

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

SEDE DE OCCIDENTE

MEMORIA DE SEMINARIO DE GRADUACIÓN PARA OPTAR AL GRADO DE  
LICENCIATURA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

**EVALUACIÓN DEL TRABAJO COTIDIANO A PARTIR DE LOS PROCESOS Y EL  
NIVEL DEL LOGRO DE LAS HABILIDADES PROPUESTAS POR EL  
MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA, EN EL TEMA DE FUNCIONES  
REALES DE VARIABLE REAL DE DÉCIMO AÑO DE LA EDUCACIÓN  
SECUNDARIA EN COSTA RICA.**

ALEXIS FLORES MARTÍNEZ

DENIS GARCÍA GONZÁLEZ

JEAN CARLO MORA DÍAZ

DEIBY GERARDO MOYA MORALES

2021

SEMINARIO DE GRADUACIÓN PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIATURA EN LA  
ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

**EVALUACIÓN DEL TRABAJO COTIDIANO A PARTIR DE LOS PROCESOS Y EL  
NIVEL DEL LOGRO DE LAS HABILIDADES PROPUESTAS POR EL MINISTERIO  
DE EDUCACIÓN PÚBLICA, EN EL TEMA DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE  
REAL DE DÉCIMO AÑO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN COSTA RICA.**

**Resumen.**

Este trabajo de investigación tiene como propósito el diseño de un instrumento de evaluación del trabajo cotidiano, en el tema de funciones reales de variable real de décimo año, siguiendo todas las directrices del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Por el alto valor porcentual asignado al trabajo cotidiano en los últimos años, además de los cambios presentados en el Programa de Estudio de Matemática en el 2012, se presenta la necesidad de contar con instrumentos de evaluación adecuados a las nuevas metodologías de estudio, haciendo uso de la resolución de problemas como enfoque principal dirigido al desarrollo de habilidades matemáticas que llevan al logro de las capacidades superiores. Durante la investigación se evidenció la importancia de trabajar con los procesos matemáticos.

Dicha propuesta de evaluación sigue el modelo para la valoración de los problemas basados en los procesos matemáticos presentado por Ángel Ruiz en el 2017 en la publicación de Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Se diseñó una rúbrica mediante programación en Microsoft Excel para dicha valoración. Además, se realizó una programación en PYTHON para simplificar el modelo de Ruiz en un programa, para una mejor manipulación y comprensión del mismo. Se agregaron los manuales de uso para cada uno de los programas.

El enfoque de esta investigación se ubica en el paradigma naturalista, el cual trata de estudiar el fenómeno desde la perspectiva de las personas involucradas, para ello se hizo una revisión de la bibliografía, la cual también sirvió de base para el diseño del instrumento de evaluación. Además, se utilizó el análisis bibliográfico como técnica para la recolección de datos.

Entre las principales conclusiones de la investigación se destaca que al trabajar con problemas donde se pueda identificar tanto su nivel de complejidad, como la intervención de los procesos matemáticos, garantiza conocer cuáles están involucradas exactamente y en qué grado. De modo que al hacer uso de la rúbrica brindada en la presente investigación es posible dar una nota al trabajo cotidiano del estudiantado, basado en el desarrollo de los procesos.

Palabras clave: Evaluación, Trabajo cotidiano, Resolución de problemas, procesos matemáticos.

## Tabla de contenido

<b>Capítulo 1: Introducción y Diseño de la Investigación</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b> .....	<b>1</b>
<b>Justificación de la Investigación</b> .....	<b>2</b>
<b>El Problema de Investigación</b> .....	<b>9</b>
<b>Objetivos de la investigación</b> .....	<b>11</b>
Objetivo General. ....	11
Objetivos Específicos. ....	11
<b>Antecedentes del Problema</b> .....	<b>11</b>
Antecedentes Internacionales. ....	11
Antecedentes Nacionales. ....	17
<b>Capítulo 2: Marco Conceptual</b>	<b>23</b>
<b>Evaluación de los Aprendizajes</b> .....	<b>23</b>
Evaluación .....	23
Evaluación de los Aprendizajes. ....	24
Evaluación del Proceso .....	24
<b>Funciones de la Evaluación</b> .....	<b>26</b>
Evaluación Diagnóstica .....	26
Evaluación Formativa .....	27
Evaluación Sumativa .....	28

<b>Principios de la Evaluación</b>	<b>31</b>
Evaluación Interna	33
Evaluación Externa	35
<b>Resolución de Problemas en Matemáticas</b>	<b>36</b>
Niveles de Complejidad de los Problemas	38
<b>Procesos Matemáticos</b>	<b>39</b>
Grados de los Procesos	41
Niveles de Logro	42
<b>Habilidades y Competencias Matemáticas</b>	<b>44</b>
Ejes disciplinares	45
<b>Evaluación de la resolución de problemas</b>	<b>47</b>
Técnicas e instrumentos de evaluación	48
<b>Momentos de la Lección</b>	<b>51</b>
Propuesta del Problema	52
Trabajo Estudiantil Independiente	52
Discusión Interactiva y Comunicativa	53
Clausura o Cierre	53
<b>Etapas de la Lección</b>	<b>53</b>
<b>Áreas Matemáticas</b>	<b>54</b>
Funciones Reales de Variable Real	57

Indicaciones de evaluación-----	58
Contextos.-----	60
<b>Capítulo 3: Metodología</b>	<b>62</b>
<b>Enfoque, Alcance y Diseño de la Investigación</b> -----	<b>62</b>
<b>Instrumentos y Técnicas Para la Recolección de Datos</b> -----	<b>63</b>
Fuentes de Información-----	63
<b>Etapas de la investigación</b> -----	<b>64</b>
Indagación Teórica-----	64
Diseño de Criterios e Indicadores de Evaluación de los Aprendizajes-----	66
Elaboración de los Problemas-----	79
Elaboración de la aplicación-----	81
Elaboración del Instrumento-----	82
<b>Capítulo 4: Análisis de Resultados</b>	<b>83</b>
<b>Valoración de los problemas</b> -----	<b>83</b>
<b>Problema 1</b> -----	<b>83</b>
Enunciar-----	83
Resolver-----	84
Identificar-----	89
Valorar-----	90
<b>Problema 2</b> -----	<b>92</b>

Enunciar	92
Resolver	93
Identificar	96
Valorar	96
<b>Problema 3</b>	<b>98</b>
Enunciar	98
Resolver	98
Identificar	100
Valorar	100
<b>Problema 4</b>	<b>102</b>
Enunciar	102
Resolver	103
Identificar	103
Valorar	105
<b>Problema 5</b>	<b>106</b>
Enunciar:	106
Resolver	107
Identificar	108
Valorar	109
<b>Capítulo 5: Consideraciones finales</b>	<b>111</b>

<b>Conclusiones</b>	111
<b>Recomendaciones</b>	112
<b>Limitaciones</b>	113
<b>Anexos</b>	114
<b>Anexo 1: Manual de usuario de la aplicación para valorar las capacidades superiores y niveles de complejidad (AVCSNC)</b>	114
<b>Anexo 2: Manual de usuario para la plantilla de evaluación del trabajo cotidiano.</b>	131
<b>Anexo 3: Código QR para acceder a los recursos de los anexos 1 y 2</b>	141
<b>Referencias Bibliográficas</b>	142



**Lista de tablas**

<b>Tabla 1:</b> Componentes de la evaluación en el Ciclo Diversificado en Costa Rica .....	29
<b>Tabla 2:</b> Procesos matemáticos para el desarrollo de habilidades .....	40
<b>Tabla 3:</b> Técnicas para llevar a cabo el proceso de evaluación de los aprendizajes .....	50
<b>Tabla 4:</b> Conocimientos y habilidades específicas en el área de Relaciones y Álgebra para décimo año del Ciclo Diversificado de enseñanza de matemática en Costa Rica .....	56
<b>Tabla 5:</b> Indicadores de grados del proceso Razonar y argumentar .....	68
<b>Tabla 6:</b> Indicadores de grados del proceso Plantear y resolver problemas .....	71
<b>Tabla 7:</b> Indicadores de grados del proceso Conectar .....	73
<b>Tabla 8:</b> Indicadores de grados del proceso Comunicar .....	75
<b>Tabla 9:</b> Indicadores de grados del proceso Representar.....	77
<b>Tabla 10:</b> Pasos y elementos del modelo 4+6 para valorar tareas matemáticas .....	80

**Lista de figuras**

<b>Figura 1:</b> Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos .....	54
<b>Figura 2:</b> Distribución de áreas por nivel .....	55
<b>Figura 3:</b> Representación gráfica de las funciones $A(x)$ , $B(x)$ y $C(x)$ .....	86
<b>Figura 4:</b> Diagrama de sistema para mantener la presión de agua en tanques de abastecimiento.....	92
<b>Figura 5:</b> Representación gráfica de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ , y la recta $y = 2x + 4$ .....	99
<b>Figura 6:</b> Gráfico de casos acumulados por día de COVID-19 desde el 01 de mayo y hasta el 12 de mayo en Costa Rica.....	102

## Capítulo 1: Introducción y Diseño de la Investigación

### Introducción

La presente investigación, tiene como objetivo principal diseñar una propuesta de evaluación del trabajo cotidiano, en el tema de funciones reales de variable real que cumpla con los actuales lineamientos en materia educativa de Costa Rica. En el currículo oficial de matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, se propone la resolución de problemas como principal estrategia metodológica, siendo también uno de los ejes disciplinares que lo fortalecen y el cual se espera que permita al estudiante desarrollar las habilidades matemáticas propuestas, las habilidades generales y las capacidades superiores que serán fundamentales para lograr ciudadanos más competentes matemáticamente para poder enfrentar con éxito los retos que impone la sociedad.

A continuación, se describe y delimita el problema mencionando los hechos que llevan a la formulación de la interrogante que se pretende responder. En los próximos capítulos se describe el desfase entre la evaluación que propone el enfoque curricular y la evaluación presente en los salones de clase en Costa Rica.

En primer lugar, la investigación realizada por García y Blanco (2017), con el objetivo de explorar las creencias de los docentes de matemática de la provincia de Cartago sobre la evaluación de la resolución de problemas, que contó con una muestra de 107 profesores de matemática que elaboraron durante el 2013 en dicha provincia, obtuvo resultados que “parecen esbozar una idea de evaluación de corte principalmente sumativa” (p. 21). Es decir, los estudiantes simplemente deben memorizar los procedimientos y los contenidos para completar un examen y obtener así una calificación, mientras que el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) considera que “si se mantiene la mirada puesta en la retención de conocimientos, la evaluación seguirá siendo un proceso para solicitar

respuestas memorísticas y la resolución mecánica de ejercicios, situación que es contraria al enfoque de estos programas” (p. 69).

