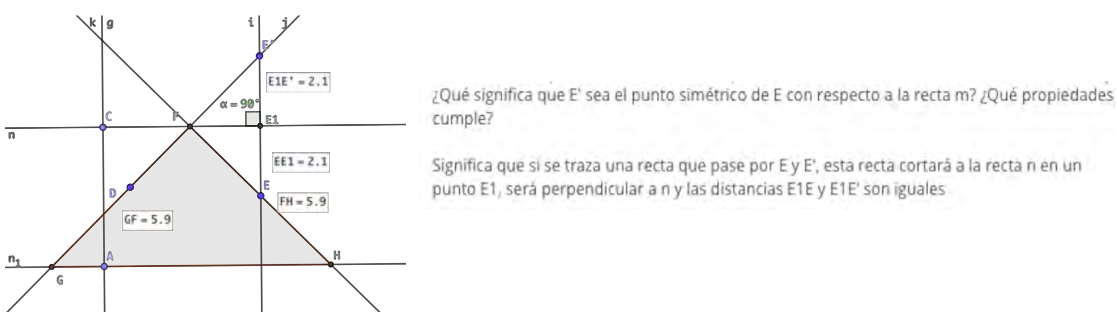
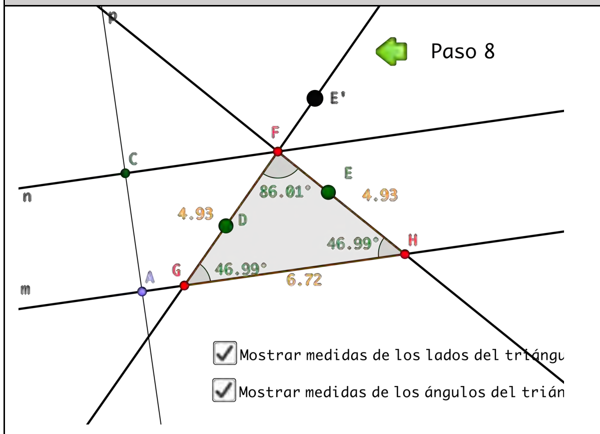


Figura 4.1.22. El concepto de punto simétrico con respecto a una recta. Una configuración dinámica compartida por un participante.

El siguiente parte de la actividad consistió en centrar la atención de los participantes en la familia de triángulos que se genera al mover los puntos D y E y sus propiedades (Tabla 4.1.9).

Tabla 4.1.9.
Formulación de una conjetura.

Modelo del problema proporcionado en la actividad 2	**Preguntas planteadas a los participantes**
	Al mover los puntos A, C, E y D ¿Qué propiedades tiene la familia de triángulos FGH? ¿Se conservan las propiedades para cualquier posición de los puntos E y D? Activa las casillas para mostrar las medidas de los lados y ángulos del triángulo. Al mover los puntos C, D y E ¿existe alguna relación entre los lados de la familia de triángulos FGH? ¿existe alguna relación entre sus ángulos?

Los razonamientos matemáticos seleccionados del foro fueron:

1. Al mover los puntos D y E, dos lados del triángulo FGH son congruentes.
2. Al mover los puntos D y E, dos ángulos del triángulo FGH son congruentes.
3. *Formulación de una conjetura*: La familia de triángulos FGH que se genera al mover D o E es isósceles.
4. Al mover los puntos D y E, no se puede generar un triángulo escaleno, pero si uno equilátero.
5. La idea errónea: un triángulo equilátero no es isósceles.
6. Existe de una posición de D para la cual no se generan triángulos y se identifican otras posiciones de los puntos D y E para las cuales no se genera un triángulo.
7. ¿Por qué se generan triángulos isósceles?

Algunos participantes señalaron que la familia de triángulos que se generaba al mover los puntos A, C, D y E era isósceles, ya que, $GF = HF$ y, además la medida de los ángulos FGH y FHG era igual. También, otros señalaron que no les fue posible generar un triángulo escaleno, pero si equiláteros (Figura 4.1.23). Además, reconocieron la importancia del movimiento y la medición de sus atributos de los objetos, ya que, esto les permitió observar la existencia de la familia de triángulos isósceles (Figura 4.1.24).

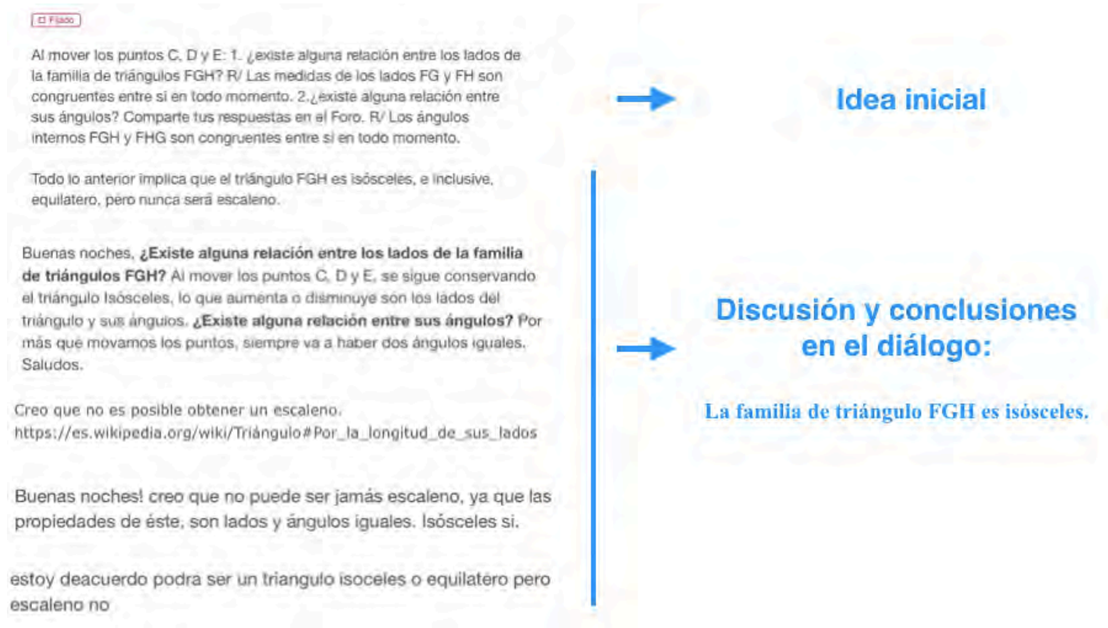


Figura 4.1.23. Comentarios de los participantes sobre la importancia del movimiento y la medición de los atributos de objetos.

Resulta muy interesante que al mover los puntos D y E se obtengan los valores de los lados y ángulos del triángulo, sin duda se trata de un isósceles.

Cuando inicié a estudiar el problema no vi que el triangulo fuera isósceles pero con las medidas inmediatamente pude ver la relación entre los lados, es una excelente herramienta que aplicaré con mis estudiantes

Figura 4.1.24. Comentarios de los participantes sobre la importancia del movimiento y la medición de los atributos de objetos.

El ED seleccionó del foro un comentario relacionado con las posiciones de los puntos *D* y *E* donde no se genera un triángulo. En el primero un participante identificó una posición del punto *D (D=E)* (Figura 4.1.25) y en el diálogo algunos señalaron:

1. *Si D, E y F son colineales entonces G tiene la misma posición que H y no se genera un triángulo.*
2. *Si la recta DE' es paralela a n no es posible construir el triángulo FGH (Figura 4.1.26).*

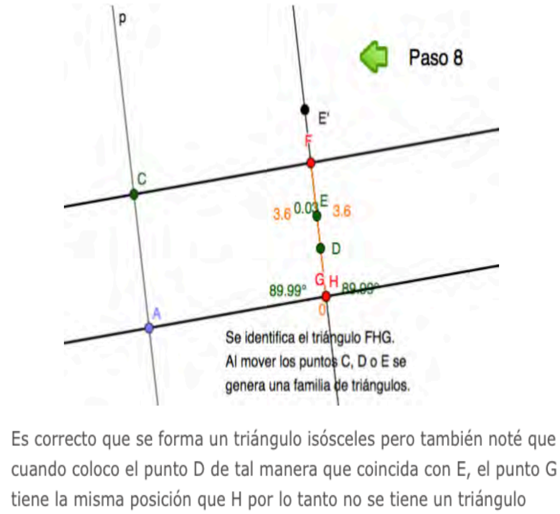
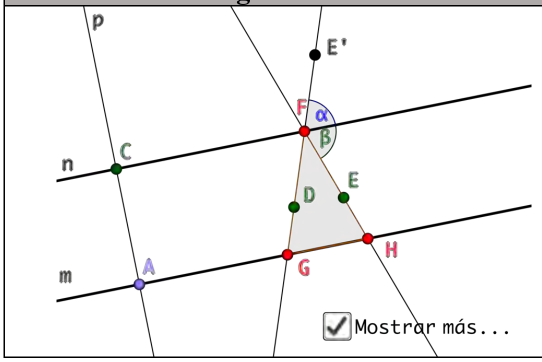


Figura 4.1.25. Una posición de los puntos D y E donde no es posible generar una familia de triángulos isósceles.

Figura 4.1.26. Una posición de los puntos D y E' donde no es posible generar una familia de triángulos isósceles.

Para justificar la conjetura, la actividad incluyó un nuevo modelo del problema y un conjunto de preguntas a los participantes (Tabla 4.1.10).

Tabla 4.1.10. *Recursos y preguntas para justificar la conjetura.*

Modelo del problema de una familia de triángulos isósceles	**Preguntas para guiar el trabajo de los participantes**
	¿Cómo justificar que todo elemento de la familia de triángulos FGH que se genera es "siempre" isósceles? ¿Qué relación existe entre los ángulos α y β? ¿Por qué? ¿En qué ayuda lo anterior para justificar que cada elemento de la familia de triángulos FGH es isósceles?

Algunos participantes proporcionaron argumentos basados en el concepto de punto simétrico respecto a una recta y rectas paralelas para sustentar que $\measuredangle\ \alpha \cong \measuredangle\ \beta$. Emergió el concepto de bisectriz de un ángulo. La Figura 4.1.27 presenta el comentario inicial, un resumen de las ideas matemáticas y las conclusiones del diálogo.

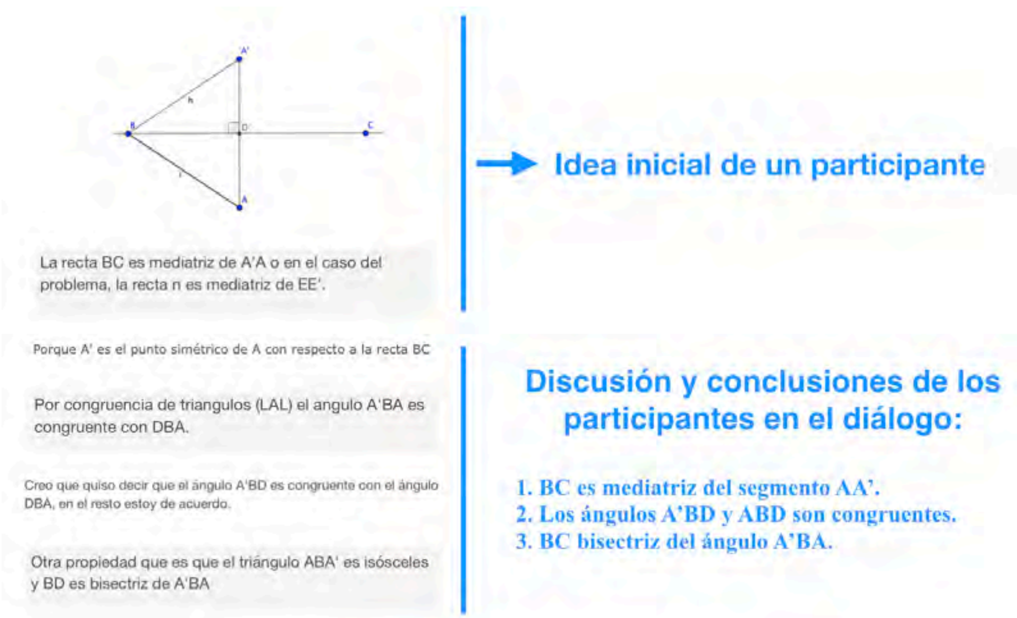


Figura 4.1.27. Diálogo: justificación $\measuredangle\alpha\cong\measuredangle\beta$.

En el otro diálogo, los participantes utilizaron los recursos: ángulos opuestos por el vértice y ángulos que se forman entre dos rectas paralelas y una transversal para sustentar que la familia de triángulos generada al mover los puntos E y E' es isósceles. Los argumentos fueron:

1. $\measuredangle\ CFG \cong \measuredangle\ \alpha$ (opuestos por el vértice).

2. $\measuredangle FGH \cong \measuredangle \alpha$ y $\measuredangle GHF \cong \measuredangle \beta$ (alternos internos entre paralelas).

3. Como $\measuredangle \alpha \cong \measuredangle \beta$ entonces $\measuredangle FGH \cong \measuredangle GHF$ y, por lo tanto, ΔFGH es isósceles.

La Figura 4.1.28 muestra el resumen que hizo un participante de las ideas expuestas en el diálogo.

Figura 4.1.28. Justificación de que la familia de triángulos *FGH* es isósceles.

Al final de la actividad, el ED hizo un resumen de las principales ideas de los diálogos y envió la información a los participantes. Se resaltó que, en esta actividad, el punto de partida no es el enunciado o problema; se inicia "armando" o construyendo una configuración o modelo dinámico que involucra algunos objetos matemáticos simples (rectas, puntos, segmentos, ángulos, etc.). En el proceso de ir construyendo la configuración se plantean interrogantes sobre el comportamiento de algunos atributos (medida de ángulos, propiedades de triángulos, perímetros, áreas, etc.) que llevan a la formulación o búsqueda de conjeturas o relaciones entre objetos y propiedades. La idea es siempre buscar y presentar distintos tipos de argumentos que sustenten esas conjeturas. La validación de una conjetura puede transitar desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de una "prueba" que involucra, por ejemplo, criterios de congruencia de triángulos o procedimientos analíticos. El resumen enviado a los participantes se puede consultar en el Anexo 5 (Comunicado 3).

4.1.3 Discusión de primera parte del MOOC y respuesta a la primera pregunta de investigación

La plataforma MéxicoX posee un conjunto de herramientas que permitieron diseñar un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario de aprendizaje MOOC, en el cual las actividades matemáticas integraron Recursos (modelos dinámicos GeoGebra, información de Wikipedia y KhanAcademy), medios de Soporte y Evaluación (el foro). El uso de los modelos construidos en GeoGebra ofreció oportunidades a los participantes para observar el movimiento de los objetos como un elemento importante en la exploración de los problemas. Por ejemplo, el análisis de casos particulares y la cuantificación de los atributos de los objetos. Además, los diferentes modelos de la solución del problema, proporcionados en el MOOC, posibilitaron que los participantes identificaran conexiones entre conceptos matemáticos.

El foro hizo posible que los participantes tuvieran la oportunidad de compartir sus ideas y participar en su discusión a través de diálogos dentro de una comunidad heterogénea. En los diálogos se involucraron participantes con niveles académicos de licenciatura, maestría y doctorado (para más detalles véase la Tabla 1 del Anexo 3).

Un factor que resultó de importancia, durante el desarrollo de las actividades, fue la clasificación y la jerarquización de los comentarios en el foro que hizo el ED. Esta selección fue importante para guiar la discusión de los participantes y representó un vehículo para compartir ideas, plantear dudas, recibir retroalimentación, así como proponer nuevos acercamientos y otros problemas. En los diálogos, se observaron dos elementos en común:

1. El rol que asumieron algunos participantes de dar retroalimentación o ayuda a otros, es decir, responder dudas, complementar ideas o señalar y corregir errores. Esto resultó importante ya que promovió que los participantes desarrollaran las actividades sin depender de la figura de un tutor o profesor como en un ambiente de aprendizaje tradicional.
2. Cuando el ED formuló una pregunta, los participantes buscaron y compartieron diversas respuestas, esto permitió la discusión de ideas o razonamientos matemáticos.

En este sentido, se responde a la primera pregunta de investigación:

¿Cómo diseñar un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario de aprendizaje MOOC, que ofrezca a los participantes diversas oportunidades para involucrarse en actividades del quehacer matemático?

El diseño de las actividades se estructuró alrededor de tres fases relacionadas con el movimiento de los objetos, la formulación de una conjetura y su justificación:

1. *Movimiento de los objetos.* Los modelos dinámicos de los problemas generaron oportunidades a los participantes para cuestionarse sobre el significado de conceptos matemáticos y sobre la búsqueda de relaciones entre los objetos involucrados. Las actividades incluyeron preguntas que guiaron a los participantes a cuestionarse sobre la información relevante en la representación dinámica del problema y dar significado a los conceptos matemáticos involucrados. Por ejemplo, en la fase de comprensión del problema de los granjeros (Actividad 1) los participantes compartieron algunas propiedades del cuadrado relacionadas con la congruencia de sus lados, de sus diagonales y de sus ángulos. Otros compartieron información de Wikipedia sobre el cuadrado y elaboraron una lista de sus propiedades (Figura 4.1.2). En la Actividad 2, buscaron información en Internet sobre el concepto de rectas paralelas y perpendiculares y discutieron el postulado V de Euclides (Figura 4.1.17). Además, las preguntas que formuló el ED permitieron a los participantes discutir conceptos de pendientes de rectas paralelas y perpendiculares (Figura 4.1.17 y 4.1.18); discutir el significado de punto simétrico (Figura 4.1.20 y 4.1.21); y, analizar el significado geométrico de distancia de un punto a una recta (Tabla 4.1.8). La evidencia indica que la participación en los diálogos les permitió discutir diversos conceptos y relaciones matemáticas a partir de compartir ideas y buscar respuestas en forma colaborativa.
2. *Formulación de una conjetura.* El segundo objetivo de las actividades estuvo relacionado con la formulación de conjeturas, por parte de los participantes, que dieran cuenta del comportamiento de algunos objetos matemáticos involucrados en el modelo del problema. Para justificar visual y empíricamente las conjeturas, las actividades hicieron explícita la importancia de las estrategias de movimiento de los objetos y la cuantificación de atributos de objetos matemáticos involucrados en el modelo del problema. Para ello, se incluyeron preguntas para guiar el proceso de exploración. En la búsqueda de las

respuestas, los participantes proporcionaron argumentos empíricos o visuales para justificar o refutar las conjeturas. En este sentido, encontraron información relevante sobre el comportamiento o propiedades de objetos por medio de la cuantificación de sus atributos y el análisis del lugar geométrico.

Por ejemplo, en la fase de exploración del modelo de la Solución 1, los participantes identificaron únicamente soluciones particulares (Figura 4.1.3), las preguntas en las actividades guiaron su trabajo hacia la búsqueda de una solución general (Figura 4.1.5). En la Solución 2, cuando centraron su atención en dos casos particulares para dividir el área del cuadrado, otros proporcionaron retroalimentación y extendieron las ideas iniciales hacia la búsqueda de la solución general (Figura 4.1.12 y 4.1.13).

En la Actividad 2, en la exploración del modelo dinámico, un participante identificó posiciones de algunos de sus puntos donde no era posible generar la familia de triángulos isósceles. Esta idea fue explorada por otros y determinaron otra situación donde tampoco se generaban los triángulos (Figura 4.1.25 y 4.1.26). En los diálogos de la Actividad 2, los participantes reconocieron la importancia del movimiento de objetos y la cuantificación de sus atributos en la búsqueda de patrones, invariantes y relaciones entre los elementos que conforman la representación dinámica del problema (Figura 4.1.23 y 4.1.24).

3. *Justificación.* El tercer objetivo estuvo relacionado con la justificación de las conjeturas, se cuestionó a los participantes con la finalidad de que construyeran y presentaran argumentos que involucraran conceptos, propiedades y resultados matemáticos para sustentar las conjeturas. En este proceso, los resultados muestran que los participantes de los diálogos:
    a. Transitaron desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta aquellos que involucran, por ejemplo, propiedades de alguna figura geométrica conocida, criterios de congruencia de triángulos o procedimientos basados en álgebra, cálculo o geometría analítica. Por ejemplo, en la Solución 1 de la Actividad 1, sustentaron las conjeturas formuladas utilizando congruencia de triángulos (Figura 4.1.5, 4.1.6 y 4.1.7). El ED solicitó a los participantes que proporcionaran otros argumentos, cuando uno de ellos presentó una justificación geométrica incompleta (Figura 4.1.8), otros brindaron retroalimentación al señalar y

completar la parte faltante para que, a su vez, completara la justificación (Figura 4.1.9).

b. Presentaron diferentes argumentos en la justificación de las conjeturas. El seguimiento que dieron los participantes a las ideas de los diálogos resultó importante ya que les permitió conocer las ideas de otros y aplicarlas en los procesos de la resolución de los problemas, por ejemplo: en la Solución 2 de la actividad 1, la pregunta que planteó el ED (¿Es posible justificar la conjetura mediante el uso de otros argumentos?) generó una discusión donde los participantes identificaron la importancia de la relación de igualdad entre la suma de las alturas de los triángulos de bases paralelas y el lado del cuadrado para sustentar la conjetura (Figura 4.1.15). Se observó que esta idea fue utilizada como argumento principal en la justificación de la Solución 3 (Figura 1, Anexo 4) y fue la base para construir una nueva manera de dividir el área del cuadrado en partes iguales (4.1.16). En la Actividad 2, utilizaron los conceptos y propiedades de rectas paralelas y punto simétrico, estudiadas en la parte inicial de la actividad, para sustentar de dos maneras diferentes que la familia de triángulos es isósceles (Figura 4.1.27 y 4.1.28). Cuando en un diálogo se presentó una justificación matemáticamente errónea (donde se utilizó lo que se deseaba mostrar como parte de las hipótesis) para la Solución 3, otros proporcionaron retroalimentación: señalaron el error y mencionaron que el movimiento de objetos permite observar casos donde la conjetura formulada no se cumple (Tabla 2, Anexo 4).

En resumen, las actividades se convirtieron en plataformas donde los participantes se involucraron en el análisis de las diferentes formas de enfocar y ampliar los problemas. La Figura 4.1.29 resume los elementos principales en el proceso de diseño de las actividades, se resalta el uso de GeoGebra, fuentes de información en Internet y el foro como medios que favorecen y promueven la adquisición de recursos, estrategias y la disposición de involucrarse en actividades que reflejen la práctica matemática.

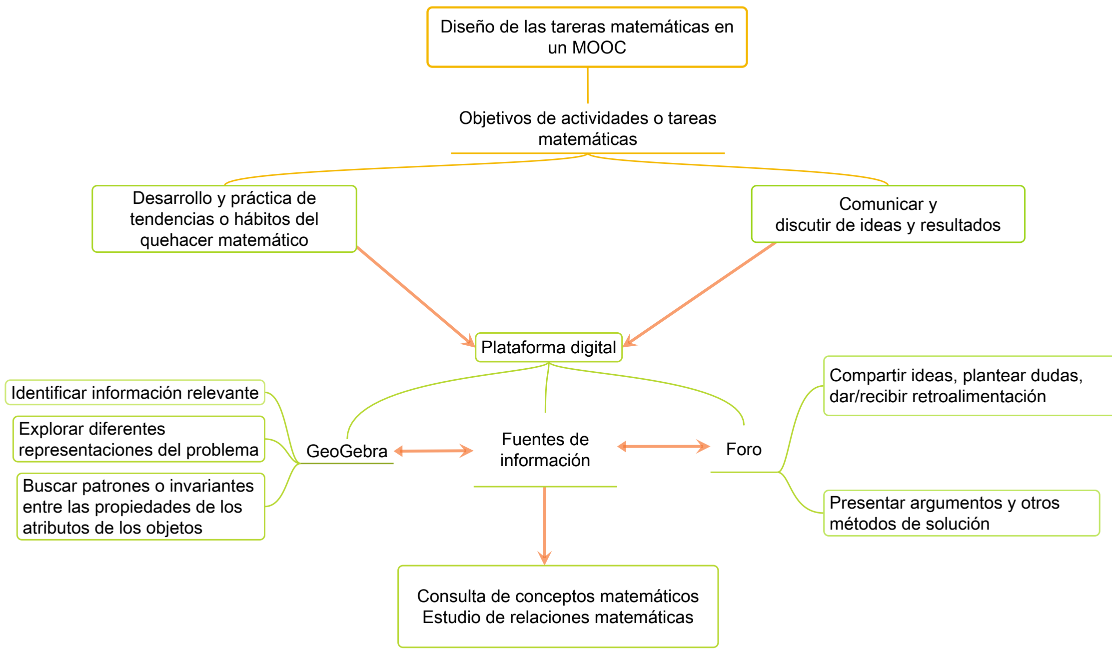


Figura 4.1.29. Elementos del diseño de las actividades.

4.2 Desempeño de los participantes en el segundo grupo de actividades

En esta sección se documenta la forma en que una comunidad masiva y heterogénea, a través de los diálogos, exhibe, proporciona retroalimentación y modifica sus ideas o razonamientos matemáticos al utilizar diversas tecnologías digitales. Para esto, se analiza el trabajo de los participantes en las actividades 3, 4 y 5 y en las respuestas de los cuestionarios del MOOC. Se elaboró un resumen en el que se muestra cómo las actividades del MOOC, la interacción de los participantes en los diálogos y el monitoreo que realizó el ED en la clasificación y la jerarquización de los comentarios resultaron importantes en los procesos de la resolución de las tareas.

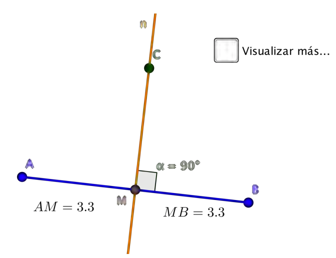
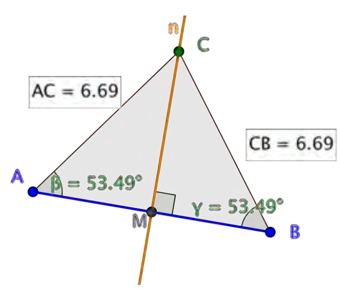
4.2.1 Actividad 3

En esta actividad se estudiaron propiedades y relaciones que resultan en la construcción de triángulos isósceles, equiláteros y rectángulos. El objetivo fue ilustrar que con el uso de un Sistema de Geometría Dinámica es posible construir modelos o configuraciones que llevan a identificar relaciones y resultados matemáticos. El trabajo de los participantes consistió en observar el comportamiento de los objetos y atributos (longitud, medida de ángulos, áreas, perímetros, etc.) que resulta al mover algunos elementos dentro de la configuración, formular conjeturas o relaciones matemáticas que inicialmente se sustentan con argumentos visuales o empíricos.

La mediatriz de un segmento y el triángulo isósceles

La configuración dinámica involucró un segmento AB, su punto medio M, la recta n perpendicular a AB que pasa por M, el punto C sobre la recta n y el triángulo ABC. Los modelos dinámicos y el conjunto de preguntas para guiar el trabajo de los participantes se presentan en la Tabla 4.2.1. Se seleccionaron 16 comentarios de los participantes en el foro de discusión. La tarea se puede consultar en https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-3/.

Tabla 4.2.1.
Recursos y conjunto de preguntas de la actividad: El segmento y su punto medio.

Modelo del problema de una familia de triángulos isósceles	**Preguntas para guiar el trabajo de los participantes**
	¿Qué observas al cambiar o mover las posiciones de los puntos A y B? Se traza un punto C sobre la recta n. Observa que el punto C se puede mover sobre la recta.
	Al mover el punto C sobre la recta n se genera una familia de triángulos. ¿Qué propiedades cumple cada uno de los triángulos ACB para las distintas posiciones del punto C? (¿Por qué?) ¿Qué pasa cuando el punto C coincide con el punto M?

El ED seleccionó del foro el comentario: *Al mover los puntos A y B, la recta n es perpendicular a AB y M es el punto medio de AB, es decir, n es la mediatriz de AB*, y generó una discusión, en la cual algunos participantes señalaron que, al mover los puntos A, B y C:

1. La relación de igualdad entre las longitudes de los segmentos AM y MB, con esto identificaron a M como el punto medio de AB.
2. El ángulo BMC era recto.

Dadas las dos afirmaciones anteriores, concluyeron que la recta n era la mediatriz de AB. También, señalaron que si $C = M$ entonces no se formaba un triángulo, ya que los puntos A, C y B eran colineales (Figura 4.2.1).

