

Universidad de Costa Rica

Facultad de Educación

Escuela de Formación Docente

Memoria del Seminario de Graduación para optar por el grado de
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

**Análisis del proceso de resolución de problemas relacionados
con el punto máximo o punto mínimo de la función cuadrática, en
estudiantes de la sección 11 - 1 del Liceo Roberto Brenes Mesén,
Circuito 05, Dirección Regional de Educación San José Central.**

Wilman Muñoz Zamora

Andrea Navarro Agüero

Francela Ramírez Sirias

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio

Diciembre 2019


Aprobación

Tesis para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Análisis del proceso de resolución de problemas relacionados con el punto máximo o punto mínimo de la función cuadrática, en estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, Circuito 05, Dirección Regional de Educación San José Central.

TRIBUNAL EXAMINADOR

Sustentantes



Wilman Alfredo Muñoz Zamora




Andrea Navarro Agüero



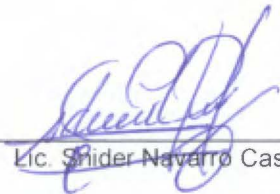
Dayana Francela Ramírez Sirias

Aprobado por



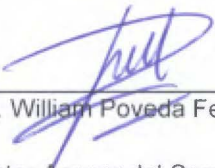
M.Ed Wilfredo Gonzaga Martínez

Presidente del Tribunal Examinador



Lic. Spider Navarro Castillo

Director del Seminario de Graduación



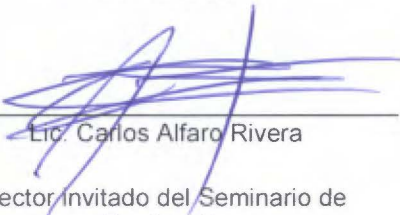
Dr. William Poveda Fernández

Lector Asesor del Seminario de Graduación



M.Ed Kattia Rodríguez Ramírez

Lectora Asesora del Seminario de Graduación



Lic. Carlos Alfaro Rivera

Lector invitado del Seminario de Graduación

Dedicatoria

A mi abuela por ser el pilar fundamental de mi fortaleza, quién me apoyó y creyó siempre que podía lograrlo.

Francela

A mi papá, por enseñarme el valor del esfuerzo y la dedicación y a mi abuela, por ser ejemplo de perseverancia y amor.

Andrea

A Dios por tantas bendiciones que me ha dado a lo largo de mi vida, a mi familia que estuvo a mi lado incondicionalmente dándome el apoyo, los consejos y la guía invaluable para mi formación como profesional y como persona; enseñándome con acciones los valores y principios necesarios para salir adelante pese a todo obstáculo.

Wilman

Agradecimientos

A Dios por darme la sabiduría y fortaleza para culminar esta etapa académica.

Francela

A Dios por el regalo de poder estudiar, a mis padres y familiares por creer en mí ante las adversidades, a mis profesores y amigos que a lo largo de la carrera fueron un apoyo incondicional. Especialmente agradezco a Francela y a Wilman por su amistad y dedicación durante estos años.

Andrea

A todos los profesores que a lo largo de mi carrera universitaria me enseñaron los conocimientos necesarios para mi formación como profesional con gran paciencia y esfuerzo; también agradezco en especial a mis tíos Rey y Ara por su incommensurable apoyo ya que sin ellos no alcanzaría esta meta.

Wilman

Agradecemos a nuestro director del Seminario de Graduación Lic. Snider Navarro Castillo por su guía, paciencia, comprensión y dedicación a lo largo del proceso de investigación. A nuestros lectores; Dr William Poveda y M.Ed Kattia Rodríguez por su valioso aporte académico y a la Lic. Karen Vindas por su apoyo.

Al Liceo Roberto Brenes Mesén, especialmente a la profesora Lic. Jennifer Barahona por brindarnos un espacio de aprendizaje para desarrollar nuestro proyecto de graduación.

Índice general

Aprobación.....	ii
Dedicatoria.....	iii
Agradecimientos	iv
Índice general.....	v
Índice de cuadros	viii
Índice de ilustraciones.....	ix
Índice de abreviaturas.....	x
Resumen	1
Capítulo I: Objeto de Estudio	3
1. 1 Justificación	3
1. 2 Problema	9
1. 2. 1 Delimitación del problema	9
1. 3 Objetivos	10
1. 3. 1 Objetivo general	10
1. 3. 2 Objetivos específicos	10
1. 4 Marco de estudio	11
1. 4. 1 Acontecimientos a nivel internacional.....	11
1. 4. 2 Acontecimientos a nivel nacional	15
Capítulo II: Marco teórico	21
2. 1 Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la actualidad costarricense	21
2. 2 Enseñanza de la función cuadrática	26
2. 3 Metodología de resolución de problemas como enfoque principal	28
2. 4 Definición de modelización matemática	32
2. 5 Definición de pensamiento matemático.	34
2. 6 Proceso de resolución de problemas.....	35
2. 6. 1 Comprender el problema	36
2. 6. 2 Concebir un plan.....	37

2. 6. 3 Ejecutar el plan	40
2. 6. 4 Examinar la solución	41
2. 7 Heurística moderna:	43
2. 7. 1 Variación del problema.....	43
2. 7. 2 Generalización	44
2. 7. 3 Particularización	44
2. 7. 4 Analogía.....	45
Capítulo III: Marco metodológico.....	46
3. 1 Tipo de investigación	46
3. 1. 1 Delimitación del estudio	46
3. 1. 2 Enfoque de investigación.....	46
3. 1. 3 Paradigma de investigación	48
3. 1. 4 Diseño de investigación	49
3. 1. 5 Alcance temporal.....	50
3. 1. 6 Población en estudio	50
3. 2 Procedimiento de la investigación.....	51
3. 2. 1 I Etapa: Delimitación del problema y planteamiento de objetivos de investigación.	51
3. 2. 2 II Etapa: Referente teórico	52
3. 2. 3 III Etapa: Selección de instrumentos y técnicas de recolección de datos.....	52
3. 2. 4 IV Etapa: Recolección de datos.....	53
3. 2. 5 V Etapa: Análisis de la información	56
3. 2. 6 VI Etapa: Conclusiones y recomendaciones.....	59
Capítulo IV: Análisis de resultados	60
4. 1. Primera sesión: Diagnóstico	60
4. 2 Segunda sesión: Recursos.....	67
4. 3 Tercera sesión: Taller de resolución de problemas	68
4. 4 Cuarta sesión: Evaluación individual	77
Conclusiones	82
Recomendaciones	84

Referencias bibliográficas	86
Anexos.....	90
Anexo I	91
Anexo II	93
Anexo III	97
Anexo IV	102
Anexo V	105

Índice de cuadros

Cuadro 1: Nuevo Estilo de Acción de Aula	23
Cuadro 2: Proceso de modelización según MEP (2012)	34
Cuadro 3: Preguntas propuestas por Polya para cada fase del método de Resolución de Problemas	42
Cuadro 4: Categorías de Análisis.....	57
Cuadro 5: Clasificación de los indicadores según la categoría de análisis	58

Índice de ilustraciones

Ilustración 1. Identifica explícitamente las variables en el problema.....	62
Ilustración 2. Gráfica del problema.....	63
Ilustración 3.Cálculo de la preimagen.	64
Ilustración 4. Examinar la solución	66
Ilustración 5. Identifica explícitamente las variables del problema	70
Ilustración 6. Escribir el vértice como par ordenado	73
Ilustración 7. Brindar una respuesta escrita	75

Índice de abreviaturas

Abreviatura	Significado
MEP	Ministerio de Educación Pública
OCDE	Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico
EMR	Educación Matemática Realista
PISA	Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes

Resumen

En el año 2012 el Ministerio de Educación Pública estableció la reforma para el programa de estudios de matemática en Costa Rica que considera la resolución de problemas como eje disciplinar para dar sentido a la matemática desde la aplicación de los conceptos y procesos acoplándose así con la competencia matemática. Los resultados obtenidos en las pruebas estandarizadas PISA de acuerdo con el Sexto Informe del Estado de la Educación (2017) evidencian que para el año 2015 los estudiantes costarricenses no alcanzaron los niveles mínimos de desempeño relacionados con la comprensión lectora, síntesis de información y resolución de problemas, además, en las evaluaciones nacionales de bachillerato aplicadas en el año 2017 se obtiene la aprobación del 53,63% de los ítems asociados a la resolución de problemas relacionados con función cuadrática y para el año 2018 se obtuvo la aprobación de 61,07% de los ítems asociados a ésta habilidad.

Considerando la información anterior se establece el objetivo de analizar el proceso de resolución de problemas de acuerdo con las fases establecidas por George Polya (1989) en el tema de funciones cuadráticas, para la habilidad de determinar puntos máximos y puntos mínimos, propuesto por los estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, Circuito 05 de la Dirección Regional de Educación San José Central.

Los estudiantes participaron de cuatro sesiones: *diagnóstico, recursos, taller de resolución de problemas y evaluación*; estas sesiones fueron diseñadas de acuerdo con la metodología de resolución de problemas propuesta por Polya (1989) y bajo las consideraciones de Shoenfeld (1985) sobre el concepto de recursos. Durante las sesiones los participantes se enfrentaron a diferentes problemas en la

habilidad específica de determinar puntos máximos o puntos mínimos de la función de cuadrática. El proceso de recolección de información se realizó mediante la aplicación de instrumentos impresos en papel considerando la técnica de encuesta autoadministrada, abordada mediante el instrumento de cuestionario autoadministrado. Además, en cada una de las cuatro sesiones desarrolladas se implementó la técnica de observación no estructurada mediante la implementación de un cuaderno de notas; en el cual se registró el comportamiento y las preguntas realizadas por los estudiantes durante el desarrollo de cada sesión.

Algunas de las principales conclusiones se relacionan con la mejoría que presentan los estudiantes para plantear procesos de resolución de problemas relacionados con el tema de función cuadrática al participar de las sesiones de trabajo, por otra parte, los estudiantes diseñaron su plan de resolución desde los procesos algebraicos y omitieron la representación gráfica y tabular de la función cuadrática para encontrar la solución al problema.

Capítulo I: Objeto de Estudio

En el presente capítulo se exponen los principales aportes realizados por investigaciones relacionadas con el tema de función cuadrática y resolución de problemas, la delimitación del problema de investigación y su importancia dentro de la Educación Matemática en el contexto costarricense.

1. 1 Justificación

El Programa de Estudios de Matemática establecido por el Ministerio de Educación Pública (MEP) en el año 2012, aprobado por el Consejo Superior de Educación, enfoca la enseñanza de la Matemática desde distintas perspectivas; una de estas corresponde a la resolución de problemas en contextos reales con la intención de dar sentido a la matemática como herramienta de modelación de la realidad.

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (citado por Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012) señala:

La intención es promover un enfoque de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que haga especial hincapié en los procesos asociados al planteamiento de problemas en contextos reales, procurando que dichos problemas adopten una forma apta para la aplicación de métodos matemáticos, que se utilice el conocimiento de las matemáticas para resolverlos y que se evalúe su solución en el contexto del problema original...(p. 499)

El Programa de Estudios de Matemática (MEP, 2012) establece un abordaje de las situaciones de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva que pretende

dar sentido a los conocimientos desde los procesos, dejando de lado los algoritmos carentes de significado, para dar paso a las condiciones que permiten y propician el aprendizaje mediante el razonamiento para la solución de problemas. Además, propone una metodología basada en la resolución de problemas como herramienta didáctica dentro de la clase de matemática, esta metodología se describe de la siguiente manera:

Se propone en Educación Matemática Realista (EMR) una forma de organización de la lección que se separa del estilo tradicional que se ha señalado en este currículo (teoría->ejemplo->práctica->ejercicio contextualizado) y propone otra en que se invierte el esquema: se parte de problemas, se brinda espacio a los estudiantes para elaborar y construir sus estrategias y soluciones, se realiza una socialización de los resultados. (MEP, 2012, p. 500).

Las consideraciones anteriores pretenden partir de problemas en contextos reales que se acerquen a la cotidianidad, para que la matemática sea percibida por el estudiante como una herramienta funcional en situaciones problema. La finalidad es que la población estudiantil construya, modele y elabore estrategias para afrontar diferentes situaciones; en este sentido, Cásares (citado por Oviedo, 2012) indica que: “el sistema debe de permitirle al individuo desplegar sus habilidades y capacidades intelectuales, físicas y emocionales, tanto de relación como de trascendencia” (p. 3).

Para alcanzar lo señalado anteriormente, el Programa de Estudios de Matemática establece cinco procesos matemáticos: *razonar y argumentar, plantear*

y resolver problemas, comunicar, conectar y representar, que permitan generar nuevos conocimientos matemáticos a través de situaciones de aprendizaje.

Según el Programa de Estudios de Matemática del MEP (2012), la escogencia de estas actividades: “permite potenciar la aplicación de los conceptos y métodos de resolución, acoplándose así con la competencia matemática que se ha definido como la capacidad para describir, comprender y actuar en contextos diversos usando matemáticas” (p. 29).

Respecto a las estrategias de resolución que puede plantear un individuo ante un problema, Montague y Dietz (citados por Oviedo, 2012) señalan que el estudiante debería seguir una línea de pensamiento alrededor del siguiente proceso:

... establecer un modelo de siete procesos cognitivos para dar solución a problemas de matemática: comprender lo que dice el problema, lograr escribirlo en sus propias palabras, visualizar posibles soluciones con algún esquema o representación, planificar, estimar respuestas, realizar cálculos y comprobar soluciones. (p. 18)

El proceso mencionado ante la tarea de resolver un problema es considerado por Polya (1989) en su libro: *¿Cómo plantear y resolver problemas?* En este, se describe el proceso de resolución de situaciones mediante cuatro fases: *comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida*.

La presente investigación tiene como objetivo identificar la fase en la que se encuentran los estudiantes en el proceso de resolución de problemas, utilizando

como referencia las cuatro fases planteadas por Polya (1989) y de esta manera, establecer las principales características de las estrategias de resolución implementadas por los estudiantes, en el tema de funciones cuadráticas, en la habilidad específica de determinar puntos máximos o puntos mínimos.

Para Polya (1989), el papel del docente está relacionado directamente con las habilidades del estudiante para la resolución de problemas, al señalar que: “el profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica” (p. 27).

En relación con lo anterior, el *Sexto Informe Estado de la Educación* elaborado por el Programa del Estado de la Nación (2017) en Costa Rica señala:

En PISA 2015 [Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes], el foco de análisis fue la evaluación de las competencias científicas, por lo que esta aplicación permite profundizar con mayor detalle en aspectos vinculados al rendimiento de los estudiantes en esta área. Los resultados revelan que los jóvenes que muestran un alto interés por las ciencias y que además la consideran útil obtienen en promedio mejores resultados. Estos dos factores son relevantes porque están directamente asociados a la labor del docente, por eso resulta trascendental afinar las prácticas pedagógicas para fomentar estas acciones y mejorar sus procesos de aprendizaje. (p. 195)

De esta manera, se considera la labor docente como un factor influyente en las habilidades y en la perspectiva que tenga el estudiante sobre la resolución de problemas. En relación con las habilidades de resolución de problemas evaluadas en la prueba PISA, la OCDE (2016) señala:

Para comprender y resolver eficazmente problemas contextualizados que implican cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad, e incertidumbre y datos, es necesario recurrir a diversos conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas, pero a un nivel adecuado de profundidad y sofisticación. (p. 82)

Sin embargo, los resultados obtenidos por los estudiantes costarricenses no demuestran un alto nivel, el Programa del Estado de la Nación (2013) en el *Cuarto Informe del Estado de la Educación* (2013) señala que:

Un análisis exhaustivo de los resultados de las pruebas diagnósticas de noveno año y, a nivel externo, del desempeño de Costa Rica en las pruebas del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) de 2009, determinó que el sistema educativo está lejos de lograr que sus estudiantes tengan niveles de desempeño mínimos aceptables en habilidades como exploración, comprensión lectora, resolución de problemas, síntesis, construcción de argumentos y trabajo colaborativo, entre otras. (p. 52)

Además, el Programa del Estado de la Nación (2017) en el *Sexto Informe del Estado de la Educación* señala que los resultados de la prueba aplicada en el año 2015 clasifican a los estudiantes dentro de los dos primeros niveles de desempeño, al respecto se menciona:

... En el caso de la competencia matemática, un estudiante que alcanza el segundo nivel de desempeño es capaz de: interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren no más que la inferencia directa; extraer información relevante de una única fuente y hacer uso de un único modo de representación; emplear algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos y conversiones para resolver problemas con números enteros y realizar interpretaciones literales de los resultados. Los resultados evidencian que el 62,6% de los estudiantes costarricenses no alcanzan este nivel y más preocupante aún es que el 27,4% no logra las habilidades mínimas necesarias para ubicarse en el nivel 1 de desempeño. (p. 193)

A partir de los resultados obtenidos en las pruebas estandarizadas PISA aplicadas en el año 2015, surge la necesidad de establecer nuevas condiciones de enseñanza y aprendizaje que favorezcan las habilidades y conocimientos de los estudiantes de secundaria con la intención de obtener mejores puntuaciones.

La Dirección de Gestión y Evaluación de la calidad del MEP señala que, a nivel nacional, los resultados obtenidos durante el año 2017, al evaluar las habilidades asociadas al planteamiento y resolución de problemas en las pruebas de bachillerato, indican un 53,63% de aprobación de los ítems asociados a esta habilidad y para el 2018 se obtuvo una aprobación de 61,07% de estos ítems.

1. 2 Problema

¿Cómo propiciar las habilidades relacionadas con la resolución de problemas en estudiantes de undécimo año de Educación Diversificada para determinar puntos máximos o puntos mínimos en funciones cuadráticas?

1. 2. 1 Delimitación del problema

El análisis del proceso de resolución de problemas se realizará con la participación de 22 estudiantes de undécimo nivel del Ciclo Diversificado, en la sección 11-1 del curso lectivo 2019 del Liceo Roberto Brenes Mesén, circuito 05, Dirección Regional de Educación San José Central.

Se evaluarán de manera diagnóstica los procesos de resolución de problemas en los contenidos de función cuadrática que realizan los estudiantes; seguidamente, se realizará un taller de recursos que reconsiderará los conocimientos previos de los estudiantes. Luego se plantea un taller con el fin de favorecer las habilidades para la resolución de problemas y, finalmente, los participantes se enfrentarán a la tarea de resolver de manera individual dos problemas en el tema de funciones cuadráticas, específicamente en la habilidad de determinar puntos máximos y puntos mínimos.

Los procesos de resolución de problemas propuestos por los estudiantes durante las sesiones se contrastan con los procesos propuestos considerados en la metodología de resolución de problemas establecida por Polya (1989), con la finalidad de considerar las habilidades de los estudiantes.

1. 3 Objetivos

1. 3. 1 Objetivo general

Analizar el proceso de resolución de problemas en el tema de funciones cuadráticas, para la habilidad de determinar puntos máximos o puntos mínimos, propuesto por los estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, Circuito 05 de la Dirección Regional de Educación San José Central.