Es por ello que surge la necesidad por comprender la evaluación a partir del nivel del logro de las habilidades propuestas por el Ministerio de Educación Pública. Además, con la última versión del Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes se establecen nuevos porcentajes para cada uno de los componentes de la evaluación sumativa, asignando al rubro del trabajo cotidiano un peso porcentual más elevado en comparación con los años anteriores, hasta el punto de superar el valor porcentual de las pruebas escritas en los tres primeros ciclos de la Educación General Básica, mientras que en la Educación Diversificada se le asigna un peso de 35% de la nota trimestral. Este cambio en el valor porcentual de este componente propicia que se busquen nuevas formas de evaluar el trabajo del estudiante durante el desarrollo de las lecciones. Es por esto que el interés de este estudio se centra en el diseño de una evaluación para este componente de la evaluación en particular.

En los siguientes capítulos se definen los objetivos que guían el proceso de investigación y se presentan algunos resultados bibliográficos que dan sustento al trabajo, así como la metodología seguida para la elaboración de la propuesta de evaluación de trabajo cotidiano. Además, se evidencia que, aunque el tema de la evaluación en la educación, e incluso la evaluación en el enfoque de la resolución de problemas son temas ampliamente estudiados, se encuentra poca evidencia que trate la evaluación de manera similar a lo que en este trabajo se pretende. Es por esto que se consideran las fuentes bibliográficas como la principal fuente de información para el diseño de la propuesta de evaluación.

### **Justificación de la Investigación**

En 2012, el Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprueba los actuales Programas de Estudio de Matemáticas para I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de

Educación General Básica y Educación Diversificada, sustituyendo así los establecidos en 2005. La implementación de estos programas inició en el año 2013 de manera gradual mediante programas de transición (Ruiz, 2013). A partir de 2018 se implementaron para todos los niveles y en todas las lecciones de Matemática.

El enfoque curricular de esta reforma se basa en la Resolución de Problemas, la cual permite el fortalecimiento de mayores capacidades cognoscitivas; esto debido a que aprender a plantear y resolver problemas y especialmente usarlos en la organización de las lecciones “se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades. El desafío intelectual es consubstancial, un nutriente para una labor de aula inteligente y motivadora” (MEP, 2012, p. 13).

Es importante mencionar que la “resolución de problemas como estrategia pedagógica se subraya aquí como sustrato de un estilo de acción de aula” (MEP, 2012, p. 13). Esta analogía coloca la resolución de problemas como la base sobre la cual se debe sustentar y desarrollar todo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que va desde el planeamiento de las lecciones y hasta las actividades de evaluación, de la misma forma que el sustrato es la base que sostiene a una planta y le permite nutrirse y crecer.

Adicionalmente, en este enfoque “se enfatiza la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas asociados a su propio entorno, el entorno físico, social, cultural” (MEP, 2012, p. 11), con lo cual se pretende crear actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas y también lograr un aprendizaje significativo de las mismas con situaciones contextualizadas que le muestren a los estudiantes la importancia que tienen las matemáticas para la vida. Cabe mencionar que el aprendizaje significativo es aquel que hace uso de conocimientos previos que ayudan a los alumnos a incorporar de una mejor manera los nuevos conocimientos a la estructura cognitiva (Sanjurjo y Vera, 2001).

Por otro lado, si los Programas de Estudio de Matemáticas proponen que el proceso educativo se desarrolle desde el enfoque de la resolución de problemas, esto implica que tanto las actividades de mediación como las de evaluación deben guardar correspondencia con dicho enfoque. Sin embargo, en el currículo oficial únicamente se dan algunas características y principios de la evaluación de los aprendizajes e indicaciones para cada ciclo a modo de sugerencias, también se especifica la necesidad de una evaluación a través de la resolución de problemas, donde se deben identificar y valorar las diferentes fases que se dan durante la solución del mismo y no solamente el resultado final (MEP, 2012).

Particularmente, los actuales programas establecen que uno de los principios para una evaluación de los aprendizajes acorde con el enfoque de la resolución de problemas, es que la evaluación debe ser parte integral del proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir,

la evaluación no debe considerarse un proceso separado de la mediación pedagógica, o como un conjunto de pruebas aplicadas al finalizar una unidad o un tema. Debe constituirse en parte natural del proceso de aprendizaje, que tiene lugar durante las actividades que se plantean en la clase, cuando cada estudiante participa, escucha, analiza situaciones del entorno y propone estrategias para su solución considerando los diferentes niveles de complejidad (MEP, 2012, p. 69).

Sin embargo, pareciera que esto último contrasta con el uso que los docentes le dan a la evaluación, pues en una investigación realizada por García y Blanco en Cartago en el 2014, se determinó que una gran parte de los docentes siguen considerando que los exámenes son el principal instrumento para determinar si los estudiantes están preparados para avanzar al siguiente nivel. Además, se sabe que los docentes muestran conformidad con el uso dado a la evaluación; y consideran los resultados de las pruebas escritas como el insumo fundamental para la promoción de los estudiantes y de utilidad real solo para el profesor. Así el

aprendizaje queda determinado por el resultado de la prueba escrita (García y Blanco, 2014). Por su parte, Segura (2018) concluye en su estudio sobre "la evaluación formativa del trabajo escolar cotidiano" que, el personal docente observado y entrevistado aún no logra tener claridad sobre la forma en que se califica el trabajo cotidiano, además de mostrar clara evidencia de que la mediación pedagógica de los docentes sigue siendo tradicional.

Por otro lado, el Programa del Estado de la Nación (PEN, 2017), en el Sexto Informe del Estado de la Educación, determina que las capacitaciones que realiza el Ministerio de Educación Pública sobre los actuales programas ofrecen información básica sobre cómo se debe realizar la evaluación en el enfoque de la resolución de problemas. En dicho informe se menciona que el énfasis en estas capacitaciones "se centran en las generalidades del programa de estudios, la mediación pedagógica y el planeamiento. El énfasis otorgado a las competencias que promueve en el estudiantado, a los materiales didácticos y a la evaluación es menor" (PEN, 2017, p. 386).

De acuerdo con lo anterior, se infiere que dichas capacitaciones están más orientadas a cómo desarrollar los contenidos mediante el enfoque de la resolución de problemas, que al cómo llevar a cabo el proceso de evaluación de los aprendizajes según dicho enfoque. Sobre esto, el informe continúa diciendo que "el docente necesita conocer los contenidos y competencias que promueve, cómo son aprendidos por sus estudiantes, cómo mediar en el aula y cómo pueden evaluarse" (PEN, 2017, p. 386).

De modo que resulta necesario ampliar y mejorar las estrategias para llevar a cabo el proceso de evaluación. En particular, la presente investigación se centra en la evaluación del trabajo cotidiano. La razón por la que se escogió dicho componente sobre los demás (pruebas, tareas y asistencia) se debe a que se le ha otorgado un gran peso dentro del promedio de cada periodo. Para la Educación Diversificada el trabajo cotidiano corresponde al 35% de la nota.

Esta investigación presenta una propuesta que permite realizar una evaluación del trabajo cotidiano, a partir del nivel de logro de las habilidades matemáticas propuestas en los Programas de Estudio de Matemáticas, específicamente para el tema de funciones reales de variable real (en décimo año), siguiendo el enfoque de la resolución de problemas y buscando el beneficio de los estudiantes al valorar no solo el resultado final de su razonamiento seguido al resolver problemas, sino también los procesos utilizados.

Por otro lado, y como se ha mencionado, los actuales Programas de Estudio de Matemáticas presentan diversos cambios en los diferentes temas, en comparación con los programas del 2005, sobre todo en cuanto a los contenidos y las habilidades para cada nivel, pero siempre manteniendo la idea de que los programas de estudio deben estar orientados a ayudar al docente a romper el mito de que “las Matemáticas son áridas, feas, imposiblemente difíciles y algo de lo que los estudiantes tienen que sentir miedo” (MEP, 2012, p. 11).

Teniendo en cuenta lo antes mencionado, y para tener una idea clara de la manera en que los actuales programas de estudio de matemática pretenden que se desarrollen las habilidades del área de relaciones y álgebra (específicamente las funciones, que son las que resultan de interés para esta investigación), se describe a continuación la concepción del área de relaciones y álgebra que plantean los actuales programas de estudio de matemáticas.

La propuesta de los actuales programas para el área de relaciones y álgebra consiste en introducirla desde temprana edad y de manera gradual en los estudiantes, esto con el fin de ir edificando “un fundamento pedagógico para el aprendizaje de las funciones, una visión integradora de lo funcional y simbólico, y el cultivo de un sentido en el aula que favorezca la modelización de situaciones en diversos contextos” (MEP, 2012, p. 12).

Por lo que, la importancia de los temas de esta área, sobre todo en el Ciclo Diversificado, radica en que muchos de los contenidos que se desarrollan poseen estrecha



conexión y continuidad con la formación profesional en muchas carreras que requieren matemáticas, como las ingenierías y las ciencias naturales, “por eso, en los últimos años de la Secundaria se insiste en contenidos y habilidades de las funciones, con una fuerte orientación hacia la resolución de problemas y la modelización (MEP, 2012, p. 54).

De igual forma, las “actuales perspectivas de la Geometría se colocan con fuerza dentro del Álgebra y las funciones, y eso mismo permite mostrar la visión moderna de esta disciplina matemática, lo que al mismo tiempo será de gran utilidad para muchos estudiantes al cursar estudios superiores” (MEP, 2012, p. 52).

Es importante también recordar que los “conocimientos y habilidades específicas se pueden construir o aplicar a través de las acciones que ofrece la modelización” (MEP, 2012, p. 31). De todo lo anterior, es claro que, las funciones al poder modelar situaciones de la vida real, permite también aplicar conocimientos y habilidades, lo cual, es un aspecto importante. Además, la modelización “siempre aparecerá de manera integrada al proceso Plantear y resolver problemas” (MEP, 2012, p. 31).

Otro aspecto importante de señalar es que se pretende dejar un poco de lado lo abstracto y la formalidad de los conceptos que usualmente se han enseñado, para hacerlos más prácticos y vivenciales, con problemas contextualizados que presentan situaciones que se pueden modelar con una función, o problemas como los que se puede encontrar en un libro de Física, donde existen variables dependientes e independientes, como la posición, la distancia y el tiempo. Sobre esto el MEP menciona que

Las funciones, que usualmente han tenido en el pasado sólo un tratamiento muy abstracto de relaciones entre elementos de conjuntos (correspondencias, dominios, condominios, ámbitos, etc.), se colocan aquí en otra perspectiva más concreta: relaciones de cambio entre 2 variables (que dependen entre sí). Las funciones vistas

así están asociadas a relaciones más generales, como pueden ser las relaciones de orden (menor o mayor que) o las relaciones de divisibilidad, etc. Asuntos como la proporcionalidad, los porcentajes, las velocidades o razones de cambio forman parte de esta área (MEP, 2012, p. 54).