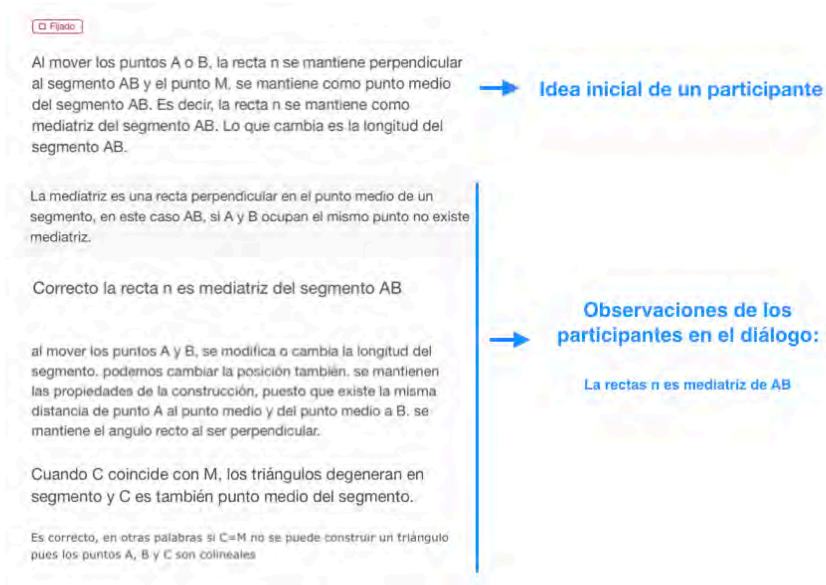


Figura 4.2.1. El concepto de mediatriz.

Otro de los comentarios seleccionados fue: *Al mover el punto C sobre la recta n, el triángulo ABC es isósceles*. En la discusión que generó, algunos participantes señalaron que el movimiento de los objetos que conforman el modelo del problema y la medición de la longitud de los lados AC y BC y de los ángulos ABC y CAB (véase Tabla 4.2.1) les permitieron observar que la familia de triángulos *ABC* era isósceles. Formularon la conjetura: *al mover el punto C se genera una familia de triángulos isósceles*. Además, identificaron que cuando C coincide con M, no se formaba un triángulo. (Figura 4.2.2).

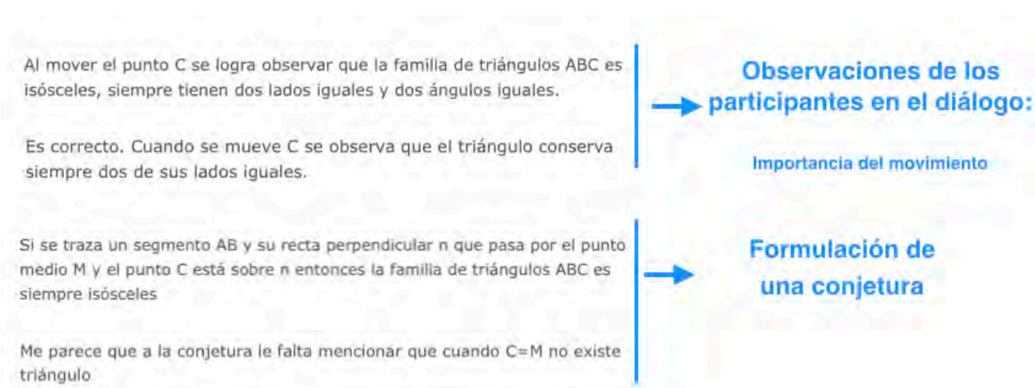


Figura 4.2.2. Importancia del movimiento de objetos y formulan una conjetura.

El ED identificó y seleccionó del foro un comentario donde un participante no estaba de acuerdo con que, al mover C, se generaba una familia de triángulos ABC isósceles ya que, observó la existencia de un triángulo equilátero y, para según él, un triángulo equilátero no puede ser isósceles. Algunos participantes centraron su atención en tales ideas y proporcionaron retroalimentación, para esto, consultaron la definición y propiedades del triángulo isósceles en Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Triángulo_equilátero y https://es.wikipedia.org/wiki/Triángulo#Clasificaci.C3.B3n_de_los_tri.C3.A1ngulos). A partir de la información de las páginas web anteriores, señalaron:

1. Todo triángulo equilátero es isósceles, ya que, por definición, un triángulo isósceles debe tener al menos dos lados congruentes.
2. Todo triángulo equilátero es equiángulo y viceversa.

La Figura 4.2.3 muestra el comentario que fijó el ED y un resumen de las ideas compartidas en el diálogo y las conclusiones obtenidas.

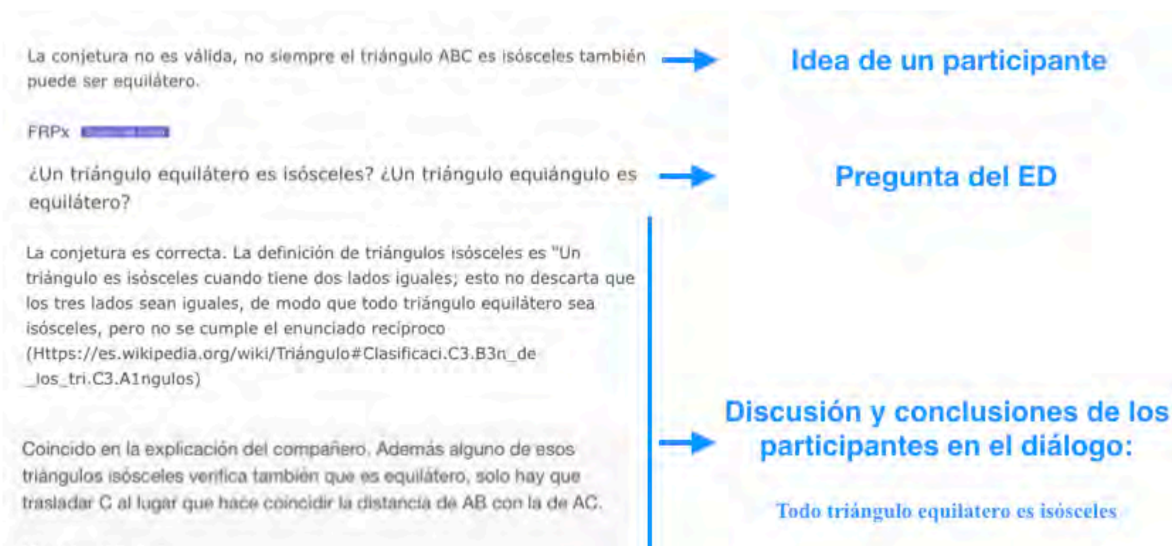


Figura 4.2.3. Algunos de los cometarios de un diálogo donde se discute la validez de la conjetura formulada.

Otro comentario seleccionado del foro fue: *¿Cómo se justifica que la familia de triángulos ABC es isósceles*? En el diálogo, se presentaron argumentos geométricos: los triángulos AMC y BMC son congruentes (Véase la Tabla 4.3.1), por lo tanto, $AC \cong BC$ y $\angle BAC \cong \angle ABC$ sin mencionar el criterio de congruencia utilizado. Luego, algunos complementaron la justificación al indicar que los triángulos AMC y BMC son congruentes por LAL y que los triángulos isósceles tienen dos lados y dos ángulos congruentes (Figura 4.2.4).

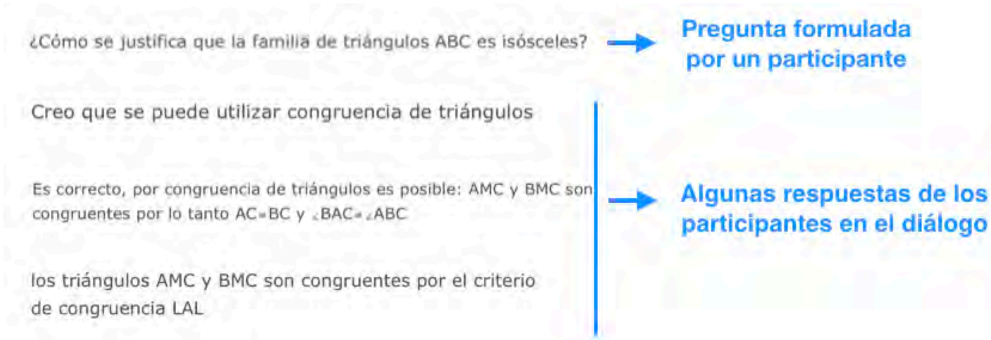


Figura 4.2.4. Pregunta formulada y un resumen de las respuestas.

Del foro se seleccionó un comentario en el cual se cuestionó: *¿Se puede justificar la conjetura de otra manera?* En el diálogo, no se utilizó el criterio de congruencia LAL ya que había sido parte de los argumentos del diálogo anterior. La discusión se dio en torno a una idea matemáticamente incorrecta: *los triángulos AMC y BMC son congruentes por el criterio de congruencia* ALA. Algunos participantes dieron retroalimentación al señalar que tal justificación era incorrecta, dado que, se utilizaba como argumento la idea que se quería demostrar: $\angle BAC \cong \angle ABC$ (Figura 4.2.5).

Es importante visualizar todas las propiedades presentes, ya que una sola que no consideremos nos puede hechar abajo la demostración. En este caso, si hubiésemos empezado por el hecho de que el triángulo AMC y BMC son rectángulos, no podemos hablar del criterio de congruencia LAL, sin antes observar que M es el punto medio del segmento AB, por lo tanto, tienen la misma medida, y que los dos triángulos comparten un mismo lado, que es la altura del triángulo y a la vez la mediatriz, solo en este momento podemos hablar del criterio LAL y concluir que los triángulos son iguales,por lo tanto visualizamos los dos lados iguales y el triángulo es isósceles.

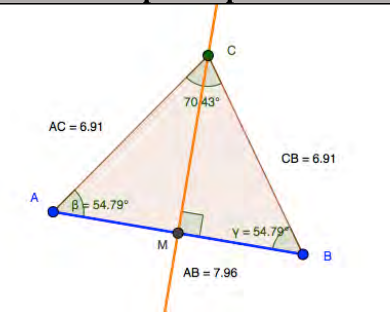
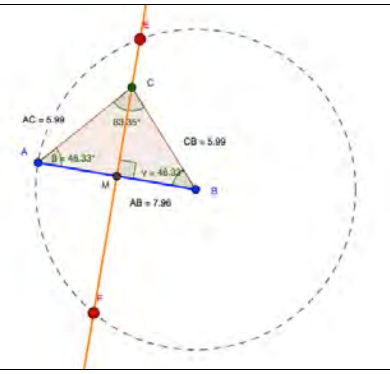
Figura 4.2.5. Retroalimentación proporcionada en el diálogo.

El triángulo equilátero

En la siguiente parte de la actividad el objetivo fue determinar la posición del punto *C* para obtener un triángulo equilátero. La actividad incluyó la configuración dinámica y las preguntas de la Tabla 4.2.2.

Tabla 4.2.2.

Recursos y conjunto de preguntas de la actividad: El segmento y su punto medio.

Configuraciones proporcionadas a los participantes	**Preguntas para guiar el trabajo de los participantes**
	¿Se puede encontrar la posición exacta del punto *C*, sobre la recta *n,* de tal forma que *AB=AC*? ¿el triángulo *ABC* es equilátero? Se dificulta encontrar el punto exacto donde los tres lados del triángulo sean congruentes o bien, que la medida de sus ángulos internos sea de 60 grados cada uno. ¿Cómo identificar la posición exacta del punto *C* para que el triángulo *ABC* sea equilátero sin depender de la precisión de la herramienta?
	En la representación se traza una circunferencia de radio *AB* y centro *B* que interseca a la recta *n* en dos puntos. Mueve el punto *C* y trata de formar un triángulo equilátero. Enuncia el resultado matemático que identifica el tipo de triángulo que se forma al considerar el punto de intersección de la recta y la circunferencia como el vértice del triángulo.

El ED seleccionó el comentario: "*se puede hacer que el triángulo sea equilátero, pero no cumple que sus tres ángulos sean congruentes"*. En el diálogo, los participantes identificaron que si $C = E$ era posible obtener tres segmentos (*AB, BC* y *AC*) congruentes. Como punto de partida, definieron el triángulo equilátero y señalaron que es imposible que posea tres lados congruentes y no ser equiángulo. También, mencionaron: *Sea un segmento AB y su recta mediatriz n y sea la circunferencia de radio AB con centro A, si E es el punto de intersección de la circunferencia y la recta n entonces el triángulo ABE.*

Durante el seguimiento dado al diálogo, el ED planteó la pregunta: *¿Cuántos triángulos equiláteros es posible construir dadas las condiciones iniciales del problema?* En las respuestas, reformularon la afirmación anterior: *Sea un segmento AB y su recta mediatriz n y sea la circunferencia de radio AB con centro A o B, si E y F son los puntos de intersección de la circunferencia y la recta n entonces los triángulos ABE y ABF son equiláteros.*

Así, identificaron el triángulo *ABF* equilátero y señalaron que otra forma de obtener un triángulo equilátero es construir el círculo de radio *AB* y centro en *A* (Figura 4.2.6).

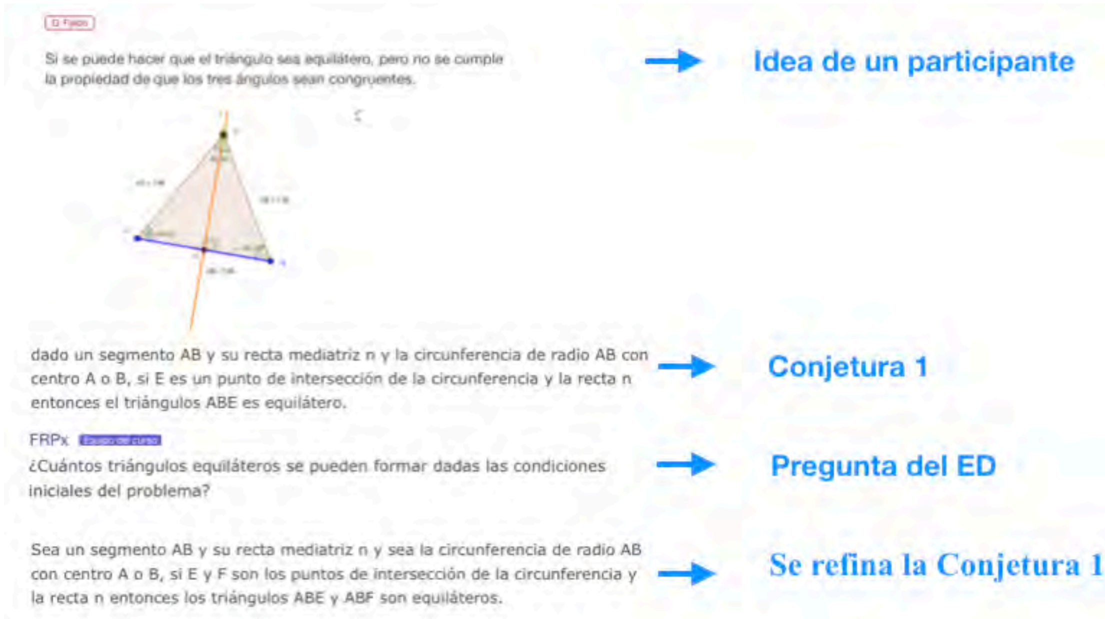


Figura 4.2.6. Evidencias de los participantes: Construcción del triángulo equilátero.

Un participante planteó la pregunta: *¿Cómo construir un modelo dinámico de un triángulo equilátero?* En el diálogo se discutió una construcción del triángulo equilátero utilizando un SGD. Uno de ellos, P_x, utilizó GeoGebra para construir un segmento AB y su mediatriz; y trazar una circunferencia de centro B y radio AB. Luego, señaló una forma de construir el triángulo equilátero: *unir los puntos A, B y la intersección de la circunferencia y la mediatriz de AB*. Sin embargo, en su modelo dinámico, al determinar la medida de los ángulos internos del triángulo, éstas no resultaron de igual medida. Algunos participantes señalaron que el triángulo construido no era equilátero ya que no era equiángulo (idea que fue discutida en un diálogo anterior). Un participante compartió su modelo dinámico e identificó dos intersecciones (E y D) de la mediatriz de AB y la circunferencia y trazó los triángulos ABE y ABD equiláteros. Además, señaló: *Se requiere una construcción que resista el movimiento, es decir, cuando se muevan los puntos A y B, la construcción debe mantener sus propiedades* e indicó la forma de hacerlo en GeoGebra.

El seguimiento que dio el participante P_x le permitió reconstruir su modelo del triángulo equilátero. Un extracto del diálogo se presenta en la Figura 4.2.7. Los participantes reconocieron la importancia de que la construcción mantenga sus propiedades cuando se muevan los objetos, es decir, al mover el punto A y B, el triángulo ABC siempre sea equilátero.

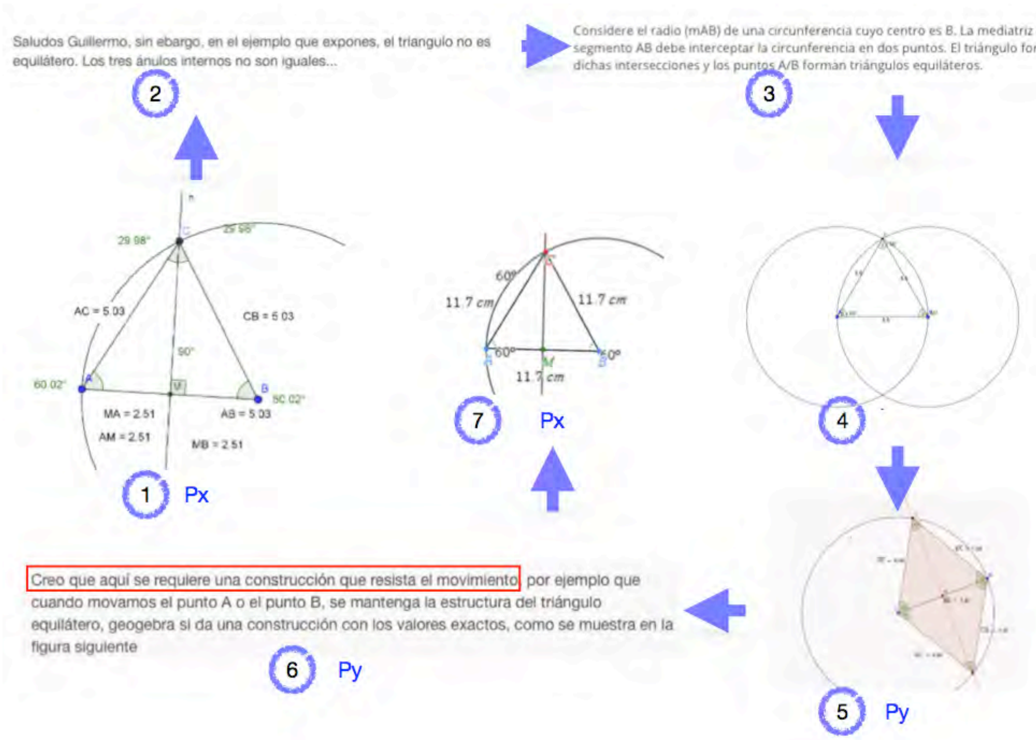
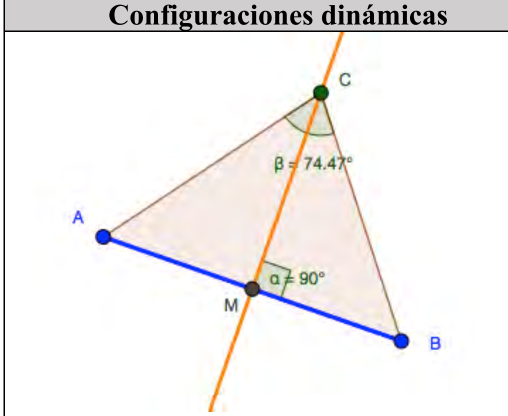


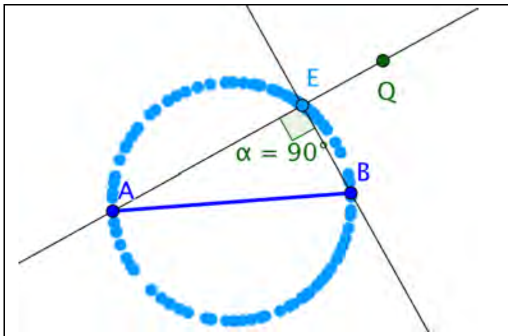
Figura 4.2.7. Evidencias de los participantes: Construcción del triángulo equilátero.

El triángulo rectángulo

Esta actividad se relacionó con la importancia de la estrategia *lugar geométrico* en resolución de problemas cuando se utiliza un SGD. La actividad incluyó la configuración dinámica y las preguntas de la Tabla 4.2.3. La tarea se puede consultar en https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-3-act3/.

Tabla 4.2.3.
La tarea de construir una familia de triángulos rectángulos a partir de hipotenusa.

Configuraciones dinámicas	guía de trabajo
	¿Existe alguna posición para el punto C sobre la recta n donde el triángulo ABC sea un triángulo y rectángulo? En la representación dinámica aparece la medida del ángulo ACB ¿Qué ocurre con la medida del ángulo cuando el punto C se mueve? ¿Existe alguna posición del punto C para que el triángulo ABC sea rectángulo?

 	*¿Cómo construir un triángulo rectángulo a partir de un segmento dado que representa su hipotenusa*? A partir del segmento AB, se traza la recta AQ y la recta perpendicular a la recta AQ que pasa por el punto B. Estas rectas se intersecan en el punto E. ¿Qué propiedades de la familia de triángulos ABE se mantienen cuando se mueve el punto Q en el plano? En particular, ¿qué camino o trayectoria sigue el punto E al mover Q sobre el plano? Mueve Q, observa y responde: ¿cómo construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el segmento AB?

En un diálogo, los participantes coincidieron en que al mover el punto C era posible generar un triángulo rectángulo, aunque se les dificultó determinar con precisión el ángulo recto (Véase el primer modelo del triángulo de la Tabla 4.4.3). Luego, durante la exploración del segundo modelo de la Tabla 4.4.3, señalaron: *al mover el punto Q, el rastro que deja E "parece" ser una circunferencia* y conjeturaron que *la circunferencia circunscrita a todo triángulo rectángulo siempre tiene diámetro igual a la hipotenusa*, sin proporcionar argumentos formales para sustentarla (Figura 4.2.8).

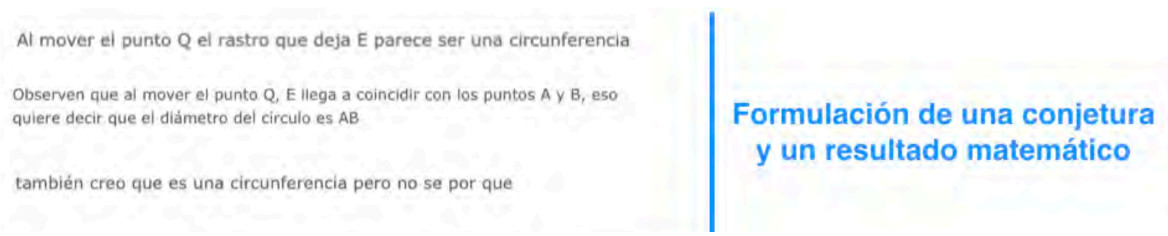
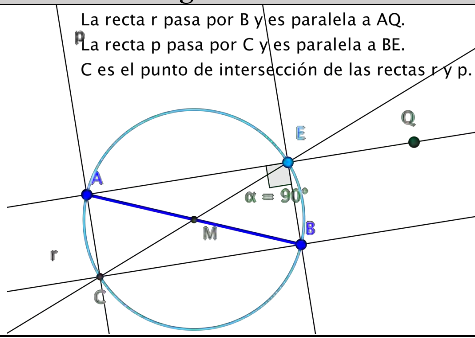


Figura 4.4.8. Evidencias de los participantes: el triángulo rectángulo.

Para justificar que el lugar geométrico es una circunferencia utilizando conceptos y relaciones matemáticas, la actividad incluyó el modelo y la guía de trabajo de la Tabla 4.2.4.

Tabla 4.2.4.

Justificación de: la circunferencia circunscrita a todo triángulo rectángulo siempre tiene diámetro igual a la hipotenusa.

<table>
<tr><th>Configuración dinámica</th><th>Guía de trabajo</th></tr>
<tr><td>
</td><td>El cuadrilátero $AEBC$ es un rectángulo cuyas diagonales son AB y CE.

¿Qué resultado matemático garantiza que el punto E está sobre una circunferencia? ¿Cuál es el centro y su radio de la circunferencia? ¿qué argumento respalda la respuesta anterior? ¿Las respuestas anteriores demuestran la conjetura planteada? ¿Por qué?</td></tr>
</table>

El ED seleccionó un comentario del foro donde se definió el concepto de circunferencia y la idea: *por construcción E pertenece a la circunferencia*. En el diálogo, algunos participantes cuestionaron: *¿Cómo demostrar que el punto E está sobre una circunferencia?*

En la búsqueda de respuestas, algunos participantes: (2) utilizaron el concepto de rectángulo y las propiedades de sus diagonales para sustentar que E equidista de M para cualquier posición del punto Q y (2) relacionaron M con el circuncentro de un triángulo rectángulo (punto medio de su hipotenusa) con el centro de su circunferencia circunscrita como argumento para justificar que E es un punto de la circunferencia. La Figura 4.2.9 muestra algunas de las ideas planteadas y las conclusiones del diálogo.

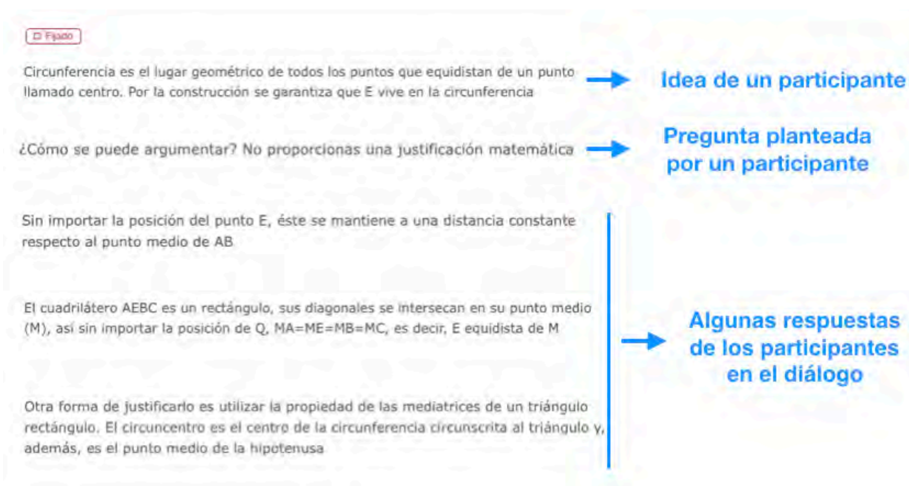
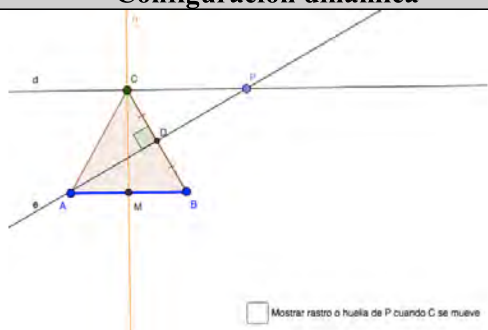
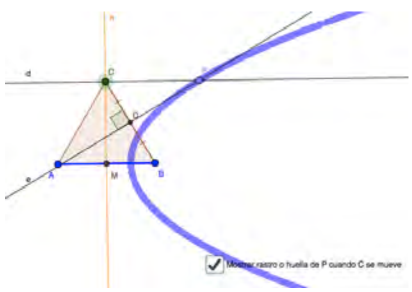


Figura 4.2.9. Resumen del diálogo donde se justifica que la circunferencia circunscrita a todo triángulo rectángulo siempre tiene diámetro igual a la hipotenusa.

4.2.2 Actividad 4

La actividad 4 extendió el problema del segmento y su recta mediatriz. Se estudió el lugar geométrico como una estrategia importante en la resolución del problema, donde el movimiento controlado de algunos puntos u objetos permite observar invariantes o patrones en el comportamiento de otros elementos de la configuración. Se proporcionó el modelo dinámico y la guía de trabajo de la Tabla 4.2.5. La actividad se puede consultar en https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-4/.

Tabla 4.2.5.
La tarea de construir una familia de triángulos rectángulos a partir de hipotenusa.

Configuración dinámica	**Guía de trabajo**
 	En la representación dinámica que involucra el segmento AB y su recta mediatriz, se han incluido dos nuevos elementos: una recta perpendicular a n que pasa por C y la recta mediatriz del lado BC. Se puede fijar la atención en el punto de intersección P de estas dos rectas ¿qué rastro o huella deja P cuando se mueve el punto C? Mueve C y observa la trayectoria que define P. Luego, activa la casilla Mostrar rastro de P cuando se mueve C y mueve el punto C. Con el uso de GeoGebra se puede determinar el lugar geométrico del punto P que resulta cuando el punto C se mueve sobre la mediatriz del segmento AB. ¿Qué propiedades posee o muestra el lugar geométrico? ¿A cuál figura se parece? ¿Se tratará de una parábola o una hipérbola? ¿Por qué?