1. 3. 2 Objetivos específicos

1. Identificar las fases del proceso de resolución de problemas según Polya (1989), en los procesos planteados por los estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, del Circuito 05 de la Dirección Regional de Educación San José Central, para resolver problemas en el tema de función cuadrática, específicamente en la habilidad de determinar puntos máximos o puntos mínimos.
2. Determinar los elementos del pensamiento matemático explícitos en el proceso de resolución de problemas de los estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, del Circuito 05 de la Dirección Regional de Educación San José Central, al resolver problemas relacionados con función cuadrática, específicamente en la habilidad de determinar puntos máximos o puntos mínimos, de acuerdo con las fases propuestas por la metodología planteada por Polya (1989).

1. 4 Marco de estudio

A continuación, se presentan distintas fuentes de información que establecen una perspectiva alrededor del tema de estudio, se describen como precedentes que permiten enmarcar de manera teórica y práctica el proceder investigativo. Para esto se consideran investigaciones relacionadas con el análisis de las fases de Polya en estudio de casos, funciones cuadráticas y resolución de problemas. El abordaje de los referentes investigativos se plantea desde dos categorías, estas son:

- I. Acontecimientos a nivel internacional
- II. Acontecimientos a nivel nacional

1. 4. 1 Acontecimientos a nivel internacional

Algunas investigaciones de corte internacional relacionadas con la resolución de problemas, las cuales enmarcan a manera de referente el proceder de este proyecto, se describen a continuación.

La tesis presentada por Planchart (2002) para obtener el grado de doctor en Matemática Educativa, titulada: *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*, emplea una metodología por fases; en una primera fase se realizó un estudio piloto donde se diseñó una prueba exploratoria y se incorporó un instrumento de estudio que consta de cinco actividades de modelación a partir de problemas. En una segunda fase, se diseñaron tres bloques de preguntas y una carpeta de actividades con cuatro sesiones para llevar a cabo durante un semestre, los datos se recolectaron en el aula y en un salón con equipos computarizados.

En los principales hallazgos de la investigación, Planchart (2002) indica que los estudiantes utilizaron distintas estrategias para responder las preguntas, algunas fueron: tablas, conjuntos o gráficas para visualizar y responder si las expresiones correspondían o no a funciones. En la misma línea se expone que estas

estrategias utilizadas por los estudiantes posibilitan al menos cuatro sistemas de representación distintos, entre ellas la tabla, el diagrama de Venn, la gráfica de una función y, finalmente, su representación algebraica.

Dentro de las principales conclusiones de la investigación, se consideraron las dificultades de los estudiantes para adquirir el concepto de función y manipular sus distintas representaciones. Este referente constituye un aporte a la presente investigación, ya que el análisis del proceso realizado considera la perspectiva del estudiante durante el proceso de resolución de problemas.

La tesis titulada: *Un estudio sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones cuadráticas en el nivel de secundaria*, presentada por Tolentino (2013), en México, establece un proceso de investigación con un grupo de control y un grupo experimental. Al grupo control se le aplicaron estrategias algorítmicas para la enseñanza del contenido de función cuadrática y el grupo experimental trabajó estrategias no algorítmicas pensadas propiamente para el contenido de función cuadrática, esto con el fin de comparar las habilidades adquiridas.

En la investigación se utilizaron distintos instrumentos, entre ellos la entrevista, el registro de observación de clase y de planeación, notas de campo y examen diagnóstico final; el cual permitió realizar una comparación de lo que el estudiante inicialmente conocía y al final después de la utilización de distintas estrategias metodológicas; de manera que se efectúa una descripción del diseño y utilidad de cada uno de los exámenes aplicados, así como la forma en que se ejecutaron.

Los resultados obtenidos señalaron que el programa educativo oficial mexicano cubre los contenidos básicos esperados para ingresar a estudios medios superiores, pero es indispensable que el docente utilice estrategias metodológicas

que favorezcan el aprendizaje significativo del estudiantado, de manera que el conocimiento obtenido pueda ser aplicado en diversas situaciones. La utilidad de este referente en la presente investigación radica en las características de las propuestas metodológicas que plantea para la enseñanza y el aprendizaje del contenido de función cuadrática.

La investigación titulada: *Propuesta Didáctica con funciones cuadráticas de problemas en contexto a nivel superior*, elaborada por Esquer (2014), en el Instituto Tecnológico de Sonora, tiene como objetivo desarrollar una serie de actividades didácticas que ayuden a los estudiantes de Ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora, quienes cursan la materia de Fundamentos de Matemáticas, a modelar y resolver problemas con el uso de funciones cuadráticas en contextos extra matemáticos. El trabajo fue estructurado en cuatro momentos centrales que corresponden al diseño de una propuesta didáctica, el pilotaje de esta secuencia didáctica, las modificaciones producto del resultado del plan piloto y una organización de los datos obtenidos al aplicar la secuencia didáctica en la población en estudio.

Dentro de las principales conclusiones obtenidas en el estudio, se encuentra que los estudiantes resuelven problemas en registros algebraicos y gráficos, entonces se les dificulta el tránsito en otros registros. Asimismo, menciona que las formas de representación mayormente utilizadas por los estudiantes son el registro tabular, gráfico o algebraico, por lo que es necesario, en las estrategias didácticas que se diseñen, incorporar otras formas de representación para que el estudiante realice transiciones entre un sistema y otro.

El estudio anterior aporta como un referente para el planteamiento de los objetivos y el problema de la presente investigación, debido a que valora las

habilidades de los estudiantes para la resolución de problemas relacionados con la función cuadrática.

Por otra parte, la tesis titulada: *Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática*, realizada por Aránzazu (2013) en la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, presenta una propuesta didáctica orientada en las Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas, compuesta por ocho pasos, diseñada por el docente Marco Antonio Moreira del Instituto de Física de la Universidad Federal de Río Grande de Sul, que está orientada en el aprendizaje significativo. Presenta cinco capítulos, los cuales describen el proceso de enseñanza de la función cuadrática.

Este trabajo se basó en la Teoría de Ausubel considerando la existencia de conocimientos previos en los estudiantes y la relación con los nuevos aprendizajes adquiridos; el aporte de esta investigación consiste en el análisis que realiza del esquema de resolución de problemas planteado por los estudiantes.

El trabajo presentado por Mosquera (2015) en la Universidad Nacional de Colombia, titulado: *Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real en el marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER Yarumito*, utiliza el tipo de investigación denominada *Monografía de análisis de experiencias o estudios de casos*, donde se analizan investigaciones prácticas o experimentales paso a paso y se hace una comparación de los resultados con otras investigaciones similares.

La prueba inicial consta de seis preguntas que evidencian las principales deficiencias que presentan los estudiantes en relación con la función cuadrática, en la sección denominada *El marco conceptual para la enseñanza de la comprensión*, se definen metas, desempeños y dimensiones de la comprensión. Estas definiciones permiten verificar la comprensión que tiene un estudiante al enfrentar un problema matemático donde se involucra la función cuadrática, lo cual representa un aporte a este proyecto para el análisis del planteamiento del esquema de resolución de problemas modelados mediante funciones cuadráticas.

Dentro de las principales conclusiones, se destaca que la prueba diagnosticó dificultades en los planteamientos de resolución de problemas, esto permite identificar cuáles conceptos debían fortalecerse. Además, mediante la aplicación de la unidad didáctica, se observó en los estudiantes el desarrollo de un proceso de autonomía y descubrimiento ante las actividades realizadas, al mismo tiempo identificaron la utilidad de la función cuadrática en la cotidianidad.

1. 4. 2 Acontecimientos a nivel nacional

A continuación, se describen algunas investigaciones realizadas a nivel nacional que se relacionan con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática y la resolución de problemas.

La tesis realizada por Oviedo (2012) para obtener el título de Maestría Profesional en Evaluación, titulada: *Evaluación de algunos procesos metacognitivos de los estudiantes de décimo año de la educación secundaria en la resolución de problemas de Matemática*, aplicado a instituciones públicas educativas seleccionadas a conveniencia, tiene como objetivo determinar las evidencias de validez que permiten considerar un instrumento para la evaluación de procesos

metacognitivos en la resolución de problemas matemáticos para estudiantes de décimo nivel de secundaria.

Oviedo (2012) expresa que, dada la dificultad de analizar procesos metacognitivos, la investigación no evaluó toda la metacognición, sino que se centra en las dimensiones afectivas y heurística de los estudiantes. Las variables de estudio corresponden a las habilidades afectivas y heurísticas en la resolución de problemas trabajadas mediante la implementación de un cuestionario donde se utilizan escalas de Likert. Además, la validación de los instrumentos se obtiene mediante un cuestionario piloto aplicado en un curso de posgrado en evaluación educativa en el año 2008, donde las escalas fueron sometidas a validación de expertos. En cuanto al propósito de la aplicación de los instrumentos, Oviedo (2012) expresa que es indagar acerca de la relación de los procesos metacognitivos en la estrategia de resolución de problemas en matemática de los estudiantes de décimo año.

Este antecedente se centra en la importancia de realizar un análisis del proceso que elabora un estudiante en la resolución de un problema matemático, donde los instrumentos utilizados representan una guía en cuanto a su forma y estructura de aplicación.

La tesis titulada *Unidad didáctica a través de situaciones del entorno para la enseñanza de los conceptos generales de funciones, la función lineal y la función cuadrática* realizada por Castro, Mena, Pineda, Rojas, Valverde y Vindas (2011), para la Universidad de Costa Rica, expone una propuesta de unidad didáctica que pretende apoyar el proceso de aprendizaje de los conceptos básicos relacionados con funciones en secundaria, específicamente en los contenidos de función lineal y función cuadrática.

La propuesta metodológica se desarrolló alrededor de una investigación descriptiva-cualitativa en centros educativos públicos y subvencionados del cantón de Desamparados; las principales técnicas utilizadas para la recolección de datos son: cuestionarios, observación no participante, entrevistas semiestructuradas y la revisión del Programa de Estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública vigente para el año 2011.

Entre las principales conclusiones, se establece la necesidad de plantear la enseñanza del contenido de funciones mediante la resolución de problemas relacionados con el entorno para facilitar la generalización de los conceptos; el uso de *software* que permita y favorezca la visualización de las gráficas de las funciones, en relación con esto, señalan la carencia de material tecnológico en los centros educativos; además, se realiza una revisión de los libros de texto utilizados en contraste con los contenidos del programa de estudio; con estos elementos como referente, se estructura una unidad didáctica que, desde la perspectiva de resolución de problemas relacionados con el entorno, propone un apoyo a los aprendizajes considerados generales relativos a función lineal y función cuadrática.

La investigación descrita anteriormente aporta al presente estudio la importancia del planteamiento de la unidad didáctica y sus características para la enseñanza de la función cuadrática mediante situaciones del entorno. Además, es un referente costarricense que evidencia la necesidad de la enseñanza y el aprendizaje mediante resolución de problemas en el tema de función cuadrática.

En el proyecto de investigación titulado: *Cómo influye la aplicación del método heurístico en el proceso de resolución de problemas matemáticos de división y multiplicación por parte de los niños de I y II ciclo de la Educación General Básica*, realizado por Navarro (2003) para la Universidad de Costa Rica, se aplica

una práctica de matemática para la habilidad de divisiones y multiplicaciones en los números enteros.

Este proyecto se desarrolla mediante una investigación - acción aplicada a dos poblaciones estudiantiles de diferente institución y nivel. Se aplica una práctica de matemáticas sobre resolución de problemas y una encuesta, además, se utilizaron tres técnicas: la observación participante, el diagnóstico y la entrevista.

Entre las conclusiones más relevantes resalta la necesidad de considerar las distintas capacidades de los estudiantes al explicar el contenido y al plantear situaciones problema. También se hace énfasis en la importancia de los conocimientos previos del estudiante y concluye que los estudiantes poseen dificultades importantes para resolver problemas matemáticos, tales como la comprensión del problema y la verificación de los resultados.

Este proyecto se considera referente para la construcción y la aplicación de los instrumentos por utilizar, ya que se desarrolló alrededor de la aplicación de cuestionarios con la tarea de resolver problemas de matemáticas, donde el principal objetivo fue conocer diversas estrategias planteadas por los estudiantes.

La investigación titulada *El método heurístico en la resolución de problemas matemáticos*, realizada por Pacheco (2004) para la Universidad de Costa Rica, aplica una prueba donde se establece la solución a cuatro problemas matemáticos empleando algoritmos básicos: suma, resta, multiplicación y división.

Este proyecto es de tipo investigación-acción, se desarrolla en la Escuela Dante Alighieri ubicada en Lourdes del distrito de San Pedro, Montes de Oca; en un grupo de tercer grado, se utilizaron la observación participante y una prueba tanto diagnóstica como técnica.

Entre las principales conclusiones destaca la necesidad de fortalecer las habilidades de los estudiantes en materia de análisis. Ante la tarea de resolver una situación particular, determina la dificultad de los estudiantes para identificar algoritmos de operaciones básicas útiles en su proceso de resolución, así como dificultades para la aplicación de dichas herramientas.

Esta investigación se considera referente por el aporte brindado en la evaluación de las fases propuestas por el método de Polya para identificar las debilidades y fortalezas del estudiantado al momento de enfrentarse a un problema. Se verifica que desde la educación primaria es necesario fortalecer la enseñanza y el aprendizaje basados en resolución de problemas.

En la investigación titulada: *Resolución de problemas aritméticos en III año de secundaria*, elaborada por Moya (1972) en la Universidad de Costa Rica, se elaboró una prueba que consta de 12 problemas aritméticos a nivel de primaria para ser aplicados en estudiantes de tercer año de enseñanza secundaria.

Los problemas se aplicaron a ocho colegios, cuatro públicos y cuatro privados del área metropolitana, los cuales obtuvieron las mejores notas en el examen de admisión de la Universidad de Costa Rica en 1970. Entre las conclusiones más relevantes, determina que las dificultades para la resolución de problemas se deben al poco tiempo invertido en la realización de prácticas o al estudio pertinente. Además, existe una dificultad para evocar los conocimientos adquiridos para ser utilizados en un problema por resolver, esto se percibe como una falla en los programas de segunda enseñanza. Por otra parte, los estudiantes de instituciones privadas muestran mayor destreza en la resolución de problemas.

La investigación anterior evidencia que la resolución de problemas ha sido un tema de estudio recurrente. Esta investigación aporta al considerar los

obstáculos que enfrenta un estudiante ante la tarea de resolver un problema y las prácticas que permiten evaluar los procesos de resolución de problemas planteados por estudiantes.

Capítulo II: Marco teórico

El presente capítulo considera aportes teóricos relacionados con el tema de estudio, se presenta una breve descripción del contexto académico de la educación matemática en Costa Rica; seguidamente, se definen conceptos asociados al proceso de resolución de problemas, tales como pensamiento matemático y modelización matemática. Además, se establece la diferencia entre los conceptos de problema y ejercicio, por último, se detallan las fases propuestas por la metodología heurística de George Polya y sus heurísticas para la resolución de problemas.

2. 1 Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la actualidad costarricense

En mayo del 2012, se desarrolla una reforma curricular en la educación matemática en Costa Rica con la aprobación de nuevos programas de estudio que pretenden fortalecer la educación matemática en el país, respondiendo a los resultados descritos en los Informes del Estado de la Educación elaborados entre los años 2005 y 2013, donde se plantean diversos temas por mejorar en materia de educación, particularmente en el área de matemática.

Para Ruiz (2013), parte de las razones para implementar el cambio consisten en que los resultados obtenidos por programas educativos anteriores son críticos y alarmantes; algunos indicadores que respaldan esta aseveración son las pruebas nacionales de bachillerato, la prueba internacional PISA y la prueba de diagnóstico de matemática (DiMa) aplicada por la Universidad de Costa Rica anualmente.

Lo anterior refleja algunas de las principales causas que dan sentido a la propuesta de una nueva perspectiva hacia la educación matemática en el país, de manera que se establece el nuevo Programa de Estudios de Matemática que tiene

como objetivo cambiar la visión tradicional de la matemática, donde se concibe esta como estática y abstracta; se trata entonces de superar estos prejuicios con el fin de lograr un cambio significativo en la forma tanto de enseñar como de aprender matemática.

El MEP establece la modificación de la dinámica de enseñanza en las aulas, para centrar la enseñanza en los procesos de participación de los estudiantes en la resolución y planteamiento de problemas, así como propiciar la construcción final de modelos matemáticos teóricos.

El currículo establece el fortalecimiento de habilidades para enfrentar los retos que propone el desarrollo de una sociedad moderna, donde el análisis de la información y el conocimiento se convierten en una tarea necesaria; en relación con lo anterior, el MEP señala que se requiere que el estudiante asuma un compromiso en la construcción de sus aprendizajes, siendo el docente una guía para generar el aprendizaje. Por tanto, el currículo considera como enfoque central el trabajo de problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales en los que se desarrolla el estudiante, ya que se asume que este tipo de actividades es una fuente para la construcción de aprendizajes matemáticos.

El Programa de Estudio de Matemática del MEP (2012) incorpora el propósito de desarrollar en los estudiantes una *competencia matemática*, entendida como: “una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales” (p.14). De esta manera, la competencia matemática adoptada en el currículo establece un sentido práctico desde el enfoque de resolución de problemas, que propone dos etapas en la dinámica de aula descritas en el cuadro 1.

Cuadro 1: Nuevo Estilo de Acción de Aula

Etapa	Descripción	Fases	Subfases o explicación	
Etapa 1	Aprendizaje de Conocimientos	Propuesta de un problema	Presentación de un problema planificado con anterioridad por el docente tomando en consideración diversos criterios.	
		Trabajo Estudiantil	Apropiación del Problema. Formulación de estrategias–hipótesis–procedimientos. Resolución del problema.	
		Discusión Interactiva y Comunicativa	Espacio para la valoración y contrastación de resultados, permitiendo la argumentación y comunicación.	
		Clausura o Cierre	Actividad que permite pedagógicamente concluir la lección, se trata de un resumen fundamental para vincular el conocimiento generado con la teoría matemática abstracta.	
Etapa 2	Movilización y Aplicación de Conocimientos	Busca ampliar el papel de los aprendizajes o el dominio de diferentes formas de representación en diversos contextos.	Evaluación de los conocimientos aprendidos	No debe llegarse a repeticiones excesivas ni tampoco al desarrollo de actividades sin interés; debe proponer tareas que refuercen el aprendizaje o amplíen el conocimiento a través de otros caminos de resolución.

Nota. Elaboración propia basada en el estilo de acción de aula propuesto por el Programa de Estudio de Matemática, MEP (2012).

Los contenidos matemáticos propuestos por el Programa de Estudios de Matemática del MEP (2012) se presentan como organizadores del currículo, de manera que la decisión de no modificar este elemento como organizador se debe a que se considera la preparación docente al momento de implementar la reforma en educación matemática.

Los conocimientos matemáticos y las expectativas de aprendizaje sobre ellos son el punto de partida en cada ciclo y año lectivo; constituyen el contacto inmediato docente con el plan de estudio de cada año escolar. Esto es fundamental pues permite no distanciarse de la preparación actual de los docentes en el país y la tradición dominante en cuanto al currículo: hay plena familiaridad con las áreas matemáticas. (MEP, 2012, p.14)

El dominio de las habilidades y la competencia matemática propuestos en el plan de estudios son constituidos a través de la mediación pedagógica, la organización de las lecciones y las tareas matemáticas que se desarrollen. Para ello el currículo indica la necesidad de realizar en la acción de aula distintos procesos matemáticos que consisten en actividades transversales asociadas a las capacidades presentes en cada área para comprender y usar conocimientos. El planteamiento hecho por el currículo propone cinco procesos distintos: *razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, comunicar, conectar y representar*; estos procesos deben considerarse como formas de acción cognitiva que generan capacidades y se considera que su implementación constante permite generar el progreso de una competencia matemática.