Referente a lo anterior y al concepto de cambio o variación, que también es común al análisis de datos; este “forma parte central de los temas de esta área. Se podría decir que los procesos de cambio pueden ser modelados por las relaciones y funciones matemáticas, y éstas pueden tener distintas representaciones: gráficas, tabulares, simbólicas” (MEP, 2012, p. 54). Lo anterior expresa la importancia de las funciones para la modelización de diferentes situaciones como los procesos de cambio. Así, la utilidad de las funciones va más allá de un fin en sí mismo, complementando otras áreas. Por último, y a modo de resumen, el tema de funciones es de vital importancia, por las siguientes razones:

- Su versatilidad, aplicación, utilidad en diversos campos de estudio.
- Poder modelar diferentes contextos de la vida real para poder exponerlos dentro del aula permitiendo así desarrollar el enfoque (siempre que se desarrolla un modelo se matematiza la realidad) del MEP.
- El deseo constante del MEP de orientar los contenidos y habilidades de las funciones hacia la resolución de problemas.
- Permitir mostrar la visión moderna de otros temas como la geometría cuando se colocan con fuerza dentro del álgebra y las funciones.
- Poder modelar diferentes aspectos permite aplicar conocimientos y habilidades específicas a través de las acciones que ofrece la modelización.
- Dado que las funciones corresponden a un proceso de modelización, siempre aparecerá de manera integrada al proceso plantear y resolver problemas.

- Por su utilidad de manera más general, es decir, en relaciones de orden o las relaciones de divisibilidad, entre otras.
- Brindar coherencia a muchos contenidos matemáticos.

Lo expuesto anteriormente, evidencia la importancia que tiene el tema de funciones en los actuales programas de estudio de matemáticas y por lo cual resulta de interés para esta investigación, que consiste en el diseño de un instrumento de evaluación para el trabajo cotidiano, que permita evaluar las habilidades propuestas para décimo año en el tema de funciones y que incluya en su evaluación los diferentes niveles de complejidad y los niveles de logro de las habilidades.

### **El Problema de Investigación**

La evaluación es un aspecto fundamental en el currículo, la cual brinda un panorama del dominio que los estudiantes han logrado de cierta habilidad específica, mediante la aplicación de sus instrumentos de medición. Además, permite conocer si es necesario realizar cambios en la manera como se lleva a cabo el proceso de mediación pedagógica o si se deben retomar aprendizajes previos que sean necesarios para avanzar en los nuevos aprendizajes. De acuerdo con (Cárdenas, Blanco, Guerrero y Caballero, 2016), la evaluación:

Es uno de los organizadores del currículo que debe formar parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, además a través de ella se constata la adquisición de aprendizajes. Conjuntamente, entendemos que resolver problemas es un objetivo de aprendizaje, tal y como se refleja en las propuestas curriculares, por lo que este se convierte en objeto de evaluación (p. 649).

La evaluación es un elemento esencial del currículum porque trastoca todos los demás componentes, por lo tanto, pasar de un modelo educativo basado en la enseñanza a uno

centrado en el aprendizaje, obliga a repensar y cambiar profundamente las formas de valorar los logros de aprendizaje de los alumnos (Moreno, 2009).

En Costa Rica se presentó una reforma en la educación matemática entre los años 2012-2013, que tiene como enfoque principal del currículo la Resolución de Problemas con énfasis en contextos reales. “Se trata de una estrategia pedagógica, no de un ajuste de contenidos (aumento o disminución), y su finalidad es transformar la acción de aula” (Ruiz, 2015, p. 69). Además de todo lo anterior, Ruiz expone que para una correcta implementación de este currículo es necesario que se modifique la evaluación en el aula.

Por otro lado, el Programa Estado de la Nación (2017), en el Sexto Informe del Estado de la Educación expone que “las metodologías empleadas por los profesores son tradicionales, poco participativas y centradas en el educador, pese a que el actual programa de matemáticas del MEP insta a aplicar métodos de construcción conjunta del conocimiento” (p. 320).

También, aunque las pruebas escritas (exámenes) sean criticadas y mal vistas por los expertos en evaluación, por el alumnado e incluso por muchos profesores, se siguen realizando, y en muchos casos son usadas como el instrumento de evaluación por excelencia (Agüero y Meza 2014). Así, se observa que existe una necesidad de contar con metodologías de evaluación que respondan a las demandas que impone la acción de aula, y que cumplan con los estándares y requerimientos del currículo nacional donde se da una mayor importancia al trabajo cotidiano.

De todo lo mencionado anteriormente es que se genera la interrogante: ¿De qué manera se puede realizar la evaluación del trabajo cotidiano a partir del nivel del logro de las habilidades propuestas por el Ministerio de Educación Pública, en el tema de funciones reales de variable real de décimo año de la educación secundaria en Costa Rica?

## **Objetivos de la investigación**

### ***Objetivo General.***

Desarrollar una propuesta de evaluación del trabajo cotidiano a partir del nivel del logro de las habilidades en el tema de funciones reales de variable real, que responda al enfoque de resolución de problemas establecido por el Ministerio de Educación Pública, como una herramienta para docentes de décimo nivel de educación secundaria.

### ***Objetivos Específicos.***

1. Describir principios, características, métodos, instrumentos y técnicas para la evaluación del trabajo cotidiano, que responda al enfoque de la resolución de problemas en Matemáticas.
2. Indicar las técnicas o instrumentos utilizados para evaluar el nivel de dominio de las habilidades matemáticas a nivel internacional.
3. Diseñar una propuesta para evaluar el trabajo cotidiano a partir del nivel del logro de las habilidades en el tema de funciones reales de variable real, como una herramienta para docentes de décimo nivel, y que responda al enfoque de resolución de problemas establecido por el Ministerio de Educación Pública.

## **Antecedentes del Problema**

En este apartado se exponen algunos resultados de investigaciones que se consideran pertinentes para este estudio, ya que, los autores que se presentan a continuación proporcionan una visión más amplia sobre el tema investigado.

### ***Antecedentes Internacionales.***

Dentro de las demandas internacionales en evaluación educativa se plantea la necesidad de que los métodos de evaluación vayan acordes con los programas de estudio

establecidos, además de afirmar que los instrumentos tradicionales de evaluación no son suficientes para recoger de forma adecuada la información requerida para la evaluación.

La evaluación necesita tener en cuenta todos los aspectos que se consideran en el modelo de enseñanza, tanto los que corresponden a las competencias como a las cualidades personales. Las herramientas tradicionales de evaluación, exámenes y tareas principalmente, resultan insuficientes para la recopilación de la información necesaria y para su análisis, e incluso para lograr una retroalimentación efectiva y oportuna con los estudiantes (Flores y Gómez, 2009, p. 124).

La resolución de problemas es considerada dentro del currículo nacional el eje principal del currículo y la estrategia pedagógica a emplear para desarrollo de capacidades superiores, así se vuelve fundamental conocer cómo evaluar la resolución de problemas desde los diferentes aspectos internacionales. Para Carrillo (1995) lo primero que se debe hacer son dos cosas: la determinación de aspectos a evaluar y la definición o descripción de tareas. Por otra parte, otros autores como Bados y García (2014) afirman que para poder medir el rendimiento en la resolución de problemas se debe conocer el rendimiento al aplicar las habilidades para la solución del mismo. Al seguir esas ideas y lo planteado por el MEP se evidencia que es importante contar con una herramienta que establezca el nivel de logro al emplear las habilidades matemáticas requeridas para resolver los diferentes tipos de problemas que se presentan durante el desarrollo de las lecciones.

Por otra parte, en la tesis doctoral de Cárdenas (2014), la cual realizó en Colombia y titulada *La Evaluación de la resolución de problemas en Matemáticas: Concepciones y prácticas de los profesores de secundaria*, donde Puig y Santos-Trigo (citados por Cárdenas, 2014) afirman que “la resolución de problemas es un factor indispensable de estudio, dado que forma parte indisoluble del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y su

currículo. Por lo cual, requiere su propio espacio para ser investigado” (p. 57). De acuerdo con lo anterior, la resolución de problemas está naturalmente presente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y no se podría pensar en el último sin la primera. Además, en este proceso se debe tener en cuenta que

el estudiante no solamente debe aprender definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas, sino que también debe ser capaz de ocuparse de problemas, donde él sea capaz de actuar, formular, observar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etcétera; y de encontrar buenas preguntas, pues esto es tan importante como encontrarles solución (Cárdenas, 2014, p. 63).

Una de las principales conclusiones de esa investigación es que los profesores manifiestan que, aunque evalúan los aspectos que se sugieren en el currículo, acerca de la resolución de problemas, no todos lo hacen con la misma intensidad. Los que más tiene en cuenta son los cognitivo/conceptuales, luego los aspectos heurísticos y, finalmente, los afectivos y personales del estudiante (Cárdenas, 2014).

Adicionalmente, Blanco, Caballero, Cárdenas y Guerrero (2016) en su artículo titulado *Manifestaciones de los Profesores de Matemáticas sobre sus Prácticas de Evaluación de la Resolución de Problemas*, mencionan que elaboraron un cuestionario sobre la evaluación de la resolución de problemas a partir de las demandas que se hacen en el currículo nacional de matemáticas colombiano, y lo aplicaron a 211 profesores de matemáticas de secundaria de Bogotá, en busca de analizar los criterios que los profesores dicen considerar al evaluar la resolución de problemas y el nivel de importancia que le otorgan a evaluar cada uno de esos aspectos que implica la resolución de problemas.

Como resultados, mencionan que sus informantes, aunque consideran prioritarias las demandas curriculares en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de las estrategias heurísticas, su evaluación se centra en el desarrollo de procedimientos meramente *mecánicos*. Igualmente, destacan que, aunque se reconoce la importancia de la evaluación de los aspectos afectivos, las evaluaciones de estos se consideran en menor medida.

También, Castro (citado en Blanco et al, 2016) afirma que la presencia e importancia de la Resolución de Problemas se ha mantenido e incluso acrecentado en las propuestas curriculares, tanto nacionales como internacionales, aunque su repercusión en las aulas no ha sido acorde con lo deseado en los objetivos de los currículos. Por lo tanto, puesto que la resolución de problemas es el enfoque principal del currículo nacional para poder alcanzar las capacidades superiores, es importante conocer técnicas adecuadas para su implementación en las aulas y en particular, técnicas de evaluación en el aula, acordes con este enfoque.

Además, Azcárate y Cardeñoso (2012) afirman que "valorar el grado de dominio de la competencia matemática, o de cualquiera de sus dimensiones, implica analizar las actuaciones del alumno ante actividades reales o simuladas puestas en contexto" (p. 36). Es decir, al evaluar la competencia matemática, el docente se debe apoyar en las respuestas del alumno y cómo éste actúa ante situaciones problema ya sean ficticias o de la vida real. En el mismo sentido Bolívar (2009) y Lester y Kroll (1991) aseguran que

Evaluar competencias sólo tendrá sentido a través de la propuesta de un conjunto de situaciones que impliquen la puesta en práctica de los conocimientos adquiridos y exijan resolver con éxito una situación donde éstos sean necesarios, a imagen de las tareas que se propongan habitualmente en clase y que promueven las habilidades de los alumnos en este mismo sentido (Citado en Villalonga, 2017, p. 41).