En la primera parte de la actividad, el trabajo de los participantes consistió en estudiar el concepto de la parábola como lugar geométrico y sus elementos (foco y directriz). Para esto, se incluyó un video de KhanAcademy (https://www.youtube.com/watch?time_continue=22&v=_KQP-iT2Zmg).

El ED seleccionó un comentario del foro en el cual se identificó al punto *B* como el foco de la parábola y a la recta *n* como su directriz. En el diálogo, los participantes compartieron un vínculo de Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Foco_(geometr%C3%ADa)) que les permitió definir la parábola como lugar geométrico: la distancia de *P* (cualquier punto sobre la parábola) a *B* (foco) debe ser igual a la distancia de P a la recta n (directriz).

En el mismo diálogo, un participante formuló la pregunta: *¿Cómo se puede trazar el segmento cuya distancia sea mínima entre un punto y una recta?* En las respuestas, algunos referenciaron y utilizaron las ideas de la actividad 2 (Véase la Tabla 4.1.8) relacionadas con el tema de distancia de un punto a una recta. La Figura 4.2.10 resume las ideas en el diálogo.

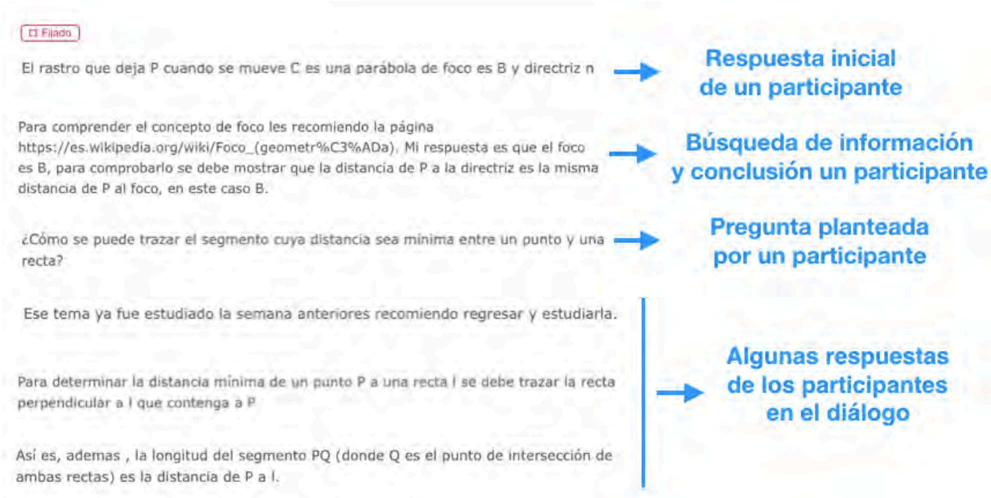


Figura 4.2.10. Pregunta formulada por un participante.

Otro comentario seleccionado del foro fue: *Dada la función y=x ¿Cuál es la coordenada x sobre la recta que está mas cerca del punto (2,-1)?* Se observó que los participantes no tuvieron problemas para determinar la solución, utilizaron la fórmula de distancia entre dos puntos, $P(x_1 - y_1)$ y$Q\ (x_2 - y_2)$, $d(x) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, donde $P = (x, x)$, dado que la recta es *y=x,* y $Q = (2, -1)$ para determinar la distancia del punto *P* a *Q*. Luego, derivaron la función resultante para obtener su valor mínimo. Sin embargo, algunos de los participantes señalaron no recordar tal fórmula y cuestionaron cómo determinarla. Las respuestas coincidieron en que se debía utilizar el teorema de Pitágoras, la Figura 4.2.11 muestra un resumen del diálogo y cómo determinaron la fórmula.

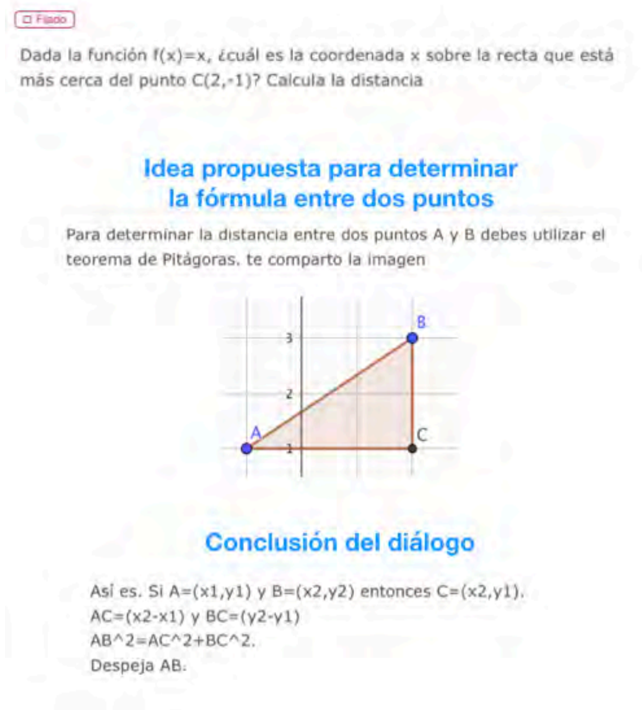
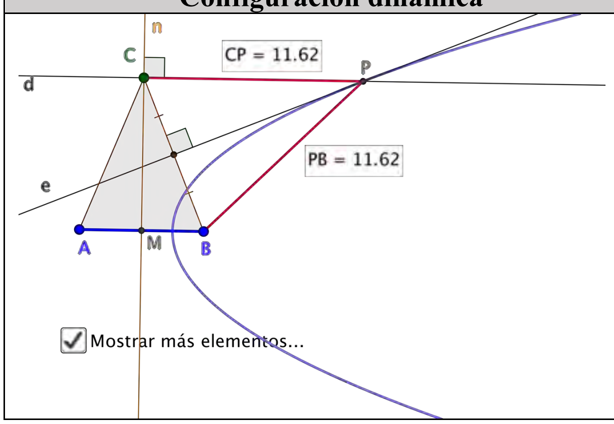


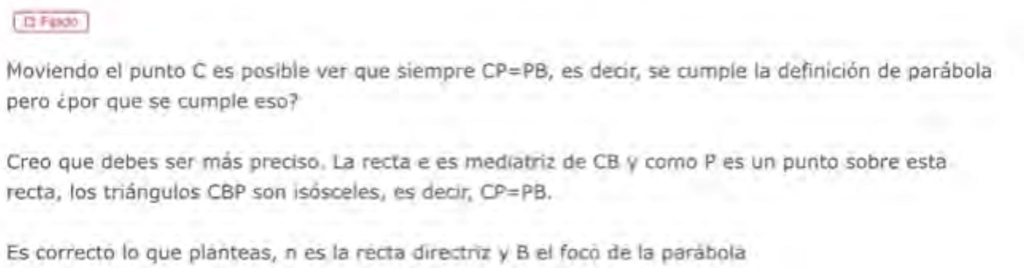
Figura 4.2.11. Un nuevo problema, distancia entre dos puntos.

La siguiente parte de la actividad incluyó la configuración dinámica y el conjunto de preguntas de la Tabla 4.2.6.

Tabla 4.2.6.
Justificación: el lugar geométrico es una parábola.

Configuración dinámica	Guía de trabajo
	¿Cómo sustentar o argumentar matemáticamente que la trayectoria de P cuando C se mueve, sobre la recta n, se trata de una parábola? ¿En cuáles elementos se debe centrar la atención? ¿Qué se debe probar y cómo? ¿Dónde se encuentra el punto que genera el lugar geométrico? ¿Qué significa que esté en la mediatriz del lado BC?

El ED seleccionó el comentario donde un participante se cuestionó cómo sustentar que el lugar geométrico es una parpabola: *Moviendo C podemos ver que $CP = PB$, es decir, el lugar geométrico es una parábola, ¿Por qué se cumple eso?* Algunos participantes sustentaron que la recta e es mediatriz de CB y como P es un punto sobre esta recta, la familia de triángulos CBP es isósceles, en consecuencia, $CP = PB$, es decir, n debe ser la recta directriz y B el foco de la parábola (Figura 4.2.12).


Fijado

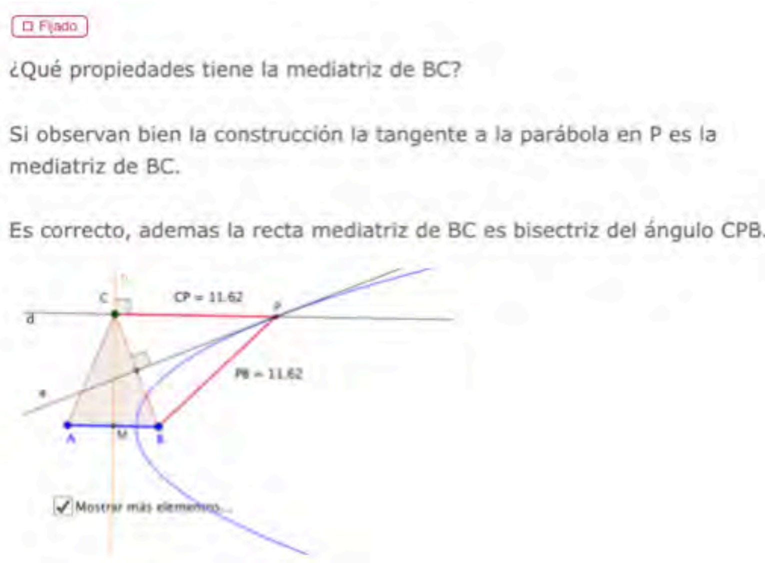
Moviendo el punto C es posible ver que siempre CP=PB, es decir, se cumple la definición de parábola pero ¿por que se cumple eso?

Creo que debes ser más preciso. La recta e es mediatriz de CB y como P es un punto sobre esta recta, los triángulos CBP son isósceles, es decir, CP=PB.

Es correcto lo que planteas, n es la recta directriz y B el foco de la parábola

Figura 4.2.12. Argumentos presentados por los participantes para justificar que el lugar geométrico que describe P cuando se mueve C es una parábola.

Otra pregunta seleccionada del foro fue: *¿Qué propiedades tiene la mediatriz de BC?* En el diálogo emergió el concepto de recta tangente a la parábola y una forma de trazarla dado el triángulo ABC. Además, se señaló a la mediatriz del lado BC como elemento importante, ya que, una forma de trazar la recta tangente en P a la parábola es trazar la mediatriz del segmento BC (Figura 4.2.13).


Fijado

¿Qué propiedades tiene la mediatriz de BC?

Si observan bien la construcción la tangente a la parábola en P es la mediatriz de BC.

Es correcto, ademas la recta mediatriz de BC es bisectriz del ángulo CPB.

Figura 4.2.13. La mediatriz de BC es tangente de la parábola.

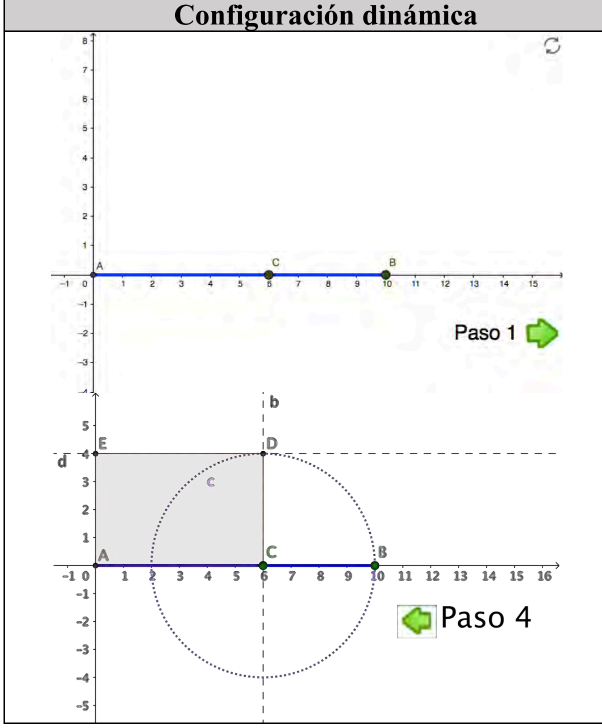
4.2.3 Actividad 5

El objetivo general de la Actividad 5 fue mostrar a los participantes la importancia de la estrategia de trazar lugares geométricos para analizar gráficamente el comportamiento de fenómenos que involucran variación. La tarea matemática propuesta fue: *De todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo encontrar las dimensiones del que tiene área máxima*.

En la actividad, resaltaron dos elementos importantes: una variable independiente, que puede ser la posición de un punto que se mueve ordenadamente; y una variable dependiente, el área del rectángulo. También, se enfatizó que una ventaja del lugar geométrico, cuando se utiliza un SGD, es que no se necesita un modelo algebraico explícito para trazarlo y, además, representa una oportunidad para analizar sus propiedades.

La actividad incluyó una configuración del problema en el cual se asoció la medida del semiperímetro del rectángulo *ACDE* con la longitud del segmento *AB* (Tabla 4.2.7). La actividad se puede consultar en https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-5/.

Tabla 4.2.7.
La construcción de una familia rectángulos de perímetro fijo.

Configuración dinámica	**Guía de trabajo**
	¿Qué significa que los rectángulos tengan un perímetro fijo? ¿Cómo se puede representar el perímetro geométricamente? ¿Cuántos rectángulos se pueden construir y que todos tengan el mismo perímetro? Iniciamos la construcción de un modelo dinámico del problema trazando un segmento *AB* sobre el eje *x* cuya longitud es la mitad del perímetro del rectángulo. Este segmento, el semi-perímetro, nos ayuda a construir dos lados del rectángulo. ¿Cómo identificamos las longitudes de esos dos lados? ¿Qué sucede al mover el punto *B*? ¿Qué sucede al mover el punto *C*? ¿La familia de rectángulos que se genera cumple la propiedad de tener el mismo perímetro? (¿por qué?) ¿Qué cambia y qué se mantiene constante al mover el punto *C* sobre el segmento?

Se seleccionó del foro un comentario en el cual se argumentó por qué la familia de rectángulos mantiene su perímetro fijo al mover el punto C utilizando el concepto de radio de un círculo y las propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares. En el diálogo, un participante reconstruyó el modelo del problema en GeoGebra y midió los lados del rectángulo y su perímetro. La Figura 4.2.14 muestra algunos de las ideas expuestas en el diálogo. En general, los participantes coincidieron que al mover el punto C se genera una familia de rectángulos de perímetro constante e igual a dos veces la longitud del segmento AB.

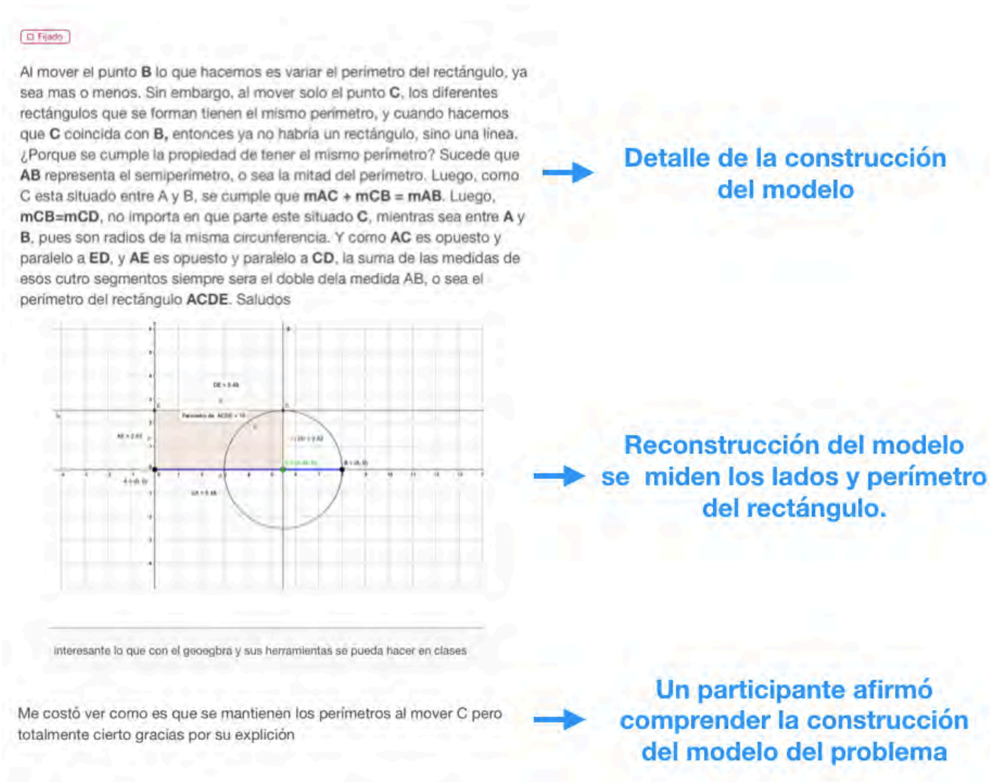
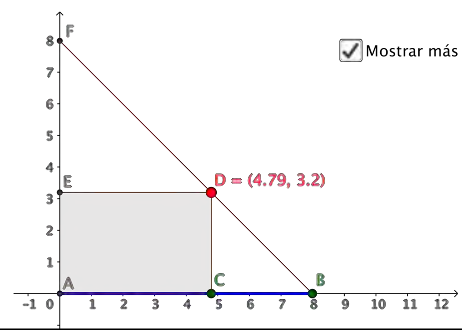


Figura 4.2.14. La configuración dinámica del problema.

Antes de explorar el comportamiento del área del rectángulo, la actividad incluyó la configuración dinámica y las preguntas de la Tabla 4.2.8.

Tabla 4.2.8.

La construcción de una familia rectángulos de perímetro fijo.

Configuración dinámica	Guía de trabajo
	¿Qué representan las coordenadas del punto D? ¿Qué propiedades cumple el camino o "lugar geométrico" que describe el punto D al mover el punto C sobre el segmento AB?

En un diálogo, los participantes señalaron (Figura 4.2.15):

1. Las coordenadas del punto D representan las dimensiones de los lados del rectángulo.
2. El lugar geométrico que describe el punto D cuando se mueve C es una recta y coincide con la hipotenusa de un triángulo isósceles cuyos lados congruentes tienen como medida el semiperímetro del rectángulo.
3. En el intervalo de 0 a 8 (semi perímetro del cuadrado) la ecuación del lugar geométrico es *y=-x+8*.

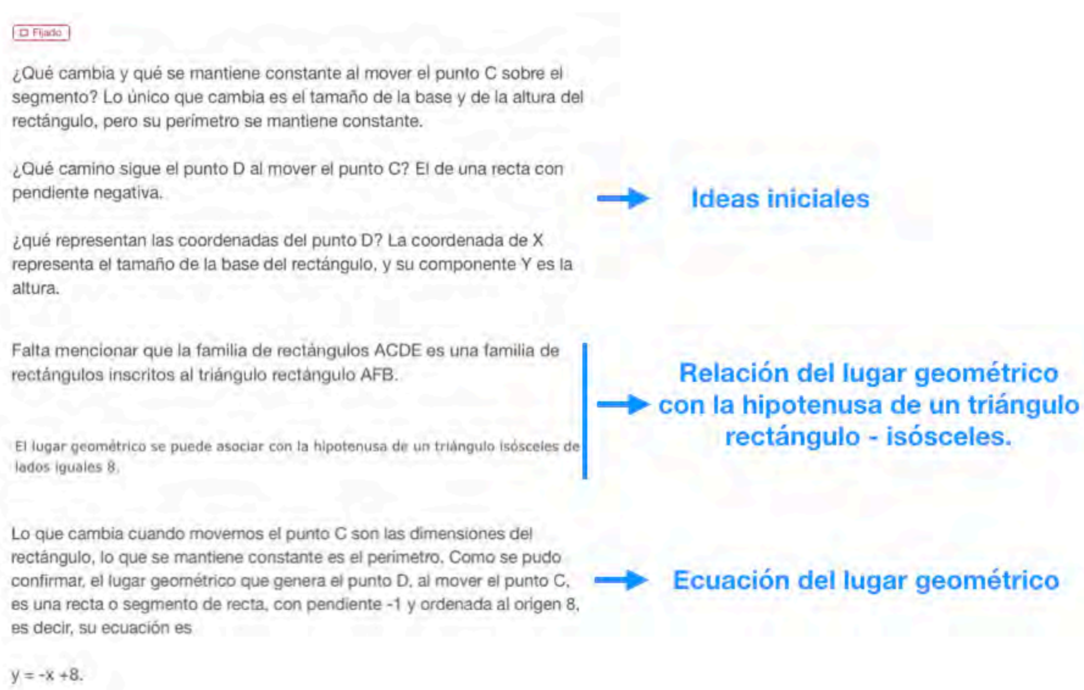


Figura 4.2.15. Resumen de las conclusiones relacionadas con el lugar geométrico de *D* cuando se mueve *C*.

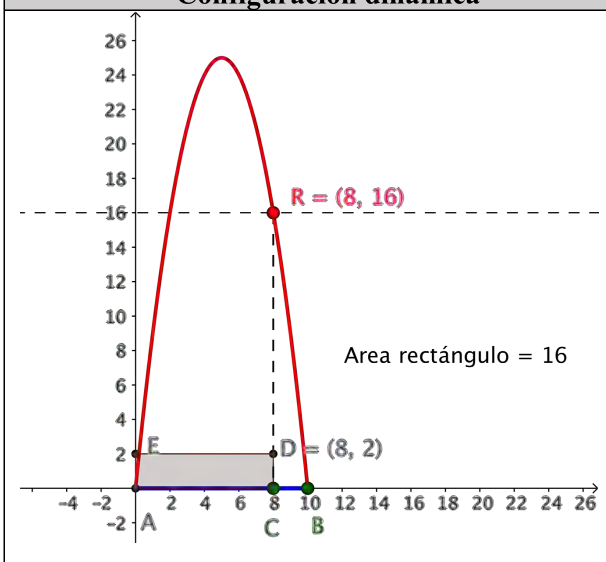
Un participante cuestionó: *¿Cuál es la importancia del lugar geométrico en el problema?* En las respuestas sobresalió la construcción de un rectángulo de perímetro fijo p: se construye un triángulo rectángulo isósceles de lados congruentes $\frac{p}{2}$, al seleccionar cualquier punto en la hipotenusa y al trazar rectas perpendiculares a los ejes desde ese punto se forma un rectángulo de perímetro fijo (Figura 4.2.16)

> Para construir un rectángulo de perímetro fijo p se construye un triángulo rectángulo isósceles de lados congruentes p/2, al selecciona cualquier punto en la hipotenusa y al trazar rectas perpendiculares a los ejes desde ese punto se forma un rectángulo de perímetro fijo.

Figura 4.2.16. Otra manera de construir el modelo del problema.

La siguiente parte de la actividad consistió en explorar el comportamiento del área de la familia de rectángulos (Tabla 4.2.9).

Tabla 4.2.9.
Exploración del área de una familia rectángulos de perímetro fijo.

<table>
<tr><th>Configuración dinámica</th><th>Guía de trabajo</th></tr>
<tr><td>
</td><td>En el modelo dinámico del problema, se construye un punto R que asocia la longitud de AC (lado del rectángulo) con el área del rectángulo. La gráfica en color rojo es el lugar geométrico que describe el punto R cuando se mueve C. Es decir, representa la variación del área de los rectángulos que se genera al variar la longitud de un lado.
Mueve el punto C. ¿Qué propiedades posee o muestra el lugar geométrico? ¿A cuál figura u objeto matemático se parece? ¿Por qué?
¿Es posible identificar en qué posición del punto C se obtiene el rectángulo con el área máxima? ¿Qué argumento visual se puede utilizar? ¿Por qué?</td></tr>
</table>

En un diálogo, algunos participantes asociaron el lugar geométrico que describe P cuando se mueve C con una parábola y el área máxima con su vértice. Utilizaron el concepto de eje de simetría de la parábola para argumentar que el rectángulo de largo n y ancho m tiene la misma área que el rectángulo de largo m y ancho n. Además, se observó que el modelo del problema permitió a los participantes visualizar la variación del área del rectángulo y determinar, visualmente, la existencia de uno con área máxima al mover el punto C. La Figura 4.2.17 presenta un resumen de las ideas.

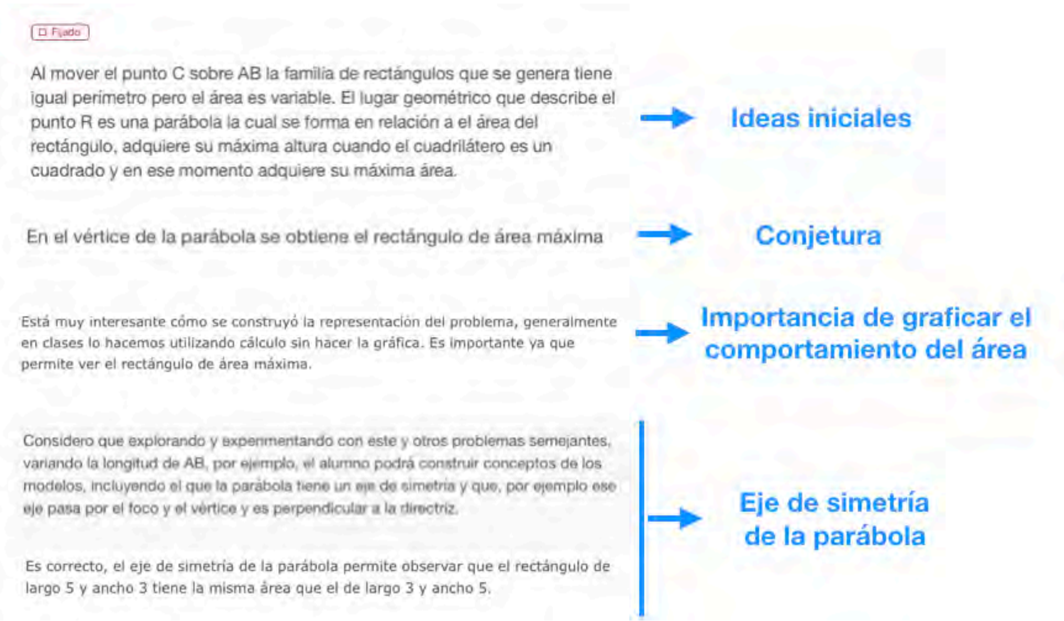


Figura 4.2.17. Comentarios de los participantes sobre las propiedades del lugar geométrico.

Otro comentario seleccionado del foro se relacionó sustentar la conjetura mediante argumentos visuales y empíricos (Figura 4.2.18). En el diálogo, se señaló que al mover el punto C y observar las coordenadas de R, el valor del área del rectángulo aumenta desde cero y después disminuye hasta volver a ser cero, por lo tanto, existe un rectángulo de área máxima. Además, algunos participantes coincidieron en que el lugar geométrico les permitió observar la relación que existe entre su punto máximo y el lado del rectángulo. De esta manera, concluyeron que el área máxima se obtiene cuando los lados tienen la misma longitud, es decir, cuando se forma un cuadrado (Figura 4.2.18).

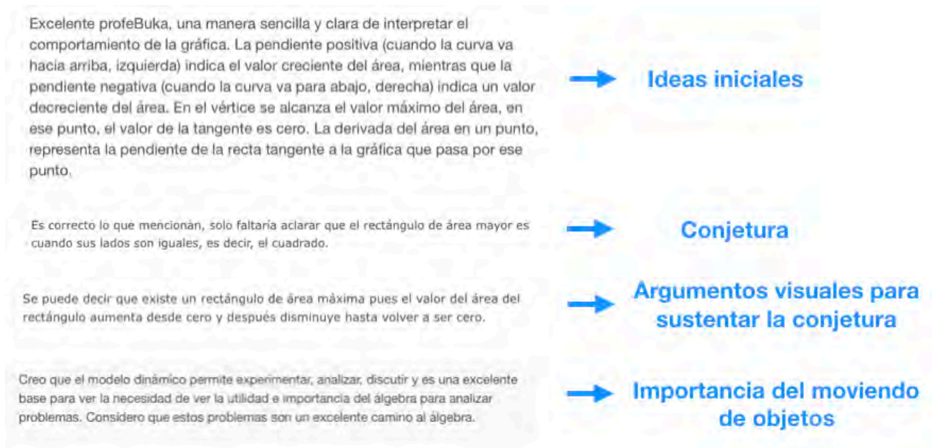
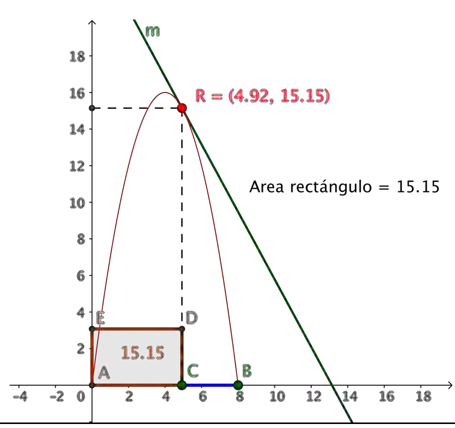


Figura 4.2.18. Comentarios y conjeturas de los participantes.