El Programa de Estudios de Matemática del MEP (2012) establece que los conocimientos y las expectativas del aprendizaje son organizados en el currículo de

manera vertical, cuando menciona que: “las matemáticas no son una colección dispersa y desarticulada de conceptos y procedimientos específicos, estos se integran a partir de ideas y métodos generales cuya construcción y ampliación ha sido el resultado de los quehaceres matemáticos” (p.16). Para vincular los conocimientos, se exponen cinco ejes disciplinares: *la resolución de problemas, la contextualización, el uso de las tecnologías digitales, la potenciación de actitudes positivas y la historia de las matemáticas.*

La estructura curricular para cada ciclo lectivo está compuesta por cinco áreas matemáticas, las cuales organizan los distintos conocimientos y habilidades por desarrollar. Estas áreas son: *Números, Relaciones y Álgebra, Geometría, Medidas* y, por último, *Estadística y Probabilidad*; es necesario resaltar que para cada ciclo lectivo se proponen distintos conocimientos en cada una de estas áreas.

El sistema educativo costarricense está constituido por cuatro ciclos académicos; *Primer Ciclo*: compuesto por los tres primeros años lectivos de Educación General Básica, donde se enfatizan las habilidades relacionadas con el área de *Números*. *Segundo Ciclo*: compuesto por tres años lectivos de Educación General Básica; el área de *Números* sigue siendo una sección importante dentro de las habilidades y se establece el primer acercamiento a las áreas de *Álgebra y Relaciones*, así como en *Estadística y Probabilidad*. El *Tercer Ciclo* de Educación General Básica considera los tres primeros años de educación secundaria donde se amplían los temas impartidos en primaria y lo precisa matemáticamente al introducir términos abstractos y una justificación matemática teórica. Por último, se establece el *Cuarto Ciclo* o *Ciclo Diversificado*, que corresponde al último ciclo académico de enseñanza media; en el que se enfatiza en las áreas de *Relaciones y Álgebra*, así como en *Probabilidad y Estadística*, con el fin de desarrollar capacidades y habilidades para la educación superior.

El contenido matemático en el que se desarrolla esta investigación se encuentra dentro del área de *Relaciones y Álgebra*, para undécimo nivel. Sin embargo, es un contenido que se introduce en noveno año, desde una perspectiva general y se profundiza en el ciclo diversificado.

El Programa de Estudios de Matemática del MEP (2012) destaca la importancia del desarrollo de habilidades asociadas a los niveles de abstracción desarrolladas por los estudiantes, de manera que se procuren procesos de razonamiento y argumentación por parte de la población estudiantil.

2. 2 Enseñanza de la función cuadrática

En Costa Rica, la enseñanza de la función cuadrática se establece en el tercer ciclo, para el área de *Relaciones y Álgebra* específicamente en noveno año. Donde a partir de problemas contextualizados se introducen los conceptos relativos a la función cuadrática, así como su representación gráfica y tabular.

El análisis sistemático de la representación gráfica, es decir, máximos mínimos, eje de simetría, concavidad, intersecciones con los ejes, ámbito, dominio y codominio, así como todas las características propias de la función cuadrática se estudian en el ciclo diversificado, específicamente en décimo año, donde el estudiante retomará los conocimientos adquiridos en el tercer ciclo.

El contenido de función dentro del tercer ciclo en noveno año se estudia desde tres aspectos: la resolución de problemas modelados mediante funciones cuadráticas; seguidamente, su representación tabular mediante pares ordenados que pertenecen al gráfico de la función y, por último, se establece el análisis de la gráfica de una función cuadrática a partir de su criterio.

En el proceso de resolución de problemas modelados mediante funciones cuadráticas surge la necesidad de resolver ecuaciones cuadráticas, por lo que se incluye este tópico de manera auxiliar, sin embargo, se presta especial atención al contenido de función cuadrática.

Las habilidades establecidas por el MEP (2012), en el Programa de Estudios de Matemática para el contenido de función cuadrática, se describen a continuación:

- Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma $y = ax^2 + bx + c$.
- Representar tabular, algebraica y gráficamente una función cuadrática.
- Trazar la gráfica de una función cuadrática cuyo criterio es $y = ax^2 + bx + c$.
- Analizar la influencia de los parámetros a, b, c en la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, utilizando software.
- Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita. (pp. 337-341)

Además, señala la importancia del trabajo con hojas de cálculo y *software* para graficar, que permitan el desarrollo de habilidades de visualización, por lo que propone la participación tanto de docentes como de estudiantes en la resolución de problemas que promuevan estas habilidades.

En el ciclo diversificado, el contenido de función cuadrática se presenta de manera detallada en relación con la teoría de funciones; de la mano con conceptos como dominio, ámbito, codominio, imagen, preimagen, máximos y mínimos, gráfica y gráfico de una función; en particular la función cuadrática se estudia en conjunto con la función lineal, la exponencial y la logarítmica.

Para el ciclo diversificado, el MEP (2012) en el Programa de Estudios de Matemática plantea los siguientes objetivos referentes a función cuadrática:

- 1- Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- 2- Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones planteadas.
- 3- Relacionar la representación gráfica con la algebraica. (pp. 411 – 417)

Para responder al primer objetivo, se realiza un análisis de una función cuadrática dentro del conjunto de funciones; se identificaron aspectos tales como dominio, ámbito, codominio, imagen, preimagen, máximos y mínimos, gráfica y gráfico de una función; se establecieron las relaciones correspondientes a la concavidad, discriminante, eje de simetría, intersecciones con los ejes y su relación con la representación gráfica y tabular.

Además, en el Programa de Estudios de Matemática, el MEP (2012) señala la importancia de considerar la influencia de los parámetros a, b, c dentro del criterio de la función dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$; considerando que el papel de los parámetros fue establecido en noveno año, con la intención de que se establezcan relaciones de manera integral entre conocimientos previos y los nuevos conceptos.

2. 3 Metodología de resolución de problemas como enfoque principal

La resolución de problemas es un tema que ha despertado el interés de la investigación en Educación Matemática durante las últimas cuatro décadas (National Council of Teachers of Mathematic [NCTM], 1989), tanto por la diversidad de escritos desarrollados como por la cantidad de proyectos que se han diseñado

tomando como base este elemento; al respecto, Sepúlveda, Medina y Sepúlveda (2009) indican que: “quizás la razón sea que se nutre de los aspectos esenciales del quehacer matemático: los problemas y las acciones típicas del pensamiento que intervienen en el proceso de solución” (p.80).

La resolución de problemas es una actividad cotidiana para el ser humano, sin embargo, uno de los principales obstáculos a los que se ha enfrentado la labor docente es el planteamiento de ejercicios rutinarios considerándolos como problemas.

Uno de los principales errores al resolver un problema es buscar un algoritmo o una serie de procedimientos que permita llegar a la solución, en lugar de incentivar en el estudiante la exploración e investigación, al respecto, Kontorovich y Koichu (citado por Penalva, Posadas y Roig, 2010) afirman que: “Los estudiantes no tienen una rutina que seguir cuando generan problemas a partir de unas condiciones dadas, sino que deben reflexionar sobre su manera de resolver problemas y considerar cómo podría modificarse, ampliarse y clarificarse de modo eficiente” (p.27).

Para Bahamonde y Vicuña (2011), existe una clara diferencia entre los objetivos que se persiguen:

El objetivo del ejercicio es el dominio de un determinado procedimiento como forma de resolver un tipo de situación problemática específica. En cambio, el objetivo primordial del problema es desarrollar la habilidad para enfrentar una situación nueva, para diseñar un camino de solución. (p.12)

De igual forma, Bahamonde y Vicuña (2011) plantean la diferencia entre los conceptos de *ejercicio y problema*:

El primero implica emplear un algoritmo de forma más o menos mecánica, evitando las dificultades que introduce la utilización de reglas cada vez más complejas, y el segundo exige entregar una explicación coherente a un conjunto de datos relacionados dentro del contexto. La respuesta suele ser única, pero la estrategia resolutoria está determinada por factores de madurez o de otro tipo. (p. 18)

Considerando lo expuesto anteriormente, para que una situación matemática represente un problema, esta debe poseer una dificultad intelectual que, a su vez, sea reconocida por quien intenta resolver la situación y que despierte el interés para la misma o al menos una disposición por resolverla. El proceder de resolución debe exigir al estudiante investigar y no solo aplicar un algoritmo o procedimientos repetitivos. Por otra parte, la resolución de un ejercicio posee determinada estructura, procedimiento o algoritmo que permiten determinar rápida y acertadamente lo que se debe realizar, circunstancia que no requiere de una búsqueda relevante de información.

Para Vilanova et al. (2001), la resolución de problemas se define desde tres perspectivas distintas: *el contexto, la habilidad y la matemática*; la primera de ellas es la que considera el *contexto* en el cual: “los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares” (p.12). En la segunda perspectiva los autores indican:

La resolución de problemas es frecuentemente vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el currículum. Esto es, resolver problemas no rutinarios es caracterizado como una habilidad de nivel superior, a ser adquirida luego de haber resuelto problemas rutinarios. (Vilanova et al., 2001, p.3)

La segunda perspectiva consiste en considerar la resolución de problemas como una habilidad y no solo como un contenido por aprender, de manera que sea una destreza superior. Para Vilanova et al. (2001), la tercer perspectiva considera que el quehacer matemático consiste en: “resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones” (p.3); de manera que para un estudiante el sentido de la matemática está estrechamente ligado a la actividad y a la experiencia frente a las situaciones matemáticas. Al respecto de la resolución de problemas en el ámbito educativo, Sepúlveda et al. (2009) indican que:

El aprendizaje de las matemáticas involucra el desarrollo de cierta disposición de los estudiantes para explorar e investigar relaciones matemáticas, emplear distintas formas de representación al analizar fenómenos particulares, usar distintos tipos de argumentos y comunicar resultados. (p.87)

Por lo tanto, la resolución de problemas es una actividad fundamental para propiciar el aprendizaje significativo, ya que esta implica la intervención de otros procesos de pensamiento como lo son la búsqueda de conexiones, el uso de distintas representaciones y la necesidad de justificar la elección de distintos métodos empleados en la solución de un problema.

2. 4 Definición de modelización matemática

La modelización matemática, según Blomhøj (2004), se establece como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. La modelización emerge del estudio de situaciones inmersas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, considera que, al establecer un modelo matemático, debe existir de fondo un proceso de modelización, es decir, para la obtención de un modelo debe recorrerse un proceso para relacionar una idea matemática con una situación real.

Se detalla que, en un proceso de modelización, se pueden hallar distintos subprocesos, entre ellos: la formulación de un problema, una sistematización, una traducción al lenguaje matemático, análisis del sistema matemático, una interpretación de resultados y una evaluación de la validez del modelo (Blomhøj, 2004, p.23).

En el proceso de modelización matemática, Blomhøj (2004) considera que el papel del docente es plantear una situación donde los alumnos puedan trabajar con un fenómeno de la vida diaria, de manera que les permita poner en juego su conocimiento matemático en el establecimiento de un modelo para su solución, al respecto el autor señala que: “colocar el escenario para actividades de modelización es un elemento crucial en la enseñanza de la modelización matemática” (p. 29).

El Programa de Estudios de Matemática del MEP (2012) considera que el uso, la construcción y la identificación de modelos matemáticos es una parte relevante del enfoque de resolución de problemas, ya que los modelos matemáticos surgen cuando se acude a la realidad y define un modelo como un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica, en el enfoque de resolución de problemas un modelo puede ser una gráfica, una tabla o inclusive una fórmula algebraica.

Además, se sugiere en el Programa de Estudios de Matemática seis distintos pasos que pueden seguirse para el desarrollo de un proceso de modelización, dichos pasos siguen una línea similar a las consideraciones expuestas por el autor Blomhøj (2004).

A continuación, se presenta un cuadro de elaboración propia basado en los pasos del proceso de modelización planteado por el MEP (2012) en el Programa de Estudios de Matemática.

Cuadro 2: Proceso de modelización según MEP (2012)

Pasos	Descripción
Paso 1. El problema	Un problema que describe una situación de la realidad que debe ser modelizada.
Paso 2. Sistematización	Una selección de los objetos, la información y las relaciones relevantes del problema que le permitan obtener una posible representación o idealización matemática.
Paso 3. Modelo Matemático	Una traducción de los objetos y las relaciones del paso anterior en lenguaje matemático, de tal forma que obtenga un modelo que represente lo que ocurre en la realidad.
Paso 4. Solución	Uso de los conocimientos matemáticos previos para poder encontrar la solución o soluciones del modelo planteado en el paso anterior, de esta forma se podrá obtener una aproximación de la solución del fenómeno que se está idealizando en el paso 1.
Paso 5. Interpretación	Análisis de los resultados y las conclusiones considerando los conocimientos previos que se tienen del problema.
Paso 6. Evaluación	Verificación a la luz de los resultados matemáticos de la validez del modelo y el poder predictivo que dicho modelo tiene sobre el problema original. Para este proceso puede utilizarse la comparación con datos observados y/o el conocimiento teórico o por experiencia personal que se tenga del problema.

Nota. Elaboración propia basado en los pasos del proceso de modelización planteados en el Programa de Estudios de Matemática (MEP, 2012).

2. 5 Definición de pensamiento matemático.

De acuerdo con Santos (2015), el pensamiento matemático se refiere al proceso mediante el cual se crean estrategias para la resolución y el planteamiento de

problemas, que consiste en que los individuos sean capaces de: “construir y desarrollar conocimiento, estrategias y habilidades necesarias que les permitan participar en los procesos de formulación e identificación de problemas y en la búsqueda de diferentes maneras de resolverlos” (p.136).

Santos (2015) señala que la resolución de problemas como espacio para el desarrollo del pensamiento matemático requiere la búsqueda de información relacionada con diferentes temas de estudio para establecer estrategias de síntesis, análisis de la información; trabajo colaborativo que favorezca la implementación de diferentes puntos de vista; el desarrollo de herramientas que exploren y representen diversos problemas; evaluación de la planificación de los procesos de resolución de problemas; representación y discusión de los resultados; la divulgación de resultados de manera accesible para el público en general, considerar diversas formas de abordar un problema, así como la construcción de valores éticos que permitan la divulgación respetuosa de los resultados obtenidos.

2. 6 Proceso de resolución de problemas

Shoenfeld (1985) considera la resolución de problemas como un proceso que consiste en identificar problemas, representarlos, explorar diferentes estrategias, evaluar y examinar los resultados.

Por otro lado, Polya (1989) propone una metodología para la resolución de problemas que consiste en cuatro fases: *comprender un problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución*; cada una de estas fases implica un proceso que busca profundizar en los conocimientos del estudiante y propiciar nuevos, de manera que, aunque pareciera una idea de cuatro pasos simples, enmarca procesos complejos que consideran desde el lenguaje y la representación hasta las

concepciones propias de los objetos por tratar. A continuación, se describe cada fase.

2. 6. 1 Comprender el problema

Consiste en una adecuada percepción de las componentes del problema, incógnitas, datos relevantes y herramientas útiles, además de la adecuada representación, ya sea mediante expresiones algebraicas, dibujos, gráficas o lo que se requiera para representar la situación y llegar a un posible plan de resolución. Polya (1989) señala que, para lograr una debida comprensión de un problema:

El alumno deberá considerar las principales partes del problema atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada al problema deberá dibujar la figura y destacar en ella la incógnita y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente introducir una notación adecuada; poniendo cuidado en la apropiada elección de los signos, está obligado a considerar los elementos para los cuales los signos deben ser elegidos. (p.29)

Al respecto, Boscán y Klever (2012) señalan que la comprensión de un problema se define como el espacio en el que: "... el estudiante debe determinar, del enunciado, los datos que proporciona, lo que preguntan (incógnita), es decir, a lo que se le va a dar respuesta y establecer las relaciones que hay entre los datos y la incógnita" (pp. 13-14).

Para Polya (1989), el problema requiere un lenguaje para ser escrito y resuelto, de manera que la interpretación hecha por el lector se ve influenciada por

el manejo del lenguaje y su capacidad de interpretar el texto escrito, por lo que señala; “Ante todo, el enunciado verbal del problema debe ser comprendido” (p.29). De manera que el planteamiento del problema debe ser pertinente al nivel del estudiante y su manejo del lenguaje.

2. 6. 1. 1 Recursos

Shoenfeld (1985) considera los *recursos* como conocimientos previos que posee el individuo; se refiere, entre otros, a diferentes conceptos, fórmulas, algoritmos y a todas las nociones que se considere necesario saber para resolver un problema.

Asimismo, Shoenfeld (1985) señala tres aspectos por considerar dentro del concepto de recurso: *inventario de recursos*, *las circunstancias estereotípicas* y *recursos defectuosos*. El primero de ellos es el *inventario de recursos* que consiste en la necesidad del profesor de conocer cómo accede un estudiante a los conocimientos que posee; el segundo aspecto propone considerar *las circunstancias estereotípicas*, estas consisten en situaciones problema que pueden evocar en un estudiante un procedimiento de resolución casi automático, pero que implica una serie de dificultades; como tercer punto se establecen los *recursos defectuosos*, se refiere a conocimientos que el estudiante puede tener, pero que no son del todo correctos.

2. 6. 2 Concebir un plan

Se trata de considerar posibles alternativas que permitan llegar a una solución. Para Polya (1989), la fase principal es la elección de un proceder pertinente al problema planteado y se consigue dada la experiencia del lector y después de varios

experimentos de solución que pueden o no ser fallidos. Polya (1989) al respecto señala:

De hecho, lo esencial en la solución de un problema es concebir la idea de un plan. Esta idea puede tomar forma poco a poco o bien después de ensayos aparentemente infructuosos y de un período de duda se puede tener de pronto una idea brillante. (p. 30)

En relación con la concepción de un plan, Boscán y Klever (2012) consideran que: "... busca que los estudiantes determinen que pasos van a seguir para llegar a la respuesta de la pregunta que plantea el problema" (p. 14).

Este proceso responde a los conocimientos previos del lector y su experiencia, de manera que los posibles escenarios para la resolución del problema son consecuencia de las vivencias que el lector tiene como referencia. Polya (1989) indica: "las buenas ideas se basan en la experiencia pasada y en los conocimientos adquiridos previamente" (p. 30). Después de considerar un posible escenario que conduce a una solución de la situación planteada, se procede a la ejecución que pretende generar la respuesta.