Para algunos autores como Espinoza (2013) y Alsina (2018), la rúbrica es el instrumento más adecuado para evaluar las competencias y los niveles de desempeño. Así Espinoza (2013) dice que

Consideramos que la más adecuada para evaluar la mayoría de las competencias es la rúbrica, también llamada matriz de valoración o plantilla de evaluación. Estamos ante un recurso para la evaluación integral y formativa, un instrumento de orientación o una herramienta pedagógica, que establece criterios para valorar y evaluar distintos niveles de desempeño y dominio de competencias (p. 247).

#### *Antecedentes Nacionales.*

Ruiz (2014), en el Quinto Informe del Estado de la Educación describe los primeros actos referentes a la implementación de los actuales programas, por ejemplo, las capacitaciones a los docentes y los recursos necesarios que facilitan el trabajo docente, además de la elaboración de documentos de apoyo curricular, uno para cada ciclo, así como también acceso a más de 40 unidades didácticas que elaboradas durante los cursos bimodales, y finalmente la elaboración de 11 documentos (uno para cada año lectivo) con una organización de los contenidos curriculares integrando habilidades específicas de manera explícita.

Además, dicho informe dedica un apartado a la evaluación de aula y la macro evaluación, donde se expone cómo la implementación curricular está directamente ligada con la evaluación. No obstante, solo menciona que la evaluación en la prueba escrita, debe responder a la estrategia de aula implementada (la resolución de problemas), específicamente en los ítems de desarrollo.

Este apartado también habla sobre el rubro del Trabajo Cotidiano en el enfoque de la Resolución de Problemas, pero justifica la impotencia de una adecuada medición tanto en la

enseñanza primaria como la secundaria en Costa Rica, por medio de instrumentos (observaciones, revisión de portafolios u otros), “en el primer caso a la gran cantidad de estudiantes que en promedio atiende un docente de matemáticas y en el segundo debido a que debe hacerse en todas las asignaturas por un docente” (Ruiz, 2014, p. 18). De lo anterior se puede deducir que el trabajo cotidiano es difícil de evaluar en secundaria, ya que, son muchos los estudiantes que están a cargo de un docente, mientras que en primaria el maestro deberá medir el trabajo cotidiano en muchas asignaturas y a eso se le suma la cantidad de estudiantes que tengan a su cargo.

Adicionalmente, Ruiz (2014) sugiere posibles instrumentos para adecuar la evaluación a la mediación, como exámenes cortos y tareas con carácter sumativo, también incluir en las tareas proyectos colectivos para favorecer exploraciones y trabajos especiales relacionados con contextos reales. Por último, remite la responsabilidad del Consejo Superior de Educación y del Ministerio de Educación Pública de construir o aportar un nuevo Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes y otros instrumentos más acordes con el nuevo currículo en matemáticas. Esta sugerencia es atendida con el reglamento presentado en el 2018 y modificado en el 2019 para incluir lo concerniente a las pruebas nacionales de Fortalecimiento de los Aprendizajes para la Renovación de las Oportunidades (FARO).

Por otro lado, García y Blanco (2014) realizaron una investigación en la que aplicaron una encuesta a docentes de Matemática de los centros educativos de secundaria de la provincia de Cartago para conocer las perspectivas de estos docentes sobre la evaluación. Sin embargo, aunque sus resultados son muy interesantes, no es posible realizar una generalización de esta investigación, ya que, la muestra no es representativa si se toma como población a todos los docentes del país.

Uno de sus resultados es de particular interés para el presente trabajo, y es que “solo un grupo pequeño de los docentes que participaron en el estudio (19%) manifiestan disconformidad con la manera tradicional de concebir la evaluación” (García y Blanco, 2014, p. 27). Es decir, dentro de esta investigación existe un gran porcentaje de docentes de matemáticas (el 81% de los docentes que participaron en el estudio) que se sienten conformes con la forma tradicional de evaluar, aunque las nuevas tendencias y los actuales programas indican que es necesario modificar tales prácticas

Una investigación similar sobre la evaluación de los aprendizajes en la educación media fue realizada por Agüero y Meza (2014), también en Cartago. En este caso el objetivo principal era analizar la estructura de las pruebas escritas recolectadas en los colegios de la provincia.

Se analizaron las partes que deben componer una prueba escrita según lo que establece el Ministerio de Educación Pública y los diferentes tipos de ítems que pueden contener. De aquí se determinó que los exámenes contenían una gran cantidad de ítems de selección única. Este hecho es preocupante, ya que la asignación de puntaje en algunos de los ítems objetivos no resulta justa en comparación con algunos de desarrollo. Por otra parte, esta situación parece revelar falencias del sistema educativo costarricense en cuanto al uso de la resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje de la matemática (Agüero y Meza, 2014).

Esto último evidencia un problema en la manera en que se está realizando la evaluación de los aprendizajes entre los docentes de Cartago, incluso después de que se inició con la aplicación de la reforma educativa.

Otro documento de importancia es el artículo denominado: *Desarrollo en la prueba nacional de bachillerato de Matemática: Una necesidad*, elaborado por Pablo Mena en el año

2015, en el cual se realiza un estudio teórico acerca de los nuevos Programas de Estudio de Matemáticas, donde señala que deben cumplirse los lineamientos metodológicos establecidos por el Ministerio de Educación Pública.

Este artículo se deriva de una investigación bibliográfica. Su aporte con respecto a la evaluación no está delimitado a nivel micro, sino a nivel macro, es decir, trata de justificar la necesidad de que las pruebas nacionales de Matemática deben estar diseñadas siguiendo el enfoque de la resolución de problemas. Algunas conclusiones sobre la evaluación en las pruebas de bachillerato según Mena (2015, p. 65) son las siguientes:

- Es necesario que en la prueba nacional de bachillerato de Matemática se incorporen ítems de desarrollo, para que dicha prueba sea congruente con la propuesta curricular de los nuevos programas de estudios.
- El enfoque de todos los ítems de la prueba nacional de bachillerato de Matemática debe ser la resolución de problemas.

Siempre se le ha dado una gran importancia a las Pruebas Nacionales de Bachillerato pues estas se conciben como el objetivo final de la Educación Diversificada en Costa Rica, y Matemáticas no es la excepción, por eso es primordial que estas pruebas a nivel macro tengan el mismo enfoque que el establecido para el proceso de enseñanza y aprendizaje a nivel micro.

Así mismo, sobre la evaluación de la resolución de problemas, en el artículo *Balance y Perspectivas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*, escrito por Ángel Ruiz en el año 2015, se brinda un análisis acerca del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, y de los elementos del currículo según las directrices del MEP, también se describieron los desafíos en relación con la preparación docente y el papel de las universidades a largo plazo.

Uno de los principales puntos hallados es la postura a favor de una evaluación a nivel macro utilizando la resolución de problema. Sobre esto, Ruiz (2015) expone que “para la implementación curricular en Matemáticas en lo que a la evaluación se refiere esta es la principal prioridad nacional. El bachillerato condiciona mucho lo que se hace en las aulas” (p. 23).

La cita previa converge con las conclusiones descritas por Mena (2015), dejando una limitante sobre cómo evaluar, simplemente se muestra el hecho de que es una prioridad que la metodología esté acorde con la evaluación. Así Ruiz (2015) agrega que “evaluación de aula y macroevaluación no persiguen los mismos propósitos, pero deben ser congruentes y tener más semejanzas que diferencias. Y el país no puede esperar más para realizar cambios significativos en ellas” (p. 23).

El artículo de Ruiz puntualiza en la necesidad de cambios en la evaluación, sobre todo basado en los actuales Programas de Estudios de Matemática, exponiendo diferentes vertientes teóricas en la importancia de las habilidades específicas, metodológicas y curriculares, dejando una deficiencia para evaluar según lo propuesto a nivel micro. Además, Ruiz (2015) es claro al exponer que, para implementar realmente este currículo, es necesario hacer un cambio en la manera de evaluar, ya que la evaluación de aula es crucial y debería acompañar la puesta en marcha de la actual reforma alimentando la construcción de aprendizajes con base en el enfoque de resolución de problemas.

Cabe destacar una investigación en relación a la evaluación del logro de habilidades en el área de Estadística y Probabilidad de octavo año de la educación secundaria en Costa Rica, en la cual se estudiaron las características en cuanto a metodología y malla curricular de los programas de estudio de matemática del año 2012 en comparación con los de 1995. Luego mediante el método de investigación hermenéutico-dialéctico, se hace una indagación

teórica, después se realizaron observaciones de lección y entrevista a expertos. Con los datos recopilados se creó una propuesta que permitiera la evaluación del logro de las habilidades en dicha área matemática. Además, se ejemplifica cómo utilizar criterios e indicadores de logro para cada una de las habilidades matemáticas del área de estadística y probabilidad de octavo año. También se pone a disposición una hoja de cálculo que permite ponderar de acuerdo a las particularidades de cada lección, el peso porcentual de cada una de las habilidades matemáticas desarrolladas y así dar una calificación a cada estudiante (Duarte et al, 2015). De esta investigación es importante destacar las siguientes conclusiones:

- Los programas de estudio de matemáticas (2012) no brindan pautas específicas sobre cómo llevar a cabo la evaluación de los aprendizajes.
- Para proponer estrategias de aprendizaje acordes con intencionalidad de cada habilidad matemática, se requieren establecer criterios e indicadores claros, por medio de los cuales son observables y así poder determinar el nivel de logro.
- Los docentes se enfrentan a limitaciones como la cantidad de estudiantes, el tiempo y saturación de actividades, esto impide llevar a cabo la estrategia metodológica propuesta.
- Los momentos de la clase propuestos por el Ministerio de Educación Pública no se evidencian en las observaciones que se realizaron. No se lleva a cabo el momento de trabajo independiente del estudiante, lo que podría limitar el logro de la habilidad, puesto que el estudiante no se enfrenta a la situación problema y por eso no se llevan a cabo los procesos cognitivos.

## Capítulo 2: Marco Conceptual

En la presente sección se definen los conceptos más importantes para esta investigación, en donde se pueden destacar la evaluación y sus componentes y la resolución de problemas. A continuación, se dan las definiciones de estos y otros conceptos relacionados.

### **Evaluación de los Aprendizajes**

Para lograr un mayor entendimiento de la evaluación de los aprendizajes es importante entender primero qué es la evaluación, por lo cual, se procede a dar su definición.

#### *Evaluación*

La evaluación “es un elemento fundamental en el proceso de aprendizaje-enseñanza, al que coordina, regula y orienta. La evaluación está inmersa en los procesos con los que interactúa, como son los procesos de aprendizaje y de enseñanza” (Cabrerizo y Castillo, 2010). De modo que la evaluación realiza funciones de gran importancia para la mejora de los procesos, y “el arte de la evaluación de un currículum consiste en concebir, obtener, construir y distribuir información que pueda ser usada para mejorar la práctica educativa” (Norris, 1998, p. 216).

Otro punto de vista sobre la evaluación expone que es “un proceso sistemático donde se obtiene información, que permite tomar decisiones al reflexionar sobre el por qué y el para qué de la enseñanza, que tiene como finalidad el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje” (Bonillo, Bringas, deAndreis, Destéfano y Tenutto, 2005, p. 4).