El ED seleccionó la pregunta: *¿Cómo justificar que el lugar geométrico es una parábola y el área máxima se obtiene cuando los lados del rectángulo son iguales?* En un primer acercamiento, algunos participantes determinaron el modelo algebraico del área del rectángulo *y=x(8-x)* y lo asociaron con la ecuación de una parábola para el caso particular *AB=8*. El modelo algebraico sirvió para encontrar (mediante procedimientos de cálculo) el valor para el cual se alcanza el área máxima (*x=4*) y asociarlo con un cuadrado de lado 4. Es decir, utilizaron el procedimiento general de determinar la función que modela el área del rectángulo y la derivaron para obtener la respuesta.

La siguiente tarea tuvo como objetivo conectar el problema con el concepto de recta tangente a una parábola (Tabla 4.2.10).

Tabla 4.2.10.
Conectando conceptos.

Configuración dinámica	**Preguntas**
	¿Por qué se calcula la derivada y se encuentran los ceros de la función derivada? ¿Qué significado geométrico tiene la derivada en el contexto del problema? ¿Qué significa el valor de la pendiente de la recta tangente en términos del problema?

En el foro, se seleccionó un comentario en el cual un participante señaló que al mover el punto R, en una parte de la gráfica la pendiente de la recta tangente era positiva y en otra, era negativa; así, concluyeron que el punto donde la pendiente cambia de positiva a negativa es cuando se obtiene un rectángulo de área máxima. Es decir, cuando la pendiente de la recta tangente es cero (Figura 4.2.19).

Recordando al vértice como el punto máximo, la pendiente de la recta tangente sera positiva al lado izquierdo de dicho vértice, mientras que será negativa si la recta tangente esta del lado derecho. Y será cero exactamente cuando la recta pase por el vértice. De izquierda a derecha, siguiendo la parábola, el área crece hasta llegar al punto maximo, en el vértice, y luego empieza a decrecer. En este sentido, la parábola es una excelente explicación de como crece o decrece un valor, hasta llegar a un maximo. Ahora bien, si no quisiéramos hacer la demostración así, la otra opción es hacer la demostración algebraica, sin embargo esta opción es interesante, llamativa, y conecta muchos conocimientos. Saludos

Hola Guillermo100, en ánimo de precisar, debería ser la pendiente de la recta tangente igual con cero, es donde esta parábola alcanza un valor máximo.

Figura 4.2.19. Una justificación basada en la pendiente de la recta tangente a la parábola.

Algunos participantes, en el diálogo, relacionaron la ecuación $y = x(8 - x)$, donde $x = AC$ para el caso particular $AB = 8$, con el área del rectángulo y la utilizaron para determinar las coordenadas del vértice de la parábola: $(4{,}16)$. De esta manera, concluyeron que el área máxima del rectángulo es 16 unidades cuadradas y se obtiene cuando sus lados miden 4 unidades, es decir cuando se trata de un cuadrado.

El ED seleccionó la pregunta que formuló un participante en el foro: *¿Cómo trazar geométricamente la recta tangente en P a la parábola?* Otros participantes compartieron su proceso de solución en el cual identificaron el vértice de la parábola como un elemento importante en el trazo de la recta tangente que pasa por *P*. El procedimiento de construcción y los comentarios de otros se muestran en la Figura 4.2.20.

Para trazar la recta tangente de la parabola que pasa por P:
1. Se debe trazar una recta paralela al eje y que pase por el vértice.
2. Se traza la perpendicular por P a la recta anterior.
3. Se determina el punto de intersección D de esas dos rectas.
4. Q es el punto medio entre el vértice de la parábola y D.
5. La recta PQ es la recta tangente a la parábola que pasa por P.

Tu construcción solo funciona si la directriz de la parábola es el eje x o paralelas eje x.

Figura 4.2.20. Construcción de la recta tangente a la parábola con directriz paralela al eje *x*.

Algunos indicaron que el procedimiento era correcto para parábolas cuya directriz es paralela al eje x y, generalizaron la construcción para cualquier parábola (Figura 4.2.21)

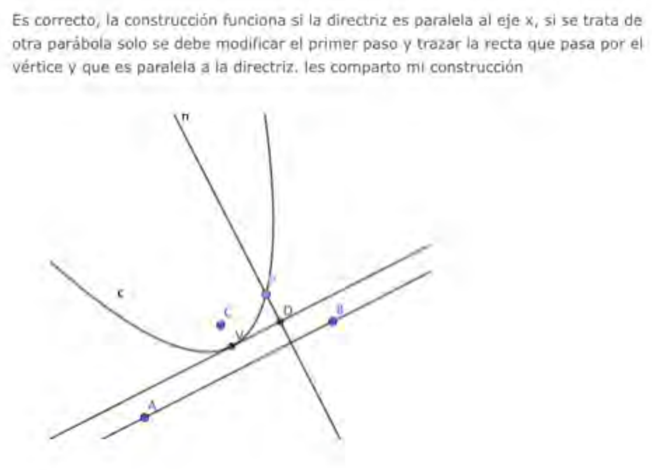


Figura 4.2.21. Construcción de la recta tangente a la parábola.

La parte final de la actividad se relacionó el discriminante de una ecuación de segundo grado con el problema inicial, se proporcionó a los participantes un modelo que incluía un punto móvil P sobre el eje y y la recta perpendicular al eje y que pasa por P (Figura 4.2.22) y se plantearon las preguntas 5 y 6 del Cuestionario (Figura 4.2.23).

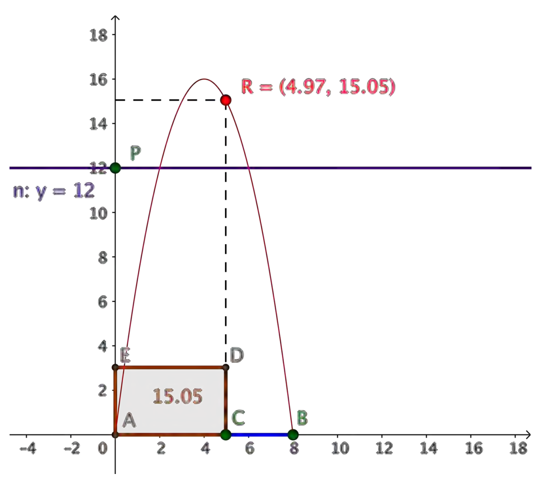


Figura 4.2.22. Conectando conceptos matemáticos.

Pregunta

1 punto posible (calificado)

Al resolver el sistema de ecuaciones y=k (la ecuación de la recta que pasa por P (k= representa la longitud del semento AP) y $y = x(8-x) = -x^2 + 8x$ (la parábola) se obtiene $-x^2 + 8x = k$, esta última ecuación es una ecuación de segundo grado, identifica su discriminate, ¿Qué ocurre si el valor del discriminante es mayor que cero?

- la recta corta a la parábola en dos puntos.
- la recta corta a la parábola en un solo punto.
- la recta no corta a la parábola.

Pregunta

1 punto posible (calificado)

Al resolver el sistema de ecuaciones formado entre y=k y $y = -x^2 + 8x$ se obtiene $-x^2 + 8x = k$ ¿Qué condición se debe cumplir para que el valor (solución) de x que se obtenga sea la longitud del lado que determina el rectángulo con la máxima área?

- Discriminante de $-x^2 + 8x = k$ igual a cero.
- Discriminante de $-x^2 + 8x = k$ menor que cero.
- Discriminando de $-x^2 + 8x = k$ mayor que cero.

Figura 4.2.23. Preguntas 5 y 6 de Cuestionario.

En el foro, los participantes centraron su atención en la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = k \\ y = x(8-x) = -x^2 + 8x \end{cases}.$$

Se seleccionó un comentario del foro en el cual se señaló la relación del valor del discriminante de $-x^2 + 8x = k$ con la cantidad de veces que corta la recta *y=k* a la parábola:

1. Si su discriminante es mayor a cero entonces la ecuación posee dos soluciones reales y las gráficas de $y = k$ y $y = -x^2 + 8x$ se cortan en dos puntos.
2. Si su discriminante igual cero, el sistema de ecuaciones tiene una solución y coincide con la coordenada *x* del vértice de la parábola.
3. La coordenada y del vértice de la parábola es el área máxima que alcanza el rectángulo de perímetro fijo.

La Figura 4.2.24 presenta algunos de los comentarios en el diálogo.

Respecto a las preguntas. Cuando el discriminante es mayor que 0, la ecuación tiene dos soluciones, por lo tanto, la recta corta a la parábola en dos puntos. Si se obtiene una única solución para x, significa que el discriminante vale 0, y el valor de x será correspondiente a la longitud del lado del rectángulo de área máxima.

No importa la distancia de B al origen (A), cuando el punto C se sitúa a la mitad del segmento AB, siempre se logra en este punto (C), el área máxima del rectángulo.

así es, si el discriminate es cero se tendrá una solución "a" y es la coordenada x del vértice. Si el vértice es (x,y)=(a,b), a es solución del sistema de ecuaciones y b el área máxima del rectángulo

Figura 4.2.24. Conclusiones de los participantes en el diálogo generado en las preguntas 5 y 6 del Cuestionario.

Como parte del cierre de actividad 5, se incluyeron las preguntas: *Las ideas planteadas en las soluciones consideraron al punto B siempre en la misma posición (sobre el eje x y la distancia de B al origen es 8). ¿Qué sucede si se varía la posición de B? ¿Las soluciones discutidas seguirán siendo válidas?*

Se seleccionó un comentario del foro donde se mencionó que al modificar el valor del semiperímetro del rectángulo, es decir, al cambiar la posición de B, las dimensiones de sus lados y área cambiaban; algunos señalaron que las propiedades de la construcción se mantenían y los atributos de los objetos se actualizaban automáticamente, por lo cual, la estrategia de solución siguió siendo válida (Figura 4.2.25).

El sistema es dinámico, por lo que los cambios realizados a las constantes NO afectaría el proceso de solución. Lo único que cambia es el valor del área.

La familia de rectángulos ACDE tiene un perímetro variable. Al desplazar B a la derecha se incrementa el perímetro pues incrementa longitud sus cuatro lados. Al mover B a la izquierda disminuye el perímetro pues disminuye la longitud de sus cuatro lados.

Figura 4.2.25. Comentarios de los participantes en el cierre de la actividad.

4.2.4 Discusión de la segunda parte del MOOC y respuesta a la segunda pregunta de investigación

Una característica de los participantes en los diálogos de estas actividades fue poseer estudios iguales o superiores de licenciatura. Según los datos obtenidos y detallados en las secciones anteriores, durante el desarrollo de las actividades, se identificaron tres elementos en común en los diálogos:

1. *La clasificación y jerarquización de comentarios que realizó el ED en el foro.* Esto hizo posible enfocar la atención de los participantes en algunos comentarios e iniciar la discusión de ideas matemáticas.
2. *El rol que asumieron algunos participantes de proporcionar retroalimentación o ayuda a otros* cuando planteaban dudas o ideas matemáticas erróneas. En este sentido, es necesario recalcar que el nivel de compromiso y responsabilidad de cada uno de ellos, durante el desarrollo de las actividades y a través de los diálogos, les permitió monitorear sus ideas y avanzar en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas.
3. *El rol que asumieron algunos participantes de formular preguntas en el diálogo.* Promovió la discusión de ideas matemáticas o la extensión de los problemas iniciales incluidos en el MOOC. Esto no sucedió en las actividades 1 y 2, ese papel lo asumió el ED. También, se observó en los diálogos que Wikipedia fue el medio de consulta más utilizado para la revisión de los temas o contenidos de los problemas, en términos de propiedades o resultados matemáticos.

A continuación, se analiza cómo influyeron los tres elementos anteriores durante el desarrollo de las actividades del MOOC y se da respuesta a la segunda pregunta de investigación:

¿Cómo implementar un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario de aprendizaje MOOC, que ofrezca a los participantes oportunidades para involucrarse en la exploración de diferentes representaciones de un problema, la formulación de conjeturas, la presentación de argumentos y la formulación de preguntas?

El rol que asumieron algunos participantes de formular preguntas durante el diálogo

En la Actividad 3, cuando un participante indicó que un triángulo equilátero no es isósceles, otros proporcionaron retroalimentación. Para ello, presentaron información de Wikipedia y concluyeron que todo triángulo equilátero es isósceles; además, señalaron que un triángulo equilátero es equiángulo (Figura 4.2.3). Esta idea fue retomada y resultó fundamental en la construcción del triángulo equilátero (Figura 4.2.7). El seguimiento que dio un participante a una idea errónea que planteó y la retroalimentación que otros proporcionaron hizo posible que construyera un modelo del triángulo equilátero en un SGD. En el diálogo se señaló la importancia de que una construcción "*resista el movimiento*", es decir, que el triángulo mantenga sus propiedades al mover los objetos que lo conforman (Figura 4.2.7).

En la tarea *¿cómo construir un triángulo rectángulo ABE a partir de un segmento AB dado que representa su hipotenusa*?, se asoció con un modelo dinámico que implicó mover un punto móvil *Q* (libre en el plano) y observar que la construcción de un triángulo rectángulo particular generaba una familia de estos triángulos. En la exploración del comportamiento de la familia de triángulos, en un diálogo, observaron que el lugar geométrico de uno del vértice *E* que se generó al mover *Q* podía ser una circunferencia. Utilizaron argumentos visuales para sustentar que el posible diámetro de la circunferencia podía ser el segmento *AB* (Figura 4.2.8). Luego, completaron una idea matemática incompleta presentada por un participante, utilizaron el concepto de rectángulo y las propiedades de sus diagonales para sustentar la relación que existe entre el diámetro de la circunferencia circunscrita en un triángulo rectángulo (Figura 4.2.9).

En la Actividad 4, presentaron información de Wikipedia para definir la parábola como lugar geométrico y cuando un participante preguntó cómo trazar el segmento de menor distancia entre un punto y una recta, las respuestas indicaron revisar la Actividad 2 donde se estudió el tema. Otros señalaron la importancia de la recta perpendicular al segmento y que pasa por dicho punto para calcular la distancia requerida (Figura 4.2.10).

De acuerdo con la pregunta que planteó un participante de: *¿cuál es la coordenada x sobre y=x que está más cerca del punto* $C(2,-1)$? en el diálogo, utilizaron la fórmula distancia entre dos puntos para obtener la respuesta. Cuando un participante cuestionó cómo determinar dicha fórmula, las respuestas proporcionadas señalaron utilizar el Teorema de Pitágoras (Figura 4.2.11).

En la Actividad 5, se proporcionó un modelo de una familia de rectángulos de perímetro fijo. En un diálogo, con base en el movimiento de puntos, los participantes relacionaron el lugar geométrico, que describe un vértice de la familia de rectángulos cuando se modifica la medida de uno de sus lados, con la hipotenusa de un triángulo isósceles cuyos lados congruentes tienen como medida el semiperímetro del rectángulo (Figura 4.2.15). Luego, en otro diálogo, construyeron el rectángulo de perímetro fijo a partir de una familia de triángulos isósceles cuyos lados congruentes tienen por medida la longitud del semiperímetro del rectángulo (Figura 4.2.16).

La actividad incluyó la gráfica, sin necesidad de plantear una ecuación, que modela el área de la familia de rectángulos, a partir del lugar geométrico que describe un punto que relaciona la medida de un lado de rectángulo con su área, en los diálogos, reconocieron la importancia de esta estrategia para identificar un rectángulo de área máxima (Figura 4.2.17). Adicionalmente, relacionaron el eje de simetría de la parábola con los rectángulos de área igual, es decir, los de dimensiones *nxm* y *mxn*.

Cuando un participante cuestionó cómo construir geométricamente la recta tangente a una parábola por un punto sobre ésta, en el diálogo se señaló la solución para una parábola cuya directriz es paralela al eje *x*, luego extendieron la solución para cualquier parábola (Figura 4.2.20 y 4.2.21)

Preguntas formuladas en los diálogos

Las preguntas que plantearon los participantes permitieron extender las discusiones de los problemas. Este comportamiento no lo mostraron en las actividades 1 y 2. Las Tabla 4.2.11, 4.2.12 y 4.2.13 muestra el resumen de las preguntas planteadas en los diálogos y las conclusiones obtenidas en las actividades 3, 4 y 5, respectivamente.

Tabla 4.2.11.
Preguntas formuladas por los participantes durante el desarrollo de la actividad 3.

Pregunta formulada	Resultados
¿Cómo se justifica que la familia de triángulos ABC es isósceles?	Se utilizó el criterio de congruencia de triángulos LAL para justificar que la familia de triángulos es isósceles siempre que $C \neq M$ (Figura 4.2.4).
¿Se puede justificar de otra manera que la familia de triángulos ABC es isósceles?	Se presentó la idea de utilizar el criterio de congruencia de triángulos ALA. Las respuestas señalaron que no era posible utilizar tal criterio ya que hacía uso de lo que se deseaba concluir (Figura 4.2.5).
¿Cómo construir un modelo dinámico de un triángulo equilátero?	La conclusión principal fue que se requiere una construcción que resista el movimiento (Figura 4.2.7).
En la tarea de construir el triángulo rectángulo: ¿Cómo se puede argumentar que el rastro que deja E es una circunferencia? ¿Cómo garantizar que E está sobre la circunferencia?	Surgieron dos formas de justificarlo: propiedades de las diagonales de un rectángulo y del circuncentro de un triángulo rectángulo (Figura 4.2.9).

Tabla 4.2.12.

Preguntas formuladas por los participantes durante el desarrollo de la actividad 4.

Pregunta formulada	Resultados
¿Cómo se puede trazar el segmento cuya distancia sea mínima entre un punto y una recta?	Para determinar la distancia mínima de un punto P a una recta l se debe trazar la recta perpendicular a l que contenga a P (Figura 4.2.10).
¿Cuál es la coordenada x sobre la recta y=x que está mas cerca del punto (2,-1)? ¿Cómo se determina fórmula de distancia entre dos puntos, $(x_1 - y_1)$ y $(x_2 - y_2)$, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$?	Se construyó un modelo algebraico, basado en la fórmula de distancia entre dos puntos, para determinar la solución (Figura 4.2.11). Se utilizó el teorema de Pitágoras para determinar la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$?
¿Cómo se puede justificar que el lugar geométrico que describe P cuando se mueve C es una parábola?	La recta e es mediatriz de CB y como P es un punto sobre esta recta, la familia de triángulos CBP es isósceles, en consecuencia, $CP = PB$ (Figura 4.2.12).
¿Qué propiedades tiene la mediatriz de BC?	La mediatriz de BC es tangente a la parábola en P (Figura 4.2.13).

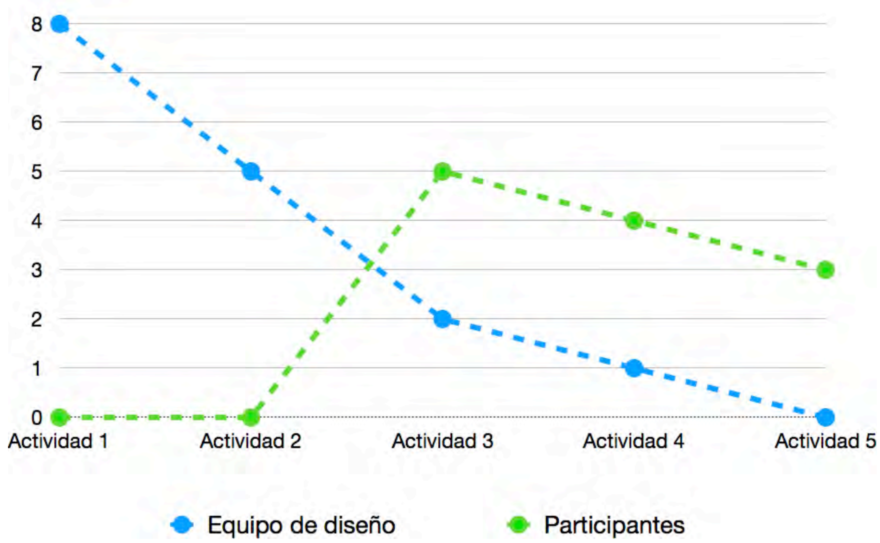
Tabla 4.2.13.

Preguntas formuladas por los participantes durante el desarrollo de la actividad 5.

Pregunta formulada	Conclusiones
Según los datos de la representación del problema del rectángulo de perímetro fijo de la Tabla 4.2.8 ¿Cuál es la importancia del lugar geométrico en el problema?	Para construir un rectángulo de perímetro fijo p, se construye un triángulo rectángulo isósceles de lados congruentes $\frac{p}{2}$, al seleccionar cualquier punto en la hipotenusa y al trazar rectas perpendiculares a los ejes desde ese punto se forma el rectángulo de perímetro fijo (Figura 4.2.16).
¿Qué conceptos o relaciones matemáticas se deben utilizar para justificar: (1) el lugar geométrico es una parábola y (2) el área máxima se obtiene cuando los lados del rectángulo son iguales?	Se planteó el modelo algebraico del área del rectángulo, $y = x(8 - x)$, y se asoció con la ecuación de una parábola para el caso particular $AB = 8$. El modelo algebraico sirvió para determinar (mediante procedimientos de cálculo) el valor para el cual se alcanza el área máxima ($x = 4$) y asociarlo con un cuadrado de lado 4.
¿Cómo trazar la recta tangente a la parábola?	Se construyó geométricamente la recta tangente a la parábola (Figuras 4.2.20 y 4.2.21).

La gráfica 4.9.1 muestra el número de preguntas que formuló el ED y los participantes durante el desarrollo de las cinco actividades del curso. Se aprecia el aumento en el número de preguntas formuladas por los participantes a partir de la actividad 3.

Gráfica 4.2.1. Preguntas formuladas por el Equipo de diseño y por los participantes durante el desarrollo de las actividades.



Referencia: datos de las Tablas 4.2.11, 4.2.12 y 4.2.13.

Los cuestionarios

En la Sección 2 del Anexo 4 se detalla el trabajo de los participantes en los diálogos que se generaron en los Cuestionarios 1 y 2. Se observó que las preguntas se convirtieron en un punto de partida para extender la búsqueda de información y relaciones matemáticas. El trabajo de los participantes fue similar al realizado en las actividades 3, 4 y 5, es decir, utilizaron el modelo del problema como una plataforma para: identificar información relevante; explorar las propiedades de los atributos de los objetos y buscar patrones, invariantes y relaciones entre objetos matemáticos. Los diálogos permitieron a los participantes compartir y conocer las ideas matemáticas de otros; recibir o dar retroalimentación y ampliar o extender las ideas de otros.

En el Cuestionario 1, los participantes, a través de los diálogos, detallaron la solución de cada uno de los problemas planteados: compartieron la definición de triángulo obtusángulo y acutángulo, así como ángulos agudos y obtusos. En este proceso, discutieron el concepto de ángulo obtuso (Figura 3 del Anexo 4). También, en la pregunta 2, discutieron las propiedades del ortocentro como el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo (Figura 4 del Anexo 4) y del incentro que equidista de los tres lados del triángulo (Figura 5 del Anexo 4).

Asimismo, exploraron el movimiento de los objetos y concluyeron que el circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro coinciden en el triángulo equilátero y, el circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de su hipotenusa (Figura 6 del Anexo 4).

En el Cuestionario 2, en la pregunta 1, el trabajo de los participantes en los diálogos fue similar al de el Cuestionario 1. Cuando uno de ellos afirmó que la respuesta correcta era un rombo, los otros señalaron que estaba enfocando la atención en un caso particular, discutieron las propiedades del rombo y cuadrado, y concluyeron que un cuadrado es un rombo (Figura 4.8.1). En la pregunta 2, a partir de centrar la atención en un caso particular del cuadrilátero *ABCD*, relacionaron el problema con la Actividad 1 (dividir el cuadrado en dos figuras de área igual) y formularon una conjetura sobre el comportamiento del área del polígono inscrito en el cuadrilátero *ABCD* (Figuras 7 y 8 del Anexo 4).

En la pregunta 3, los participantes reconocieron la importancia del movimiento de objetos y utilizaron el trazo de lugares geométricos para determinar una solución del problema sin la necesidad de plantear un modelo algebraico. Además, identificaron a la mediatriz como un elemento importante para representar dinámicamente el problema (Figura 9 del Anexo 4).

Capítulo V

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones del estudio basadas en las respuestas de las preguntas de investigación discutidas en el Capítulo IV que guiaron el diseño de las actividades y la implementación del curso. Al final del capítulo, se comentan las reflexiones acerca de los alcances y limitaciones sobre el diseño e implementación del MOOC para ser consideradas en futuras investigaciones.

El MOOC *Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales* ofreció a los participantes diversas oportunidades para involucrarse en actividades del quehacer matemático. Durante el desarrollo de esta investigación resaltaron elementos importantes a considerar en el diseño de un ambiente de aprendizaje abierto, masivo y en línea, cuyo objetivo sea promover en los participantes una actitud inquisitiva, es decir, enfocar su atención hacia el desarrollo y el quehacer matemático en lugar de abordar una serie de contenidos matemáticos como generalmente se presentan en un ambiente tradicional de enseñanza.

El primer elemento fue el diseño de las actividades basadas en la resolución de problemas y uso de tecnologías digitales. En términos generales, las tareas matemáticas deben ser desafiantes y no debe existir una solución inmediata que implique la aplicación de un procedimiento algorítmico. La integración de GeoGebra, Wikipedia, KhanAcademy y el foro, como medio de comunicación, favoreció y promovió que un grupo de participantes con características diversas se involucrara en la resolución de las tareas matemáticas propuestas.

Cada modelo dinámico de los problemas representó para los participantes un punto de partida que les permitió identificar conceptos, plantear y sustentar conjeturas basadas en el movimiento de los objetos matemáticos presentes en la configuración y sus relaciones o invariantes. Wikipedia y KhanAcademy se convirtieron en una fuente de información disponible en cualquier momento para consultar conceptos y relaciones matemáticas. Los participantes utilizaron estas plataformas para actualizar o recordar su conjunto de recursos matemáticos y utilizarlos en la exploración del modelo dinámico o en la construcción de una justificación. El uso del foro favoreció la comunicación, análisis y contraste de ideas matemáticas.

El uso coordinado y sistemático de las tecnologías digitales descritas anteriormente y su integración en la plataforma MéxicoX ofrecieron diversas oportunidades a los participantes para que se involucraran en:

1. *La exploración de representaciones de un problema*. La representación de los problemas mediante modelos dinámicos fue de gran utilidad para que identificaran y analizaran conexiones entre diferentes conceptos y relaciones matemáticas con el tema de estudio. Reconocieron la importancia del movimiento de objetos en la exploración de los modelos y en la búsqueda de diferentes maneras de solucionar un problema.
2. *La búsqueda de patrones, invariantes y relaciones entre objetos matemáticos*. Durante la resolución de los problemas, observaron la importancia del movimiento de objetos dentro de la configuración, la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc. Además, experimentaron la relevancia del trazo del lugar geométrico de algún elemento de la construcción al mover otro de manera ordenada y observar el camino que recorre para establecer relaciones o patrones entre los objetos involucrados. Así mismo, se percataron de lo importante que es sustentar esas relaciones utilizando argumentos visuales y empíricos.
3. *La presentación de argumentos.* Transitaron de soluciones visuales y empíricas (asociadas con el uso de las herramientas como movimiento de objetos dentro de la configuración, la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc.) hacia la presentación de argumentos geométricos y algebraicos en la validación de las conjeturas formuladas.
4. *Formulación de preguntas*. El planteamiento de preguntas se dio de manera gradual permitiéndoles encontrar, en forma colaborativa, otros métodos de solución y proponer nuevos problemas. En este contexto, la discusión de ideas o razonamientos dentro de la comunidad virtual de aprendizaje que generó el MOOC promovió el método inquisitivo en el proceso de resolución de problemas.

El segundo elemento fue el monitoreo y jerarquización de comentarios en el foro por parte del equipo de diseño ya que permitió centrar la atención de los participantes en algunos de los comentarios y generar oportunidades para discutir el tema matemático que contenían. La intervención del equipo de diseño fomentó que los participantes se involucraran en el proceso de resolución de los problemas, en especial: discusión del significado de los conceptos matemáticos involucrados, búsqueda de diversos métodos de solución y formulación de nuevos problemas.

El tercer elemento fue el papel que asumieron algunos participantes en los diálogos. En el curso participó un grupo de personas con diferentes niveles académicos, edades y conocimientos matemáticos. Como consecuencia, en los diálogos algunos asumieron diferentes roles incluyendo aquellos que proporcionaron retroalimentación o ayuda a otros cuando plantearon una duda o idea matemática errónea. También, otros dieron explicaciones y aclaraciones relacionadas con el desarrollo de las actividades.