2. 6. 2. 1 Esquema de resolución de problemas matemáticos

Dentro de la fase de concepción de un plan, se pueden analizar los esquemas de resolución de problemas matemáticos. Se denomina *esquemas* a las estructuras que establecen las relaciones entre lo que el lector conoce y lo que el texto le proporciona, al respecto Rumelhart (citado por Dubois, 1987) señala:

Un esquema, entonces, es una estructura de datos que representa los conceptos genéricos archivados en la memoria. Hay esquemas que representan nuestro conocimiento acerca de todos los conceptos, los que subyacen a los objetos, eventos, secuencias de eventos, acciones y secuencias de acciones. Un esquema contiene, como parte de su especificación, la red de interrelaciones que mantienen entre sí las partes constitutivas del concepto en cuestión. (p. 12)

De manera específica y como parte del concepto de esquema, surge el concepto de *esquema de resolución*, entendido este como el plan de ejecución que responde a las solicitudes del problema; además, se basa en las habilidades y conocimientos del lector. Para Bahamonde y Vicuña (2011) se define de la siguiente manera:

Comprende la búsqueda de una estrategia para la resolución de un problema, en este caso debe relacionar los datos que posee con la información que se desea obtener, con la pregunta que se necesita responder. También debe saber cuáles son las herramientas matemáticas que se deben usar. (p. 42)

El esquema de resolución de un problema matemático se establece en función de las relaciones que se construyen entre los conceptos presentes y los conocimientos del lector, además de sus habilidades y herramientas; estas permiten no solo plantearse una solución al problema, sino que de alguna manera desarrollar nuevas y mejores habilidades. Al respecto, Moreira (2002) afirma que: “la adquisición de conocimientos es modelada por las situaciones y problemas previamente

dominados y que ese conocimiento tiene, por lo tanto, muchas características contextuales” (p. 15).

Considerando el esquema de resolución como un plan por ejecutar para la resolución de un problema, debe tomarse en cuenta las características propias de la población y sus posibles conocimientos previos.

2. 6. 3 Ejecutar el plan

Se refiere a la puesta en marcha del proceso elegido para resolver el problema. Para Polya (1989), la principal condición por tomar en cuenta es la capacidad del lector de comprender su proceder y poder justificar cada elección, sin caer en la secuencia de algoritmos carentes de sentido, pues se busca examinar cada proceso y no la repetición, señala que:

El plan proporciona una línea general. Nos debemos asegurar que los detalles encajen bien en esa línea. Nos hace falta, pues, examinar los detalles uno tras otro, pacientemente, hasta que todo esté perfectamente claro, sin que quede ningún rincón oscuro donde pueda disimularse ningún error. (p. 33)

Al enfrentarse a la ejecución de un plan para la resolución de un problema, el lector se ve en la necesidad de recurrir y evocar sus conocimientos y recursos, así como la representación de sus ideas, de manera que no puede prescindirse de un lenguaje, por lo que será necesaria la comprensión y el manejo del registro pertinente al problema. Para García (2012), se trata del manejo adecuado de los conocimientos, buscando alejar al estudiante de un proceso mecanizado.

Se ha confundido el modelo de competencias y se ha establecido como si fuera moda el saber hacer, despreciando el saber conceptos (conocimientos), con sus correspondientes operaciones, es decir con definiciones y categorías, no se trata de mecanización; estos elementos conforman el sustento de la ciencia; desde luego esta aplicación de los conceptos debe darse de manera reflexiva, para ilustrar lo que aquí manifiesto. (García, 2012, p. 14)

Un plan que se ejecuta bajo la reflexión del proceso permitirá generar nuevos conocimientos independientemente de si genera o no una respuesta correcta a la situación problema planteada.

2. 6. 4 Examinar la solución

La visión retrospectiva que verifica la pertinencia de la posible solución encontrada es parte del proceso de adquisición de nuevos conocimientos, en la medida que el lector puede analizar su conclusión y categorizarla como correcta o incorrecta y justificar su aseveración. La fase de *examinar la solución* considera un proceso de validación del proceder ante la ejecución del plan propuesto para generar la solución a un problema, sin embargo, genera nuevos conocimientos y acompaña el planteamiento de un nuevo plan de ejecución ante un futuro problema. Polya (1989) expresa al respecto que: “la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas” (p. 35).

Boscán y Klever (2012) consideran que en el proceso de examinación del plan: “los estudiantes realizan un análisis y reflexión de todo el proceso resolutivo” (p. 14).

Dada la reflexión que busca validar el proceso realizado y considerando los nuevos conocimientos que se propician ante las diferentes situaciones planteadas, surge lo que para García (2012) es la asimilación, entendida esta como la adquisición de datos que se adhieren a la estructura cognitiva, para formar nuevos esquemas y que auxilie en el proceso de codificar nueva información.

Polya (1989), propone en su libro una serie de preguntas que debe realizarse el estudiante al enfrentar cada una de las cuatro fases; estas preguntas se presentan en el cuadro 3:

Cuadro 3: Preguntas propuestas por Polya para cada fase del método de Resolución de Problemas

Fase	Preguntas
<i>Comprender el Problema</i>	¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es suficiente o insuficiente la condición para determinar la incógnita? ¿Es la condición redundante o contradictoria?
<i>Concebir un plan</i>	¿Ha resuelto un problema semejante? ¿Ha visto el mismo problema planteado de distinta manera? ¿Conoce un problema relacionado a este? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? ¿Puede utilizar el resultado o el método de resolución de un problema en la resolución de otro? ¿Puede enunciar el problema de otra forma? ¿Puede imaginar un problema análogo más accesible? ¿Puede deducir algún elemento útil de los datos? ¿Hay otros datos apropiados para la resolución de la incógnita? ¿Ha empleado todos los datos y condición? ¿Consideró todas las nociones esenciales del problema?
<i>Ejecución del plan</i>	¿Comprende cada uno de los pasos del plan? ¿Puede ver claramente si el paso es correcto? ¿Puede demostrar que es correcto cada paso del plan?
<i>Visión Retrospectiva</i>	¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado de manera distinta? ¿Puede emplear el método en algún otro problema?

Nota. Elaboración propia basado en la metodología para la resolución de problemas de Polya (1989) en su libro ¿Cómo plantear y resolver problemas?

Lo expuesto anteriormente, relativo a la metodología de resolución de problemas planteada por Polya (1989), no solo dirige a una enseñanza o estrategia para la solución de problemas, sino que enmarca características que permiten evaluar procesos de aprendizaje relacionados con la resolución de estos, lo cual da cabida a la consideración de cada fase antes planteada como un espacio investigativo que puede particularizar los procesos planteados por los estudiantes y con esto favorecer a la construcción de situaciones problema que respondan pertinentemente al currículo estipulado y a las necesidades específicas de los estudiantes, considerando esto como un posible aporte a las decisiones didácticas en materia de construcción de situaciones para los estudiantes.

2. 7 Heurística moderna:

Para Polya (1989), la heurística moderna: “trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en el proceso” (p.102). La resolución de problemas implica la comprensión y el análisis del proceso planteado para encontrar una solución; a esto se refiere el concepto de *heurística moderna*; algunas heurísticas planteadas por Polya son las siguientes:

2. 7. 1 Variación del problema

Se considera el problema planteado buscando modificarlo, para establecer nuevos conocimientos. Polya (1989) contempla el ejercicio de modificar las hipótesis o datos de un problema como una oportunidad de aprendizaje que puede resultar más enriquecedora que la resolución de grandes cantidades de problemas algorítmicos.

Sin embargo, Polya (1989) señala que la variación de un problema puede resultar una tarea cuyo grado de dificultad es superior, de manera que se debe contar con las habilidades propias de esta tarea, además, considera que la

comprensión del problema y sus particularidades puede resultar determinante para variarlo, lo menciona de la siguiente manera: “por ello es conveniente, en principio, comprender el problema como un todo. Comprendiéndolo estaremos en mejor postura para juzgar qué puntos particulares son los más esenciales” (p.73).

Alfaro (2006) señala que esta heurística se trata de observar si el problema original puede variarse separando sus partes y cambiando alguna de las condiciones, evitando enfocarse directamente en un solo problema y observando si hay coincidencias con algún problema análogo, lo que para Polya podría resultar en una movilización y organización de conocimientos que puedan estar ocultos.

2. 7. 2 Generalización

Desde la perspectiva de Polya (1989), la generalización es considerada como el proceso mediante el cual los conocimientos aplicados en un caso en particular pueden ser útiles en la resolución de situaciones con mayor alcance; Polya (1989) indica: “pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado” (p.97).

Con esto considera que la generalización es una estrategia mediante la cual es posible determinar si el estudiante adquirió correctamente los conocimientos que brindaba la situación problema.

2. 7. 3 Particularización

Consiste en establecer ideas dadas para espacios generales, al estudio de un caso particular. Respecto a esto, Polya (1989) señala que: “consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño o incluso de un solo objeto” (p. 138). El autor afirma que la particularización puede resultar útil en la resolución de un problema, ya que es

posible que sea más fácil de resolver y luego enfocar la atención en el problema inicial.

2. 7. 4 Analogía

Polya (1989) plantea el concepto de analogía como una herramienta que evoca los conocimientos previos de quien ha considerado resolver un problema, con respecto a esto señala que: “la analogía es una especie de similitud. Objetos semejantes concuerdan unos con otros en algunos aspectos mientras que objetos análogos concuerdan en ciertas relaciones entre sus respectivos elementos” (p.57). Se considera la analogía como un espacio en el que se puede generar conocimiento a partir del que ya se tiene, para plantear nuevas estrategias de resolución.

Capítulo III: Marco metodológico

En este capítulo se exponen las condiciones metodológicas que respaldan el proceder investigativo bajo el enfoque cualitativo, el diseño de investigación, las técnicas e instrumentos utilizados para la recolección de datos y el proceso de análisis de la información.

3. 1 Tipo de investigación

3. 1. 1 Delimitación del estudio

Como se ha descrito en apartados anteriores, este estudio se desarrolló con el objetivo de contribuir a la calidad de la enseñanza de la matemática investigando sobre procesos que acontecen propiamente en el aula, considerando las políticas educativas establecidas por el Ministerio de Educación Pública.

Esta investigación tiene como propósito caracterizar el proceso de resolución de problemas de los estudiantes de undécimo nivel en el tema de funciones cuadráticas, en la habilidad de determinar puntos máximos o puntos mínimos presente en el Programa de Estudios de Matemática establecido por el MEP en el año 2012.

3. 1. 2 Enfoque de investigación

La presente investigación consistió en observar y caracterizar las diferentes interpretaciones y procesos que realiza el estudiante al enfrentarse a la resolución de un problema matemático, por tanto, se consideró realizar el estudio a través de un enfoque cualitativo. Según Blasco y Pérez (2007): “en la investigación cualitativa, se estudia la realidad en su contexto natural tal y como sucede, sacando e interpretando los fenómenos de acuerdo con las personas implicadas” (p.17).

Al respecto, Hernández, Fernández y Baptista (2010) mencionan que, dentro del enfoque de investigación cualitativo:

La acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien “circular” y no siempre la secuencia es la misma, varía de acuerdo con cada estudio en particular. (p.7)

Dadas las características del problema de investigación, se establece el enfoque cualitativo desde una postura descriptiva que permite y favorece el análisis de múltiples situaciones considerando las particularidades de la población en estudio. Relacionado con una investigación de alcance descriptivo, Hernández, Fernández y Baptista (2010) señalan que:

Con frecuencia, la meta del investigador consiste en describir fenómenos, situaciones, contextos y eventos; esto es, detallar cómo son y se manifiestan. Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Es decir, únicamente pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren, esto es, su objetivo no es indicar cómo se relacionan estas. (p. 80)

De acuerdo con lo anterior, el enfoque cualitativo desde una postura descriptiva permite el estudio de los fenómenos en el ambiente en que se desarrollan y se obtienen así resultados relacionados con las cualidades o características, así como los procesos y significados referidos al objeto de estudio.

3. 1. 3 Paradigma de investigación

Un paradigma de investigación debe entenderse como un conjunto de ideas compartidas por una comunidad en específico y que han sido utilizadas para la explicación de los sucesos desarrollados en distintos contextos. Rodríguez (2003) expone al respecto que:

... el concepto de paradigma científico ha admitido una multiplicidad de significados, pero en términos generales y bastante comunes, puede entenderse como un conjunto de actitudes y creencias, como una visión de mundo compartida por un grupo de investigadores y que implica específicamente una metodología determinada en la práctica de la investigación. (p.23)

Por otro lado, similarmente, Arcila, Buriticá, Castrillón y Ramírez (2004) exponen que: "... un paradigma es un esquema normal admitido y consensuado por una comunidad para enmarcar, encarar, leer, explicar o ver un fenómeno" (p.18).

Para describir y comprender una situación, se requiere una lectura del fenómeno que considere las particularidades específicas del entorno; respecto a lo anterior, Pérez (citado por Ricoy, 2006) señala que un: "... paradigma intenta comprender la realidad y considera que el conocimiento no es neutral, sino que es relativo a los significados de los sujetos y tiene pleno sentido en la cultura y en las particularidades del fenómeno educativo" (p.17).

En particular, Ruedas et al. (citados por Martínez, 2013) detallan que en el paradigma interpretativo: "... se da un vuelco a la estrategia para tratar de conocer los hechos, los procesos y los fenómenos en general, sin limitarlos sólo a la cuantificación de algunos de sus elementos" (p.5).

Por otra parte, Pérez (citado por Ricoy, 2006) destaca que el paradigma interpretativo se caracteriza por describir de manera rigurosa y contextualizada las situaciones relacionadas con el objeto de estudio; lo que permite la intersubjetividad en la captación de la realidad.

Considerando lo expuesto anteriormente, se establece la presente investigación dentro del paradigma interpretativo, ya que este permite un análisis del fenómeno en estudio desde una perspectiva general, lo que favorece comprender la situación de manera integral.

3. 1. 4 Diseño de investigación

El diseño de investigación utilizado responde al estudio de caso, que se caracteriza por reflejar la información en forma descriptiva con el objetivo de documentar una experiencia o evento describiendo en profundidad la perspectiva de quienes lo vivieron.

Particularmente, los estudios de caso cualitativos se definen como:

Los estudios de caso de corte cualitativo son diseños en los cuales el investigador explora un sistema especificado (un caso) o múltiples sistemas definidos (casos) a través de la recopilación detallada de datos y en profundidad, utilizando múltiples fuentes de información (por ejemplo, observaciones, entrevistas, material audiovisual y documentos e informes) y reporta una descripción de los casos y las categorías vinculadas al planteamiento que emergieron al analizarlos. (Hernández, Fernández y Baptista, 2016, p.18)

De acuerdo con Cebreiro y Fernández (citados por Álvarez y Maroto, 2012), estos estudios son útiles: “cuando el objeto que se quiere indagar está difuso, es

complejo, escurridizo o controvertido. Es decir, para analizar aquellos problemas o situaciones que presentan múltiples variables y que están estrechamente vinculados al contexto en el que se desarrollan” (párr.21).

Considerando las características propias de un estudio de caso, se utilizó este para el análisis del proceso de resolución propuesto por los estudiantes de undécimo nivel, ante la tarea de resolver un problema relacionado con función cuadrática en las habilidades específicas de determinar puntos máximos y puntos mínimos, con la intención de determinar la fase de resolución de problemas en la que se encuentran los estudiantes de acuerdo con la metodología heurística de Polya y con esto describir los planteamientos de resolución de problemas establecidos por los estudiantes.

3. 1. 5 Alcance temporal

La recolección de datos correspondiente a esta investigación se realizó durante el primer trimestre del ciclo escolar 2019, en el Liceo Roberto Brenes Mesén, ubicado en Hatillo 2, San José, Costa Rica, corresponde al Circuito 05 de la Sede Regional de Educación San José Central.

3. 1. 6 Población en estudio

Con la intención de brindar un apoyo al proceso de los estudiantes, se decide trabajar en el Liceo Roberto Brenes Mesén, ubicado en Hatillo 2, San José, Costa Rica, correspondiente al Circuito 05 de la Sede Regional de Educación San José Central, institución pública bajo la modalidad diurna y académica; de manera que se puedan describir los procesos de resolución de problemas que establecen los estudiantes en el tema de función cuadrática en la habilidad de determinar puntos

máximos y puntos mínimos, la población en estudio comprendió 22 estudiantes regulares de la sección 11-1 de los cuales 13 son mujeres y 9 son hombres.

La investigación se desarrolló con estudiantes de undécimo nivel a pesar de que el Programa de Estudios de Matemática señala que resolver problemas relacionados con la habilidad de determinar puntos máximos o puntos mínimos de la función cuadrática se establece para décimo nivel; esto debido a que el período de manifestaciones desarrollado durante el año 2018 impidió que los estudiantes de décimo nivel en esta institución recibieran este tema, razón por la cual se imparte en undécimo nivel durante el primer trimestre del ciclo escolar 2019.

3. 2 Procedimiento de la investigación

Para analizar el proceso de resolución de problemas modelados mediante funciones cuadráticas, en las habilidades específicas de determinar los puntos máximos o mínimos, se consideraron diversas etapas: la delimitación del problema y el planteamiento de los objetivos de investigación, la selección de los referentes teóricos, la selección de los instrumentos y técnicas para la recolección de datos, el proceso de recolección, el de análisis de los datos recolectados y, por último, la etapa de conclusiones y recomendaciones.

3. 2. 1 I Etapa: Delimitación del problema y planteamiento de objetivos de investigación.

En la primera etapa de investigación, con base en la experiencia de los investigadores, se identificó una dificultad en los estudiantes para resolver problemas relacionados con el tema de función cuadrática en la habilidad específica de determinar puntos máximos y puntos mínimos. Por lo que se realizó una revisión bibliográfica relativa a los procesos de enseñanza y aprendizaje en el contenido

específico de resolución de problemas relacionados con función cuadrática, lo que permitió establecer y delimitar el problema de investigación, con esto se plantearon los objetivos de investigación por alcanzar.

3. 2. 2 II Etapa: Referente teórico

Con los objetivos de investigación propuestos y el problema delimitado a las habilidades específicas con respecto a la temática de resolución de problemas modelados mediante funciones cuadráticas, se consideró el referente teórico que enmarcaría el proceder de la investigación. Este referente se establece alrededor de la metodología heurística de Polya y los aportes propuestos por Shoenfeld, que permiten la evaluación y la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos de manera integral.

3. 2. 3 III Etapa: Selección de instrumentos y técnicas de recolección de datos.

En lo que respecta a la investigación planteada, se considera la definición de técnica basada en la perspectiva de Arias (2012), quien señala que la técnica de recolección de datos se define como: “el procedimiento o forma particular de obtener datos o información” (p.67). En cuanto al instrumento de recolección de datos, este mismo autor lo define como: “cualquier recurso, dispositivo o formato (en papel o digital), que se utiliza para obtener, registrar o almacenar información” (p.68).

El proceso de recolección de datos se realizó mediante cuatro sesiones: *Diagnóstico, Recursos, Taller de resolución de problemas y Evaluación individual*. Durante las sesiones de *Diagnóstico y Evaluación*, los estudiantes trabajaron con instrumentos impresos en papel considerando la técnica de encuesta autoadministrada; definida por Arias (2012) como: “una técnica que pretende

obtener información que suministra un grupo o muestra de sujetos acerca de sí mismos, o en relación con un tema en particular” (p.72).