Así, se entiende entonces que la evaluación es una parte integral de los procesos de enseñanza y aprendizaje que, además, tiene funciones trascendentales en la praxis educativa, como la de recopilar información que sirve para orientar y dar sentido al proceso educativo.

### *Evaluación de los Aprendizajes.*

El Ministerio de Educación Pública (MEP) en la última revisión del Reglamento Evaluación de los Aprendizajes (2019), da una definición de la evaluación de los aprendizajes, en el capítulo I, sección I, artículo 3, el cual establece que

es un proceso continuo de recopilación de información cualitativa y cuantitativa, que fundamenta la emisión de juicios de valor y la toma de decisiones por parte de la persona docente y el estudiantado, para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje (MEP, 2019, p. 4).

Un concepto similar de evaluación de los aprendizajes remite a que “es un proceso para recopilar evidencia, a profesores y estudiantes, acerca del logro de unos objetivos o metas previamente establecidos” (Ortiz, 2006, p. 1). Además, se expone como un proceso que permite reconocer logros y dificultades en el aprendizaje de los estudiantes y que da información sobre la marcha de la enseñanza, haciendo posible la toma de decisiones sobre el tipo de intervenciones pedagógicas que se deben hacer para conseguir mejores y más ricos aprendizajes (Ministerio de Educación, 2015).

Se entiende entonces la evaluación del aprendizaje como actividad necesaria en los procesos de aprendizaje y enseñanza que busca recopilar información o evidencia que valore los procesos (aprendizaje y enseñanza) y la cual representa los criterios o fundamentos para la toma de decisiones de mejora en el aprendizaje y en los logros de los objetivos planteados.

### *Evaluación del Proceso*

Con el auge de las nuevas tendencias en educación matemática se han dado modificaciones en los programas de estudio, cambiando por completo el dinamismo que desempeña el estudiante durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, pasando de ser pasivo



a tomar un mayor protagonismo, con lo cual surge la necesidad de modificar la forma en que se evalúa el actuar de los estudiantes.

El centro de referencia se sitúa en el alumno, lo que significa dar al alumno el protagonismo y la responsabilidad que le corresponde como principal agente de su proceso de aprendizaje. Esa es la razón por la que pasamos de hablar del proceso de enseñanza-aprendizaje, a los procesos de aprendizaje y de enseñanza, por ser el alumno el verdadero protagonista de tal proceso (Cabrerizo y Castillo, 2010, p. 116).

Resulta importante establecer lo que se va a entender entonces por evaluación del proceso, el cual, según Mora (2004) consiste en

la comprobación permanente de la realización de un plan o proyecto. Se plantea como objetivos, proporcionar a las personas encargadas de la administración y al personal de la institución, información continua acerca de la ejecución del programa y de la guía para modificar o explicar el plan (p. 16).

Desde esta perspectiva, la persona responsable del proceso evaluativo se convierte en un informante del avance del mismo. Siguiendo esta idea, la evaluación de los aprendizajes con base en el enfoque de resolución de problemas, se caracteriza por necesitar evaluar el proceso y no solo el resultado, por lo que se debe tener en cuenta las ideas y estrategias que hayan surgido durante las fases de la lección.

Además, como en los salones de clase se trabaja con poblaciones muy diversas de estudiantes, existe una gran cantidad de elementos de los cuales se puede obtener información para evaluar el progreso de los alumnos durante el proceso de resolver el problema, por ejemplo:

Las conjeturas, imágenes o intenciones; estrategias de comprensión tales como diagramas, tablas, gráficos o cualquier otra forma que permita expresar la información;

el diseño de un plan como la utilización de métodos algebraicos o aritméticos, trasladar el problema a un contexto geométrico o numérico o descomponerlo en otros más simples y, finalmente, verificar el resultado de las operaciones, considerar las conexiones entre los contenidos para analizar el significado de la solución (Blanco, Caballero y Cárdenas, 2015, pp. 229-230).

Así, las formas mediante las cuales se puede evaluar el proceso de solución de un problema son tan diversas como los mismos estudiantes y sus habilidades y fortalezas.

### **Funciones de la Evaluación**

La evaluación posee funciones elementales para velar por el mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos, asimismo debe existir un proceso continuo antes, durante y después, con el fin de alcanzar los objetivos propuestos.

Para efectos de este trabajo se definirán tres funciones de la evaluación; la diagnóstica, formativa y sumativa, como lo establece el Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes del Ministerio de Educación Pública y (2019) estipulados en el capítulo I, sección I, artículo 4. Estas tres funciones de evaluación son complementarias, se pueden ubicar temporalmente en el proceso y se incorporan como elementos del modelo educativo. “Cada tipo de función proporciona determinado tipo de realimentación que permite tomar decisiones de carácter diferente, aunque todas ellas con el mismo propósito de mejorar los procesos de aprendizaje” (Segura, 2009, p. 7). A continuación, se definirán los tres tipos de funciones de la evaluación a partir de diferentes autores, para finalmente establecer una definición propia.

### ***Evaluación Diagnóstica***

La evaluación diagnóstica es esencial para iniciar cualquier curso educativo, es la mejor forma de aproximarse a un panorama contextualizado, lo cual es considerado dentro de

los programas como importante al formar parte de sus fundamentos como contextualización activa de los problemas. El MEP (2019) en el Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes, artículo 4, inciso a, define la función de la evaluación diagnóstica, como aquella que “permite conocer el estado inicial de la persona estudiante en las áreas del desarrollo: cognoscitiva, socio-afectiva y psicomotriz, con el fin de facilitar, con base en la información que de ella se deriva, la aplicación de las estrategias correspondientes”

También permite prevenir problemas a corto, mediano y largo plazo durante el tiempo determinado del curso, pues permite al docente considerar conocimientos previos y recordarlos en actividades de clase para una mejor comprensión, tal como se mencionó en la cita anterior. También la evaluación de carácter diagnóstico, que se realiza en un momento determinado del proceso didáctico, “sirve de base y sustento para adoptar decisiones relativas a la realización de actividades de apoyo específicamente orientadas a la superación de problemas que presente el estudiantado” (Segura, 2009, p. 7).

La evaluación diagnóstica consiste en que el profesor inicie el proceso educativo conociendo las características de sus alumnos, lo que permitirá al profesor diseñar estrategias didácticas y acomodar su práctica docente a la realidad de todos y cada uno de sus alumnos (Castillo y Cabrerizo, 2010).

En resumen, se entenderá por evaluación diagnóstica a aquella que se realiza antes de empezar un proceso de enseñanza y aprendizaje de nuevas habilidades. Esto se realiza con la finalidad de obtener información respecto a la ubicación de los estudiantes en cuanto a conocimientos previos necesarios para abordar los nuevos contenidos y habilidades.

### *Evaluación Formativa*

La evaluación formativa debe detectar los aspectos positivos y aspectos por mejorar, esto permite no solamente medir el producto final (exámenes), sino ver el mejoramiento y

dominio de los objetivos propuestos por el docente. La función de la evaluación formativa consiste en brindar información necesaria y oportuna durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, con la finalidad de reorientar o realimentar las áreas que así lo requieran (Ministerio de Educación Pública, 2019).

De acuerdo con la cita anterior, es fundamental que los docentes utilicen diferentes estrategias metodológicas que sean apropiadas a los requerimientos del proceso educativo y la evaluación formativa es una herramienta útil a la hora de identificar la estrategia metodológica más adecuada para cumplir con los objetivos propuestos. La función de la evaluación formativa es regular el proceso educativo en el aula, esta se integra a la intervención didáctica ya que está centrada en los procesos más que en los resultados de aprendizaje, por lo que la realimentación permite detectar lagunas, desviaciones y obstáculos para el desarrollo del trabajo cotidiano del estudiantado (Segura, 2009).

Ahora bien, para efectos de esta investigación se considerará la función de la evaluación formativa como la definida por Castillo y Cabrerizo (2010), quienes afirman que “es la evaluación que sirve como estrategia de mejora para ajustar y regular sobre la marcha los procesos educativos, de cara a conseguir los objetivos previstos y las competencias básicas establecidas” (p. 38).

### ***Evaluación Sumativa***

Esta evaluación posee un gran peso en la comunidad educativa, pues entre sus usos está determinar si un estudiante aprueba, o en caso contrario, pierde el curso de una asignatura. La evaluación sumativa “constata los logros alcanzados al término de un proceso de aprendizaje y fundamenta la calificación, la promoción y la certificación” (Ministerio de Educación Pública, 2019).

Según la cita anterior, el resultado final toma una gran importancia dentro de la evaluación sumativa. Pero sin duda alguna esto deja de lado momentos en medio de los procesos evaluativos, en los que también deberían realizarse una evaluación, es decir, el que un estudiante logre dominar los objetivos en los diferentes rubros de la evaluación sumativa debe ser tan importante como las acciones tomadas por el estudiante para llegar a dicho resultado. En este contexto, se comprenderá a la evaluación sumativa como la que se aplica al final de un periodo de tiempo determinado para comprobar los logros alcanzados en ese intervalo de tiempo. Se pretende determinar el grado de aprovechamiento del alumno y si se alcanzaron o no los objetivos propuestos y las competencias básicas establecidas (Castillo y Cabrerizo, 2010).

En el sistema educativo costarricense la evaluación sumativa presenta diferentes componentes de calificación, los cuales, son de vital importancia para realizar un diseño evaluativo, por lo que es necesario definir cada componente de acuerdo con el Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes del MEP (2019). Estos componentes de calificación para la Educación Diversificada, en la asignatura de Matemáticas, según el artículo 37 (inciso a) son los siguientes:

**Tabla 1**

*Componentes de la evaluación en el Ciclo Diversificado en Costa Rica*

Componente	Porcentaje
Trabajo Cotidiano	35%
Tareas	10%
Pruebas (mínimo dos)	45%
Asistencia	10%

Nota. De “Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes”, por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2019.

**Trabajo cotidiano.** De acuerdo con el artículo 26 del Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes (MEP, 2019), el trabajo cotidiano consiste en:

las actividades educativas que realiza el estudiantado con la guía y orientación de la persona docente según el planeamiento didáctico y el programa de estudios. Para su calificación se deben utilizar instrumentos técnicamente elaborados, en los que se registre información relacionada con el desempeño de la persona estudiante. La misma se recopila en el transcurso del período y durante el desarrollo de las lecciones, como parte del proceso de enseñanza - aprendizaje y no como producto, debe reflejar el avance gradual de la persona estudiante en sus aprendizajes.

Por otro lado, el trabajo cotidiano es entendido por Soto (2001) como “la respuesta del estudiante al resultado de la propuesta metodológica que ofrece el docente para el desarrollo de sus necesidades, inquietudes e intereses” (p. 1). Según la definición anterior, el trabajo cotidiano va íntimamente ligado a los métodos de enseñanza que el docente aplique, es decir, si el profesor decide aplicar cierta modalidad, la forma de evaluar debe responder de alguna forma a ese método de enseñanza.