Al combinar los tres elementos anteriores, los participantes se involucraron en la discusión de los procesos de resolución de problemas sin depender de un tutor y en cualquier sitio y horario como en un ambiente de aprendizaje tradicional. También, mostraron rasgos de su pensamiento matemático, tales como la adquisición de recursos y estrategias. Además, manifestaron una disposición para involucrarse en actividades que reflejan la práctica o actividad matemática.

Reflexiones finales

Durante la etapa del diseño e implementación de un MOOC, las tareas matemáticas deben ofrecer a los participantes diversas oportunidades para involucrarse en actividades del quehacer matemático. Esto es, guiar el trabajo de los participantes para entender el problema, explorar la configuración dinámica basado en el movimiento de sus objetos, observar invariantes entre los objetos, formular conjeturas basadas en argumentos visuales y empíricos, justificar las conjeturas utilizando relaciones y argumentos matemáticos, además analizar la generalidad de los métodos de solución y formular preguntas.

Los participantes deben valorar el hábito de la formulación de preguntas, la importancia de comunicar y discutir ideas en la resolución de los problemas.

Las actividades deben hacer énfasis en: (1) la importancia de las preguntas como un vehículo para aprender conceptos, explorar lo desconocido y generar nuevas ideas, (2) que el aprendizaje de las matemáticas implica enfrentarse a un dilema que necesita resolverse en términos de observar la situación o concepto, formular preguntas y buscar diferentes caminos para responderlas.

Finalmente, es importante mencionar que, en un MOOC, el nivel de compromiso y responsabilidad de cada de los participantes es lo que les permite dar seguimiento a sus ideas y avanzar en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas. Por ello, se debe buscar que, ellos mismos, sean conscientes de la necesidad de monitorear sus avances en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas. En este sentido, el foro se convierte en un medio de soporte y evaluación, para que los participantes compartan ideas, planteen dudas, reciban retroalimentación y conozcan las ideas de otros.

Hacia el diseño de un MOOC donde los participantes construyan los modelos dinámicos

Los resultados de este estudio proporcionan fundamentos para considerar el diseño de un MOOC donde los participantes construyan sus propios modelos dinámicos. Para esto, resultan importantes los tres momentos de las tareas matemáticas (movimiento, conjetura y justificación), el monitoreo de los comentarios que realizó el ED en el foro y los roles que asumieron algunos participantes en los diálogos de las actividades.

En esta ruta, se diseñó e implementó el MOOC: *Construcción de modelos dinámicos y resolución de problemas matemáticos*. La Tabla 5.1 muestra las actividades del curso y sus objetivos. Las tareas se pueden consultar en https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/actividades-mooc-3/.

Las actividades incluyeron videos, realizados por el equipo de diseño, con el objetivo de guiar a los participantes en la construcción de los modelos dinámicos enfatizando la importancia de las estrategias de solución cuando se usa un SGD. Además, se utilizó QuickTime y YouTube para la edición y almacenamiento de los videos, respectivamente. La Tabla 5.2 muestra las herramientas tecnológicas utilizadas en el diseño del curso y sus objetivos.

Tabla 5.1.
Actividades del MOOC Construcción de modelos dinámicos y resolución de problemas matemáticos

Conjunto de actividades	Objetivos
Actividad 1 (Semanas 1 y 2) 1. Problematizar los contenidos y la tecnología digital. 2. Mediatriz, altura y mediana de un triángulo.	Considerar a la formulación interrogantes o preguntas como un medio para comprender conceptos y resolver problemas. Mostrar los “comandos” o herramientas de GeoGebra que permiten construir directamente la mediatriz de un segmento y rectas perpendiculares. Explorar posibles procedimientos o caminos matemáticos que sustentan el uso de estos comandos.
Actividad 2 (Semana 3) La recta de Euler y sus propiedades.	Construir y explorar una configuración dinámica de un triángulo, su circuncentro, ortocentro y baricentro para visualizar el comportamiento de los objetos involucrados y sus relaciones. Formular una conjetura y, después, argumentar su validez mediante la presentación de diferentes argumentos.
Actividad 3. (Semana 4) Construcción del triángulo rectángulo.	Mostrar que una estrategia importante en la exploración del modelo es el movimiento controlado de algunos puntos u objetos con la intención de observar invariantes o patrones en el comportamiento de otros elementos de la configuración. Identificar el lugar geométrico como una estrategia importante en resolución de problemas.
Actividad 4 (Semana 5) Construcción de una recta tangente a una circunferencia dada y que pase por el punto C que no pertenece a la circunferencia.	Explorar problemas más simples o relajar las condiciones iniciales del problema como una estrategia que se potencia con el uso de un SGD, ya que guían y orientan al individuo a encontrar la solución del problema.

Tabla 5.2
Tecnologías digitales utilizadas en el MOOC.

Tecnologías digitales utilizadas en la construcción del MOOC-3	¿Qué permitieron estas tecnologías?
Plataforma MéxicoX	Integrar recursos, actividades, medios de soporte y evaluación para crear un ambiente de aprendizaje masivo basado en resolución de problemas y uso de tecnologías digitales.
QuickTime	Crear videos para mostrar al participante el procedimiento de construcción de los modelos dinámicos de los problemas con el fin de que tuviera un referente sobre cómo se realizan y sobre los conceptos que involucran su construcción.
YouTube	Almacenar los videos elaborados por el ED y visualizarlos o incrustarlos dentro de MéxicoX, es decir, el participante pudo observar los videos sin salir de la plataforma.
GeoGebra y www.geogebra.org	La plataforma www.geogebra.org hizo posible incrustar hojas de trabajo en MéxicoX, donde el participante tuvo la oportunidad de crear y guardar en línea o en sus dispositivos electrónicos (celular, tableta o computadora) sus modelos dinámicos y tener la posibilidad de compartirlos en el foro. Todo lo anterior sin necesidad de salir de MéxicoX.

El análisis de los resultados del MOOC *Construcción de modelos dinámicos y resolución de problemas matemáticos*, permitirá observar cómo una comunidad masiva y en línea se involucra en una reflexión matemática basada en el análisis de conceptos durante la construcción de los modelos matemáticos. Además, a partir del uso de las representaciones construidas, se pretende analizar las diversas formas en que los participantes exploran los problemas; las interrogantes que plantean sobre el comportamiento de atributos de los objetos; la formulación de conjeturas relacionadas con las propiedades de los objetos; y, la búsqueda de argumentos para validar las conjeturas.

El análisis anterior se utilizará como un punto de partida para el diseño de futuros MOOCs, basados en un ambiente de resolución de problemas y que ofrezcan diversas oportunidades a sus participantes de entender y abordar los problemas matemáticos mediante el uso de un sistema de geometría dinámica.

Referencias bibliográficas

Aguilar-Magallón, D. & Poveda, W. (2017). Problem Posing Opportunities Whit Digital Technology in Problem Solving Environments. In E. Galindo & J. Newton, (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1313-1320). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Alagic, G. & Alagic, M. (2013). Collaborative mathematics learning in online environments. En D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), *Visual Mathematics and Cyberlearning* (pp. 23-48). Netherlands: Springer.

Alario-Hoyos, C., Pérez-Sanagustín, M., Delgado-Kloos, C., Parada, G., Muñoz-Organero, M., & Rodríguez-de-las-Heras, A. (2013). Analysing the Impact of Built-in and External Social Tools in a MOOC on Educational Technologies. En D. Hernández-Leo, T. Ley, R. Klamma, & A. Harrer (Eds.), *Lectures Notes in Computer Science (*Vol. 8095, pp. 5-18). Berlin Heidelberg: Springer.

Aramo-Immonen, H., Kärkkäinen, H., Jussila, J., Joel-Edgar, S., & Huhtamäki, J. (2016). Visualizing informal learning behavior from conference participants' Twitter data with the Ostinato Model. *Computers in Human Behavior*, 55, 584-595.

Baldi, S. (2014). Introducing Online Learning in a Small Organization: The Case of the Diplomatic Institute of the Italian Ministry of Foreign Affairs. En G. Vincenti, A. Bucciero, & C. Vaz de Carvalho (Eds.), *E-Learning, E- Education, and Online Training* (pp.30-40). Switzerland: Springer.

Borba, M., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., & Sánchez, M. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education: June 2016. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *8*(5), 589-610.

Boston, M., Dillon F., Smith M., Stephen Miller (2017). *Taking Action: Implementing Effective Mathematics Teaching Practices in Grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Boyatt, R., Joy, M., Rocks, C., & Sinclair, J. (2014). What (Use) is a MOOC? En L. Uden, J. Sinclair, T. Tao, & D. Liberona (Eds.), *The 2nd international workshop on learning technology for education in cloud* (pp. 133-145). Netherlands: Springer.

Breslow, L., Pritchard, D., DeBoer, J., Stump, G., Ho, A., & Seaton, D. (2013). Studying learning in the worldwide classroom: Research into edX's first MOOC. *Research & Practice in Assessment*, 8, 13-25.

Conole, G. 2013. Open, Social and participatory media. En G. Conole (Ed.), *Designing for learning in an open word* (pp. 47-63). New York: Springer.

Churchill, D. (2014). Presentation design for "conceptual model" learning objects. *British Journal of Educational Technology*, 45(1), 136-148.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2013). Learning design for science education in 21st century. *Journal of the Institute for educational research*, 45 (2), 404-421.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill, B. Fox, & M. King (Eds.), *Mobile Learning Design, lecture Notes in Educational Technology* (pp. 3-25). Singapore: Springer.

Dick, T. & Hollebrands, K. (2011). *Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making.* Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Efimchik, E., Ivaniushin, D., Kopylov, D., & Lyamin, A. (2017). A Technique for Applying RLCP-Compatible Labs on Open edX Platform. En G. Vincenti, A. Bucciero, M. Helfert, & M. Glowatz (Eds.), *E-Learning, E-Education, and Online Training: Third International Conference, eLEOT 2016, Dublin, Ireland, August 31–September 2, 2016, Revised Selected Papers* (pp. 12-18). Switzerland: Springer International Publishing.

Epelboin, Y. (2017). MOOCs: A Viable Business Model? En M. Jemni & M. Kouttheai (Eds.), *Open Education: from OERs to MOOCs* (pp. 241-259). Berlin Heidelberg: Springer.

Ernest, P. (2016). The unit of analysis in mathematics education: bridging the political-technical divide? *Educational studies in mathematics*, *92*(1), 37-58.

Feldmann, B. (2015). System Support for Social Learning in Computer Science at a Distance University – The University of Hagen. En L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), 4th *International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 188-196). Slovenia: Springer International Publishing.

Fox, R. (2016). MOOC impact beyond innovation. En C. Ng, R. Fox, & M. Nakano (Eds.), *Reforming learning and teaching in Asia-Pacific Universities: Influences of Globalised Processes in Japan, Hong Kong and Australia* (pp. 159-172). Singapore: Springer.

Gros, B. (2011). *Evolución y retos de la educación virtual: construyendo el e-learning del siglo XXI*. Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya.

Gros, B. (2016). The Dialogue Between Emerging Pedagogies and Emerging Technologies. En B. Gros, Kinshuk, & M. Maina (Eds.), *The Future of Ubiquitous Learning Designs for Emerging Pedagogies* (pp. 3-24). Berlin Heidelberg: Springer.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Huang, R., Chen, G., Yang, J., & Loewen, J. (2013). The new shape of learning: adapting to social changes in the information society. En R. Huang, Kinshuk, & M. Spector (Eds.), *Reshaping Learning: Frontiers of Learning Technology in a Global Context. Part I* (pp. 3-42). Berlin Heidelberg: Springer.

Jones, I. & Inglis, M. (2015). The problem of assessing problem solving: can comparative judgement help? *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 337-355.

Kirby, J., Knapper, C., Lamon, P., & Egnatoff, W. (2010). Development of a scale to measure lifelong learning. *International Journal of Lifelong Education*, 29(3), 291-302.

Knapper, C. & Cropley, A. (2000). *Lifelong learning in higher education. Third edition.* Gran Bretaña: Psychology Press.

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 191-225). New York: Springer.

Leung, F. (2013). Part III, Introduction to section C: Technology in the mathematics curriculum. En M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 517-524). New York: Springer.

Levy, D. (2011). Lessons learned from participating in a connectivism massive online open course (MOOC). En Y. Eshet-Alkalai, A. Caspi, S. Eden, N. Geri, & Y. Yair (Eds.), *Proceedings of the Chais conference on instructional technologies research 2011: Learning in the technological era* (pp. 31-36). Raanana: The Open University of Israel.

Lincoln, Y., & Guba, E. (1985). Naturalistic Inquiry. Newbary Park, CA: Sage.

Lianh-Chen, I-Hsien, & Seg-Cho (2014). The Key Factors of Knowledge Sharing in Online Community. En L. Uden, J. Sinclair, T. Tao, & D. Liberona (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud. MOOC and Big Data.* (Vol. 446, pp. 105-113). Switzerland: Springer International Publishing.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Switzerland: Springer.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans: Tarquin Publications.

Moreno-Armella, L. & Santos-Trigo, M. (2013). Introduction to International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1/2), 3-8.

Moreno-Armella, L. & Santos-Trigo, M. (2016). The use of digital technologies in mathematical practices: Reconciling traditional and emerging approaches. En L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*, (pp. 595–616). New York: Taylor & Francis.

Naaranoja, M. (2014). Needs of Learners in Campus Development–Blended Learning. En L. Uden, J. Sinclair, T. Tao, & D. Liberona (Eds), *International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 173-182). Springer International Publishing.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teacher of Mathematics (2008). *The role of technology in the teaching and learning of mathematics. a position of the National Council of Teachers of Mathematics*. Recuperado el 21 de noviembre de 2016 de www.nctm.org/about/ content.aspx?id=14233.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). F*ocus in High School Mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pólya, G. (1945). *How to Solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). Mathematical Problem Solving and Digital Technologies in a Massive Online Course. In E. Galindo & J. Newton, (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1361-1368). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Poveda, W. & Gómez-Arciga, A. (2017). MOOC Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales: Su diseño e implementación. En A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) *Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM* (pp. 85-105). México: Ecorfan. Disponible en http://www.ecorfan.org/actas/Una_vision_integradora/Una_visi%C3%B3n_integradora_6.pdf.

Poveda, W., Aguilar-Magallón, D., & Gómez-Arciga, A. (2018). Problem Solving and the use of digital technologies in a MOOC: Design and Implementation. In T. Hodges, G. Roy, & A. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1203-1218). Geenville, SC: : University of South Carolina & Clemson University.

Poveda, W., Aguilar-Magallón, D., & Olvera-Martínez, C. (2017). Resolución de Problemas y Uso de Tecnologías Digitales en un Curso en Línea Masivo y Abierto. En C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) *Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM* (pp. 119-145). México: Ecorfan. Disponible en http://www.ecorfan.org/actas/citem/T%C3%B3picos_Selectos_de_Educaci%C3%B3n_en_CITeM_7.pdf.

Poveda, W., Aguilar-Magallón, D., & Olvera-Martínez, C. (2018). Diseño de actividades basadas en la resolución de problemas en un ambiente de aprendizaje MOOC. En A. Lópéz, C. Lima y J. Reyes (Dirs.) *Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM* (pp. 74-88). México: Ecorfan. Disponible en http://ecorfan.org/actas/citem3/Educaci%C3%B3n_para_todos_5.pdf

Quinton, S. & Allen, M. (2014). The social processes of web 2.0 collaboration: Towards a new model for virtual learning. En M. Gosper & D. Ifenthaler (Eds.), *Curriculum Models for the 21st Century* (pp. 35-53). New York: Springer.

Reyes-Martínez, I. (2016). *El diseño y resultados de la implementación de un ambiente de aprendizaje que incorpora la resolución de problemas y el uso coordinado de tecnologías digitales*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav, México.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M., & Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(5), 651-690.

Santos-Trigo, M. (2007). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(6), pp. 35-54.

Santos-Trigo, M. (2008). An inquiry approach to construct instructional trajectories based on the use of digital technology, *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 4, 347–357.

Santos-Trigo, M. (2008a). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho-Machín, & L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación* *matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Santos-Trigo, M. (2010). A mathematical problem-solving approach to identify and explore instructional routes based on the use of computational tools. En J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard, & J. Hertzog (Eds.), *Technology Implementation and Teacher Education: Reflective Models* (pp. 208-313). IGI Global: Hershey PA.

Santos-Trigo, M. (2014). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Educatio*n (pp. 496-501). New York: Springer.

Santos-Trigo, M. (2014a). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Segunda edición. México: Trillas, Asociación Nacional de profesores de matemáticas.

Santos-Trigo, M. (2015). Uso coordinado de tecnología digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI. En X. Martínez-Ruiz & P. Camarena-Gallardo (Coords.), *La educación matemática en el siglo XXI* (pp. 133-153). México: Instituto Politécnico Nacional.

Santos-Trigo, M. (2016). Tecnologías digitales y educación. *Revista C2 Ciencia y Cultura* [en línea]. Recuperado el 8 de noviembre de http://www.revistac2.com/tecnologias-digitales-y-educacion/.

Santos-Trigo, M. (2016a). La tecnología y la época del cambio, o el cambio de época. *Revista C2 Ciencia y Cultura* [en línea]. Recuperado el 28 de junio de http://www. revistac2.com/la-tecnologia-la-epoca-del-cambio-cambio-epoca/.

Santos-Trigo, M. (2016b). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (15), 333-346.

Santos-Trigo, M. (2016c). Las tareas múltiples y la tecnología digital. *Revista C2 Ciencia y Cultura* [en línea]. Recuperado el 4 de enero de http://www.revistac2.com/las-tareas-multiples-y-tecnologia-digital/.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. PRIMUS, 19(3), 260-279.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2011). High School Teachers' Problem Solving Activities to Review and Extend Their Mathematical and Didactical Knowledge. *PRIMUS*, 21(8), pp. 699- 718.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Rodríguez, A. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(3), 313-336.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 279-302.

Santos-Trigo, M. & Ortega-Moreno, F. (2013). Digital technology, dynamic representations, and mathematical reasoning: extending problem solving frameworks. *International Journal of Learning Technology*, 8(2), 186-200.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinated use of digital technologies in learning environments. En L. Uden, J. Sinclair, Y. Tao, & D. Liberona (Eds.), Learning Technology for Education in Cloud. MOOC and Big Data (Vol. 446, pp. 61–71). Switzerland: Springer International Publishing.

Santos-Trigo, M. & Moreno-Armella, L. (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving 2 Experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems, Research in Mathematics Education* (pp. 189-207). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Martínez, I. (2018). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. UK: Taylor & Francis.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The use of digital technology in extending mathematical problem solving reasoning. En L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud* (Vol. 533. pp. 298-309). Switzerland: Springer International Publishing.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(6), 827-842.

Schoenfeld A. (1985). *Mathematical problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371.) New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. (2007). Method. En F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 69-110). New York: MacMillan.

Sergis, S., Sampson, D., & Pelliccione, L. (2017). Educational Design for MOOCs: Design Considerations for Technology-Supported Learning at Large Scale. En M. Jemni, Kinshuk, & M. Khribi (Eds.), *Open Education: from OERs to MOOCs* (pp. 39-71). Berlin Heidelberg: Springer.

Sinclair, J. & Kalvala, S. (2015). Engagement measures in massive open online courses. En L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), Learning Technology for Education in Cloud. (Vol. 533, pp. 3-15). Switzerland: Springer International Publishing.

Smith, M. & Stein, M. (2018). 5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions. Second Edition. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stewart, D. & Shamdasani, P. (2015). *Focus groups: Theory and practice. Third Edition*. USA: Sage publications.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO] (2015). *Education 2030 Incheon Declaration and Framework for Action: Towards inclusive and equitable quality education and lifelong learning for all*. República de Korea: UNESCO.

Watson, A. & Ohtani, M. (2015). Themes and Issues in Mathematics Education Concerning Task Design: Editorial Introduction. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 3-15). Switzerland: Springer International Publishing.

Zhang, Q., Peck, K., Hristova, A., Jablokow, K., Hoffman, V., Park, E., & Bayeck, R. (2016). Exploring the communication preferences of MOOC learners and the value of preference-based groups: Is grouping enough? *Educational Technology Research and Developmen*t, 64 (4), 809-837.

Anexo 1

El estudio piloto

En este anexo se describen las tareas matemáticas y los resultados generales obtenidos en el estudio piloto.

1. Diseño del estudio piloto

La selección de tareas matemáticas del estudio piloto surgió a partir de la revisión de la literatura e investigaciones previas en resolución de problemas y uso de tecnologías digitales. Según el modelo de diseño RASE, cada actividad incluyó un modelo dinámico de los problemas o tareas matemáticas construido en el SGD GeoGebra. También, se integró un foro de discusión con la finalidad de que los participantes tuvieran la oportunidad de refinar, ampliar o contrastar sus conceptos o ideas matemáticas tras el análisis de la retroalimentación obtenida por parte de otros.

Se diseñaron dos cuestionarios con preguntas de selección múltiple, donde en cada una se proporcionó el modelo dinámico de un problema y una lista de opciones que podían ser falsas o verdaderas. Inicialmente, el trabajo de los participantes fue explorar el modelo del problema, identificar y seleccionar las opciones correctas de la lista. Los intentos para contestar correctamente una pregunta fueron ilimitados, es decir, si un participante marcaba una opción incorrecta, tenía la oportunidad de buscar información y reformular sus respuestas. Posteriormente, se promovió que los participantes continuaran con el análisis del problema en el foro.

El MOOC comprendió cinco actividades o conjunto de tareas matemáticas y un tiempo de siete semanas; en la última, los participantes podían dar seguimiento a las actividades y a los comentarios en los foros. Las actividades y sus objetivos se muestran en la Tabla 1.

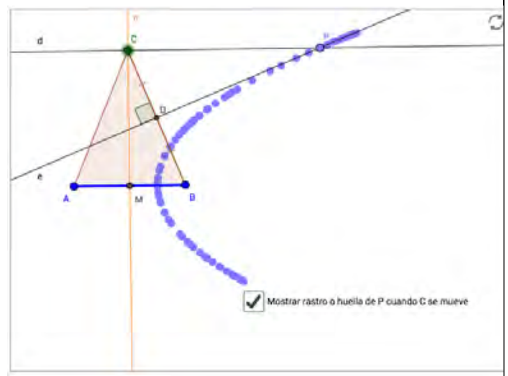
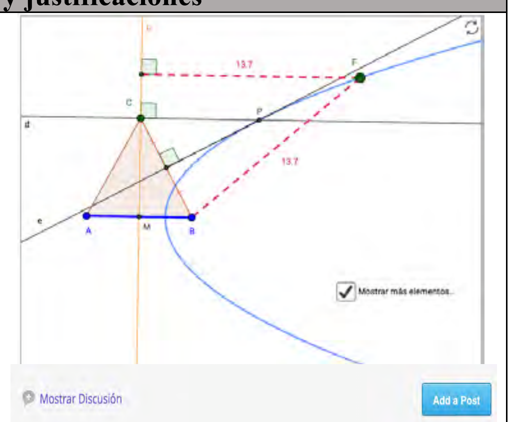
Tabla 1.
Actividades y sus objetivos.

Conjunto de actividades	Objetivos
Actividad 1 (una semana). • Importancia de formular preguntas. • Resolución de problemas y uso de tecnologías digitales.	Relacionar las actividades de resolución de problemas con el aprendizaje de las matemáticas. Se promueve que los estudiantes formulen preguntas como un camino para comprender ideas matemáticas y resolver problemas.
Actividad 2 (una semana). • El segmento y su recta mediatriz. • El triángulo isósceles. • El triángulo equilátero. • El triángulo rectángulo e isósceles.	Mover objetos, observar el movimiento de las figuras y formular algunas conjeturas relacionadas con sus propiedades. Toda conjetura que se identifique debe justificarse con argumentos.
Actividad 3. **Cuestionario 1** (una semana). • Las medianas de un triángulo. • Las alturas de un triángulo. • Las bisectrices de un triángulo.	Analizar el movimiento de objetos para comprobar o refutar visualmente algunas relaciones y conjeturas.
Actividad 4 (una semana). • La parábola como lugar geométrico. • Explorar el comportamiento del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo que se puede modelar a través de un lugar geométrico.	Introducir al participante en el estudio de lugares geométricos como una estrategia para resolver problemas. Modelar la variación del área de un rectángulo de perímetro mediante el uso de un SGD.
Actividad 5 (dos semanas). • Un lugar geométrico que modela el área de una familia de triángulos. • **Cuestionario 2**: Extender el problema de la parábola y un problema de variación que se puede resolver utilizando la estrategia de lugar geométrico.	Modelar la variación del área de un triángulo isósceles mediante el uso de un SGD. Analizar las propiedades de los objetos cuando se mueven algunos elementos en la configuración del problema, formular conjeturas y utilizar argumentos visuales y empíricos para sustentarlas.

En todas las actividades se proporcionaron a los participantes los modelos dinámicos de los problemas, se intentaba que los exploraran de manera guiada y se involucraran en el proceso de resolución del problema. La Tabla 2 muestra parte de la actividad 4 y la manera en que la plataforma permitió estructurar las actividades, se resaltan los tres momentos de la tarea matemática, la guía de trabajo, el modelo del problema proporcionado a los participantes, la formulación de preguntas y el foro de discusión como un medio de comunicación entre los participantes.

Tabla 2.

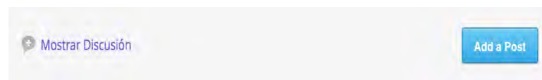
La parábola como lugar geométrico.

El movimiento	
En la representación dinámica que involucra el segmento *AB* y su recta mediatriz *n*, se han incluido dos nuevos elementos: una recta perpendicular a n que pasa por un punto *C* y la recta mediatriz del lado *BC*. Se puede fijar la atención en el punto de intersección *P* de la mediatriz *n* y *BC* ¿qué rastro o huella deja *P* cuando se mueve el punto *C*? Mueve *C* y observa la trayectoria que define *P*. Luego, activa la casilla *Mostrar rastro de P cuando se mueve C* y mueve el punto C. ¿Qué propiedades posee o muestra el lugar geométrico? ¿A cuál figura se parece?	
Búsqueda de información	
¿Cuál es la definición de una parábola? ¿Cuáles son los elementos de una parábola? El siguiente video fue tomado de KhanAcademy, obsérvalo y analiza su contenido. Analiza el lugar geométrico del punto *P* que se generó al mover el punto sobre la perpendicular *n*. ¿Cuáles serían tus candidatos para ubicar el foco y la directriz de esa parábola? https://es.wikipedia.org/wiki/Foco_(geometr%C3%Ada)	
Formulación de conjeturas y justificaciones	
¿Qué curva u objeto matemático representa el lugar geométrico del punto *P* cuando *C* se mueve sobre la mediatriz del segmento AB? ¿Qué propiedades importantes caracterizan ese lugar geométrico? Activa la casilla *Mostrar más elementos...* y mueve *F*. ¿Cómo sustentar o argumentar matemáticamente que la trayectoria de *P* cuando *C* se mueve se trata de una parábola? ¿Qué se debe probar y cómo? ¿Dónde se encuentra el punto que genera el lugar geométrico? ¿Qué significa que esté en la mediatriz del lado *BC*?	

La Tabla 3 muestra la pregunta 1 del Cuestionario 1. Se resaltan los modelos dinámicos de las tareas matemáticas y el foro de discusión como un medio de Soporte y de Evaluación.

Tabla 3.

Pregunta 1 del Cuestionario 1

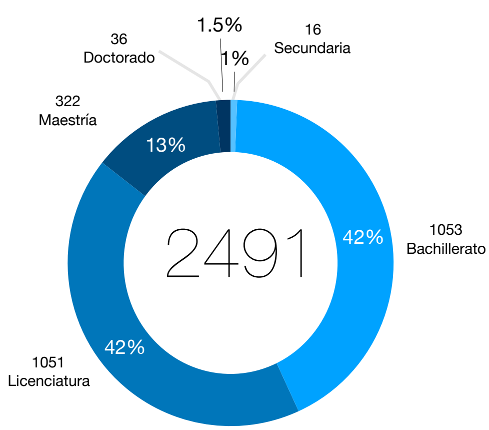
Pregunta 1. ABC es un triángulo, m_1, m_2 y m_3 son las mediatrices de los lados $AB,\ BC$ y AC respectivamente. ¿Qué propiedades o patrones observas cuando mueves los puntos $A,\ B$ y C en esta representación dinámica? 	Las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes en un punto O llamado circuncentro. ¿Qué propiedades o patrones observas cuando mueves los puntos $A,\ B$ y C? ( ) En un triángulo acutángulo, el circuncentro está dentro del triángulo. ( ) En un triángulo obtusángulo, el circuncentro está fuera del triángulo. ( )En un triángulo rectángulo, el circuncentro está sobre la hipotenusa del triángulo. 

Las actividades del curso se pueden consultar en https://bit.ly/2Iqzo73.