Esta técnica fue abordada mediante el instrumento de cuestionario autoadministrado, definido por Arias (2012) como: “la modalidad de encuesta que se realiza de forma escrita mediante un instrumento o formato en papel contentivo de una serie de preguntas. Se le denomina cuestionario autoadministrado porque debe ser llenado por el encuestado, sin intervención del encuestador” (p.75).

Además, en cada una de las cuatro sesiones desarrolladas se implementó la técnica de observación, definida por Arias (2012) como: “una técnica que consiste en visualizar, captar mediante la vista, en forma sistemática, cualquier hecho, fenómeno o situación que se produzca en la naturaleza o en la sociedad, en función de unos objetivos de investigación preestablecidos” (p.69).

El registro de la información obtenida a través de las distintas observaciones no estructuradas se realizó mediante la implementación de un cuaderno de notas; en el cual se registró el comportamiento y las preguntas realizadas por los estudiantes durante el desarrollo de cada sesión.

3. 2. 4 IV Etapa: Recolección de datos

Como se mencionó anteriormente, el proceso de recolección de datos se realizó mediante la aplicación de cuatro sesiones: *Diagnóstico, Recursos, Taller de resolución de problemas y Evaluación*, asociadas a los contenidos de la función cuadrática en las habilidades específicas de determinar puntos máximos y mínimos.

3. 2. 4. 1 Primera sesión: Diagnóstico

En el primer encuentro se aplicó un instrumento de evaluación individual (Ver Anexo I), donde se presentó un problema creado con base en un ítem de la segunda prueba de bachillerato por madurez 2016 relacionado con función

cuadrática, en el que el estudiante debía encontrar el punto máximo que alcanza una piedra al ser lanzada al aire; con este instrumento se pretendió identificar los principales conocimientos y recursos que poseen los estudiantes en relación con los contenidos y habilidades de resolución de problemas. Considerando esto se definió el proceder de la sesión de recursos y taller de resolución de problemas; para esta sesión se trabaja durante una lección correspondiente a 40 minutos.

3. 2. 4. 2 Segunda sesión: Recursos

Considerando el análisis de los resultados obtenidos en el diagnóstico, se construyó una secuencia didáctica sobre los conocimientos propios de la teoría de funciones (Ver Anexo II), se brindó al estudiante una guía de trabajo, este material está compuesto por seis ítems que establecen el análisis y la gráfica de una función cuadrática. El desarrollo de esta sesión estuvo a cargo de los investigadores, quienes impartieron una lección que estableció un precedente de conocimientos para la ejecución del taller de resolución de problemas. Para esta sesión se trabajó durante dos lecciones consecutivas de 40 minutos cada una.

3. 2. 4. 3 Tercer sesión: Taller de resolución de problemas

Para Ander-Egg (1991), el taller se define como:

Un lugar donde se trabaja, se elabora y se transforma algo para ser utilizado. Aplicado a la pedagogía el alcance es el mismo: se trata de una forma de enseñar y, sobre todo de aprender, mediante la realización de “algo”, que se lleva a cabo conjuntamente. (p.11)

De acuerdo con Ander-Egg (1991), sobre la conceptualización de taller y las dos sesiones anteriores, se diseñó un taller de resolución de problemas (Ver Anexo III), en el cual se realizó un primer acercamiento a los conocimientos necesarios

para determinar la solución a diferentes problemas asociados a los contenidos relacionados con función cuadrática en la habilidad de determinar puntos máximos o puntos mínimos, esto con el fin de favorecer el pensamiento matemático del estudiante de último nivel de secundaria. Este taller consistió en resolver dos problemas para la habilidad de determinar un punto máximo y dos problemas para la habilidad de determinar un punto mínimo.

Durante el taller se establecieron espacios para la resolución de problemas, guiados por uno de los investigadores, que favorecieron el trabajo grupal e individual según las necesidades de los participantes. Para el desarrollo del taller se trabajó durante dos lecciones consecutivas de 40 minutos cada una, para las sesiones II y III se presenta un planeamiento que detalla contenidos, habilidades, estrategias metodológicas y tiempos destinados a la implementación de cada labor establecida (Ver Anexo V).

3. 2. 4. 4 Cuarta sesión: Evaluación individual

En la última sesión cada estudiante realizó una evaluación individual (Ver Anexo IV), en la cual se enfrentó a la tarea de resolver dos problemas relacionados con función cuadrática en la habilidad de determinar puntos máximos y puntos mínimos. El primer problema se modificó considerando un problema existente en la plataforma digital llamada Brainly y el segundo problema se adaptó con base en un ítem de función cuadrática aplicado durante la prueba de Bachillerato a tu medida 2018, para analizar las habilidades de resolución de problemas que el estudiante adquirió mediante la participación de las sesiones de resolución de problemas. Esta evaluación se contrasta con la prueba de diagnóstico aplicada en la primera sesión. Se trabajó durante dos lecciones consecutivas de 40 minutos cada una.

3. 2. 5 V Etapa: Análisis de la información

El análisis de la información obtenida mediante la aplicación de los cuatro instrumentos se realizó considerando las cuatro fases propuestas por Polya (1989) en su metodología heurística de resolución de problemas; se consideró cada problema de manera individual, para identificar las habilidades y deficiencias del proceso de resolución que plantearon los estudiantes.

3. 2. 5. 1 Categorías de análisis

En este apartado, se describen las categorías que permiten establecer el análisis de la información obtenida a partir de la aplicación de los cuatro instrumentos.

Para Hernández, Fernández y Baptista (2014), las categorías de análisis se plantean, dentro de una investigación cualitativa, como las conceptualizaciones que permiten organizar los resultados relacionados con el fenómeno en estudio.

Se establecen como categorías de análisis las cuatro fases propuestas por la metodología heurística de resolución de problemas planteada por George Polya: *comprender un problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución*. Se realizó la evaluación del proceso de resolución propuesta por los estudiantes de undécimo nivel, ante la tarea de resolver problemas modelados mediante la función cuadrática.

A continuación, se describen las categorías de análisis, con sus respectivas definiciones conceptual y operacional, basadas en las habilidades establecidas en la metodología para la resolución de problemas de Polya (1989).

Cuadro 4: Categorías de Análisis.

Categoría de Análisis	Definición Conceptual	Definición Operacional
Comprender un problema	En esta fase el estudiante debe determinar, del enunciado, los datos que proporciona, lo que preguntan (incógnita), es decir, a lo que se le va a dar respuesta y establecer las relaciones que hay entre los datos y la incógnita. (Boscán y Klever, 2012)	1 Identifica los datos que ofrece el problema 2 Identifica la incógnita del problema
Concebir un plan	Esta fase busca que los estudiantes determinen que pasos van a seguir para llegar a la respuesta de la pregunta que plantea el problema. (Boscán y Klever, 2012)	3 Se ha relacionado con un problema semejante. 4 Identifica algún conocimiento previo como útil (teoremas, algoritmos, postulados o procesos). 5 Enuncia el problema desde otra perspectiva con el fin de facilitar su resolución, en caso de ser necesario. 6 Concluye datos a partir de los que plantea el problema original. 7 Construye alguna representación (Gráfica, tabular, algebraica) para facilitar la resolución del problema.
Ejecutar el Plan	Es aquí donde los estudiantes aplican las operaciones pertinentes estipuladas en el plan y el docente es un guía que está pendiente y direcciona el trabajo. (Boscán y Klever, 2012)	8 Comprueba la pertinencia de cada paso. 9 Identifica si cada paso es correcto. 10 Justifica el proceder de su plan de resolución.
Examinar la solución	Los estudiantes realizan un análisis y reflexión de todo el proceso resolutivo. (Boscán y Klever, 2012)	11 Verifica el resultado. 12 Verifica el razonamiento. 13 Puede utilizar el resultado en otro problema similar.

Nota. Elaboración propia basada en la metodología para la resolución de problemas de Polya (1989) en su libro *¿Cómo plantear y resolver problemas?*

Considerando la información del cuadro 4, en cuanto a las categorías de análisis y las definiciones operacionales, se establecen los indicadores para realizar el análisis de la información obtenida, lo cual se presenta en el cuadro 5:

Cuadro 5: Clasificación de los indicadores según la categoría de análisis

Categoría de Análisis	Definición Operacional	Indicadores
Comprender un problema	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identifica los datos que ofrece el problema 2. Identifica la incógnita del problema 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identifica el criterio presentado en el problema como el correspondiente a una función cuadrática 2. Identifica la variable dependiente e independiente y lo que representan en el contexto del problema
Concebir un plan	<ol style="list-style-type: none"> 3. Se ha relacionado con un problema semejante. 4. Identifica algún conocimiento previo como útil (teoremas, algoritmos, postulados o procesos). 5. Enuncia el problema desde otra perspectiva con el fin de facilitar su resolución, en caso de ser necesario. 6. Concluye datos a partir de los que plantea el problema original. 7. Construye alguna representación (Gráfica, tabular, algebraica) para facilitar la resolución del problema. 	<ol style="list-style-type: none"> 3. Utiliza una representación tabular como proceso para obtener una respuesta 4. Utiliza una representación tabular de manera correcta para obtener una respuesta 5. Utiliza una representación gráfica como proceso para obtener la respuesta 6. Utiliza una representación gráfica de manera correcta para obtener una respuesta 7. Realiza dibujos no formales para encontrar una respuesta 8. Utiliza otro método distinto a la fórmula del vértice pertinente para la solución del problema 9. Utiliza recursos relacionados con la teoría de funciones no pertinentes para la solución del problema 10. Utiliza recursos no relacionados con la teoría de funciones 11. Utiliza la fórmula del vértice como proceso para obtener una respuesta
Ejecutar el Plan	<ol style="list-style-type: none"> 8. Comprueba la pertinencia de cada paso. 9. Identifica si cada paso es correcto. 10. Justifica el proceder de su plan de resolución. 	<ol style="list-style-type: none"> 12. Determina correctamente la coordenada en el eje x del vértice 13. Determina correctamente la coordenada en el eje y del vértice 14. Utiliza la fórmula del vértice de manera correcta para obtener una respuesta 15. Determina el vértice como un par ordenado 16. Identifica el tipo de concavidad de la función
Examinar la solución	<ol style="list-style-type: none"> 11. Verifica el resultado. 12. Verifica el razonamiento. 13. Puede utilizar el resultado en otro problema similar. 	<ol style="list-style-type: none"> 17. Brinda una respuesta en prosa a la pregunta del problema 18. Realiza una revisión de la coherencia y pertinencia de la respuesta obtenida

Nota. Elaboración propia basada en la metodología de Polya (1989) para la resolución de problemas en su libro *¿Cómo plantear y resolver problemas?* y en el Programa de Estudios de Matemática MEP (2012).

3. 2. 6 VI Etapa: Conclusiones y recomendaciones

Para establecer las conclusiones obtenidas, posterior al análisis de la información, se consideraron los elementos del pensamiento matemático explícitos en el proceso de resolución de problemas de los estudiantes en el tema de función cuadrática para las habilidades de determinar puntos máximos o puntos mínimos. Además, se identificaron los principales aciertos y deficiencias que se reflejan en los instrumentos aplicados; en relación con las consideraciones finales, se destacó la influencia de la implementación de la metodología de *taller* como herramienta didáctica en el proceso de enseñanza y aprendizaje durante las sesiones.

Para brindar las recomendaciones, se consideraron los principales aciertos y desaciertos que se identifican en el proceso de resolución de problemas planteado por los estudiantes, así como las características metodológicas del proceso de aplicación de los instrumentos y su respectiva evaluación.

Capítulo IV: Análisis de resultados

A continuación, se describen las cuatro sesiones: *Diagnóstico, Recursos, Taller de resolución de problemas y Evaluación individual*, correspondientes a la recolección de datos para el análisis del proceso de resolución de problemas para el tema de funciones cuadráticas, en las habilidades específicas de determinar puntos máximos o puntos mínimos. Los instrumentos fueron aplicados en la sección 11-1 integrada por 22 estudiantes de undécimo nivel del Liceo Roberto Brenes Mesén de la Dirección Regional de Educación San José Central.

4. 1. Primera sesión: Diagnóstico

La primera sesión de trabajo individual corresponde a la aplicación de un diagnóstico para identificar las habilidades de los estudiantes en materia de resolución de problemas. Esta sesión se desarrolló con la participación de 19 de los 22 estudiantes de undécimo nivel en la sección 11–1 del Liceo Roberto Brenes Mesén de la Dirección Regional de Educación San José Central.

La evaluación diagnóstica contiene un único ítem de resolución de problemas relacionado con los contenidos de funciones cuadráticas, específicamente en la habilidad de determinar el punto máximo de una función cuadrática. Los estudiantes se enfrentaron a la tarea de resolver un problema en el que se modela la altura que alcanza una piedra en función del tiempo transcurrido desde su lanzamiento (Ver Anexo I).

Los estudiantes que participaron de la aplicación de este instrumento conversaban mucho a pesar de la presencia de su docente a cargo la cuál constantemente intervino para mantener la disciplina y el orden de su clase, desde la entrega del instrumento los participantes manifestaban cierto grado de frustración

ya que mantenían su mirada hacia el frente sin realizar la tarea que se les asignó y continuamente consultaban si podían dejar el instrumento en blanco; al finalizar la sesión los estudiantes manifestaron a los investigadores una preocupación por la cercanía de la aplicación de la prueba de bachillerato e indicaron estar conscientes de que su preparación no era la apropiada para hacer frente a estas pruebas.

Con respecto a la categoría de análisis denominada *comprender un problema* y sus indicadores, los estudiantes identifican que el criterio que brinda el problema corresponde a una función cuadrática, esto se determina a partir de los instrumentos, ya que 14 estudiantes señalan dentro de sus anotaciones la forma $ax^2 + bx + c$, calculan el discriminante, resaltan los parámetros de a , b y c o realizan una gráfica donde muestran la forma parabólica correspondiente a una función cuadrática. Además, cinco estudiantes señalaron de manera explícita las variables dependiente e independiente del criterio de la función, relacionando los datos del problema con cada una de ellas de manera correcta.

Por lo tanto, los estudiantes identifican el contexto del problema dentro de la teoría relacionada con función cuadrática, sin embargo, no relacionan correctamente las variables presentes en el problema, de manera que no alcanzan todos los lineamientos para afirmar que lo comprenden. A continuación, se muestra una imagen donde se ilustra el establecimiento correcto de las variables dependiente e independiente y lo que representan en el contexto del problema:

Ilustración 1. Identifica explícitamente las variables en el problema

Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra se modela mediante el criterio de la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ siendo t es el tiempo en segundos, y $f(t)$ la altura en metros. ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en alcanzar su altura máxima?, ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

$ax^2 + bx + c$

$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\frac{-\Delta}{4a}$

$\frac{-2500}{4(-5)} = 125$

$\Delta = 50^2 - 4(-5)(0) =$

$\Delta = 2500$

$V_y = 125$

$125 = -5t^2 + 50t$

$0 = -5t^2 + 50t - 125 = 5$

Respuestas

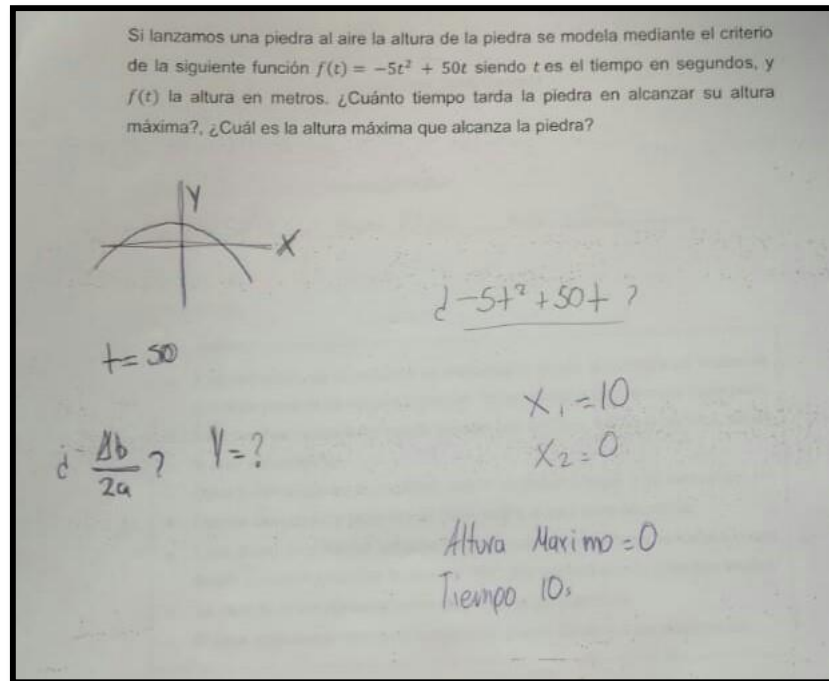
- * El Tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima es de 5.
- * La altura máxima que alcanza la piedra es de 125.

Nota. Resolución del problema durante la primera sesión.

De acuerdo con la categoría de análisis denominada *concebir un plan* y respecto a las distintas formas de representación utilizadas, ningún estudiante utilizó la notación tabular al realizar cálculos para obtener la respuesta correcta; ningún estudiante intentó realizar una ilustración para representar la situación que el problema le presentaba; sin embargo, 10 estudiantes realizaron en sus anotaciones un intento de graficar la función, pero muestran errores de interpretación de los parámetros del criterio de la función cuadrática, ya que no consideraron el valor del parámetro c , por lo que las gráficas realizadas no

corresponden a la situación planteada, a continuación se presenta una imagen que ilustra la situación descrita anteriormente en relación con la gráfica:

Ilustración 2. Gráfica del problema



Nota. Gráfica de función cuadrática realizada para ilustrar el problema planteado.

En cuanto a los distintos recursos, 14 estudiantes utilizaron conocimientos relacionados con la teoría de funciones que no eran pertinentes para la solución del problema propuesto; entre estos recursos se realizó el cálculo de imágenes sin sentido y el cálculo de las intersecciones con el eje x a través del uso de la calculadora, esto como proceso para obtener una respuesta.

En relación con la categoría de análisis de *ejecutar un plan* con respecto al uso correcto de la fórmula del vértice, en el instrumento se observó que seis estudiantes utilizaron la fórmula del vértice como un medio para resolver el problema

propuesto. Cabe mencionar que, en algunos casos, calcularon correctamente la coordenada en x del vértice, pero no la coordenada en y , razón por la cual solo dos estudiantes utilizaron de manera correcta la fórmula del vértice para solucionar el problema.

Dos estudiantes utilizaron un método distinto a la fórmula del vértice para obtener una respuesta al problema, ya que calcularon la coordenada en y del vértice utilizando la fórmula $\frac{-\Delta}{4a}$, pero luego hicieron uso del criterio igualando el resultado obtenido para calcular la coordenada x del vértice a través del uso de la calculadora; a continuación se muestra una imagen donde se evidencia un procedimiento de resolución del problema a través del uso de esta estrategia algebraica:

Ilustración 3. Cálculo de la preimagen

Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra se modela mediante el criterio de la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ siendo t es el tiempo en segundos, y $f(t)$ la altura en metros. ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

$$V_y = \frac{-\Delta}{4 \cdot a}$$

$$V_y = \frac{-2500}{4 \cdot (-5)}$$

$$V_y = 125 \text{ m.}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (50)^2 - 4(-5)(0)$$

$$\Delta = 2500$$

$$f(t) = -5t^2 + 50t$$

$$125 = -5t^2 + 50t$$

$$t = 5 \text{ s.}$$

R/ El tiempo que tardó la piedra en alcanzar su altura máxima fue de 5s, y la altura máxima fue de 125 m.