Con respecto al presente trabajo de investigación se estará tomando como definición de trabajo cotidiano a las actividades que realiza el estudiante durante las lecciones como respuesta a las habilidades propuestas por el docente, para el cual se deben utilizar instrumentos especialmente diseñados para registrar la información de interés acerca del trabajo estudiantil

**Tareas.** El MEP (2019) en el Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes, artículo 27, define las tareas como “trabajos cortos que se asignan al estudiantado con el propósito de

aprendizajes esperados, de acuerdo con la información recopilada durante el trabajo cotidiano” (p. 24).

**Pruebas.** El Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes, en el artículo 28, define pruebas como un instrumento de medición cuyo propósito es “que el estudiantado demuestre la adquisición de habilidades cognitivas, psicomotoras o lingüísticas. Pueden ser escritas, de ejecución u orales. Para su construcción se seleccionan los aprendizajes esperados e indicadores” (MEP, 2019).

**Asistencia.** El último componente de la evaluación sumativa en matemáticas es la asistencia, la cual se define en el artículo 30 del Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes (MEP, 2019) como “la presencia de la persona estudiante en las lecciones y en todas aquellas otras actividades escolares a las que fuere convocado”.

### **Principios de la Evaluación**

El enfoque curricular principal de los programas de estudio es la resolución de problemas como estrategia metodológica, lo cual conlleva a un cambio en el proceso evaluativo. El Ministerio de Educación establece 6 principios en relación con la evaluación.

El primer principio señala que esta “es parte integral del proceso de enseñanza y aprendizaje” (MEP, 2012, p. 69), esto quiere decir que la evaluación

No debe considerarse un proceso separado de la mediación pedagógica, o como un conjunto de pruebas aplicadas al finalizar una unidad o un tema. Debe constituirse en parte natural del proceso de aprendizaje, que tiene lugar durante las actividades que se plantean en la clase, cuando cada estudiante participa, escucha, analiza situaciones del entorno y propone estrategias para su solución considerando los diferentes niveles de complejidad (MEP, 2012, p. 69).

Por lo que es importante siempre seguir una línea que integre el proceso de enseñanza con la evaluación y no solo ver esta última como la medición al final de un período, sino como el proceso que nos permite considerar los aspectos expuestos por el MEP.

El segundo principio menciona que la evaluación “constituye un proceso colaborativo”, esto se refiere a que cada estudiante aprende de sus compañeros y del docente y este último aprende de sus estudiantes. El desarrollo de actividades que impliquen que se ponga en práctica las habilidades, destrezas y competencias del estudiante favorece el desarrollo de su autoestima, valores y actitudes, además de que propicia que se generen creencias positivas respecto de la asignatura (MEP, 2012, p. 69). Este principio recalca la importancia de una educación no solo enfocada en el docente sino también en el estudiante y en cómo el aprendizaje se da en ambos sentidos.

El tercer principio corresponde a la pertinencia con las actividades de mediación y estipula que “durante el desarrollo de las actividades de mediación, es necesario recopilar información cualitativa y cuantitativa acerca del desempeño estudiantil en las distintas áreas matemáticas” (MEP, 2012, p. 70). Este principio expone la importancia de guardar información que permita ver el desarrollo de los estudiantes, para la mejora de la enseñanza (si fuera necesario) o poder medir si el trabajo que se está realizando con las diferentes estrategias es el correcto.

El cuarto principio se denomina “Congruencia de las técnicas e instrumentos” y se refiere a que “las técnicas e instrumentos que se utilicen en el proceso de evaluación deben ser variados y adecuados al nivel que pretende evaluar, deben servir para reflejar el nivel de conocimiento y las habilidades específicas logradas” (MEP, 2012, p. 70). Con lo cual debemos preguntarnos, ¿cuál sería un método apropiado para evaluar dentro de las actuales condiciones?



El quinto principio afirma que la evaluación “permite la toma de decisiones”. La información recopilada mediante la evaluación debe permitir la reflexión sobre la práctica pedagógica y la toma de decisiones orientadas a la realimentación o reorientación de la misma. Además, permite identificar las fortalezas en el aprendizaje de cada estudiante (MEP, 2012).

Por último, como sexto principio de la evaluación, se establece que esta “promueve el compromiso hacia el aprendizaje” (MEP, 2012, p. 70). Sin embargo, para que eso suceda

Debe existir comprensión estudiantil sobre lo que son los objetivos de aprendizaje y además el deseo de realizarlos. Esta comprensión y compromiso hacia su propio aprendizaje surge cuando tienen conocimiento de los objetivos y los criterios que se utilizarán para evaluar su progreso. La comunicación clara de estos criterios implica formularlos de manera que se pueda entender lo que se espera del desempeño estudiantil (MEP, 2012, p. 70).

### ***Evaluación Interna***

La evaluación interna es aquella que se realiza desde dentro y por los propios integrantes de un programa, centro, equipo directivo o educativo (Cabrerizo y Castillo, 2010). A su vez, la evaluación interna, se puede fragmentar en heteroevaluación, autoevaluación y coevaluación. Cada una de estas es definida a continuación.

**Heteroevaluación.** Esta modalidad de evaluación sucede cuando los evaluadores y los evaluados no son las mismas personas y se lleva a cabo dentro del propio centro, por personal del mismo y sin la participación de evaluadores externos (Cabrerizo y Castillo, 2010). Por lo tanto, la heteroevaluación “consiste en la evaluación que realiza una persona sobre otra: su trabajo, su actuación, su rendimiento. Esta es la evaluación que habitualmente

llevar a cabo las y los docentes con las y los estudiantes” (Ministerio de Educación de Guatemala, 2010, p. 28).

Por consiguiente, la heteroevaluación es una evaluación interna, como la que el docente realiza a los estudiantes, donde el educador tiene el control del proceso evaluativo.

**Autoevaluación.** La autoevaluación ocurre cuando “las y los estudiantes valoran su proceso de aprendizaje. Su finalidad principal es contribuir a que estos aprendan a aprender y consecuentemente ser capaces de autorregular su propio proceso de aprendizaje, de este modo irán adquiriendo con ello mayor autonomía” (Ministerio de Educación de Guatemala, 2010, p. 26).

La autoevaluación desde el Modelo de Evaluación de la Calidad de la Educación Costarricense (MECEC) se define como un “proceso dinámico e incremental que permite obtener y proveer información, relevante y oportuna para la reflexión, emisión de juicios de valor y toma de decisiones, realizadas estas por los propios participantes o usuarios, propiciando el mejoramiento continuo en las instancias educativas” (MEP, 2017, p. 1).

A partir de las posturas citadas anteriormente, se puede definir la autoevaluación como aquel proceso evaluativo interno que el estudiante o el docente realiza sobre sí mismo para reflexionar sobre su aprendizaje.

**Coevaluación.** En esta modalidad de evaluación las personas o grupos pertenecientes a un centro “se evalúan mutuamente: es decir, evaluadores y evaluados intercambian su papel alternativamente” (Cabrerizo y Castillo, 2010, p. 40). Adicionalmente el Ministerio de Educación de Guatemala (2010), menciona que “en la coevaluación la responsabilidad por la valoración del aprendizaje es compartida; en la misma, participa más de una persona” (p. 27).

Queda claro entonces que la coevaluación es aquella que se da en colaboración del evaluado y el evaluador para la valoración del proceso de evaluación.

### *Evaluación Externa*

Este tipo de evaluación es descrita como un proceso donde agentes o personas que no están inmersos en el aula o centro educativo son los que realizan la evaluación, normalmente expertos evaluadores. La evaluación externa “es aquella en la que el evaluado y el evaluador son personas o instancias diferentes, y se realiza cuando agentes no integrantes habitualmente de un centro escolar o de un programa, evalúan su funcionamiento” (Cabrerizo y Castillo, 2010, p. 40), por ejemplo, la administración educativa.

También, es importante definir el ambiente en el que se va a llevar a cabo el plan de evaluación. Se pueden considerar básicamente tres ambientes en los que se puede aplicar el plan, estos son: en el aula, en el centro o en cualquier situación de aprendizaje (Cabrerizo y Castillo, 2010).

Se debe definir también en qué momento del proceso de enseñanza-aprendizaje se realizará la evaluación, la cual debe ser continua, desde el momento inicial hasta el momento final. Es por eso que se ha dividido en evaluación diagnóstica, formativa y sumativa (Cabrerizo y Castillo, 2010), las cuales ya fueron definidas anteriormente.

También se debe definir y describir lo más claro posible la metodología de plan de evaluación, es decir, cómo se llevará a cabo la evaluación, las estrategias y las actividades que se utilizarán (Cabrerizo y Castillo, 2010).

El “con qué” es un elemento que se refiere a las técnicas y los instrumentos que se utilizarán en el proceso evaluativo de los cuales se puede afirmar que existe una gran cantidad, entre estos se pueden mencionar “la observación, entrevistas, pruebas orales, escritos, trabajos de clase o de campo” (Cabrerizo y Castillo, 2010, p. 124).

## Resolución de Problemas en Matemáticas

La resolución de problemas en Matemáticas puede entenderse desde varias perspectivas. Muchos autores explican el significado de este concepto. Sin embargo, no podemos olvidar el pionero sobre este enfoque metodológico para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

George Pólya fue un gran matemático que nació en Budapest en 1887 y murió en Palo Alto California en 1985. A lo largo de su vida generó una larga lista de resultados matemáticos y, también, trabajos dedicados a la enseñanza de esta disciplina, sobretodo en el área de la Resolución de Problemas. Estos trabajos básicamente fueron escritos en los años cuarenta del siglo XX, pero fueron traducidos hasta los años sesenta. Se trata de un personaje clave en la Resolución de Problemas y es considerado el pionero o gestor de las primeras etapas de esta temática (Alfaro, 2006, p. 1). Pese a los años que han pasado desde la creación del método propuesto por Pólya, hoy día aún se considera como referente de alto interés acerca de la resolución de problemas (López, citado por Escalante, 2015).

Por otro lado, la resolución de problemas se concibe como “generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva” (Ruiz y García, 2003, p. 325). Además, Schroeder & Lester (citados por Alfaro y Fonseca, 2010) mencionan que existe una confusión sobre lo que se entiende por resolución de problemas, ya que “mientras que algunos conceptualizan resolución de problemas como medio para poner en práctica lo aprendido o para el desarrollo de estrategias de solución de problemas; muy pocos utilizan resolución de problemas como estrategia didáctica o medio para la enseñanza de contenidos matemáticos” (p. 178).

Es como parte de esta mediación pedagógica donde la resolución de problemas encuentra un sentido esencial para la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas, un instrumento poderoso para lograr el dominio de habilidades y la realización de procesos, así como el progreso de la competencia matemática, y la que regula y organiza la acción de aula (MEP, 2012).

Por otro lado, en los programas de estudio de matemática se menciona que al colocar resolución de problemas dentro del contexto de aula se debe integrar al menos dos propósitos: aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas y aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) a través de la resolución de problemas (MEP, 2012).