Los participantes y la implementación del estudio piloto

En el curso se registraron 2491 personas, en su mayoría con estudios mayor o igual a bachillerato. La Gráfica 3.1 muestra el grado académico de los participantes.

Gráfica 3.1. Grado académico de los participantes del estudio piloto.



El trabajo de los participantes durante el desarrollo de las actividades se observó través de los comentarios en el foro. Cada uno tuvo la oportunidad de comunicar sus ideas las veces que consideró necesarias. En el curso, los participantes plantearon un total de 7573 comentarios.

Dado el alto número de comentarios que se generó en la primera actividad, el ED tomó la decisión de agruparlos según las ideas que éstos contenían, por ejemplo: respuestas de las preguntas formuladas en las actividades, conceptos o ideas erróneas, nuevos métodos de solución del problema, entre otras.

Durante el tiempo programado de cada actividad, el ED *"fijó"* un comentario de cada grupo, es decir, lo colocó de tal manera que siempre se visualizara al inicio de los otros, para ello, se utilizó la herramienta "*Fijar*", parte del foro. En la Figura 1 se observa cómo la plataforma visualiza los comentarios fijados.

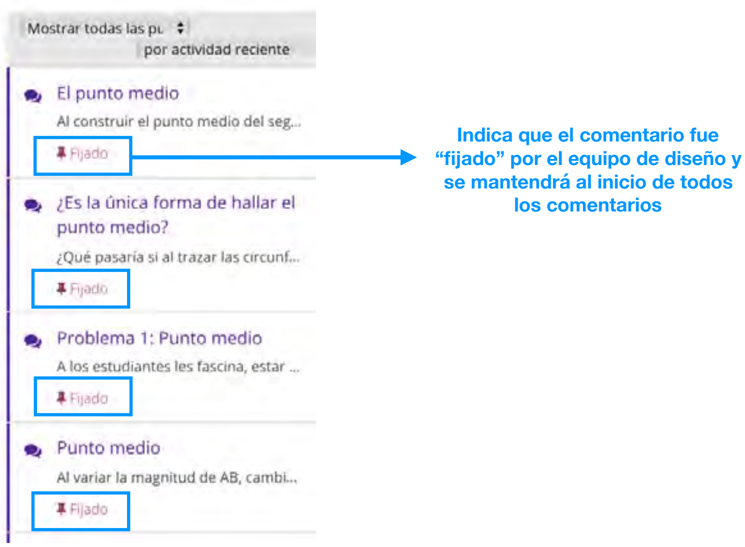


Figura 1. Captura de pantalla de un foro.

El ED observó que los participantes centraron su atención en los comentarios "*fijados*" ya que proporcionaron sus puntos de vista relacionados con el tema del comentario inicial y discutieron la idea del comentario original. En la Figura 2 se muestra el comentario inicial de un participante, fijado por el ED, y la cantidad de respuestas o puntos de vista que otros plantearon.

Figura 2. Captura de pantalla de un foro.

La acción anterior permitió que se generaran *diálogos*, es decir, una discusión entre los participantes alrededor de un comentario realizado por uno de ellos. Por ejemplo, en la actividad 1, un participante mencionó que un triángulo equilátero no puede ser isósceles, el ED "*fijó*" el comentario y 98 personas proporcionaron sus ideas y puntos de vista. Parte del diálogo se muestra en Figura 3. El ícono  indica que el comentario está fijado al inicio del foro.

Figura 3. Parte de un diálogo entre los participantes.

El ED nunca proporcionó respuestas a las dudas de los participantes en los diálogos, sino que, durante el desarrollo de las actividades, planteó preguntas cuando lo consideró necesario con el objetivo de que en la búsqueda de respuestas se favoreciera la comprensión de conceptos e ideas matemáticas. Se observó que, cuando el ED planteó alguna pregunta, los participantes compartían y discutían sus respuestas.

A continuación, se presenta y discute un resumen del trabajo de los participantes en los diálogos que se generaron en las actividades 1 y 5 y en el Cuestionario 1. También, se resaltan las tareas matemáticas diseñadas.

2. Actividad: El segmento y su recta mediatriz

Se proporcionó a los participantes un modelo dinámico que incluía un segmento AB y su recta perpendicular, n, que pasa por su punto medio M (la Actividad se puede consultar en https://bit.ly/2Iqzo73, pág. 6). En una primera fase de la resolución del problema, se solicitó a los participantes mover los puntos A y B, observar la medida de los segmentos y ángulos involucrados y determinar qué cambia y qué se mantiene constante (Figura 4).

En los comentarios se observó que los participantes coincidieron que al mover los puntos A y B, la longitud del segmento AB cambiaba, se mantenía la relación de congruencia entre los segmentos AM y BM, y el ángulo entre el segmento y la recta permanecía constante e igual a 90°. El ED fijó uno de esos comentarios.

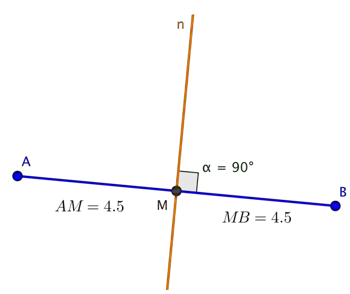


Figura 4. El segmento y la recta perpendicular que pasa por su punto medio.

En el diálogo que generó, sus participantes reconocieron que la recta n era la mediatriz del segmento AB y compartieron la definición en el Foro (Figura 5).

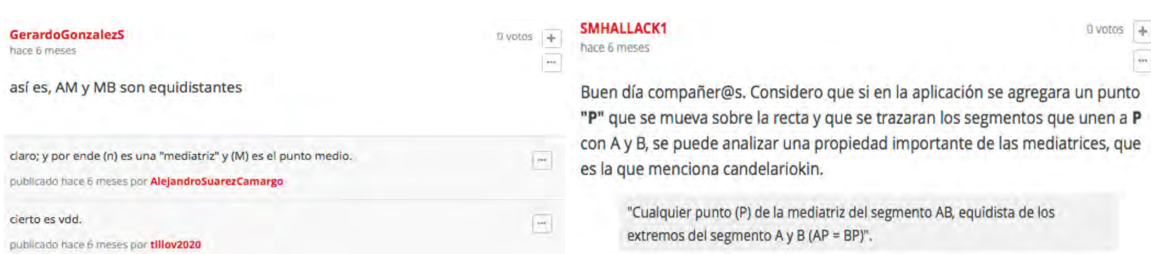


Figura 5. Diálogo entre los participantes: la recta mediatriz.

También, se observó que cuando un participante planteaba una idea incorrecta los otros le proporcionaban ayuda y le explicaban o aclaraban el tema. Por ejemplo, en el mismo diálogo, cuando un participante comentó que el valor del ángulo entre la recta n y el segmento AB no siempre era de 90°, otros le indicaron que su respuesta estaba incorrecta ya que el ángulo se mantenía invariante.

Todos los participantes, en los diálogos de esta actividad, reconocieron que, sin importar la posición de A y B: el ángulo entre la recta n y el segmento AB siempre es de 90° y los segmentos AM y MB son congruentes.

El triángulo isósceles

Se proporcionó a los participantes un nuevo modelo dinámico (Figura 6) en el cual se ubicó un punto móvil C sobre la recta n y se construyó el triángulo ABC.

Se solicitó a los participantes mover el punto C y observar las propiedades de la familia de triángulos ABC que se generan al mover C sobre la recta n. En el foro, los participantes respondieron que las longitudes de los segmentos AC y BC son iguales sin importar la posición del punto C. Se fijó un comentario de todos los anteriores. En el diálogo que generó, se justificó que la congruencia de los ángulos BAC y ABC y del triángulo isósceles ABC (Figura 7).

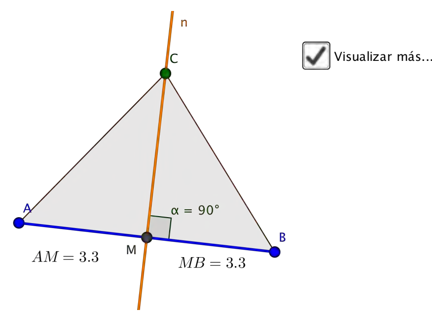


Figura 6. El triángulo isósceles.

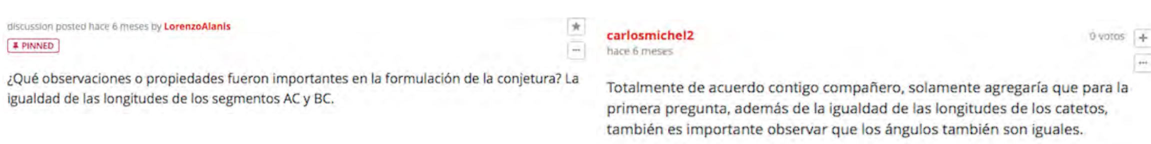


Figura 7. Justificación: Triángulo ABC es isósceles.

Luego, se proporcionó a los participantes el modelo dinámico representado en la Figura 8 que incluyó la medida de AC, BC y de los ángulos BAC y ABC y se planteó a los participantes la conjetura: *Se traza un segmento* AB *y la recta perpendicular* n *al segmento que pasa por el punto* M*, si* C *es un punto en la recta n, entonces la familia de triángulos* ABC *que se genera al mover* C *siempre son isósceles (cuando* C *coincide con* M*, no existe triángulo).*

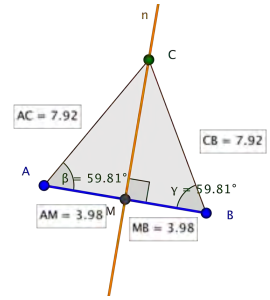


Figura 8. Importancia de la medición de atributos de los objetos matemáticos.

Todos los participantes indicaron estar de acuerdo con la conjetura excepto uno quien afirmó la existencia de una posición de C en la cual el triángulo ABC era equilátero y comentó que como un triángulo equilátero no es isósceles, entonces la conjetura no era válida. El comentario fue fijado y generó una discusión en torno a que si un triángulo equilátero es isósceles que llevó a los participantes a reconocer que todo triángulo equilátero es isósceles. Durante este proceso, los participantes reconocieron la necesidad e importancia de definir en forma precisa los triángulos equiláteros y en general, cualquier objeto matemático (Figura 9).

Figura 9. Importancia de definir en forma precisa los conceptos matemáticos.

Seguidamente, se proporcionó a los participantes una justificación de la conjetura que consideraba la congruencia de triángulos AMC y BMC (https://bit.ly/2Iqzo73, pág. 10) y se les cuestionó sobre las observaciones o propiedades que fueron importantes para llegar a la conclusión.

Se generaron diálogos observó que los participantes comprendieron la justificación y coincidieron en la importancia de identificar las invariantes y relaciones entre los objetos que conforman la configuración dinámica como un medio para llegar a la conclusión.

El triángulo equilátero

El objetivo de esta Actividad fue determinar la posición del punto C, sobre la recta n, para obtener un triángulo equilátero. En la primera parte se proporcionó a los participantes el modelo dinámico que se muestra en la Figura 10 y se les pidió mover el punto C para ubicar, en caso de ser posible, la posición en la que se obtiene un triángulo equilátero. Además, se sugirió centrar la atención en los ángulos BAC, ABC y ACB.

En el primer diálogo, se observó que los participantes coincidieron en que existían posiciones, en algunos casos aproximadas, donde los tres lados del triángulo ABC eran congruentes, así como sus ángulos.

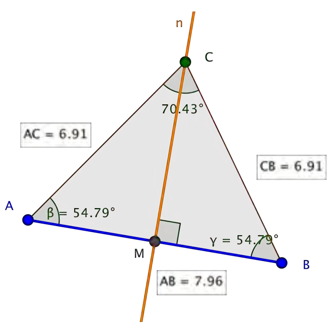


Figura 10. Hacia la construcción del triángulo equilátero.

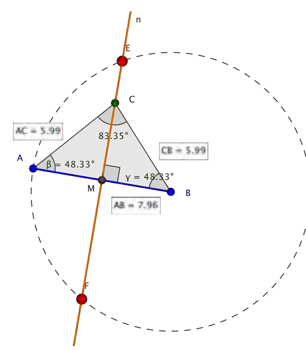


Figura 11. Construcción del triángulo equilátero.

Luego, se proporcionó a los participantes el modelo dinámico de la Figura 411, donde se construyó un círculo con centro en B y radio AB. Se solicitó a los participantes mover los puntos A, B y C, observar el comportamiento de los objetos geométricos y formular una conjetura que indicara en qué condiciones se forma un triángulo equilátero.

Los participantes comentaron en el foro que, para obtener un triángulo equilátero, C debe ser el punto de intersección entre la circunferencia y la recta n. El comentario se fijó y en la discusión de ideas en el diálogo, identificaron una forma de construir un triángulo equilátero a partir de un segmento y su recta mediatriz (Figura 12).

...se puede utilizar una estrategia geométrica usando Geogebra. Haciendo centro en el punto A se traza una circunferencia de radio AB. El vértice C será el punto de intersección de de dicha circunferencia con la mediatriz del segmento AB; es decir, el triángulo ABC es equilátero.

publicado hace 6 meses por VictorFelix

discussion posted hace 6 meses by CarmenZ

PINNED

1.- Trazar un segmento AB 2.- Abrir el compas igual al segmento AB 3.- Ubicarse en el punto A y trazar un arco de circunferencia arriba del segmento AB. 4. Situarse en el punto B y trazar un arco de circunferencia arriba del segmento AB e interceptar el arco anterior y así se forma el punto C. 5.- Los ángulos del triángulo deben medir 60 grados.

Figura 12. Evidencias de los participantes: propuestas para construir un triángulo equilátero.

Preguntas formuladas por el ED en los diálogos

En el diálogo anterior, los participantes centraron la atención en el punto E de la construcción (Figura 11) y no identificaron que el punto F también satisface las condiciones del problema, tampoco mencionaron que otra forma de obtener un triángulo equilátero era construir el círculo de radio AB y centro en A. El ED planteó la pregunta:

¿Cuántos triángulos equiláteros se pueden formar dadas las condiciones iniciales del problema?

Se observó que, esta pregunta sirvió para que los participantes complementan la idea de cómo determinar la posición del punto C para obtener un triángulo equilátero, comentaron: "*Sea un segmento AB y su recta mediatriz n y sea la circunferencia de radio AB con centro A o B, si E y F son los puntos de intersección de la circunferencia y la recta n entonces los triángulos ABE y ABF son equiláteros* (Figura 13).

discussion posted hace 6 meses by JLHC

PINNED

Sea AB un segmento con mediatriz "n". Si se construye una circunferencia de radio AB con centro en A o B, sean E y F los puntos de intersección de la circunferencia con la recta n. Los triángulos ABE y ABF son equiláteros.

Sea el segmento AB, M su punto medio y la recta n su mediatriz, si AB se toma como radio de una circunferencia con centro B, considerando uno de los puntos (E y F) de intersección de la circunferencia con la mediatriz como vértice del triángulo, el triángulo ABE es un triángulo equilátero.

En sentido estricto solo es un triángulo (cualquiera de los dos) pero el enunciado aplica para los dos que se generan por las intersecciones de la circunferencia con la mediatriz n y son un resultado de la construcción.

publicado hace 6 meses por JLHC

discussion posted hace 6 meses by JLHC

Sean C y C´ los puntos de intersección de la circunferencia de radio AB con centro en B (o A) con la mediatriz de AB "n". Se puede decir que CB=AB. Por otra parte, ya que C se encuentra sobre la mediatriz "n" entonces AC=CB. Por transitividad AB=BC=AC.

Figura13. Formulación de una conjetura.

Lo mismo sucedió durante el desarrollo de las otras actividades, por ejemplo, en la 4, el ED observó que los participantes no proporcionaron argumentos visuales o empíricos para sustentar la existencia de un triángulo de área máxima, por lo que formuló la pregunta en el diálogo:

¿Qué argumento visual o empírico permite conjeturar que existe un triángulo de área máxima?

La Figura 13 muestra el modelo dinámico del problema, la pregunta formulada por el ED y algunas de las respuestas de los participantes. Las respuestas en el diálogo coincidieron en utilizar estrategias asociadas al movimiento de objetos y la cuantificación de sus atributos para validar de la conjetura. Además, indicaron en cuáles casos era posible o no construir el triángulo.

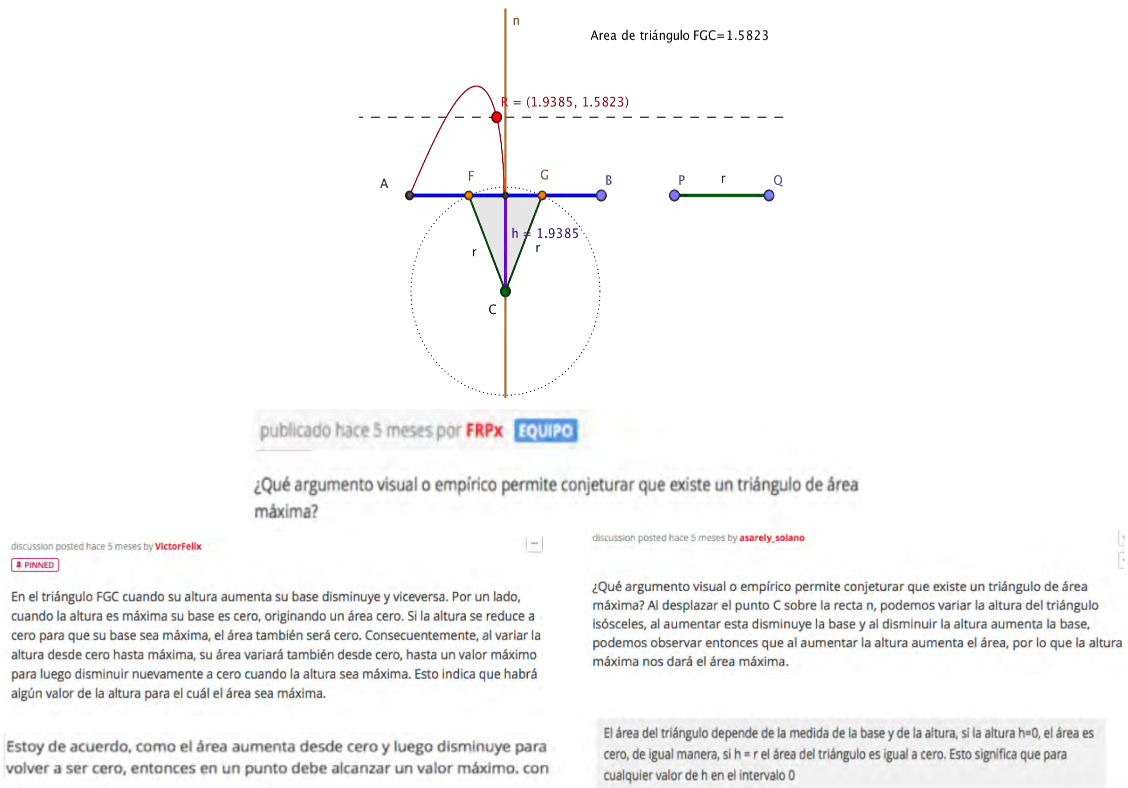


Figura 13. Modelo dinámico proporcionado a los participantes y sus respuestas a una pregunta realizada por el ED.

En la siguiente parte de esta actividad 4, se observó que bajó participación en el foro. El ED identificó, al menos, 30 comentarios en el foro donde los participantes indicaron no tener idea de cómo determinar el modelo algebraico del lugar geométrico. Pese a que el ED enfatizó que el tema no era relevante (no era parte de los objetivos) los participantes insistieron en determinarlo. En el diálogo, uno de ellos construyó el modelo algebraico y los otros mostraron evidencia de no comprender el procedimiento.

Los cuestionarios

En relación con los cuestionarios, se observó que los modelos de los problemas permitieron a los participantes mover sus objetos y observar sus atributos, esto les proporcionó información para formular conjeturas relacionadas con sus propiedades. A continuación, se detalla el trabajo de los participantes en la pregunta 1 del Cuestionario 1 (Figura 14).

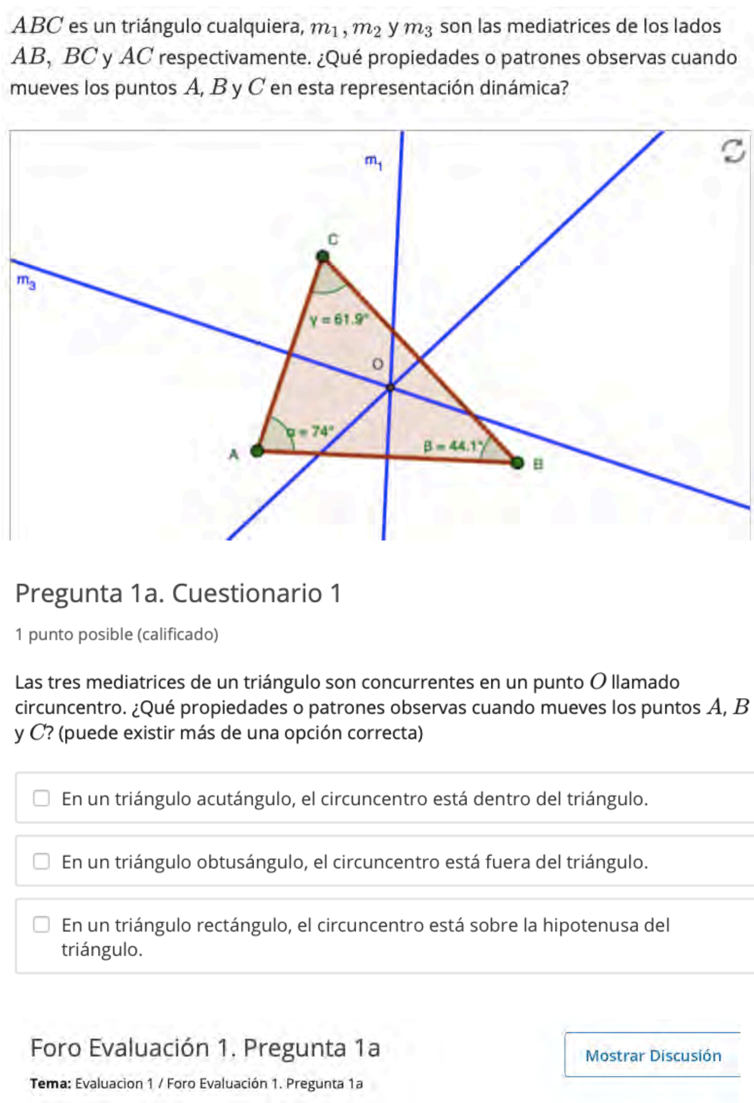


Figura 14. Pregunta 1 del Cuestionario 1.

En los diálogos se observó que algunos participantes buscaron información en Wikipedia del concepto de mediatriz de un triángulo. Coincidieron en que es importante mover los puntos y observar los atributos de los objetos para formular conjeturas; además, reconocieron la importancia que tiene GeoGebra en la exploración y observación de propiedades de los triángulos. El movimiento de objetos y la exploración, los llevó a marcar las opciones correctas sin plantear dudas en el foro. Algunos de sus comentarios se muestran en la Figura 15.

Figura 15. Evidencias de los participantes: Importancia del movimiento de objetos.

Un participante planteó el problema: "*Dado un triángulo ABC, sus tres mediatrices y el circuncentro O ¿en qué momento se forman seis triángulos rectángulos congruentes donde uno de sus vértices es O?*". El comentario fue fijado y se discutió la conjetura: "*Al trazar las tres mediatrices de un triángulo equilátero se forman seis triángulos rectángulos congruentes*".

Las justificaciones presentadas en el diálogo incluyeron la relación que existe entre las mediatrices y las bisectrices de un triángulo equilátero y el criterio de congruencia LAL para concluir que los seis triángulos que se forman con las tres mediatrices de un triángulo equilátero son rectángulos y congruentes (Figura 16).

Figura 16. Una justificación geométrica del problema.

Anexo 2

Comentarios seleccionados del foro por el equipo de diseño

Se describen las ideas de los comentarios que fijó el ED y que generaron los diálogos en las actividades del MOOC. El número entre paréntesis al final de la idea en cada uno de los comentarios indica los participantes que se involucraron en el diálogo.

Actividad 1 (https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-1/).

1. Los estudiantes pocas veces se cuestionan sobre el significado de los copnceptos (112).
2. En las aulas no se tiene que prohibir el uso de tecnologías digitales (107).
3. ¿Qué tecnologías deben utilizar los estudiantes y cómo? (113)
4. Importancia del uso de las herramientas en la comprensión de ideas (109).
5. *Comprensión del problema*: Propiedades del cuadrado *ABCD*: al mover los puntos *A* y *B* las longitudes de los lados y las diagonales aumentan o disminuyen, pero conservan la propiedad de ser iguales (94).
6. *Solución 1*. Una solución es la diagonal (123).
7. *Solución 1*. Una solución es la mediatriz del un lado del cuadrado (121).
8. *Solución 1*. Si *PQ* pasa por el centro del cuadrado entonces se convierte en su eje de simetría, por lo tanto, las áreas son iguales (76).
9. *Solución 1*. Si *PQ* pasa por el centro del cuadrado entonces lo divide en dos figuras de área igual (102).
10. *Solución 1*. El ED cuestionó: ¿existen otras soluciones? (89).
11. *Solución 1*. Justificación 1: Trazo de diagonales del cuadrado y congruencia de triángulos (117).
12. *Solución 1*. Justificación 2. Trazo de rectas perpendiculares a los lados que pasan por *P* y *Q* (75).
13. *Solución 2*. Una nueva solución basada en un caso particulares (87).
14. Solución 2. Formulación de una conjetura: *Si P es un punto que está dentro del cuadrado, la suma de las áreas de los triángulos APB y DCP es la mitad del área del cuadrado* (85).
15. *Solución 2*. Señalaron casos particulares y argumentos para sustentarlos, por ejemplo, cuando *P* coincide con uno de los vértices o está sobre uno de los lados del cuadrado (79).

16. *Solución 2.* Utilizaron las propiedades de rectas paralelas y perpendiculares y los criterios de congruencia de triángulos LLL y LAL (58).
17. *Solución 2*. Justificación: *Sin importar la posición del punto P la suma de las alturas de los triángulos DCP y ABP (de bases iguales) es igual al lado del cuadrado por lo tanto la suma de sus áreas es igual a la mitad del área del cuadrado (26).*
18. *Solución 3*. Discusión de un caso particular: *P* sobre un lado del cuadrado (96). Utilizaron ideas de 18
19. *Solución 3*. Una justificación errónea basada en un caso particular (51).
20. *Solución 3*. Una nueva solución al problema (46).
21. *Solución 3*. Una extensión del problema: dividir el cuadrado en 4 partes de área igual (19).

Actividad 2 (https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-2/).

4. Las rectas *m* y *n* son paralelas ya que "*visualmente parece que no se llegan a intersecar en algún punto*" (112).
5. Justificación 1: Uso del recurso *V postulado de Euclides*.
6. ED planteó la pregunta *"¿Existe otra forma de justificar que las rectas m y n son paralelas?*" (76).
7. ED planteó la pregunta*: ¿Qué significa que E' sea el punto simétrico de E respecto a la recta m? (93).*
8. *Movimiento*: La distancia de un punto *A* a una recta *d* se mide sobre la perpendicular de *d* que pasa por *A* (94).
9. *Movimiento*: Al mover el punto *A'*, la mínima distancia de *A* a la recta es cuando α mide 90^0 (71).
10. ED planteó la pregunta*: ¿Qué sucede si la distancia mínima no se encuentra sobre la recta perpendicular a la recta* d*?* (67).
11. Justificación de distancia de un punto a una recta: *El triángulo $PA'A$ es rectángulo, por lo tanto, la hipotenusa AP siempre es mayor que AA'* (89).
12. Un participante construyó y presentó una construcción dinámica: "*Si E' es simétrico a E respecto a la recta n significa que la recta EE' corta a n en E_1 de tal manera que las longitudes de E_1E y E_1E' son iguales y, además, EE' es perpendicular a n" (36).*

13. *Movimiento*: al mover los puntos D y E, dos lados del triángulo son congruentes (98).
14. *Movimiento*: al mover los puntos D y E, dos ángulos del triángulo son congruentes (98).
15. *Formulación de una conjetura*: La familia de triángulos HFG es isósceles (98).
16. Al mover los puntos D y E, no se puede generar un triángulo escaleno, pero si uno equilátero (52).
17. Un triángulo equilátero no es isósceles (51).
18. Existe de una posición de D para la cual no se generan triángulos (25).
19. Se extiende la idea anterior. Se identifican otras posiciones de los puntos D y E para las cuales no se genera un triángulo (48).
20. ¿Por qué se generan triángulos isósceles? (27).
21. Al mover los puntos D y E, la familia de triángulos es isósceles." (19)
22. Justificación basada el concepto de punto simétrico respecto a una recta y la congruencia de triángulos para concluir la relación de igualdad entre las medidas de α y β. (78).
23. Justificación basada en ángulo externo de un triángulo (21).