Nota. Se ilustra un proceso en el que el estudiante decide obtener una preimagen, para determinar las coordenadas del vértice.

Los estudiantes no alcanzan todos los procesos señalados por Polya (1989) para la ejecución de un plan para la resolución de un problema, ya que las estrategias propuestas se limitaron al uso de representaciones algebraicas de la información. Además, los estudiantes utilizaron conocimientos de la teoría de funciones que no eran pertinentes para el problema planteado, no cuentan con la experiencia previa que, según Polya (1989), es necesaria para el desarrollo de un plan de resolución de problemas; los resultados obtenidos indican que los estudiantes no establecen relaciones entre los datos del problema, la incógnita y las herramientas matemáticas de las que disponen, aspectos que, según Bahamonde y Vicuña (2011), son necesarios para la construcción de un esquema de resolución de problemas.

De acuerdo con la categoría de análisis denominada *examinar la solución* y el indicador correspondiente a la redacción de una respuesta, 12 estudiantes plantearon una solución al problema propuesto, sin embargo, solo dos de estas respuestas son correctas. Los dos estudiantes que plantean su respuesta de manera correcta son los mismos que realizan la verificación de la coherencia y pertinencia de su respuesta, esto se evidencia en los instrumentos, ya que 10 participantes indicaron respuestas relacionadas con situaciones como el tiempo y altura con signo negativo, la rapidez de la piedra o respuestas con magnitudes desproporcionadas en tiempo y altura; a continuación se muestra una imagen donde se puede apreciar una respuesta al problema planteado que no presenta una evaluación del proceder de resolución:

Ilustración 4. Examinar la solución

Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra se modela mediante el criterio de la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ siendo t es el tiempo en segundos, y $f(t)$ la altura en metros. ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en alcanzar su altura máxima?, ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

$F(x) = -5t^2 + 50t$

$F(x) = t^2 + 50t - 5 = \frac{b^2}{2a} = \frac{50^2}{2(-5)} = 1250 \times -\frac{1250}{-30}$

$(x) = 1250$
 $(y) = -30$

Formula de $ax^2 + bx + c$
O, C

$\Delta = -b - 4ac$
 $\Delta = -50 - 4(-5)(-5)$
 $\Delta = -30$

$1250 \div -30 = -41,6$

R/ El tiempo es de $-41,6$
La altura es de $0, -5$

Nota. Proceso de resolución planteado, en el cual no se examinó la pertinencia de la solución obtenida.

Los resultados relacionados con las respuestas obtenidas en la evaluación diagnóstica reflejaron que los estudiantes no alcanzaron todos los procesos vinculados a la fase de evaluación retrospectiva planteada por Polya (1989); considerando la tabla de indicadores, los estudiantes no verificaron su razonamiento ni justificaron la pertinencia de las respuestas, por lo que no examinaron la solución que establecieron ante el problema.

A continuación, se describen las dos sesiones de trabajo grupal realizadas con estudiantes de undécimo nivel de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén de la Dirección Regional de Educación San José Central.

Las sesiones de trabajo grupal denominadas *Recursos* y *Taller de resolución de problemas* corresponden a la segunda y tercera sesión respectivamente y se realizan posterior a la aplicación de la sesión de *diagnóstico*, con el objetivo de

reconsiderar los conocimientos que poseen los estudiantes con respecto a la habilidad de determinar los puntos máximos y puntos mínimos en una función cuadrática.

4. 2 Segunda sesión: Recursos

Durante la segunda sesión se contó con la participación de 18 de los 22 estudiantes, ya que cuatro se encontraban ausentes, se consideraron los contenidos relacionados con funciones cuadráticas, específicamente los que corresponden a las habilidades de determinar puntos máximos y puntos mínimos. En relación con lo que Shoenfeld (1985) denomina como *Recursos*, se plantea una lección en la cual los estudiantes, con ayuda del investigador, reconsideraron los conceptos relacionados con la teoría de funciones, tales como dominio, ámbito, codominio, imagen, preimagen, par ordenado, criterio de la función, variable dependiente e independiente y, específicamente, para la función cuadrática, se estudiaron los conceptos de criterio de la función cuadrática, concavidad, punto máximo y punto mínimo, vértice, eje de simetría, representación tabular y su representación gráfica.

De acuerdo con Shoenfeld (1985), para identificar el *inventario de recursos* de los participantes, se desarrolló la sesión mediante preguntas planteadas por el investigador que interviene como docente. La participación de los estudiantes al iniciar la segunda sesión se caracterizó por dar respuestas a las interrogantes expuestas por el docente, con la finalidad de escribir la respuesta correcta en el instrumento (Ver Anexo II); con el avance de la sesión, los estudiantes generaron diversas preguntas relacionadas con los contenidos estudiados, de manera que se estableció el espacio para corregir las concepciones erróneas o incompletas denominadas *recursos defectuosos*.

Considerando una función cuadrática, dado su criterio, su dominio y su ámbito, se realizó el cálculo de algunas imágenes, su representación tabular y su representación gráfica, para esto el docente expuso cómo representar correctamente pares ordenados en el plano cartesiano; al realizar la gráfica no se presentaron grandes limitaciones y utilizando la gráfica se realizó el análisis y la explicación mediante preguntas y respuestas de los conceptos de concavidad, punto mínimo, punto máximo, eje de simetría y vértice.

Además, considerando la información registrada mediante la observación, durante la sesión los estudiantes enfrentaron dificultades relacionadas con el uso de la calculadora para el cálculo del discriminante y eje de simetría, al considerar que la imagen del valor del eje de simetría corresponde a la coordenada en y del vértice; por otra parte, los estudiantes muestran seguridad al utilizar la fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$ sin considerar que corresponde a un par ordenado.

Estas dificultades se consideran *circunstancias estereotípicas* que, para Shoenfeld (1985), corresponden a situaciones problema que pueden evocar en un estudiante un procedimiento de resolución casi automático, pero que implica una serie de dificultades, ya que son conocimientos de los cuales el estudiante se siente seguro, sin embargo, pueden resultar incorrectos o incompletos. Al finalizar la lección, los estudiantes mostraron interés en dudas particulares relacionando el concepto de vértice con problemas antes vistos durante las lecciones regulares con su profesora en la institución educativa.

4. 3 Tercera sesión: Taller de resolución de problemas

En la tercera sesión participan 20 de 22 estudiantes; se utilizaron los contenidos desarrollados en la lección anterior para la resolución de problemas. El

primer acercamiento a la resolución de problemas consistió en enfrentarse nuevamente a la situación planteada en el diagnóstico de manera guiada considerando la metodología de resolución de problemas planteada por Polya (1989), con esto se establecieron tres problemas adicionales (Ver Anexo III) para el trabajo en grupo de los estudiantes; de manera que los tres investigadores brindaron el apoyo necesario para guiar a los estudiantes sobre la resolución de las situaciones planteadas.

4. 3. 1 Problema N°1

De acuerdo con Polya (1989), la labor docente consiste en establecer espacios adecuados para la resolución de problemas que permitan al estudiante el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica, de manera que la resolución del primer problema se realizó con ayuda del investigador que impartió la lección anterior, considerando las cuatro fases: *comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y verificar la solución*; se resolvió el problema planteado en el diagnóstico (ver Anexo I) y se generaron espacios de preguntas y respuestas para la participación de los estudiantes.

Con el acompañamiento del investigador se realizó la lectura del texto, se identificó la variable dependiente e independiente según correspondía, se consideraron los datos que brinda el texto y la pregunta que plantea el problema, además, se describieron las principales razones por las cuales la tarea por realizar corresponde al cálculo del vértice; seguidamente, se realizaron los cálculos correspondientes al eje de simetría y a la coordenada en y del vértice; esta última se calculó de las dos formas trabajadas en la sesión anterior que corresponden al uso de la fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$ y al cálculo de la imagen del valor que representa el eje de simetría. Se trazó la gráfica correspondiente y una representación tabular, por último, se escribió la respuesta considerando la pertinencia ante la interrogante del problema.

A continuación, se describen los tres problemas establecidos para el trabajo grupal, en el cual cada participante cuenta con un instrumento individual.

4. 3. 2 Problema N°2

En la resolución del segundo problema participaron 20 de los 22 estudiantes, en relación con la categoría de análisis *comprender el problema* y sus indicadores, 10 participantes identificaron de manera explícita y correcta las variables por trabajar y 20 identificaron que el criterio presentado en el problema corresponde a una función cuadrática. A continuación, se muestra una imagen en la que un estudiante identifica de manera correcta las variables que brinda el problema:

Ilustración 5. Identifica explícitamente las variables del problema

2. El costo en millones de colones para producir un cierto artículo viene dado por la fórmula $c(u) = 36 - 18u + 3u^2$, donde "u" es el número de unidades de dicho artículo. ¿Cuántas unidades de este artículo habría que producir para que el costo sea mínimo?, ¿Cuál es el costo mínimo?

$c(u) = 36 - 18u + 3u^2$ $c(u) = \text{costo}$
 $u = \text{unidades}$

$a = 3$
 $b = -18$
 $c = 36$

vértice

$$\frac{-b}{2a} \quad \frac{-c}{4a}$$
$$\frac{-(-18)}{2 \cdot 3} = 3 \text{ unidades}$$

R/ habría que producir 3 unidades para que el costo sea mínimo

¿Cuál es el costo mínimo?

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$(18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 36 = -108$$
$$\frac{-108}{4 \cdot a} = 9$$

R/ el costo mínimo es 9

Nota. Proceso de resolución planteado para la resolución del problema 2 durante el taller de resolución de problemas.

En relación con la categoría de análisis *concebir un plan* y los indicadores relacionados con la representación gráfica, solamente cuatro participantes trazaron la gráfica de manera correcta, de los 13 que lo intentaron; por otra parte, la representación tabular no fue utilizada por ningún participante.

De acuerdo con la categoría de análisis *ejecutar el plan*, los 20 participantes utilizaron los conceptos y fórmulas relacionados con el cálculo del punto mínimo de forma correcta, se presentó una preferencia por parte de 17 participantes por el uso de la fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$; tres estudiantes eligieron la evaluación del valor del eje de simetría en el criterio de la función para obtener su imagen y solamente cuatro participantes expresaron el vértice como un par ordenado.

Al considerar la categoría de análisis *examinar la solución*, de las 20 respuestas brindadas por los estudiantes a las preguntas planteadas en el problema, 16 se establecieron de manera correcta; el error cometido por los cuatro participantes restantes consistió en confundir la interpretación de las variables dentro del contexto del problema, considerando u como el costo de producir $c(u)$ unidades; cuando en realidad el problema lo plantea de manera contraria.

Tomando en cuenta los indicadores relacionados con las categorías de análisis se identifica que 16 participantes alcanzaron las fases del proceso de resolución de problemas propuesto por Polya (1989) ya que a pesar de que no todos escriben de manera explícita las variables que establece el problema, las utilizan de manera correcta al brindar la respuesta y la interpretación de esta dentro del contexto del problema.

4. 3. 3 Problema N°3

De acuerdo con la categoría de análisis *comprender el problema*, para la resolución del tercer problema, los 20 estudiantes trabajaron de manera grupal, de los cuales, 8 identificaron de forma explícita y correcta las variables por trabajar, además, 20 identificaron que el criterio presentado en el problema corresponde a una función cuadrática.

Al considerar la categoría de análisis *concebir un plan*, se identifica que, de los cinco participantes que trabajaron con la representación gráfica, solamente uno la trazó de manera correcta. Por otra parte, la representación tabular no fue realizada por ningún estudiante.

Con respecto a la categoría de análisis *ejecutar un plan*, 19 estudiantes utilizaron los conceptos y fórmulas relacionados con el cálculo del punto mínimo de forma correcta, en relación con el uso de la fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$, 16 participantes la consideraron como mejor opción y cuatro eligieron la evaluación del valor del eje de simetría para obtener su imagen; solamente dos participantes escribieron explícitamente el vértice como un par ordenado. A continuación, se muestra un proceso de resolución del problema, en el cual un estudiante escribe el vértice como un par ordenado:

Ilustración 6. Escribir el vértice como par ordenado

3. El precio P en miles de colones para producir "x" unidades de pantalones está dado por $p(x) = x^2 - 410x + 42390$ ¿Cuántos pantalones se deben producir para alcanzar un precio mínimo? ¿Cuál es el precio mínimo que alcanza dicha producción?

$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ $\Delta = -1460$
 $P(x)$
 $X = \text{unidades.}$ $-- \frac{410}{2(1)}$ $-- \frac{-1460}{4(1)}$ R/ El precio mínimo que alcanza dicha producción es de 365.
R/ Se debe producir 205 para alcanzar el precio mínimo. 205 365
Vértice
(205, 365)

Nota. Proceso de resolución planteado para la resolución del problema 3 durante el taller de resolución de problemas.

En relación con la categoría de análisis *examinar la solución*, las 20 respuestas brindadas por los estudiantes a las preguntas planteadas en el problema se establecieron de manera correcta, el único error en un instrumento fue el uso de los signos en los cálculos; sin embargo, este error se comete dos veces y se obtiene el resultado correcto.

Tomando en cuenta los indicadores referentes a las categorías de análisis, se identifica que 20 participantes alcanzaron las fases del proceso de resolución de problemas propuesto por Polya (1989) considerando que no todos escriben de manera explícita las variables dependiente e independiente que se establecen en el problema, sí las utilizan de manera correcta al brindar la respuesta a la interrogante del problema y su interpretación dentro del contexto.

4. 3. 4 Problema N°4

Para la resolución del cuarto problema, se contó con la participación de 20 estudiantes, al considerar la categoría de análisis *comprender el problema*, nueve participantes identificaron de manera explícita y correcta las variables por trabajar; por otra parte, 20 identificaron que el criterio que brinda el problema corresponde a una función cuadrática.

En relación con la *concepción de un plan*, para la representación gráfica solamente un participante la trazó de manera correcta; por otra parte, la representación tabular no fue utilizada por ningún participante, el esquema de resolución se constituyó alrededor de la aplicación de la fórmula del vértice.

Para la *ejecución del plan*, 19 estudiantes utilizaron los conceptos y fórmulas relacionados con el cálculo del punto máximo de forma correcta, solamente un estudiante comete un error de signo al colocar el valor del parámetro a en la fórmula $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, de manera que obtiene valores diferentes a los esperados; este mismo estudiante no brinda ninguna respuesta a la interrogante del problema.

Por otra parte, 15 estudiantes eligieron la fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$ para el cálculo de la coordenada en y del vértice, y cinco eligieron la evaluación del valor del eje de simetría para obtener su imagen, solamente un participante escribió explícitamente el vértice como par ordenado.

Al *examinar la solución*, las 19 respuestas brindadas por los estudiantes a las preguntas planteadas en el problema se establecieron de manera correcta y un instrumento no presenta respuesta explícita, que corresponde al estudiante que cometió el error de cálculo mencionado en el texto anterior. A continuación, se muestra la respuesta brindada por un participante:

Ilustración 7. Brindar una respuesta escrita

4. Un pequeño pueblo fue invadido por una plaga de mosquitos. Al cabo de un tiempo, los técnicos de control de plagas encontraron que la cantidad de mosquitos en el pueblo podía describirse, en forma aproximada, a través de la función $n(t) = -2t^2 + 20t + 2000$, donde n es la cantidad de mosquitos y t es la cantidad de días transcurridos desde que la plaga llegó al pueblo. ¿Qué día se presenta la mayor cantidad de mosquitos?, ¿Cuál es la cantidad de mosquitos?

$n(t) \rightarrow$ Cantidad de mosquitos. $-\frac{20}{2(-2)} = 5$ R/ La mayor cantidad de mosquitos se presenta el día 5.

$t \rightarrow$ días transcurridos

$a = -2$
 $b = 20$
 $c = 2000$

$\Delta = 20^2 - 4(-2)(2000)$
 $\Delta = 16400$

$\frac{-16400}{4(-2)} = 2050$ R/ La cantidad de mosquitos es 2050.

Nota. Proceso de resolución planteado para la resolución del problema 4 durante el taller de resolución de problemas.

Tomando en cuenta los resultados descritos anteriormente, 19 participantes alcanzaron las fases establecidas por Polya (1989) para la resolución de problemas y un estudiante alcanza la comprensión del problema, la concepción y la ejecución del plan, sin embargo, comete un error de signo y no se percata de este, ya que no examina su solución.

En relación con los resultados obtenidos en la sesión denominada *Taller de resolución de problemas* y las fases establecidas por Polya (1989), se identifica un avance en los procesos de resolución de problemas, ya que alcanzaron la comprensión de los problemas planteados, establecieron y ejecutaron planes de

resolución, obtuvieron respuestas y verificaron su pertinencia, por lo que, considerando a Polya (1989), esto se debe al espacio de imitación y práctica que se les brindó a los estudiantes para el trabajo grupal sin la intervención directa de un docente facilitador.

El avance que presentan los estudiantes se relaciona con el trabajo en la resolución de diversos problemas dentro del mismo contexto, esto de acuerdo con Moreira (2002), quien afirma que la adquisición de conocimientos se encuentra estrechamente relacionada con las situaciones y problemas previamente establecidos, de manera que resolver un problema es evocar los que ya se conocen y su relación con el contexto.

Al finalizar el trabajo grupal durante la tercera sesión, de acuerdo con los procesos establecidos en el Programa de Estudios de Matemática (MEP, 2012) para la resolución de problemas, se brinda un espacio en el cual los estudiantes describen brevemente los procesos mediante los cuales obtuvieron las respuestas, tres estudiantes escriben en la pizarra su proceso de resolución y lo explican verbalmente; con esto surgen algunas dudas y cuestionamientos que fueron defendidos por los estudiantes que mostraron sus problemas resueltos. El investigador a cargo de la sesión intervino cuando fue pertinente y realizó aclaraciones que se consideraron necesarias. Durante el desarrollo de la sesión el trabajo se estableció por grupos y esto conllevó al desorden y al ruido en el aula, sin embargo los estudiantes se esforzaron por llevar a cabo la tarea que se les asignó mostrando un interés real por aprender a través de la participación activa en la sesión, esto generó en los estudiantes el desarrollo de actitudes positivas hacia la disciplina matemática propiciando un espacio de aprendizaje significativo en el aula.

4. 4 Cuarta sesión: Evaluación individual

En este apartado, se describe la cuarta sesión correspondiente a una evaluación individual aplicada posterior al desarrollo del *Taller de Resolución de Problemas*, con la intención de evaluar lo aprendido por los estudiantes durante el proceso de las tres sesiones anteriores. Este instrumento se aplicó a 17 de 22 estudiantes de undécimo nivel de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén de la Dirección Regional de Educación San José Central. La evaluación consiste en resolver dos problemas relacionados con el contenido de función cuadrática en la habilidad de determinar puntos máximos y puntos mínimos (Ver Anexo IV).