En el primer propósito se enfatizan los medios (estrategias, heurísticas, métodos) que requiere un problema (una acción matemática). El aprendizaje de técnicas de resolución de problemas no garantiza que una persona pueda resolver problemas nuevos y distintos, sin embargo el entrenamiento en las mismas favorece el desarrollo de esa capacidad. Sin embargo, no sería apropiado concebir el papel de la resolución de problemas reducido a entrenar y lograr destrezas en esas técnicas y métodos, por más ricos que éstos puedan ser (MEP, 2012, p. 28).

En el segundo propósito lo que se plantea es una acción de aula que permita generar aprendizajes matemáticos en un contexto específico; esto apela al diseño de tareas que sirvan para la construcción de aprendizajes dentro de una lección (o una secuencia de ellas), promoviendo así la realización de los procesos matemáticos (MEP, 2012, p. 28).

Seguidamente el programa de matemática enfatiza en la utilización de los problemas reales o contextualizados (físicos y socioculturales), mencionan que “usar problemas extraídos de la realidad o que se puedan imaginar como reales promueve acciones cognitivas

requeridas para el aprendizaje de las Matemáticas” (MEP, 2012, p. 28). Se parte del supuesto que debido a la naturaleza de los problemas, estos se convertirán en algo atractivo para el estudiante, siendo además una fuente de motivación e interés, provocando actitudes positivas sobre la matemática.

Los problemas del entorno físico y abstracto juegan un papel importante, al promover acciones cognitivas requeridas para su aprendizaje, debido a que despierta un mayor interés por parte del estudiante y este a su vez se involucra más con la construcción de sus aprendizajes. Además, se resalta el contacto del estudiante con los objetos matemáticos en su relación con la realidad de donde emergen y favorece una matematización, la cual se refiere a usar las matemáticas para modelar situaciones del entorno (MEP, p. 28).

#### *Niveles de Complejidad de los Problemas*

El Ministerio de Educación Pública propone tres niveles de complejidad para los problemas que se deben desarrollar durante el trabajo en clase, pues existe una relación directamente proporcional entre niveles de complejidad y las oportunidades para realizar cada uno de los procesos matemáticos y nutrir el progreso de la complejidad matemática. La filosofía a seguir en el salón de clases varía a favor de acentuar acciones cognitivas de mayor nivel, no se trata de buscar lo complejo por lo complejo en sí mismo. De lo que se trata es que con temas pertinentes se confronten problemas matemáticos cada vez más complejos de manera escalonada (MEP, 2012). Seguidamente se exponen los tres “niveles de complejidad”, esto según el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012), en el actual programa de estudios de matemática.

- **Reproducción.** Se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados. Apelan a conocimiento de hechos y representaciones de problemas comunes, reconocimiento de cosas equivalentes,

recolección de objetos matemáticos o propiedades, procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos estándar, manipulación sencilla de expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cálculos sencillos.

- **Conexión.** Se basa en capacidades que intervienen en el nivel de reproducción, pero va más lejos. Remite a la resolución de problemas que no son rutinarios, pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante y lo define la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.
- **Reflexión.** Este es el elemento significativo, ya que se realiza en ambientes que son más novedosos y contienen más elementos que los que aparecen en el otro nivel de complejidad. Se plantea la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. Se exige la participación de varios métodos complejos para su solución.

### **Procesos Matemáticos**

Los actuales programas de estudio de Matemáticas establecen cinco procesos matemáticos, estos son: Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Conectar, Comunicar y Representar. A continuación, se detalla cada uno de estos de acuerdo con el MEP (2012).

En primera instancia, el MEP define los procesos matemáticos como “actividades cognitivas (o tipos de actividades) que realizan las personas en las distintas áreas matemáticas y que se asocian a capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos” (p. 24). Por lo anterior, es claro que dichos procesos permiten el desarrollo de capacidades, lo cual es un aspecto importante dentro de la evaluación del logro de habilidades. En la Tabla 2 se detalla cada uno de los procesos de acuerdo al MEP.

Tabla 2

*Procesos matemáticos para el desarrollo de habilidades.*

Procesos Matemáticos	Descripción del proceso matemático
Razonar y Argumentar	<p>Se trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en todas las áreas del plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos (MEP, 2012, p. 24).</p>
Plantear y resolver problemas	<p>Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales (MEP, 2012, p. 25).</p> <p>Se busca potenciar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las matemáticas (MEP, 2012, p. 25).</p>
Comunicar	<p>Es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos al docente o a los otros estudiantes. Este proceso busca potenciar la capacidad para expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa (MEP, 2012, p.25).</p>



Procesos Matemáticos	Descripción del proceso matemático
Conectar	Este proceso transversal pretende el entrenamiento estudiantil en primer lugar en la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas, lo cual se deriva de las características centrales de los quehaceres matemáticos: el carácter integrado de los mismos (MEP, 2012, p. 25).
Representar	Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares) (MEP, 2012, p. 26). El proceso busca favorecer la capacidad para elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas, para manipular distintas representaciones de objetos matemáticos (MEP, 2012, p. 26).

*Nota.* De “Programas de estudio de matemáticas”, por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012, pp. 24-26.

### ***Grados de los Procesos***

Los diferentes niveles de complejidad de los problemas pueden demandar diferentes grados de los procesos. De acuerdo con Ruiz (2017) “la introducción en el currículo costarricense de los niveles de complejidad de los problemas, por otro lado, pretendió favorecer el desarrollo de capacidades cognitivas superiores y por lo tanto estos niveles están estrechamente asociados a los procesos” (p. 104). Más en concreto, dicho documento define

tres grados de los procesos y los relaciona directamente con los niveles de complejidad. Para eso define una serie de indicadores para cada grado de los procesos y otros para los niveles de complejidad y después asocia los indicadores del grado 1 con el nivel de reproducción, los indicadores del grado 2 con el nivel de conexión y los de grado 3 con el nivel de reflexión.

Esta última relación entre grados de los procesos y niveles de complejidad fue fundamental para la investigación, ya que representa el eslabón que permite medir el nivel de logro de las habilidades de los estudiantes utilizando problemas que requieren diferentes grados de los procesos para ser resueltos.

### *Niveles de Logro*

Se define el nivel del logro (en referencia al uso de las TICs) como “descripciones de los conocimientos y habilidades que se espera que demuestren los estudiantes en el manejo de tecnologías, clasificadas en tres niveles: Inicial, intermedio y avanzado” (Ministerio de Educación de Chile, 2011, p. 11).

De lo anterior, los niveles del logro nos permiten conocer las habilidades que tienen los estudiantes, el cual, permite ubicar su desempeño en cada uno de los niveles propuestos.

De manera similar, se puede definir como “lo que sabe y puede hacer un estudiante, clasificando los desempeños en cuatro grupos: Satisfactorio, En proceso, En inicio y Previo al inicio” (Ministerio de Educación de Perú, 2013, p. 27).

Cabe mencionar, que “un estudiante que ha alcanzado el nivel avanzado, además de demostrar los desempeños propios de dicho nivel, también ha debido consolidar los aprendizajes de Nivel Intermedio” (Ministerio de Educación de Chile, p. 11, 2011). Por lo anterior, el estudiante adquiere nuevos conocimientos, profundiza en ellos y los amplía, lo cual, le permite ir avanzando en cada nivel.

Se establece en dichos niveles de acuerdo a un “rango de puntajes de la prueba SIMCE TIC, lo que permite clasificar el desempeño de cada estudiante según su puntaje obtenido” (Ministerio de Educación de Chile, p. 11, 2011).

Mencionan que los niveles del logro tienen dos componentes, uno cualitativo y otro cuantitativo, el cualitativo “consiste en una descripción de lo que debe demostrar que sabe y puede hacer un estudiante para alcanzar cada nivel de logro” y el cuantitativo “está dado por el puntaje mínimo que necesita obtener un estudiante en la prueba SIMCE TIC para que se considere que ha logrado los conocimientos y habilidades que se exigen para ese nivel. Este puntaje es denominado “Puntaje de corte” (Ministerio de Educación de Chile, 2011, p. 12). Además, mencionan que realizar el procedimiento de “Standard Setting” o establecimiento de Puntajes de Corte es una tarea que:

Requiere que una persona o grupo de personas emita un juicio experto para determinar cuánto es lo mínimo que se debe poder responder en una prueba para alcanzar un determinado nivel de logro. Dicho juicio experto es regulado por un conjunto de procedimientos estandarizados que permiten objetivar el proceso. (Ministerio de Educación de Chile, 2011, p. 12).

Por ello, para poder establecer y validar los puntos de corte para cada uno de los niveles, es posible recurrir a expertos en el tema, los cuales dan su opinión, según su experiencia, en la cantidad de puntos mínimos que debe tener cada nivel para establecerse como logrado o no logrado.

Por otro lado, el MEP, en el “Informe Cualitativo de Desempeño en el Primer Año de la Educación General Básica Curso Lectivo 2014” establece que nivel del logro indica “el grado de logro de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, según los indicadores formulados para tal fin. Estos niveles de logro son alto, medio y bajo” (2014, p. 2).

A partir de las definiciones anteriores, se puede establecer una definición propia de los niveles de logro como descripciones de los conocimientos y habilidades que se espera que demuestren los estudiantes y que indican su grado de desempeño en una habilidad específica, según los indicadores formulados para tal fin. Además, en adelante, el nivel de logro y nivel de desempeño se considerarán sinónimos.

### **Habilidades y Competencias Matemáticas**

Las habilidades se asocian a un área matemática (habilidades aritméticas, habilidades geométricas, habilidades algebraicas, entre otras), cuyo planteamiento debe desarrollarse en tiempos relativamente cortos, además de no observarse como capacidades que se tienen o no (y fines logrados o no) sino como aquellos aprendizajes que se logran de manera gradual (MEP, 2012).

El MEP utiliza el término “habilidad específica”, como “una capacidad o un saber hacer en relación con un objeto matemático (concepto o procedimiento)” (MEP, 2012, p. 22).

El MEP brinda un ejemplo:

- Reconocer cantidades menores que 100.
- Conocer los nombres de los números menores que 100.
- Realizar sumas de números naturales, sin agrupar, con totales menores que 100 (2012, p. 22).

Por otro lado, la competencia matemática se interpreta como “una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, subraya una relación de esta disciplina con los entornos físicos y socioculturales y también brinda un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas” (MEP, 2012, p. 14). Esto brinda un sentido más práctico, por su capacidad de promover la resolución de problemas que sean aplicables en diferentes contextos sociales.

Según el MEP, las competencias matemáticas están directamente relacionadas con los cinco procesos matemáticos definidos previamente, ya que la selección y conceptualización de estos procesos “ordena y define el papel que se desea dar a las capacidades matemáticas (por ejemplo asociar estrechamente la resolución de problemas y la modelización), y facilitan la implementación en la acción de aula de acciones cognitivas transversales de alto nivel” (MEP, 2012, pp. 14-15).