Actividad 3 (https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-3/).

1. Al mover A ó B, M es el punto medio de AB y el ángulo formado entre el segmento y la recta mide 90. (112)
2. Al mover el punto C sobre la recta n se genera una familia de triángulos isósceles. (105)
3. La recta n es la mediatriz del segmento AB (46)
4. Si $C=M$ no se genera el triángulo (23).
5. Se traza un segmento AB y la recta perpendicular n al segmento que pasa por el punto medio del segmento AB, si el punto C es un punto sobre la recta n, entonces la familia de triángulos ABC son isósceles (cuando C coincide con M, no existe triángulo) (86)
6. La conjetura es falsa ya que existe un equilátero (76).
7. Justificación basada en congruencia de triángulos (51).
8. ¿Se puede justificar de otra manera? (93).

9. Es posible encontrar la posición del punto *C*, sobre la recta *n*, de tal forma que *AB*=*AC* (115).
10. ¿Cómo construir un triángulo equilátero? (48).
11. Al mover C, existe alguna posición para el punto *C* sobre la recta n donde el triángulo ABC es rectángulo (94).
12. ¿Cómo construir un triángulo rectángulo a partir de un segmento dado que representa su hipotenusa? (94).
13. La circunferencia circunscrita a todo triángulo rectángulo siempre tiene diámetro igual a la hipotenusa (94).
14. El centro de la circunferencia es *M* y su radio es *ME* (no se dan argumentos del por qué es circunferencia) (29).
15. ¿Cómo argumentar que el punto *E* está sobre una circunferencia utilizando conceptos y relaciones matemáticas? (56).
16. En un triángulo rectángulo, su circuncentro es el punto medio de su hipotenusa (26).

Actividad 4 (https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-4/).

1. Visualmente el lugar geométrico que describe *P* cuando se mueve *C* es una parábola (61).
2. Es parábola por que la distancia de *P* a la directriz es 11.62 y la distancia de *P* al foco es 11.62 unidades (21).
3. La ecuación de una parábola es $y = ax^2 + bx + c$ (29).
4. Parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta dada, llamada directriz, y de un punto exterior a ella, llamado foco. (16).
5. ¿Cuál es foco y la directriz de esa parábola? (16).
6. El foco es *C* (12).
7. La directriz es *d* (11).
8. Vínculo de Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Foco_(geometr%C3%ADa)) que incluye los elementos de la parábola (31).
9. ¿Cómo se puede trazar el segmento cuya distancia sea mínima entre un punto y una recta? (39).

10. Pregunta Dada la recta $y=x$ ¿cuál es la distancia del punto $C(2,-1)$ a la recta? (29).
11. ¿Cómo se puede demostrar que es parábola? (28).
12. Al mover el punto C, se observa que *CP=PB* (71).
13. La recta *e* es mediatriz de *BC* (23).
14. Justificación basada en las propiedades de la familia de triángulos *BCP*: es isósceles, *CP=PB* (71).
15. La recta *e* es la recta tangente a la parábola que pasa por *P* (28).
16. Pregunta: *¿Qué propiedades tiene la mediatriz de BC? (26)*

Actividad 5 (https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-5/).

1. Al mover el punto *B* los lados del rectángulo aumentan o disminuyen. (43)
2. La familia de rectángulos que se genera tiene el mismo perímetro (43).
3. Al mover el punto *C* sobre el segmento, aumenta o disminuye un lado del rectángulo (41).
4. El punto *D* se mueve sobre una recta (39).
5. Las coordenadas del punto *D* representan las dimensiones de los lados del rectángulo (39).
6. En el intervalo de 0 a 8 (semi perímetro del cuadrado) la ecuación del lugar geométrico es $y=-x+8$. (11).
7. Pregunta formulada por un participante ¿Cuál es la importancia del lugar geométrico en el problema? (36).
8. El lugar geométrico de *R* cuando se mueve *C* es una parábola (33).
9. *R* tiene por coordenadas el largo del rectángulo y su área (35).
10. El punto máximo de la parábola es el área máxima que alcanza el rectángulo (29).
11. Al mover el punto C y observar las coordenadas de R, el valor del área del rectángulo aumenta desde cero y después disminuye hasta volver a ser cero, por lo tanto, indicaron que existe un rectángulo de área máxima.
12. E lugar geométrico permite observar la relación que existe entre su punto máximo y el lado del rectángulo.

13. El lugar geométrico es una parábola y el área máxima se obtiene cuando los lados del rectángulo son iguales ¿Cómo justificarlo? (35)
14. La ecuación del área del rectángulo es $y = x(8 - x)$ y el valor de su área máxima es 16. (16).
15. Al mover el punto R, en una parte de la gráfica la pendiente de la recta tangente es positiva y en otra, es negativa: el punto donde la pendiente cambia de positiva a negativa es cuando se obtiene un rectángulo de área máxima. (39)
16. El área máxima se obtiene cuando la pendiente de la recta tangente es cero o en el vértice de la parábola (8).
17. Pregunta formulada por un participante *¿Cómo trazar geométricamente la recta tangente en P a la parábola?* (21).
18. Si el discriminante de $y = -x^2 + 8x + k$ es mayor a cero entonces la ecuación posee dos soluciones reales y las gráficas de $y = k$ y $y = -x^2 + 8x$ se cortan en dos puntos (29).
19. Si su discriminante de $y = -x^2 + 8x + k$ es igual a cero, el sistema de ecuaciones tiene una solución y coincide con la coordenada *x* del vértice de la parábola (29).
20. La coordenada *y* del vértice de la parábola es el valor del rectángulo de área máxima (26).
21. Al mover el punto B las propiedades de la construcción se mantienen, es decir, se obtiene una familia de rectángulos de perímetro fijo y el rectángulo de área mayor es cuando sus lados son iguales.

Anexo 3

Cantidad de participantes en las actividades

Tabla 1.

Número de participantes en los diálogos de las actividades

Participantes	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Cuestionario 1	Cuestionario 2
Licenciatura	115	98	76	49	28	76	28
Maestría	44	38	38	20	13	38	13
Doctorado	4	4	4	2	2	3	2
Total	164	140	118	71	43	118	43

Tabla 2.

Participantes que obtuvieron constancia, respondieron correctamente las preguntas del Cuestionario 1 y participaron en los diálogos.

Participantes	**Primaria**	**Secundaria**	**Bachillerato**	**Licenciatura**	**Maestría**	**Doctorado**
Obtuvieron Constancia	1	15	75	156	71	7
Contestaron correctamente Pregunta 1	4	20	93	172	78	8
Contestaron correctamente Pregunta 2	4	18	93	170	79	8
Contestaron correctamente Pregunta 3	4	17	90	173	78	8
Participaron en diálogos de la Sesión de trabajo 3	0	0	0	74	29	3

Tabla 3.

Participantes que obtuvieron constancia, respondieron correctamente las preguntas del Cuestionario 2 y participaron en los diálogos.

Participantes	Primaria	Secundaria	Bachillerato	Licenciatura	Maestría	Doctorado
Obtuvieron Constancia	1	15	75	156	71	7
Contestaron correctamente Pregunta 1	1	13	72	135	61	5
Contestaron correctamente Pregunta 2	1	11	56	134	62	5
Contestaron correctamente Pregunta 3	1	11	42	143	66	7
Participaron en diálogos del Cuestionario 2	0	0	0	29	13	2

Tabla 4.

Participantes que obtuvieron constancia, respondieron correctamente la pregunta 1 y 2 del Cuestionario, participaron en el foro y en los diálogos.

Participantes	Primaria	Secundaria	Bachillerato	Licenciatura	Maestría	Doctorado
Obtuvieron Constancia	1	15	75	156	71	7
Contestaron correctamente Pregunta 1	1	15	75	156	71	5
Participaron en foro	1	3	21	90	41	3
Participaron en diálogos	0	0	0	74	29	3

Tabla 5.

Participantes que obtuvieron constancia, respondieron correctamente las preguntas 3 y 4 del Cuestionario, participaron en el foro y en los diálogos.

Participantes	**Primaria**	**Secundaria**	**Bachillerato**	**Licenciatura**	**Maestría**	**Doctorado**
Obtuvieron Constancia	1	15	75	156	71	7
Contestaron correctamente Pregunta 1	1	15	75	156	71	5
Participaron en foro	1	15	21	90	41	3
Participaron en diálogos	0	0	0	0	0	0

Tabla 6.

Participantes que obtuvieron constancia, respondieron correctamente las preguntas 5 y 6 del Cuestionario, participaron en el foro y en los diálogos.

Participantes	**Primaria**	**Secundaria**	**Bachillerato**	**Licenciatura**	**Maestría**	**Doctorado**
Obtuvieron Constancia	1	15	75	156	71	7
Contestaron correctamente Pregunta 3 y 4	1	15	75	155	70	5
Participaron en foro	0	3	21	55	24	2
Participaron en diálogos	0	0	0	49	19	3

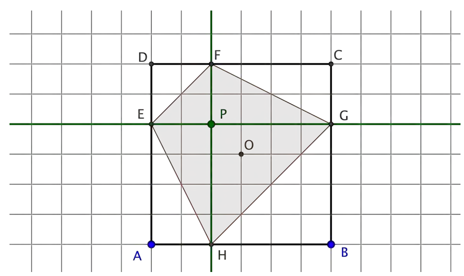
Anexo 4

Análisis de la Solución 3 de la Actividad 1
y de los cuestionarios

1. Actividad 1. Solución 3

En la tercera solución del problema, únicamente se proporcionó el modelo del cuadrado y las preguntas de la Tabla 1. La actividad se puede consultar en (https://www.mathproblemsolving.org/cursos-y-seminarios/mooc-2-problema-1-sol3-mov/).

Tabla 1.
Solución 3 del problema de los granjeros.

Modelo del cuadrado proporcionado en la Solución 3		**Preguntas planteadas**
Solución 3		También se puede asignar a un granjero la región o área del polígono *EFGH*. El otro granjero recibirá el área restante. ¿Por qué esta forma de repartir las áreas es también una solución?

De nuevo, se observó en los comentarios que la estrategia de algunos participantes fue centrar la atención en un caso particular: P sobre el lado del cuadrado. El ED fijó uno de los comentarios con la idea anterior. En el diálogo, señalaron que para cualquier posición del punto P: *el área del cuadrilátero HGFE es la mitad del área del cuadrado*. Además, sustentaron la conjetura apoyados en que, sin importar la posición del punto P, la suma de las alturas EP y PG de los triángulos HFE y HFG, respectivamente, es igual a AB (lado del cuadrado). Es decir, utilizaron la idea discutida en un diálogo anterior (la suma de las alturas de los triángulos *HFE* y *HFG* es constante e igual al lado del cuadrado). El comentario inicial, las observaciones y conclusiones del diálogo se presentan en la Figura 1.

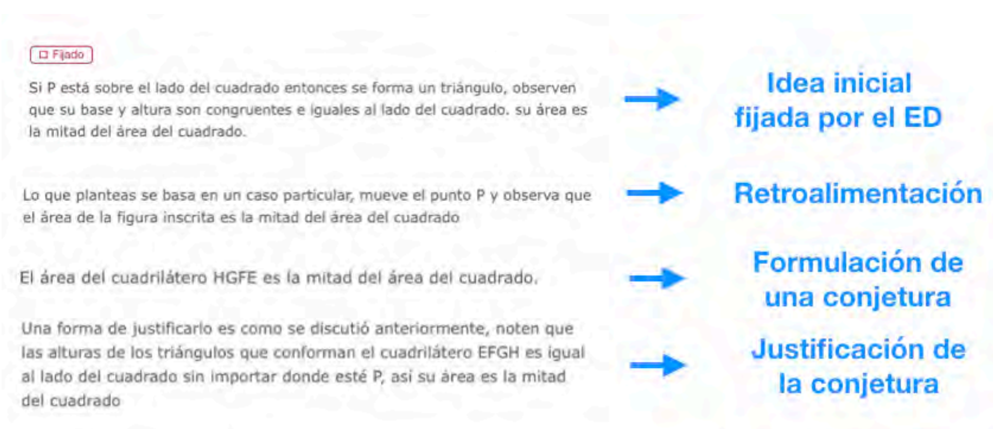
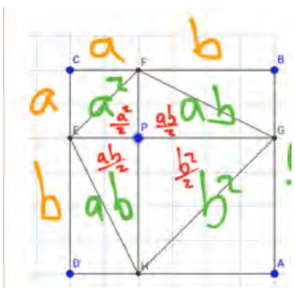


Figura 1. Una solución basada en un caso particular.

Por otra parte, el ED fijó un comentario con una justificación incorrecta del por qué el área de $EFGH$ tiene la mitad del área del cuadrado $ABCD$. La idea inicial, la retroalimentación proporcionada en el diálogo y sus resultados los resume la Tabla 2.

Tabla 2.
Una justificación basada en un caso particular.

Idea inicial del participante	Interacciones en el diálogo	Resultados del diálogo
Determinó el área de $HGFE$, en función de a y b, basado en una posición especifica de P.  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{2ab}{2} + \frac{b^2}{2}$	Otros participantes comentaron que para ciertas posiciones de P la justificación no era válida, por ejemplo, si $PFCE$ no es cuadrado. Algunos comentarios al respecto son: Observa que si mueves P hacia la derecha tu justificación no es válida. Es interesante como el movimiento de los objetos nos permite ver rápidamente que la conjetura no es válida. Con solo mover P se observa que no siempre se forma un cuadrado.	El movimiento de objetos permite observar rápidamente casos donde la conjetura formulada no se cumple.

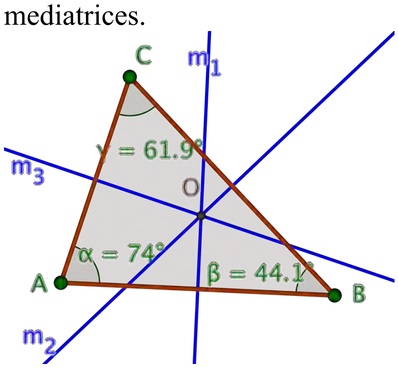
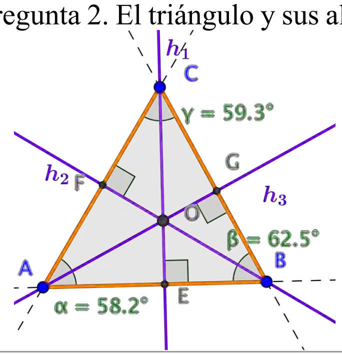
2. El Cuestionario 1

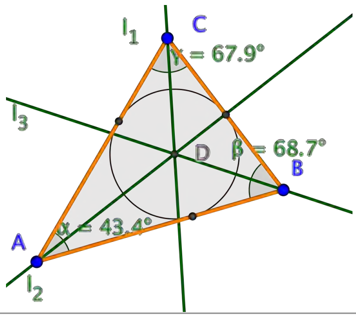
El Cuestionario 1 comprendió tres preguntas de selección múltiple. En el Anexo 3, la Tabla 2 muestra el número de participantes que obtuvo constancia y contestaron correctamente cada una de las preguntas del Cuestionario 1. El objetivo general fue que los participantes exploraran la configuración dinámica de un triángulo, sus alturas, mediatrices, bisectrices y medianas, y, utilizaran las estrategias de movimiento de objetos y medición de sus atributos en la formulación de conjeturas relacionadas con el comportamiento sus propiedades. La justificación de la conjetura se basó en argumentos visuales o empíricos. La presentación de conceptos o relaciones matemáticas para sustentar las conjeturas no se solicitaron de forma explícita, pero quedaba abierta esta posibilidad en el foro por si algún participante deseaba presentar sus argumentos.

Los participantes con grado de estudios de primaria, secundaria y bachillerato se involucraron en el cuestionario seleccionando, de la lista de afirmaciones proporcionada, las opciones correctas.

La Tabla 3 resume las tareas matemáticas del Cuestionario 1 y las relaciones o patrones que encontraron los participantes asociados a las propiedades de los atributos de los objetos matemáticos que conforman el modelo del problema.

Tabla 3.
Preguntas del Cuestionario 1, estrategias observadas por los participantes y las relaciones o patrones encontrados.

Modelo dinámico	**Relaciones observadas por los participantes**
Pregunta 1. El triángulo y sus mediatrices. 	1. En un triángulo acutángulo, el circuncentro está dentro del triángulo. 2. En un triángulo obtusángulo, el circuncentro está fuera del triángulo. 3. Si el triángulo es rectángulo, el circuncentro está sobre la hipotenusa.
Pregunta 2. El triángulo y sus alturas. 	1. En un triángulo rectángulo el ortocentro es el vértice del ángulo recto del triángulo. 2. Si el ortocentro se encuentra fuera del triángulo entonces el triángulo es obtusángulo. 3. Si el ortocentro está dentro del triángulo entonces el triángulo es acutángulo.

Pregunta 3. El triángulo y sus bisectrices. 	1. El incentro siempre se encuentra dentro del triángulo. 2. El incentro equidista de los tres lados del triángulo. 3. El incentro es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. 4. Si el triángulo es equilátero, su circunferencia circunscrita e inscrita tienen el mismo centro.

La pregunta 1 generó cuatro diálogos, la Figura 2 muestra los comentarios que fijó el ED. En ellos, los participantes señalaron la importancia del movimiento y la observación de patrones asociados a la medida de los atributos de los objetos matemáticos en la configuración dinámica, por ejemplo, en la primera pregunta (Figura 3):

1. Definieron los conceptos de triángulo acutángulo, rectángulo y obtusángulo.
2. Señalaron la importancia de mover y observar patrones asociados a la medida de los ángulos del triángulo y a la posición del circuncentro.
3. Validaron y/o refutaron algunas conjeturas de manera visual y empírica: relacionaron la posición del circuncentro según el tipo de triángulo al observar la medida los ángulos internos del triángulo y así, identificaron que en el triángulo acutángulo el circuncentro está dentro de éste.
4. Cuando un participante definió de manera incorrecta el ángulo obtuso, otro complementó la idea para definirlo correctamente.

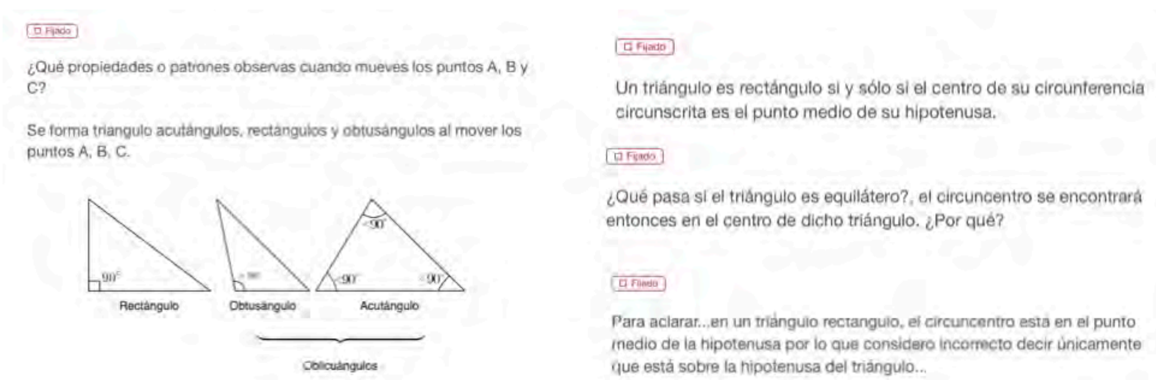
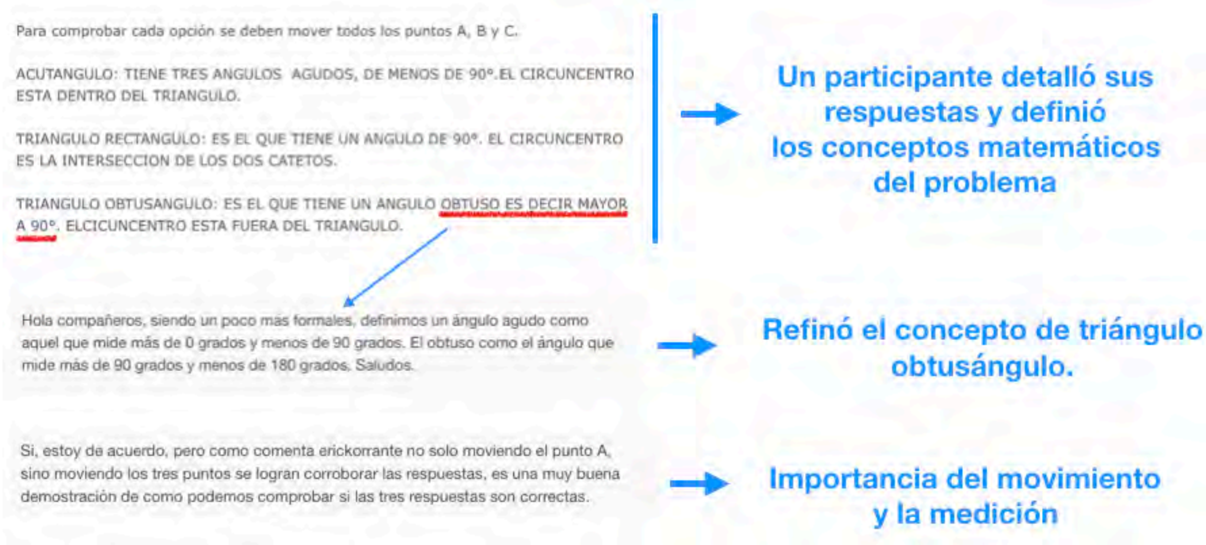


Figura 2. Comentarios fijados por el ED en el Cuestionario 1.



Para comprobar cada opción se deben mover todos los puntos A, B y C.

ACUTANGULO: TIENE TRES ANGULOS AGUDOS, DE MENOS DE 90°.EL CIRCUNCENTRO ESTA DENTRO DEL TRIANGULO.

TRIANGULO RECTANGULO: ES EL QUE TIENE UN ANGULO DE 90°. EL CIRCUNCENTRO ES LA INTERSECCION DE LOS DOS CATETOS.

TRIANGULO OBTUSANGULO: ES EL QUE TIENE UN ANGULO OBTUSO ES DECIR MAYOR A 90°. ELCICUNCENTRO ESTA FUERA DEL TRIANGULO.

Un participante detalló sus respuestas y definió los conceptos matemáticos del problema

Hola compañeros, siendo un poco mas formales, definimos un ángulo agudo como aquel que mide más de 0 grados y menos de 90 grados. El obtuso como el ángulo que mide más de 90 grados y menos de 180 grados. Saludos.

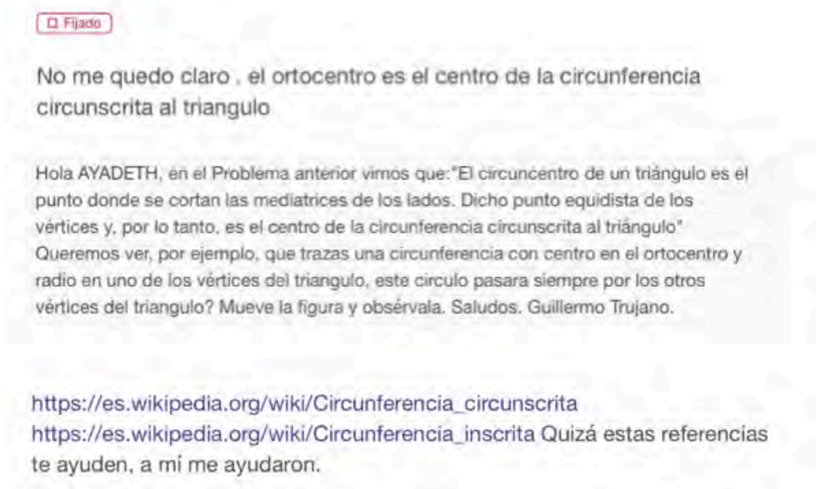
Refinó el concepto de triángulo obtusángulo.

Si, estoy de acuerdo, pero como comenta erickorrante no solo moviendo el punto A, sino moviendo los tres puntos se logran corroborar las respuestas, es una muy buena demostración de como podemos comprobar si las tres respuestas son correctas.

Importancia del movimiento y la medición

Figura 3. Algunos de los comentarios de los participantes en la Pregunta 1 del Cuestionario 1.

En la pregunta 2 se generaron tres diálogos. En uno de ellos, dada una duda de un participante, se discutieron los conceptos de ortocentro y circuncentro, para esto, referenciaron lo estudiado en la pregunta 1 (Figura 4).



Fijado

No me quedo claro . el ortocentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triangulo

Hola AYADETH, en el Problema anterior vimos que:"El circuncentro de un triángulo es el punto donde se cortan las mediatrices de los lados. Dicho punto equidista de los vértices y, por lo tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo" Queremos ver, por ejemplo, que trazas una circunferencia con centro en el ortocentro y radio en uno de los vértices del triangulo, este circulo pasara siempre por los otros vértices del triangulo? Mueve la figura y obsérvala. Saludos. Guillermo Trujano.

https://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_circunscrita
https://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_inscrita Quizá estas referencias te ayuden, a mí me ayudaron.

Figura 4. Ortocentro y circuncentro de un triángulo.

En otro diálogo el comentario inicial fue: *si el ortocentro equidista de los tres vértices, el triángulo es equilátero.* Los participantes ampliaron la idea y concluyeron que, en el triángulo equilátero, el ortocentro, circuncentro, baricentro e incentro son el mismo punto (Figura 5).

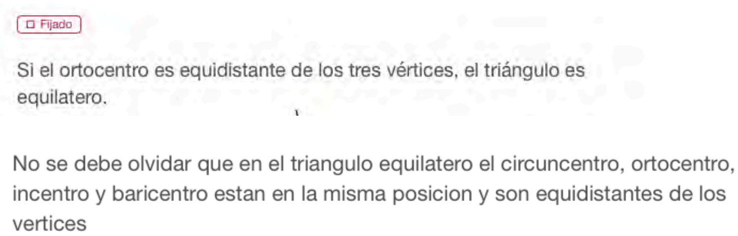


Figura 5. Relaciones de los puntos notables en el triángulo equilátero.

En la pregunta 3, el ED identificó y fijó un comentario donde un participante afirmó no comprender el significado de que el incentro equidiste de los tres lados del triángulo. En el diálogo, los participantes compartieron un vínculo a una página web para aclarar la duda y construyeron dos modelos de un triángulo y su incentro. Utilizaron la estrategia de medición de atributos (en este caso longitudes de segmentos) para sustentar, visualmente, que el incentro equidista de los tres lados (Figura 6).

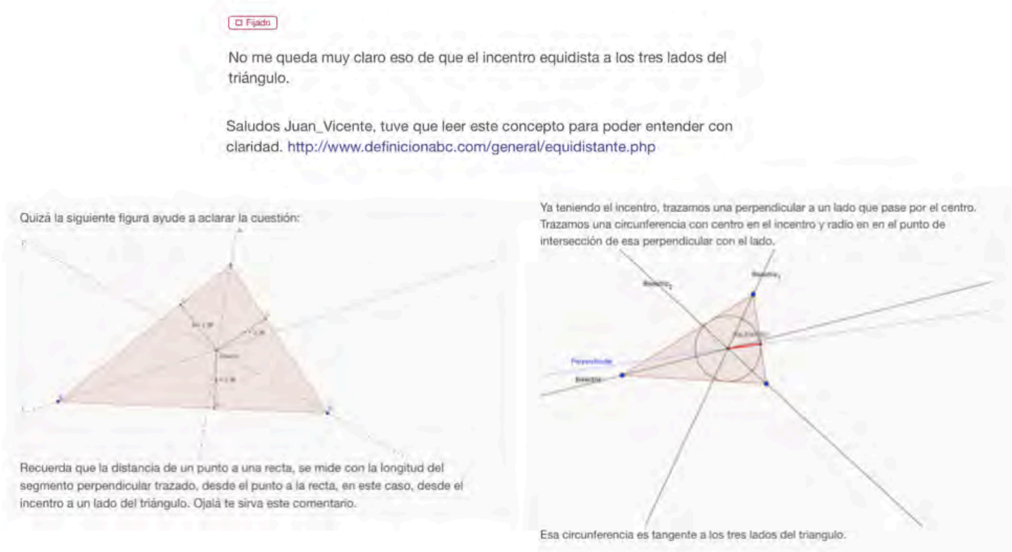
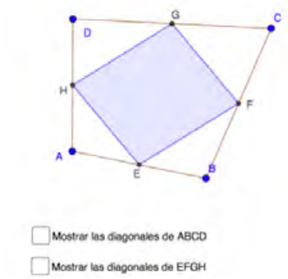


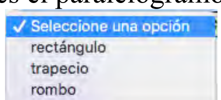
Figura 6. El incentro equidista de los lados del triángulo.