4. 4. 1 Problema N°1

El primer problema modela la altura del salto de un grillo en centímetros en función del tiempo en segundos, a los informantes se les solicitó determinar el tiempo que tarda el grillo en alcanzar su altura máxima, así como la altura correspondiente.

En la categoría *comprender un problema*, de acuerdo con Polya (1989), para resolver un problema se requiere identificar los datos que brinda este y considerarlos dentro de un contexto. En relación con lo anterior, 15 estudiantes reconocieron que el problema se encuentra dentro de los contenidos asociados a función cuadrática y siete estudiantes escribieron explícitamente las variables que indica el problema y su relación con el contexto brindado de manera correcta.

La categoría de análisis de *concebir un plan*, establecido de acuerdo con las fases propuestas por Polya (1989) para la resolución de problemas, según Boscán y Klever (2012), busca que los estudiantes determinen qué pasos van a seguir para llegar a la respuesta. En la evaluación individual de este primer problema, ningún estudiante utilizó representación tabular; la representación gráfica fue utilizada solo por un participante que dibujó el plano cartesiano y colocó las variables en su

respectivo eje sin trazar la parábola correspondiente. Además, ningún estudiante se refirió a la concavidad de la función, de manera que los esquemas de resolución del problema se plantearon desde los algoritmos algebraicos.

La categoría de análisis *ejecutar un plan*, de acuerdo con Polya (1989), consiste en utilizar los recursos y herramientas para la resolución del problema. En la evaluación de este primer problema, las herramientas utilizadas para determinar la respuesta se relacionan con el uso de la fórmula del vértice, donde 12 estudiantes la utilizaron para obtener la respuesta, sin embargo, solamente ocho de ellos la aplicaron correctamente y siete la escribieron como par ordenado.

Algunos de los errores cometidos consistieron en considerar el valor del parámetro c como uno cuando este era cero, omitir que el discriminante era parte de una fórmula y no la fórmula completa, así como colocar el número obtenido como resultado final, colocar los signos negativos o no utilizar la fórmula. De acuerdo con Shoenfeld (1985), estos errores se asocian a los *recursos defectuosos* a los que recurre el estudiante ante la tarea de resolver un problema, los cuales consisten en utilizar conocimientos que no son del todo correctos.

De acuerdo con Polya (1989), la evaluación retrospectiva de la respuesta obtenida ante la resolución de un problema conforma la fase de *examinar la solución*; en las respuestas brindadas para el primer problema, se encuentra que 15 estudiantes brindaron la respuesta a lo que se solicitaba, de las cuales seis son correctas y dos participantes presentan un procedimiento correcto sin brindar respuesta escrita a la pregunta planteada en el problema. En cuanto a la revisión de la coherencia y pertinencia de las respuestas obtenidas, 10 estudiantes realizaron una verificación de su proceso. Además, dos estudiantes no establecieron solución alguna al problema, entregaron el instrumento en blanco.

4. 4. 2 Problema N°2

El segundo problema modela el costo de producción de pasteles en función de la cantidad de unidades vendidas, se le solicitó al estudiante determinar en miles de colones el costo mínimo que tiene la empresa por la producción de las x unidades de pasteles y se le plantea la interrogante: ¿Es posible afirmar que el costo por la producción de 20 pasteles es mayor al costo por la producción de 25 pasteles?, además, se le solicitó justificar su respuesta.

En relación con la categoría de análisis denominada *comprender el problema* y de acuerdo con Polya (1989), se requiere identificar los datos que brinda el problema y considerarlos dentro de un contexto. En relación con lo anterior, 15 estudiantes reconocieron que el problema se relaciona con el tema de función cuadrática y 14 estudiantes escribieron de manera explícita correctamente las variables que brinda el problema.

En la evaluación individual de este problema, se identificó que ningún estudiante utilizó representación tabular o gráfica para determinar una solución al problema. Además, ningún estudiante se refirió a la concavidad de la función, de manera que los esquemas de resolución del problema se plantearon desde los algoritmos algebraicos. En relación con lo anterior, la categoría de análisis de *concebir un plan*, de acuerdo con Boscán y Klever (2012), es el proceso mediante el cual los estudiantes establecen el camino por seguir para llegar a la respuesta.

De acuerdo con la categoría de análisis *ejecutar un plan* y considerando el proceso de resolución de problemas establecido por Polya (1989), se utilizan los recursos y herramientas con el fin de realizar los procesos previamente establecidos para la resolución del problema. Las herramientas utilizadas para determinar la respuesta a este segundo problema se relacionan con el uso de la fórmula del vértice, donde 14 estudiantes la utilizaron para obtener la respuesta, sin embargo,

solo cuatro de ellos la aplicaron correctamente y seis participantes la escribieron como par ordenado.

Al considerar la categoría de análisis *examinar la solución*, en las respuestas brindadas por los estudiantes, 14 estudiantes establecieron una respuesta a lo que se solicitaba, de las cuales una es correcta; en cuanto a la revisión de la coherencia y pertinencia de las respuestas obtenidas, dos estudiantes realizaron la verificación de su proceso, sin embargo, sumaron los resultados obtenidos para brindar una única respuesta, por lo que la fase de *examinar la solución* no fue alcanzada con éxito.

En el segundo problema, cuatro de los estudiantes utilizaron el método de sustitución para responder a una de las preguntas planteadas, donde se les preguntaba sobre el costo de producción de 20 unidades y compararlos con el costo de producir 25 unidades. Estos estudiantes comprendieron la relación existente entre los valores de la variable dependiente y su significado dentro del problema planteado. En relación con lo anterior, Polya (1989) señala que esto se debe a la debida comprensión del problema y a los diferentes espacios de aprendizaje brindados anteriormente, además, de acuerdo con Shoenfeld (1985), esto se debe a los recursos con los que cuenta el estudiante.

Al considerar la primera sesión de *diagnóstico* en contraste con la última sesión de *evaluación individual*, se puede observar que los participantes establecen soluciones a los problemas planteados con mejores habilidades para la resolución. Durante la cuarta aplicación de instrumentos, los participantes identifican las variables que presentan los problemas con mayor facilidad que en la primera sesión, además, verifican su razonamiento para brindar respuestas escritas ante las preguntas planteadas en los diferentes problemas; de acuerdo con Polya (1989), esto se debe a los espacios brindados para la imitación y práctica, en los que

participaron los estudiantes, así como al acompañamiento docente desde la guía, donde el estudiante es quien resuelve el problema sin la intervención directa.

Las limitaciones que se presentaron se relacionan con el uso de las fórmulas para el cálculo de las coordenadas del vértice, ya que los participantes olvidaron las fórmulas y no recurrieron a otras representaciones, por lo que el esquema de resolución del problema se limitó al uso del álgebra y no se da cabida a otras posibilidades que también resultan útiles para resolverlo. De acuerdo con Moreira (2002), el esquema de resolución de un problema matemático se establece en función de las relaciones que se construyen entre los conceptos presentes y los conocimientos del lector, además de sus habilidades y herramientas que le permiten plantearse nuevas posibilidades para la resolución de un problema dentro de un contexto dado.

Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones obtenidas a partir del análisis de datos, relacionadas con los objetivos planteados para la investigación.

Considerando las fases de resolución de problemas planteadas por Polya (1989), se determinó que, para la primera sesión denominada *diagnóstico*, los estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, Circuito 05, Dirección Regional de Educación San José Central, alcanzaron identificar el problema dentro del contexto de función cuadrática, sin embargo, no identificaron explícitamente las variables dependiente e independiente de la función en el problema; no establecieron un posible plan para ejecutar ni lo ejecutaron, además, no brindaron una respuesta a la pregunta planteada y, por ende, no la verificaron. Por lo que en la primera sesión no se alcanzan las fases de resolución de problemas propuestas por Polya (1989).

De acuerdo con Shoenfeld (1985), al considerar los recursos como las habilidades y herramientas con las que cuenta una persona para resolver un problema, se evidencia que los estudiantes optimizaron sus conocimientos en el tema de función cuadrática, al participar de las sesiones de trabajo colaborativo, ya que en la cuarta sesión *evaluación individual*, en la resolución del primer problema, 10 estudiantes alcanzaron las fases propuestas por Polya (1989) para la resolución de problemas, de los cuales seis procesos fueron correctos. Para la resolución del segundo problema, dos estudiantes alcanzaron la verificación de su respuesta y 14 participantes brindaron una respuesta a la interrogante planteada, además, cuatro participantes establecieron su esquema de resolución mediante la sustitución y no mediante el uso de la fórmula. Por lo que se evidencia que los estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, Circuito 05, Dirección Regional de Educación San José Central, desarrollaron o fortalecieron habilidades de resolución

de problemas, mediante la sesión de *recursos* y el taller basado en la metodología de resolución de problemas planteada por Polya (1989).

Considerando la fase de *ejecución de un plan* propuesto por Polya (1989) para la resolución de problemas, los estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, Circuito 05, Dirección Regional de Educación San José Central, plantearon su plan de resolución desde los procesos algebraicos y omitieron la representación gráfica y tabular de la función cuadrática para encontrar la solución al problema, utilizaron únicamente la fórmula del vértice o herramientas algebraicas como la sustitución.

De acuerdo con Shoenfeld (1985), los principales obstáculos que enfrentaron los estudiantes para la resolución de problemas, en el tema de función cuadrática en la habilidad de determinar puntos máximos o puntos mínimos, corresponden a recursos defectuosos relacionados con los conceptos de criterio de la función, par ordenado, imagen y preimagen, que impedían reconocer las variables dependiente e independiente dentro del texto escrito; además, se presentan dificultades en el uso de la calculadora, uso de los signos, sustitución e interpretación de las fórmulas.

Recomendaciones

A continuación, se brindan las recomendaciones estipuladas a partir del análisis de datos y las conclusiones establecidas.

Considerando las dificultades que manifestaron los participantes para comprender los problemas y plantear un esquema de resolución, en las sesiones de trabajo con los estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, Circuito 05, Dirección Regional de Educación San José Central, se recomienda reforzar los conocimientos previos relacionados con los contenidos de funciones para desarrollar las habilidades relacionadas con el análisis del estudio completo de la función cuadrática.

Al valorar los resultados obtenidos en la última sesión *evaluación individual*, se identifican dificultades para utilizar las diferentes representaciones de la función cuadrática, por lo que se recomienda abordar esta función mediante las representaciones gráfica y tabular que permitan el aprendizaje de los conceptos asociados a la función, de manera que el estudiante adquiera habilidades y conocimientos para la resolución de ejercicios y problemas relacionados con el cálculo de puntos máximos o puntos mínimos.

Con base en el *taller de resolución de problemas* desarrollado con los estudiantes de la sección 11-1 del Liceo Roberto Brenes Mesén, Circuito 05, Dirección Regional de Educación San José Central, se recomienda incentivar el trabajo grupal basado en la metodología de resolución de problemas propuesta por Polya (1989), para alcanzar los objetivos establecidos por la reforma en educación matemática realizada en el año 2012, con el fin de facilitar el aprendizaje significativo y minimizar las limitaciones que enfrentan los estudiantes ante la evaluación. Además, se sugiere a los docentes implementar la dinámica de taller de resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje para el

estudio completo de la función cuadrática y de otras funciones; esto tomando en cuenta los resultados obtenidos en las conductas y en las habilidades de los estudiantes para la resolución de problemas tras la aplicación de la tercera sesión.

Además, se recomienda comunicar los resultados de la presente investigación al Departamento de Matemática del centro educativo donde se realizaron las sesiones, para que se disponga de este recurso como una guía pedagógica al momento de impartir los temas relacionados con la resolución de problemas en funciones cuadráticas en la habilidad específica de determinar puntos máximos o puntos mínimos.

Por último, se recomienda divulgar los resultados de la presente investigación a la Asesoría Pedagógica de la Dirección Regional de Educación San José Central, para que se disponga de este recurso como una guía metodológica a la labor docente.

Referencias bibliográficas

- Alfaro, C. (2006). Las ideas de Polya en la resolución de Problemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 1(1), 1 - 13. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6967/6653/>
- Álvarez, C. y Maroto, J. L. (2012). La elección del estudio de caso en la investigación educativa. *Gazeta de Antropología*, 1(28). Recuperado de <http://www.gazeta-antropologia.es/?p=101>
- Ander-Egg, E. (1991). *El taller una alternativa de renovación pedagógica*. Argentina: Magisterio del Río de la Plata.
- Aránzazu, C. (2013). *Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Medellín). Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/11788/1/71644693.2013.pdf>
- Arcila, A., Buriticá, L., Castrillón, J. y Ramírez, L. (2004). *Modelos de Investigación: Guía didáctica y Módulo*. Recuperado de <http://virtual.funlam.edu.co/repositorio/sites/default/files/repositorioarchivos/2011/02/0008paradigmasymodelos.771.pdf>
- Arias, F. (2012). *El proyecto de Investigación: Introducción a la Metodología Científica* (Sexta ed.). Caracas: Episteme. Recuperado de <https://mail.google.com/mail/u/0/#inbox/FMfcgxvzLhdxlpqZIZJrmgcctcQbXTdC?projector=1&messagePartId=0.1>
- Bahamonde, S. y Vicuña, J. (2011). *Resolución de problemas matemáticos*. Chile: Universidad de Magallanes.
- Blasco, J. y Pérez, J. (2007). *Metodologías de Investigación en las Ciencias de la Actividad Física y el Deporte: ampliando horizontes*. Recuperado de <https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/12270/1/blasco.pdf>
- Blomhøj, M. (2004). *Modelización Matemática: Una Teoría para la Práctica*. Recuperado de <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10419/11120>
- Boscán, M. y Klever, K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*, 7 - 19.

- Castro, E. (2008). *Resolución de Problemas: Ideas, tendencias e influencias en España*. Recuperado de <https://www.uv.es/puigl/castroseiem2008.pdf>
- Castro, M., Mena, D., Pineda, E., Rojas, L., Valverde, P. y Vindas, A. (2011). *Unidad didáctica a través de situaciones del entorno para la enseñanza de los conceptos generales de funciones, la función lineal y la función cuadrática* (Tesis de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática). Universidad de Costa Rica, San José.
- Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad (DGEC). (2017). *Informe Institucional Bachillerato de la Educación Formal*. San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Pública .
- Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad (DGEC). (2018). *Informe Institucional Bachillerato de la Educación Formal*. San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Pública .
- Dubois, M. E. (1987). *El proceso de lectura: de la teoría a la práctica*. Uruguay: Aique didáctica.
- Esquer, M. (2014). *Propuesta didáctica con funciones cuadráticas de problemas en contexto a Nivel Superior*. Sonora: ITSON.
- García, T. (2012). *La aplicación de conceptos en la comprensión e interpretación y solución de problemas matemáticos y de razonamiento analógico, dentro del contexto de bachillerato* (Tesis de Maestría en Educación con Acentuación en Desarrollo Cognitivo, Tecnológico de Monterrey, Monterrey). Recuperado de https://repositorio.itesm.mx/bitstream/handle/11285/571851/DocsTec_12798.pdf;jsessionid=BF33C54A23902A868A36D95F864476B6?sequence=1
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación* (Quinta ed.). México: McGraw-Hill.
- Martínez, V. (2013). *Paradigmas de Investigación: Manual Multimedia para el desarrollo de trabajos de Investigación. Una Visión desde la epistemología dialéctico crítica*. Recuperado de http://www.pics.uson.mx/wp-content/uploads/2013/10/7_Paradigmas_de_investigacion_2013.pdf
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programa de Estudios de Matemática*. San José, Costa Rica: MEP.
- Moreira, M. (2002). La teoría de campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el aula. *Investigaciones en Enseñanzas de las Ciencias*, VII(1), 7 - 29. Recuperado de <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf>

- Mosquera, M. (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real en el marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER Yarumito* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Medellín). Recuperado de <http://bdigital.unal.edu.co/51932/1/82363418.2015.pdf>
- Moya, A. (1972). *Resolución de problemas aritméticos en III año de secundaria* (Tesis de especialidad en Matemática). Universidad de Costa Rica, San José.
- National Council of Teachers of Mathematics . (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston Va: The Council.
- Navarro, P. (2003). *Cómo influye la aplicación del método heurístico en el proceso de resolución de problemas matemáticos de división y multiplicación por parte de los niños de I y II ciclo de la Educación General Básica* (Proyecto de investigación en Enseñanza de la Matemática). Universidad de Costa Rica, San José.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. París: OECD Publishing. Recuperado de <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2015/07/Marco-de-evaluacion-PISA-2015.pdf>
- Oviedo, Y. (2012). *Evaluación de algunos procesos metacognitivos de los estudiantes de décimo año de la educación secundaria en la resolución de problemas de matemática* (Tesis de Maestría profesional en Evaluación Educativa). Universidad de Costa Rica, San José.
- Pacheco, E. (2004). *El método heurístico en la resolución de problemas matemáticos* (Tesis de Enseñanza de Matemática). Universidad de Costa Rica, San José.
- Penalva, M., Posadas, J. y Roig, A. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática*, XXII(3), 23 - 54. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n3/v22n3a3.pdf>
- Planchart, O. (2002). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de Función* (Tesis de Doctorado en Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Morelos). Recuperado de <http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf>
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (Decimoquinta ed.). México: Trillas.
- Programa del Estado de la Nación. (2013). *Cuarto Informe del Estado de la Educación*. Recuperado de <https://www.estadonacion.or.cr/informe-iv-estado-educacion>

- Programa del Estado de la Nación. (2017). *Sexto Informe del Estado de la Educación*. Recuperado de <https://www.estadonacion.or.cr/educacion2017/assets/ee6-informe-completo.pdf>
- Ricoy, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de Investigación. *Revista do Centro de Educação, XXXI(1)*, 11 - 22. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=117117257002>
- Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Revistas de Investigación UNMSM, VII(12)*, 23 - 40. Recuperado de <http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/8177/7130>
- Ruiz, Á. (2013). *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática: Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (Vol. VIII). San José, Costa Rica: Universidad de Costa Rica. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/11125/10602>
- Santos, M. T. (2015). *Uso coordinado de tecnologías digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI*. México: Colección PAIDEIA Siglo XXI.
- Sepúlveda, A., Medina, C. y Sepúlveda, D. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, XXI(2)*, 79 - 115. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n2/v21n2a4.pdf>
- Shoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. California: Academic Press.
- Tolentino, M. (2013). *Un estudio sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones cuadráticas en el nivel de secundaria* (Tesis de Maestría en Educación de Enseñanza de las Ciencias, Tecnológico de Monterrey, Monterrey). Recuperado de <https://repositorio.itesm.mx/bitstream/handle/11285/619585/TESIS%20María%20T%20Tolentino%20B.pdf?sequence=1>
- Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M. y Álvarez, E. (2001). El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación, 1* - 11. Recuperado de <https://rieoei.org/historico/deloslectores/203Vilanova.PDF>

Anexos

Anexo I

**Ministerio de Educación Pública
Departamento de Matemática
Circuito 05
Dirección Regional de Educación San José Central
Liceo Roberto Brenes Mesén
Sección 11-1**

Primera sesión: Evaluación diagnóstica

Fecha: _____ **Hora:** _____ **Aula:** _____

Instrucciones:

1. A continuación, se le presenta un instrumento donde encontrará un problema que debe resolver de manera individual, no se admite el préstamo de materiales.
2. Para resolver el problema puede trabajar con gráficos, tablas o cálculos según lo crea conveniente.
3. Debe incluir todas las anotaciones que le ayudaron a llegar a su respuesta.
4. Emplee **únicamente lapicero de tinta negra o azul** para responder.
5. Evite el uso de corrector, en caso de equivocarse, encierre en un círculo lo que desea descartar y escriba la palabra **“No”**. De manera que su idea sea legible.
6. Se permite el uso de calculadora científica no programable.
7. Si tiene alguna duda sobre el instrumento puede dirigirse a los encargados.

Código

Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra se modela mediante el criterio de la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ siendo t el tiempo en segundos, y $f(t)$ la altura en metros. ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en alcanzar su altura máxima?, ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

Anexo II

Ministerio de Educación Pública
Departamento de Matemática
Circuito 05
Dirección Regional de Educación San José Central
Liceo Roberto Brenes Mesén
Sección 11-1

Segunda sesión: Recursos

Fecha: _____ Hora: _____ Aula: _____

Instrucciones:

1. A continuación, se le presenta un instrumento donde encontrará una función para realizar su respectivo análisis con ayuda del docente facilitador.
2. Debe incluir todas las anotaciones que le ayudaron a llegar a su respuesta.
3. Emplee **únicamente lapicero de tinta negra o azul** para responder.
4. Evite el uso de corrector, en caso de equivocarse, encierre en un círculo lo que desea descartar y escriba la palabra **“No”**. De manera que su idea sea legible.
5. Se permite el uso de calculadora científica no programable.
6. Si tiene alguna duda sobre el instrumento puede dirigirse a los encargados.

Código

Considere la siguiente función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 - 4x + 3$ y responda lo que se le solicita.

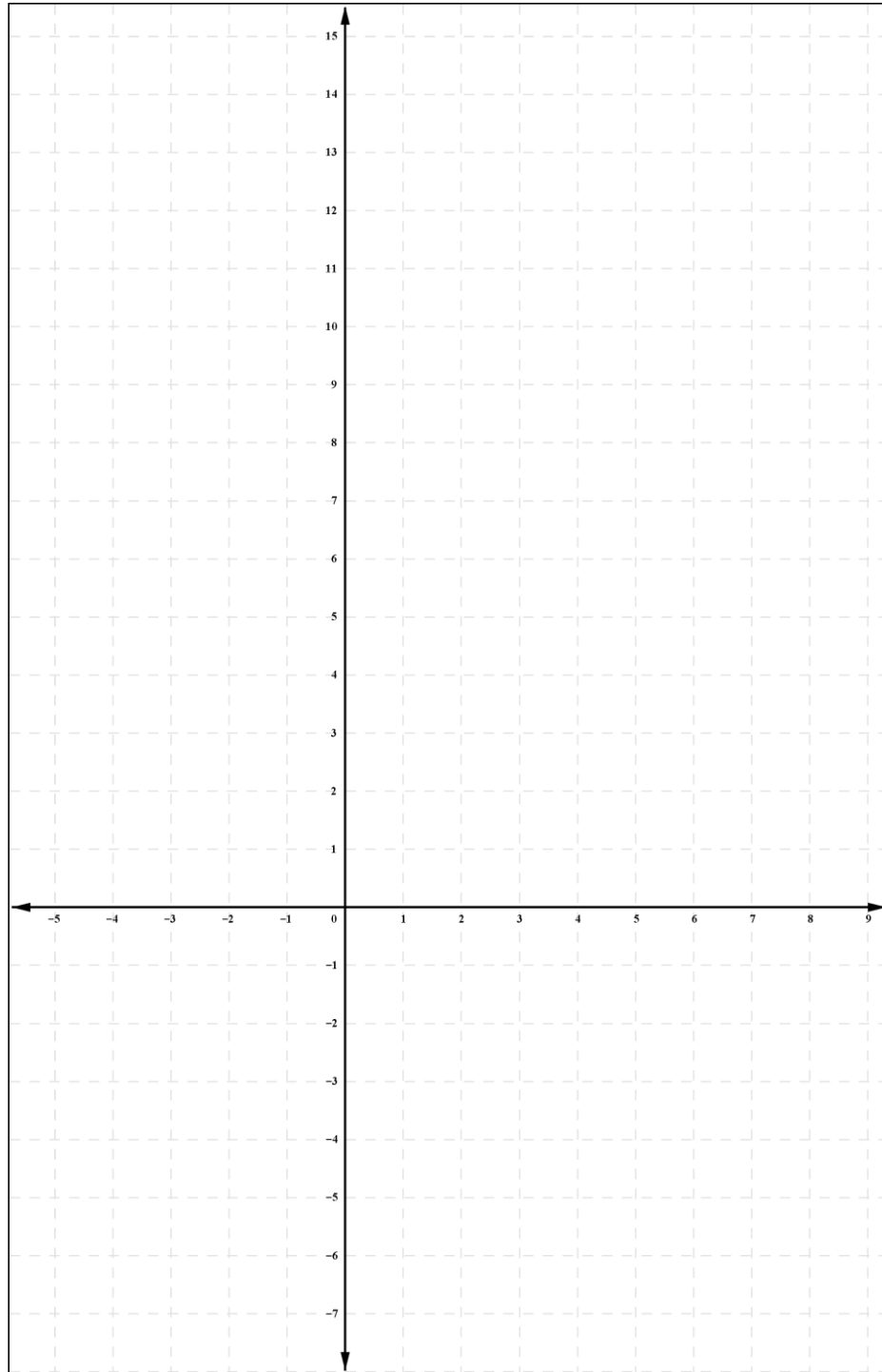
1. El criterio anterior representa una función de tipo:

1. Lineal
2. Cuadrática
3. Logarítmica
4. Exponencial

2. Utilizando la función $f(x)$ complete la siguiente tabla.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$								

3. Con base a la información anterior grafique la función.



4. ¿Qué tipo de concavidad posee la función anterior?

5. Determine el valor del eje de simetría

6. ¿Cuál es el par ordenado que representa el vértice?

Anexo III

**Ministerio de Educación Pública
Departamento de Matemática
Circuito 05
Dirección Regional de Educación San José Central
Liceo Roberto Brenes Mesén
Sección 11-1**

Tercera sesión: Taller de Resolución de Problemas

Fecha: _____ **Hora:** _____ **Aula:** _____

Instrucciones:

1. A continuación, se le presenta un instrumento donde encontrará cuatro problemas que debe resolver de manera individual o mediante trabajo colaborativo según lo prefiera.
2. Para resolver los problemas puede trabajar con gráficos, tablas o cálculos según lo crea conveniente.
3. Emplee **únicamente lapicero de tinta negra o azul** para responder.
4. Evite el uso de corrector, en caso de equivocarse, encierre en un círculo lo que desea descartar y escriba la palabra **“No”**. De manera que su idea sea legible.
5. Se permite el uso de calculadora científica no programable.
6. Si tiene alguna duda sobre el instrumento puede dirigirse a los encargados.

Código

1. Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra se modela mediante el criterio de la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ siendo t el tiempo en segundos, y $f(t)$ la altura en metros. ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en alcanzar su altura máxima?, ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

2. El costo en millones de colones para producir un cierto artículo viene dado por la fórmula $c(u) = 36 - 18u + 3u^2$, donde "u" es el número de unidades de dicho artículo. ¿Cuántas unidades de este artículo habría que producir para que el costo sea mínimo?, ¿Cuál es el costo mínimo?

3. El precio P en miles de colones para producir " x " unidades de pantalones está dado por $p(x) = x^2 - 410x + 42390$. ¿Cuántos pantalones se deben producir para alcanzar un precio mínimo?, ¿Cuál es el precio mínimo que alcanza dicha producción?

4. Un pequeño pueblo fue invadido por una plaga de mosquitos. Al cabo de un tiempo, los técnicos de control de plagas encontraron que la cantidad de mosquitos en el pueblo podía describirse, en forma aproximada, a través de la función $n(t) = -2t^2 + 20t + 2000$, donde n es la cantidad de mosquitos y t es la cantidad de días transcurridos desde que la plaga llegó al pueblo. ¿Qué día se presenta la mayor cantidad de mosquitos?, ¿Cuál es la cantidad de mosquitos?

Anexo IV

**Ministerio de Educación Pública
Departamento de Matemática
Circuito 05
Dirección Regional de Educación San José Central
Liceo Roberto Brenes Mesén
Sección 11-1**

Cuarta sesión: Evaluación individual

Fecha: _____ **Hora:** _____ **Aula:** _____

Instrucciones:

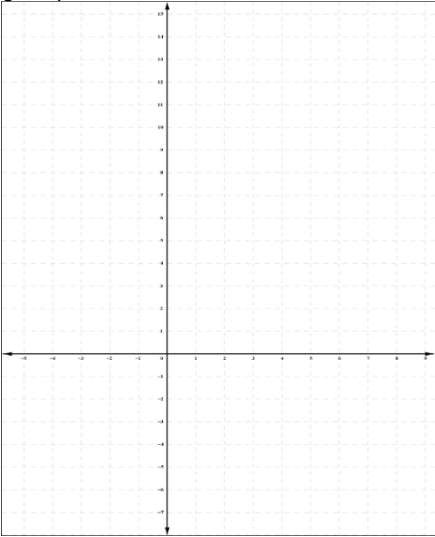
1. A continuación, se le presenta un instrumento donde encontrará dos problemas que debe resolver de manera individual, no se admite el préstamo de materiales.
2. Para resolver el problema puede trabajar con gráficos, tablas o cálculos según lo crea conveniente.
3. Debe incluir todas las anotaciones que le ayudaron a llegar a su respuesta.
4. Emplee **únicamente lapicero de tinta negra o azul** para responder.
5. Evite el uso de corrector, en caso de equivocarse, encierre en un círculo lo que desea descartar y escriba la palabra **“No”**. De manera que su idea sea legible.
6. Se permite el uso de calculadora científica no programable.
7. Si tiene alguna duda sobre el instrumento puede dirigirse a los encargados.

Código

1. La función $s(t) = -3t^2 + 36t$, describe el salto de un grillo de manera que “ s ” indica la altura en centímetros que alcanza el grillo a los “ t ” segundos. ¿Cuánto tiempo dura el grillo en alcanzar su altura máxima?, ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el grillo?

2. Si el costo " $c(x)$ " (en miles de colones) que tiene la empresa Ángeles, al producir " x " unidades de pasteles está dado por $c(x) = 0,2x^2 - 10x + 400$, entonces: ¿Cuál es, en miles de colones, el costo mínimo que tiene la empresa por la producción de las x unidades de pasteles?, ¿Es posible afirmar que el costo por la producción de 20 pasteles es mayor al costo por la producción de 25 pasteles? ¿Por qué?

Anexo V

Planeamiento correspondiente a la aplicación de las sesiones II y III denominadas Recursos y Taller de resolución de problemas																						
Habilidades específicas	Estrategia de mediación	Indicadores	Facilitador a cargo	Tiempo																		
<p>1. Identifica que el criterio de la función corresponde a una función cuadrática.</p> <p>2. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.</p> <p>3. Analizar una función a partir de sus representaciones.</p>	<p style="text-align: center;"><u>II SESIÓN: RECURSOS</u></p> <p>I ETAPA: APRENDIZAJE DE CONOCIMIENTOS</p> <p style="text-align: center;">A. Propuesta de un ejercicio</p> <p>Se plantea la siguiente situación.</p> <p>Considere la siguiente función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 - 4x + 3$ y responda lo que se le solicita.</p> <p>El criterio anterior representa una función de tipo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> Lineal <input type="radio"/> Cuadrática <input type="radio"/> Logarítmica <input type="radio"/> Exponencial <p>Utilizando la función $f(x)$ complete la siguiente tabla.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">x</td> <td style="padding: 2px 5px;">-2</td> <td style="padding: 2px 5px;">-1</td> <td style="padding: 2px 5px;">0</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">$f(x)$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>Con base a la información anterior grafique la función.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>¿Qué tipo de concavidad posee la función anterior?</p> <p>Determina el valor del eje de simetría</p>	x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$f(x)$									<p>1.1 Reconoce el criterio de una función correspondiente a una función cuadrática.</p> <p>2.1 Determinar los elementos:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Tipo de concavidad que posee la función. b) Intersecciones de la función en el eje x c) Intersección de la función con el eje y d) Valor del eje de simetría e) ¿Par ordenado que representa el vértice? <p>3.1 Calcula imágenes correctamente, mediante el criterio de una función por medio de la representación tabular.</p> <p>3.2 Calcula pre-imágenes correctamente mediante el criterio de una función.</p> <p>3.3. Reconoce los elementos del dominio de una función, al tener solo su criterio.</p> <p>3.4 Reconoce los elementos del ámbito de una función, al tener solo su criterio.</p> <p>3.5 Grafica una función dado el criterio o la representación tabular</p> <p>3.6 Determina el dominio de una función, a partir de su gráfica.</p> <p>3.7 Determina el ámbito de una función, a partir de su gráfica.</p> <p>3.8 Establece la correspondencia entre imágenes y preimágenes de</p>	<p>La explicación de los contenidos es desarrollada por el facilitador Wilman Muñoz.</p> <p>Las facilitadoras Andrea Navarro y Francela Ramírez realizan observaciones de grupo y aclaración de dudas.</p>	<p>80 min</p>
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5														
$f(x)$																						

	<p>¿Cuál es el par ordenado que representa el vértice?</p> <p>Trabajo independiente estudiantil El facilitador propone cada una de las preguntas conforme se va avanzando.</p> <p>Primero se realiza una lluvia de ideas y un esquema de los conceptos para que los estudiantes trabajen por si mismos cada concepto establecido.</p> <p>Los alumnos trabajan de manera individual o en grupos pequeños (Máximo 4 participantes)</p> <p>Discusión interactiva y comunicativa Una vez que se ha realizado y completado la actividad, los estudiantes exponen sus resultados, y se realiza una socialización y un análisis final de la conexión de los elementos trabajados, se discutirán las distintas respuestas, permitiendo a los estudiantes expresar las conclusiones a las que llegaron y cómo justifican las respuestas, por medio de una lluvia de ideas.</p> <p>B. Clausura o cierre</p> <p>El facilitador aprovecha la discusión anterior con los estudiantes para repasar los conocimientos vistos en la función cuadrática, además de exponer al grupo como utilizar diferentes representaciones para la resolución de problemas modelados a través de distintas funciones.</p> <p>II ETAPA: MOVILIZACIÓN Y APLICACIÓN DE CONOCIMIENTOS.</p> <p>Esta etapa se visualiza trabajar con la sesión III denominada “taller”, donde se proponen problemas relacionados con función cuadrática en los que los estudiantes deben aplicar los conceptos adquiridos en esta sesión.</p>	<p>una función, a partir de su gráfica.</p>		
--	---	---	--	--

<p>4. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.</p>	<p style="text-align: center;">III SESION: TALLER</p> <p>Anteriormente se trabajó con los conceptos necesarios para resolver lo que se requiere en esta sesión. Al inicio se aborda el tema retomando estos conocimientos. A continuación, se brindan instrucciones de cómo se procederá a trabajar en el taller.</p> <p>Para el desarrollo del taller se presentan cuatro situaciones de resolución de problemas enfocadas en contextos reales relacionadas con función cuadrática.</p> <p>I ETAPA: APRENDIZAJE DE CONOCIMIENTOS</p> <p>A. Propuesta de un problema. Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra se modela mediante el criterio de la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ siendo t el tiempo en segundos, y $f(t)$ la altura en metros. ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en alcanzar su altura máxima?, ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?</p> <p>El facilitador Wilman Muñoz utiliza el método de preguntas y respuestas dirigidas para proceder a identificar los distintos elementos presentes en el problema.</p> <p>Se asocia los conceptos vistos en el problema y lo que significan dentro del contexto planteado.</p> <p>Se identifican explícitamente los datos brindados y lo que se solicita en el problema.</p> <p>Se plantea un plan de resolución para proceder a resolver el problema.</p> <p>Se procede a ejecutar el plan planteado utilizando las distintas representaciones.</p> <p>Se realiza una examinación de la respuesta en el problema planteado para verificar que el resultado obtenido y el proceder de resolución sean pertinentes.</p> <p>Luego de resolver este primer problema, se presentan los siguientes problemas para el trabajo estudiantil independiente:</p>	<p>4.1 Identifica las variables dependiente e independiente y lo que representa en el contexto del problema.</p> <p>4.2 Plantea un esquema de resolución relacionado con el cálculo del vértice de la función cuadrática.</p> <p>4.3 Ejecuta un plan de resolución relacionado con el cálculo del vértice en alguna de las representaciones.</p> <p>4.4 Brinda una respuesta escrita debidamente examinada a la pregunta planteada en el problema.</p>	<p>Wilman expone la resolución del primer problema planteado en la sesión de diagnóstico.</p> <p>Andrea y Francela observan la clase.</p> <p>Para la resolución de los siguientes problemas los facilitadores Wilman, Andrea y Francela colaboran en aclaración de dudas y protagonizan el papel de docente guía.</p>	<p>80 min</p>
--	---	--	---	---------------

	<p>1. El costo en millones de colones para producir un cierto artículo viene dado por la fórmula $c(u) = 36 - 18u + 3u^2$, donde "u" es el número de unidades de dicho artículo. ¿Cuántas unidades de este artículo habría que producir para que el costo sea mínimo?, ¿Cuál es el costo mínimo?</p> <p>2. El precio P en miles de colones para producir "x" unidades de pantalones está dado por $p(x) = x^2 - 410x + 42390$. ¿Cuántos pantalones se deben producir para alcanzar un precio mínimo?, ¿Cuál es el precio mínimo que alcanza dicha producción?</p> <p>3. Un pequeño pueblo fue invadido por una plaga de mosquitos. Al cabo de un tiempo, los técnicos de control de plagas encontraron que la cantidad de mosquitos en el pueblo podía describirse, en forma aproximada, a través de la función $n(t) = -2t^2 + 20t + 2000$, donde n es la cantidad de mosquitos y t es la cantidad de días transcurridos desde que la plaga llegó al pueblo. ¿Qué día se presenta la mayor cantidad de mosquitos?, ¿Cuál es la cantidad de mosquitos?</p> <p>Trabajo independiente estudiantil Los estudiantes trabajan en grupos o individualmente en la resolución de los problemas propuestos.</p> <p>Los facilitadores supervisan el trabajo de los estudiantes, sin intervenir directamente.</p> <p>Los facilitadores aclaran dudas de los estudiantes.</p> <p>Discusión interactiva y comunicativa Los estudiantes pasan al frente a resolver en la pizarra los problemas y explican cada paso planteado, el resto de los compañeros comprueban el proceder de resolución con su propio camino de</p>			
--	---	--	--	--

	<p>solución y aprueban o desaprueban el proceso establecido y realizan preguntas a los mismos compañeros expositores.</p> <p>B. CLAUSURA O CIERRE</p> <p>Se realiza un conversatorio con los estudiantes, para compartir las ideas que se emplearon en la resolución de los problemas.</p> <p>De ser necesario, el docente resuelve el problema, con la ayuda de las ideas de los estudiantes en caso de alguna duda.</p>			
--	--	--	--	--