3. Cuestionario 2

El objetivo de las dos primeras preguntas fue que los participantes observaran la importancia del movimiento de objetos y la medición de sus atributos como estrategias importantes en resolución de problemas cuando se utiliza un SGD. Los dos problemas se relacionaron con el Teorema o paralelogramo de Varignon: *En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original* y la exploración de algunas de sus propiedades. En la pregunta 1 se proporcionó la configuración y la guía de trabajo de la Tabla 4.

Tabla 4.
Pregunta 1 del Cuestionario 2

<table>
<tr><th>Configuración dinámica</th><th>Preguntas</th></tr>
<tr><td>


Si las diagonales de *ABCD* tienen la misma medida entonces el paralelogramo HGFE es


</td><td>Sea *ABCD* es un cuadrilátero y *E, F, G, H* los puntos medios de sus lados. Al unirlos forman el cuadrilátero *EFGH*.
Mueve los vértices del cuadrilátero *ABCD*, ¿Qué propiedades observas que cumple cuadrilátero *EFGH*? ¿Qué relación existe entre los segmentos *HG*, *AC* y *EF* y entre *GF, BD* y *EH*?
Mueve los puntos *A, B, C* y *D* y observa el comportamiento de los objetos. Marca las casillas para obtener más información acerca de los objetos involucrados en la configuración dinámica.</td></tr>
</table>

El grupo de participantes con niveles máximos de estudios de primaria, secundaria y bachillerato se limitó a marcar las opciones que consideraban correctas en cada pregunta, sin comentar sus ideas o razonamientos matemáticos en los diálogos.

El diálogo ED identificó un comentario en el cual el participante afirmó que cuando *ABCD* es cuadrado entonces sus diagonales son iguales y *EFGH* también es cuadrado. Los participantes señalaron:

1. Al mover un vértice de *ABCD, HG* es paralelo a *EF* y *EH* es paralelo a *GF*.
2. Cuando las diagonales de *ABCD* miden igual entonces *HGFE* es rombo.

También, compartieron información de Wikipedia relacionada con el concepto de rombo y sus propiedades https://es.wikipedia.org/wiki/Rombo y concluyeron (Figura 7):

1. Un rombo es un paralelogramo de lados congruentes y diagonales perpendiculares.
2. En el caso del cuadrado, además de ser paralelogramo y tener diagonales perpendiculares, sus ángulos internos son de 90^0.
3. Un cuadrado es un rombo, pero un rombo no necesariamente es cuadrado.

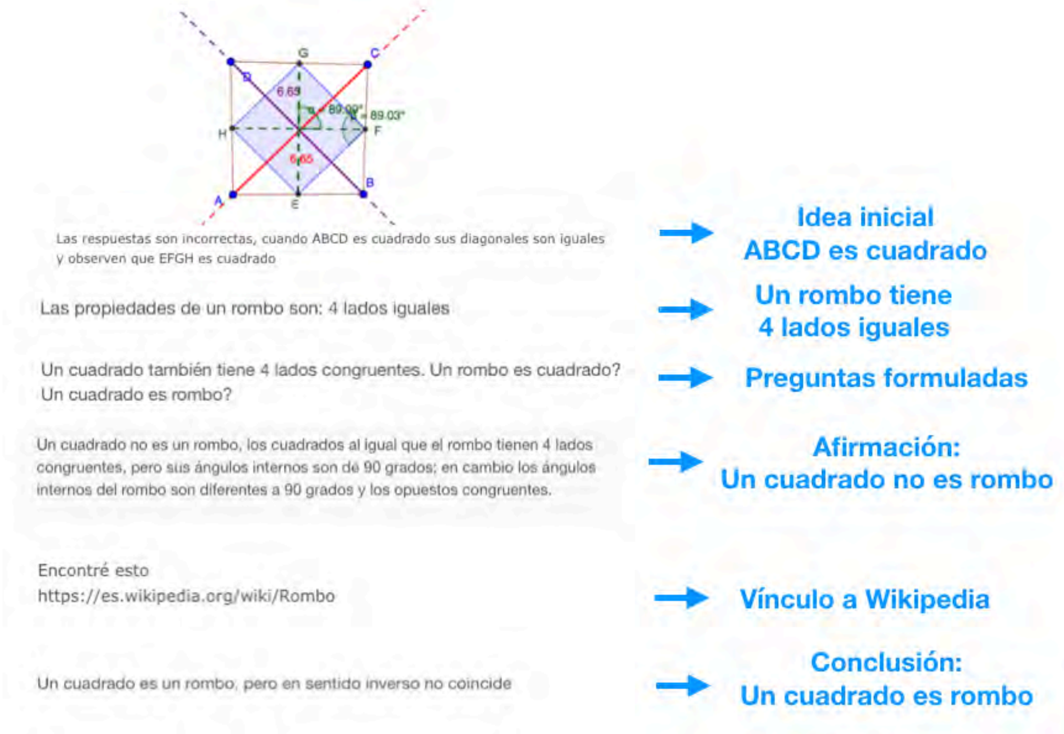


Figura 7. Discusión: ¿un cuadrado es rombo?

En la pregunta 2, la intención fue que los participantes, al mover los objetos del modelo, observaran la relación entre las diagonales de *ABCD* y el paralelogramo *HGFE,* en concreto, cuando las diagonales de *ABCD* son perpendiculares entonces *EFGH* es rectángulo. Así, lo expresaron en un diálogo.

Durante la agrupación de comentarios, el ED observó que ninguno se relacionó con la pregunta, si no, centraron la atención en el área de *EFGH* y seleccionó uno. En el diálogo, centraron su atención en relacionar el problema con el de la actividad 1. Inicialmente, uno de ellos movió los puntos *A, B, C* y *D* de tal manera que *ABCD* resultara un cuadrado y comentó que el área del cuadrilátero *EFGH* tenía que ser la mitad del área de *ABCD* por las ideas estudiadas al inicio del curso.

Otros coincidieron con las ideas expuestas y buscaron información en Wikipedia donde se demuestra que en cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original (https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Varignon). La Figura 8. presenta un resumen de los comentarios de los participantes en el diálogo.

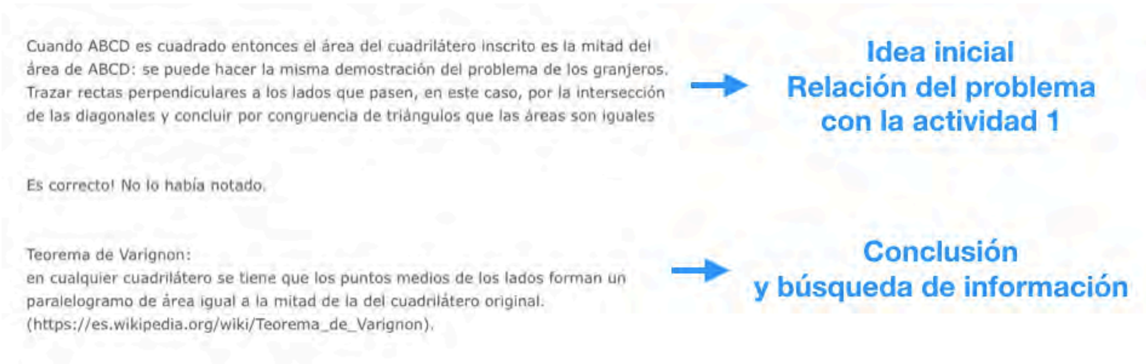
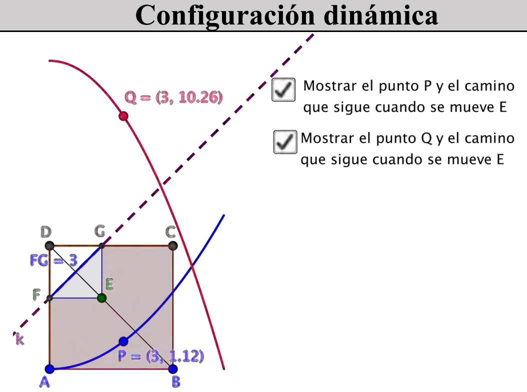


Figura 8. Discusión: ¿un cuadrado es rombo?

En la pregunta 3, se mostró la importancia del lugar geométrico en la resolución de problemas cundo se utiliza un SGD, para ello, se proporcionó la configuración dinámica y el enunciado del problema de la Tabla 5.

Tabla 5.
Pregunta 1 del Cuestionario 2

Configuración dinámica	Problema
	Una hoja de papel en forma de cuadrado se dobla de tal manera que una de sus esquinas quede sobre un punto situado sobre la diagonal del cuadrado. ¿Es posible que el área de la parte doblada sea igual al área restante de la hoja? P es un punto que relaciona la longitud del segmento FG con el área del triángulo FEG y Q es un punto que relaciona la longitud de FG con el área del polígono $ABCGEF$.

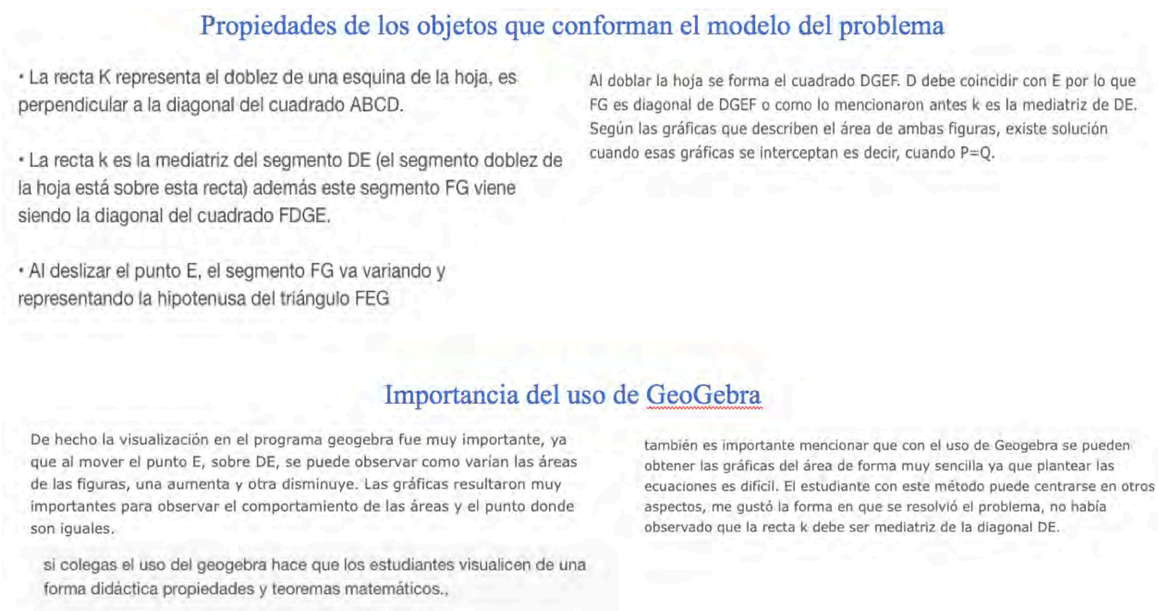
Todos los comentarios del foro identificaron la intersección de los lugares geométricos como la respuesta del problema. En el diálogo, los participantes señalaron que movieron los puntos A, B y E y centraron su atención en los lugares geométricos generados por los puntos P y Q al mover E, por ejemplo:

1. Relacionaron la recta *k* con la mediatriz del segmento *DE*.
2. Identificaron una posición del punto E para la cual las figuras FEG y $ABCGEF$ tienen igual área y señalaron que es cuando *P*=*Q*, es decir, el punto de intersección entre las dos gráficas que modelan el área de cada figura.
3. Argumentaron la validez de la conjetura basados en argumentos visuales y empíricos al mencionar que el valor de las áreas de las figuras FEG y $ABCGEF$ cambian,

mientras una aumenta de cero hasta ser igual al área del cuadrado *ABCD*, la otra disminuye desde el valor que tiene el área del cuadrado hasta cero.

4. Reconocieron la importancia del movimiento de objetos y el trazo de lugares geométricos para determinar la solución del problema sin plantear un modelo algebraico que modele el área de cada figura.

Algunos de las ideas expuestas en el diálogo las muestra la Figura 9.


Propiedades de los objetos que conforman el modelo del problema

• La recta K representa el doblez de una esquina de la hoja, es perpendicular a la diagonal del cuadrado ABCD.

• La recta k es la mediatriz del segmento DE (el segmento doblez de la hoja está sobre esta recta) además este segmento FG viene siendo la diagonal del cuadrado FDGE.

• Al deslizar el punto E, el segmento FG va variando y representando la hipotenusa del triángulo FEG

Al doblar la hoja se forma el cuadrado DGEF. D debe coincidir con E por lo que FG es diagonal de DGEF o como lo mencionaron antes k es la mediatriz de DE. Según las gráficas que describen el área de ambas figuras, existe solución cuando esas gráficas se interceptan es decir, cuando P=Q.

Importancia del uso de GeoGebra

De hecho la visualización en el programa geogebra fue muy importante, ya que al mover el punto E, sobre DE, se puede observar como varían las áreas de las figuras, una aumenta y otra disminuye. Las gráficas resultaron muy importantes para observar el comportamiento de las áreas y el punto donde son iguales.

si colegas el uso del geogebra hace que los estudiantes visualicen de una forma didáctica propiedades y teoremas matemáticos.,

también es importante mencionar que con el uso de Geogebra se pueden obtener las gráficas del área de forma muy sencilla ya que plantear las ecuaciones es difícil. El estudiante con este método puede centrarse en otros aspectos, me gustó la forma en que se resolvió el problema, no había observado que la recta k debe ser mediatriz de la diagonal DE.

Figura 9. Algunos comentarios en la Pregunta 3 del Cuestionario 2.

Anexo 5

Correos electrónicos enviados a los participantes después de cada actividad

Comunicado 1. Inicio del MOOC

Estimados participantes, queremos manifestarte nuestro agradecimiento por haberte registrado en el curso "Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales" que dará inicio el próximo **lunes 30 de enero**. Para nosotros representa un reto que ese interés que te llevó a inscribirte se mantenga y te lleve a seguir y trabajar todas las actividades.

Recuerda que para acceder al curso debes entrar a www.mexicox.gob.mx.

Consideramos pertinente enviarte algunas indicaciones generales que te ayuden en el desarrollo de las sesiones:

1. El curso está estructurado en seis sesiones, una por semana. Cada día lunes se abrirá una nueva sección.
2. La participación en los foros de discusión es importante. Cualquier duda sobre el desarrollo de las actividades debe ser expuesto en estos. En algunos casos responderemos o ampliaremos la información o comentarios por medio de un correo enviado a todos los participantes inscritos.
3. Si tienes algún problema relacionado con las calificaciones o problemas técnicos puedes escribirnos al correo: cinvestav_ipn@mexicox.gob.mx.
4. Un aspecto fundamental en el diseño de las actividades fue la idea de darle movimiento a las figuras simples (triángulos, rectángulos, etc.) que representan modelos o configuraciones dinámicas. Así, con el "ratón" de tu computadora o con el dedo cuando uses tu tableta o teléfono podrás mover algunos objetos. En estos modelos dinámicos, la idea es que observes el comportamiento de algunos objetos o atributos (medida de ángulos, áreas, perímetros, etc.).
5. Con la herramienta es posible medir la longitud de segmentos, ángulos, determinar el área de polígonos, etc. y observar cómo varían cuando algunos objetos se mueven en la configuración. La meta aquí es que al observar el movimiento de las figuras propongas algunas conjeturas que den cuenta de su comportamiento.
6. Toda conjetura que identifiques y presentes debe sustentarse con argumentos. En una primera fase, la explicación puede estar sustentada a partir de argumentos visuales o empíricos.
7. Posteriormente, la idea es construir y presentar un argumento que involucre propiedades y resultados matemáticos. Por ejemplo, la conjetura puede incluir

resultados sobre triángulos semejantes o argumentos de cálculo o geometría analítica.

No dudes enviarnos tus observaciones y/o comentarios sobre el desarrollo de las actividades.

Atentamente

Equipo: Resolución de problemas y tecnología digital, Cinvestav.

Comunicado 2

Estimados participantes, tras concluir la primera semana del curso "Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales", te queremos agradecer tu activa participación en los foros de discusión. Aquí te presentamos un breve resumen de las ideas y comentarios que ustedes expresaron con la intención de identificar los temas y conceptos fundamentales que son parte del marco que sustenta el desarrollo de las actividades del curso.

1. En general, todos coincidieron y aceptaron que las preguntas son el vehículo para aprender conceptos, explorar lo desconocido y generar nuevas ideas. El aprendizaje de las matemáticas implica enfrentarse a un dilema que necesita resolverse en términos de observar la situación o concepto, formular preguntas y buscar siempre diferentes caminos para responderlas.
2. La formulación de preguntas implica la adquisición de un lenguaje, en nuestro caso matemático, para expresarlas y esto es parte de los objetivos del curso. Además, el planteamiento de preguntas es un proceso que evoluciona y mejora cuando el estudiante constantemente se involucra en esta actividad. Solo la práctica nos permite evolucionar en este proceso y así refinar y discriminar aquellas con respuesta directa de las que demandan el uso de conceptos y recursos matemáticos para responderlas.
3. En la resolución de problemas resulta esencial preguntarse ¿Qué sé sobre el tema? ¿Dónde encuentro información sobre los conceptos involucrados? Etc.
4. Cuando estamos pensando en las maneras de resolver el problema, entran las estrategias de solución ¿qué estrategias son importantes? Por ejemplo, la lectura menciona que una estrategia es "considerar casos particulares o especiales" ¿Qué otras estrategias son importantes? ¿Cómo las desarrollo? ¿Se puede aplicar el método para resolver otros problemas?

5. Otro aspecto importante es "controlar" el proceso de solución de los problemas. Así, uno se pregunta ¿he entendido el problema? ¿es el método de solución adecuado? ¿a dónde voy? Etc.
6. Algunos términos y conceptos como conjetura, relaciones, patrones, teoremas, prueba, argumentos empíricos, geométricos o algebraicos aparecerán en el desarrollo de las sesiones. En el foro, algunos han respondido la pregunta: ¿Qué es una conjetura? Algunas definiciones disponibles en internet son:
   a. Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura): "… se refiere a una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada hasta la fecha. Una vez que se demuestra la veracidad de una conjetura, esta pasa a ser considerada un teorema de pleno derecho…"
   b. RAE (http://dle.rae.es/?id=AKKzi43): "Juicio que se forma de algo por indicios u observaciones."
   c. WolframAlpha (http://www.wolframalpha.com/input/?i=conjetura): Una proposición que es consistente con los datos conocidos, pero no ha sido verificada ni demostrado ser falsa. Es sinónimo de hipótesis.

Parte de la dinámica de este curso es buscar, analizar, contrastar y discutir información. ¿Qué tienen en común las tres definiciones? ¿cuál es tu definición de conjetura? Etc.

Comunicado 3

Estimado participante, hoy estamos iniciando la tercera semana del curso y quizá te has preguntado sobre qué se está aprendiendo al trabajar las actividades y cómo se da uno cuenta de ese aprendizaje. En la actividad de esta semana, también habrás notado que el punto de partida no es el enunciado o problema; se inicia "armando" o construyendo una configuración o modelo dinámico que involucra algunos objetos matemáticos simples (rectas, puntos, segmentos, ángulos, etc.). En el proceso de ir construyendo la configuración se plantean interrogantes sobre el comportamiento de algunos atributos (medida de ángulos, propiedades de triángulos, perímetros, áreas, etc.) que llevan a la formulación o búsqueda de conjeturas o relaciones entre objetos y propiedades. La idea es siempre buscar y presentar distintos tipos de argumentos que sustenten esas conjeturas.

La validación de una conjetura puede transitar desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de una "prueba" que involucra, por ejemplo, criterios de congruencia de triángulos o procedimientos analíticos. Eventualmente, la idea es que tú mismo construyas tus propias configuraciones dinámicas y que generes una lista de resultados matemáticos.

En el desarrollo de la actividad aparecieron algunos conceptos o propiedades como trazo de una recta perpendicular, identificación de algunos puntos en el plano, simetría de un punto con respecto a una recta, triángulos, etc. Una tarea importante es revisar y extender lo que se sabe sobre esos temas o contenidos en términos de propiedades o resultados matemáticos. Algunos sitios o plataformas en línea que te pueden ayudar a revisar o ampliar tus conocimientos sobre los temas incluyen:

https://www.wolframalpha.com

https://www.wikipedia.org

https://es.khanacademy.org/coach/dashboard

Comunicado 4

Estimados participantes, en los primeros comunicados les señalamos la importancia de tu participación en el Foro de discusión de cada actividad.

En el curso Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales, el Foro es un medio donde puedes plantear tus dudas y recibir retroalimentación de tus compañeros, conocer las ideas de otras personas y participar en las discusiones que se generan en el desarrollo de las actividades propuestas, etc.

El equipo de Resolución de Problemas Matemáticos del Cinvestav constantemente leemos los comentarios en los Foros, y como te habíamos mencionado en un correo previo, por las características que tiene un curso masivo, no respondemos tus dudas o daremos seguimiento puntual a tus participaciones durante el desarrollo de las actividades.

Sin embargo, cada día analizamos y clasificamos los comentarios y marcamos o "Fijamos" algunos, de tal manera que aparezcan al inicio de cada discusión. También, en algunas ocasiones, planteamos preguntas con el objetivo de clarificar o ampliar algún concepto o idea.

Te recomendamos:

1. Antes de escribir tu duda/comentario/idea lee las entradas “Fijadas”, quizás un compañero escribió algo igual o similar, si es así puedes exponer tu punto de vista complementado la idea, si no crea un nuevo comentario o “post”.
2. Presta atención a las preguntas que hacemos en los foros “Fijados”, si existen respuestas de otras personas, analízalas y si lo crees conveniente, amplia el tema con tus comentarios, si no escribe una respuesta.

Comunicado 5

Estimados participantes, en las tareas o problemas trabajados hasta ahora seguramente han notado que el movimiento de los objetos matemáticos es un elemento importante para visualizar el comportamiento y posibles relaciones entre esos objetos y sus atributos.

La idea es identificar de manera explícita algunas estrategias que resultan importantes en los procesos de representación, exploración y resolución de los problemas.

1. El movimiento de algunos elementos de una representación dinámica nos lleva a explorar y analizar de manera inmediata o instantánea el comportamiento de algunos atributos de la familia de objetos que se genera al mover elementos de la representación.
2. El trazo del lugar geométrico es otra estrategia importante que proporciona información sobre el comportamiento de algunos objetos. En general, el trazo de un lugar geométrico involucra mover un elemento de la configuración de manera ordenada (sobre una recta o una circunferencia) y observar el camino que recorre otro elemento de esa configuración.
3. La cuantificación de los atributos (áreas, perímetros, ángulos, longitud de segmentos, etc.) también resultan importantes en la búsqueda de relaciones entre objetos de la representación dinámica.

Participa en los foros de discusión y plantea tus ideas, dudas o comenta las ideas de otros y discute preguntas durante el proceso de resolución de los problemas.

Si no has completado las actividades previas aun lo puedes hacer: observa los videos, construye tus modelos, contesta y plantea preguntas, formula tus propias conjeturas y compártelas en el foro.

Atentamente

Equipo: Resolución de problemas y tecnología digital, Cinvestav.

Comunicado 6

En las actividades de esta semana se incluye un cuestionario de opción múltiple, todas las preguntas involucran una exploración de las propiedades de los objetos matemáticos a partir de mover y analizar cómo se comportan o relacionan. Esta exploración te proporcionará elementos para responder las preguntas que en algunos casos implica seleccionar varias opciones correctas. Estas preguntas son también un punto de partida para que, posteriormente, les des seguimiento y las analices en un contexto más amplio.

Comparte tus dudas o comentarios en los Foros de discusión, recuerda que los Foros son el medio para compartir ideas, aclarar dudas y ampliar nuestro conocimiento.

Comunicado 7. Reflexiones finales y cierre del MOOC

Estimado participante: primero te hacemos llegar una felicitación por haber aceptado el reto de participar en las actividades del curso "Resolución de Problemas Matemáticos y Uso de Tecnología Digital". El trabajo de cada uno de ustedes ha sido importante no solo por las contribuciones que han aportado en el desarrollo de las sesiones; sino también por sus señalamientos de carácter técnico que ayudarán en la revisión y construcción de una plataforma cada vez más robusta y funcional.

Conviene reflexionar sobre los objetivos iniciales del curso y algunas características que distinguen a un proyecto que intenta abrir nuevas rutas y oportunidades para construir conocimiento matemático.

1. El curso no aborda de manera puntual una serie de contenidos específicos como generalmente se presentan en un ambiente formal de enseñanza. El énfasis ha sido en el desarrollo y puesta en práctica de "hábitos relacionados con el quehacer matemático". Así, la formulación de preguntas y la búsqueda de diversas maneras sobre cómo responderlas han sido la esencia o parte fundamental en el desarrollo de cada una de las actividades.

2. En el curso participa una comunidad heterogénea con recursos matemáticos variados e intereses distintos. Esta variedad de experiencias de los participantes ha sido un reto para nosotros en el diseño de las actividades y nos llevó a centrar nuestra atención hacia algunos aspectos del razonamiento matemático:
    a. Las representaciones dinámicas y el movimiento de las figuras han sido un ingrediente importante en el desarrollo de las actividades. Mover objetos, cuantificar atributos (longitud, área, perímetro, ángulo, etc.) en la configuración nos lleva a observar qué cambia, o cómo varían algunos parámetros. En este curso, los modelos dinámicos asociados a las actividades fueron dadas, lo que sigue, en un curso posterior, es que los participantes aprendan a construir las representaciones o modelos dinámicos de los problemas.
    b. La formulación de conjeturas es una actividad esencial en el estudio de las matemáticas y aquí en el desarrollo de las actividades fue un tema recurrente. En general, la observación del comportamiento de los atributos de los objetos matemáticos al mover algunos elementos dentro del modelo genera información que nos lleva al planteamiento de conjeturas o relaciones matemáticas.
    c. La búsqueda y presentación de argumentos que validen o sustenten las conjeturas es otro aspecto importante del razonamiento matemático. Los argumentos pueden ser visuales y explicarse a través de una gráfica o representación, empíricos y presentarse con datos numéricos y tablas, y formales que se sustentan con propiedades geométricas o representaciones algebraicas. En términos generales la idea es que el estudiante exhiba desde el uso de argumentos visuales o empíricos muchas veces necesarios en la formulación de una conjetura hasta la presentación de explicaciones basadas en propiedades geométricas o algebraicas.
3. En el trabajo de las actividades seguramente habrás observado que con el movimiento de las figuras aparecen heurísticas interesantes asociadas con el uso de la herramienta. El movimiento ordenado o controlado de algunos objetos, la cuantificación de los atributos, y el trazo de lugares geométricos son algunas estrategias, ahora importantes, en la resolución de los problemas.

4. En las tareas que se identifican con el término “evaluación” no son más que una extensión de los conceptos y búsqueda de conjeturas en configuraciones dinámicas. La idea es que cada participante siga buscando información que le ayude a extender su comprensión y competencias de resolución de problemas.
5. Una vez que finalices la Evaluación 2 (parte final del curso), revisa tu calificación final en la parte de "Progreso". Si te falta alguna actividad o pregunta que contestar, la puedes retomar.
6. En la construcción de un referente o marco sobre el uso de tecnologías digitales, te recomendamos leer la columna que se publica en la revista C2:
    a. http://www.revistac2.com/transicion-digital-donde-estamos-a-donde-vamos/
    b. http://www.revistac2.com/la-tecnologia-digital-y-el-aprendizaje-permanente-o-continuo/

Equipo Resolución de Problemas - Cinvestav.

Comunicado 8

Estimado participante:

La fecha de cierre del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnología Digital será el **domingo 19 de marzo a media noche**. Toma en cuenta lo siguiente:

1. En la semana del 13 al 19 de marzo no existe una nueva tarea por resolver, la idea es que durante este periodo concluyas las tareas o evaluaciones que no hayas terminado. También puedes seguir participando en las discusiones del Foro.

2. Te recomendamos revisar en el menú principal, el apartado **Progreso** y verificar la evaluación que se muestra. Se te recuerda que todavía puedes responder alguna pregunta que no hayas contestado.

3. La constancia de participación del curso se extendería solo aquellos que hayan alcanzado al menos 60 puntos en la evaluación. Si tienes alguna pregunta acerca de tu progreso nos puedes escribir a nuestro correo electrónico cinvestav_ipn@mexicox.gob.mx.

4. Después del 20 de marzo las actividades del curso seguirán abiertas (MéxicoX lo presentará como curso archivado). Sin embardo, a partir de esta fecha las actividades que realices no sumarán puntos a tu evaluación.
5. La constancia de participación es emitida por MéxicoX y será enviada vía correo electrónico a cada participante que haya logrado al menos 60 puntos.

Finalmente, los integrantes del equipo del MOOC valoramos tu interés y participación en las actividades del curso. Esperamos, en un corto plazo, presentar un nuevo curso cuyo objetivo se centre en la construcción de modelos dinámicos de situaciones matemáticas.

Equipo Resolución de Problemas Cinvestav.