Para poder trabajar el dominio de las habilidades en un área matemática y el desarrollo de la competencia matemática, se propone que estas se lleven a cabo durante la mediación pedagógica: la organización de las lecciones y de las tareas matemáticas y la acción directa docente en el aula. Esto permite el desarrollo de varias estrategias, entre ellas, el procurar que en la acción de aula se realicen procesos matemáticos, llevando a cabo actividades transversales que estén ligadas a capacidades que se encuentran en cada área para comprender y usar conocimientos, apoyando el desarrollo de la competencia matemática (MEP, 2012). Por lo anterior, la mediación pedagógica puede permitir desarrollar de manera conjunta las habilidades y competencias matemáticas.

### *Ejes disciplinares*

Los programas de matemáticas vigentes adoptan cinco ejes disciplinares, llamados también ejes transversales, ya que estos atraviesan de forma transversal el plan de estudios, fortaleciendo el currículo y creando relaciones entre los temas de las distintas áreas matemáticas que abordan entre niveles y ciclos. Cada uno de estos ejes disciplinares se mencionan a continuación.

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
- El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.

- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
- El uso de la historia de las Matemáticas (MEP, 2012, p. 17).

La resolución de problemas como estrategia metodológica ya se definió anteriormente, mientras que la contextualización que se propone busca “fortalecer un papel estudiantil activo y comprometido con su aprendizaje, recalcando la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos adecuados para cada nivel educativo” (MEP, 2012, p. 17). Estos dos ejes son primordiales pues juntos conforman el enfoque principal del currículo, el cual es la resolución de problemas en contextos reales.

Por otro lado, las nuevas tecnologías de la información y la comunicación han desarrollado una serie de herramientas que pueden ayudar a cambiar la manera tradicional en la que se da el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esta tecnología debe “introducirse de forma pertinente y precisa en los distintos niveles educativos y de acuerdo a las condiciones materiales y humanas existentes en el contexto educativo nacional” (MEP, 2012, p. 37).

El cuarto eje disciplinar es la potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas. Aquí se busca identificar cuáles son los elementos que se asocian con las actitudes negativas hacia las matemáticas para tratar de cambiarlos y generar actitudes positivas. Además, “las actitudes están estrechamente ligadas a las creencias, que incluso se toman de los ámbitos familiares y culturales de la sociedad” (MEP, 2012, p. 38).

El último eje disciplinar corresponde al uso de la historia de la matemática en el aula, no como un contenido, sino como una manera de mostrar que las matemáticas se desarrollaron mediante pruebas y errores de personas que buscaban resolver un problema real. “La Historia de las Matemáticas permite romper con el esquema de que las Matemáticas

con una colección de axiomas, teoremas, pruebas y donde lo esencial es la claridad lógica de sus argumentos” (MEP, 2012, p. 39).

### **Evaluación de la resolución de problemas**

Al hablar sobre la resolución de problemas y las estrategias de evaluación en este enfoque, Verdejo, Encinas y Trigos (2012) mencionan que en la enseñanza basada en problemas están presentes

una situación problemática, abierta a la investigación, y una descripción incompleta del problema. Los estudiantes son los que resolverán el problema y la evaluación se utiliza para estructurar la reflexión y, al mismo tiempo, registrar el avance en el desarrollo de las estrategias de pensamiento para la resolución del problema planteado (p. 30).

Los mismos autores también remiten a que la evaluación de resolución de problemas permite que los alumnos realicen autoevaluación, es decir, “los estudiantes pueden ir evaluando el propio aprendizaje que se va reflejando en el proceso de completar la investigación o resolución del problema” (Verdejo, Encinas y Trigos, 2012, p. 30).

Adicionalmente, se recomienda que los profesores tengan bien planeado y claro los puntos a evaluar, “deben tener claridad sobre la medición del aprendizaje efectivo y considerar, previamente a la presentación del problema, las competencias que se requieren para resolverlo y las evidencias de un buen desempeño” (Verdejo, Encinas y Trigos, 2012, p. 31).

Los autores anteriormente citados mencionan algunos instrumentos de medición y evaluación dentro de los cuales se incluyen las bitácoras de trabajo, los reportes intermedios y final, las listas de cotejo, las simulaciones, entre otros. También podemos considerar el portafolio.

### *Técnicas e instrumentos de evaluación*

Las técnicas e instrumentos de evaluación están ligados entre sí, ya que se encontró que “la evaluación se lleva a cabo mediante la utilización de técnicas con sus respectivos instrumentos o recursos que permiten verificar si las competencias han sido alcanzadas según lo especifican los indicadores de logro propuestos” (USAID, s.f., p. 16).

Además, las técnicas sistemáticas permiten recopilar información pertinente respecto a algunas características o situaciones que se dan dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje. Son los procedimientos que utiliza el docente para obtener información acerca del aprendizaje de los alumnos; cada técnica de evaluación se acompaña de sus propios instrumentos (Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, 2013).

Particularmente, la técnica de observación usa instrumentos como la guía de observación, registro anecdótico, diario de clase, diario de trabajo y escala de actitudes para evaluar los aprendizajes sobre conocimientos, habilidades, actitudes y valores (Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, 2013).

Otra técnica corresponde al “desempeño de los alumnos” en donde sus instrumentos corresponden a preguntas sobre el procedimiento y organizadores gráficos que evalúan los aprendizajes sobre conocimientos y habilidades. Se pueden usar los cuadernos de los alumnos para evaluar los aprendizajes sobre conocimientos, habilidades, actitudes y valores (Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, 2013). También está la técnica de “Análisis del desempeño” cuyos instrumentos son:

- El portafolio, que evalúa los aprendizajes sobre conocimientos y habilidades.
- La rúbrica y lista de cotejo que evalúan los aprendizajes sobre conocimientos, habilidades, actitudes y valores.



Por último, se menciona la técnica de interrogatorio, esta se caracteriza por utilizar instrumentos de tipos orales u escritos, pueden ser pruebas que evalúan los aprendizajes sobre conocimientos y habilidades (Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, 2013). Cabe mencionar que lo anterior corresponde a instrumentos de evaluación desde el enfoque formativo.

De acuerdo con lo anterior, en el presente trabajo se entenderá por técnica de evaluación lo expuesto por Andrade, García, Juárez, Padilla y Vargas, (2010) como: “el procedimiento mediante el cual se llevará a cabo la evaluación del aprendizaje. Una técnica para la recolección de información, es un procedimiento que sirve para obtener la información” (p. 5).

Además, los instrumentos de evaluación son “documentos utilizados que nos permiten obtener y medir el alcance de los objetivos que los alumnos alcanzaron en base a su aprendizaje de determinado tema” (Andrade et al., 2010, p. 5). De modo que en esta investigación se entenderá por instrumento de evaluación a cualquier documento que permita medir en el estudiante el alcance de las habilidades propuestas.

Según el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2013) las técnicas de la evaluación diagnóstica ayudan al docente a profundizar en el desenvolvimiento del estudiante y verificar la forma en que se evidencian las habilidades cognitivas, actitudinales, valores propuestos, destrezas y competencias.

La siguiente tabla corresponde a una serie de técnicas que el docente puede aplicar para llevar a cabo el proceso de evaluación de los aprendizajes.

**Tabla 3***Técnicas para llevar a cabo el proceso de evaluación de los aprendizajes*

Técnica	Descripción
Auto asesoría	El docente presenta a los estudiantes formas alternativas de ver casos controversiales y les pide que indiquen, en fichas u hojas, qué punto de vista se aplican a sí mismos.
Reportes semanales	Son básicamente una realimentación rápida para saber lo que los estudiantes creen que están aprendiendo, qué dificultades e inquietudes están experimentando, debe ser breve, idealmente de una página, en esta los estudiantes responden objetivamente las preguntas.
Perfiles de personajes admirables	Se requiere que los estudiantes tengan acceso a perfiles o biografías breves de personajes que interesan en el curso, para que luego los estudiantes seleccionen los personales para que escriban sus perfiles o bien, que estos, los lean y se apropien de ellos, con el fin de que los estudiantes reflejen los valores que admiran.
Recordar, resumir, preguntar, conectar y comentar	Es una técnica de múltiple aplicación que anima a los estudiantes a recordar, repasar objetivos y reacciones hacia actividades, tareas y materiales usados en el aula, sirve para comparar las perspectivas del docente con las del estudiante.

Técnica	Descripción
La observación	Es una técnica para la obtención de datos, consiste en el examen atento que un sujeto aplica sobre otro, para llegar al conocimiento profundo de los mismos.
Encuestas, cuestionarios o entrevistas	Son prácticos y relevantes para obtener datos de los estudiantes, de las familias, los docentes y otros miembros de la comunidad educativa.
El diario docente	Es un instrumento por excelencia de seguimiento cotidiano de la vida del aula, la intensidad de seguimiento vendrá determinada por la regularidad con que se escriba.
Portafolio	Son considerados no sólo un instrumento, sino un conjunto de reglas o principios, ya que articulan y hacen confluir en un solo recurso diferentes factores, es otro tipo evaluativo.

*Nota.* De “Evaluación diagnóstica”, por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2013, p. 23.

### **Momentos de la Lección**

Para el aprendizaje de conocimientos dentro de la lección, en el enfoque de la resolución de problemas, se propone una introducción de los nuevos tópicos que tome en cuenta cuatro pasos o momentos centrales: propuesta de un problema, trabajo estudiantil independiente, discusión interactiva y comunicativa, y la clausura o cierre (MEP, 2012). Estos cuatro momentos se pueden abarcar en una lección o en un conjunto de lecciones,

dependiendo del tema que se trabaje. A continuación, se detallan cada uno de estos momentos de la lección, según las define el Ministerio de Educación Pública.

### ***Propuesta del Problema***

En esta primera fase se coloca como un punto de partida un problema (contextualizado cuando resulte pertinente), un desafío o una actividad para provocar la indagación.

Esta propuesta supone una escogencia apropiada con base en el lugar que ocupa el contenido y las expectativas de aprendizaje dentro de la programación del curso y las condiciones específicas del grupo de estudiantes con el que se trabaja.

### ***Trabajo Estudiantil Independiente***

En esta fase se ofrece tiempos para el trabajo individual, en parejas o en subgrupos.

En la misma se dan varias subfases:

- Apropiación del problema,
- Formulación de estrategias-hipótesis-procedimientos,
- Resolución del problema o investigación estudiantil.

Esta fase se consigna como una “fase independiente” en cuanto no hay una intervención docente directamente y se deja a la persona enfrentar el problema por sí misma. No hay aprendizaje significativo sin esta etapa de confrontación con el problema. Al realizarse en el aula, sin embargo, es necesaria una acción docente apropiada, precisa y activa.

En esta fase la persona debe conocer alguna estrategia que le permita resolver el problema, pero no aquella que se base en el conocimiento que se desea enseñar. Por otra parte, conviene que el problema pueda permitir el uso de varias estrategias.

### *Discusión Interactiva y Comunicativa*

Con la guía docente, este tercer momento permite espacios para la valoración y contrastación de resultados, soluciones o elaboraciones aportadas, entrando en juego la argumentación y la comunicación.

### *Clausura o Cierre*

Esta clausura o cierre permite una actividad que concluye pedagógicamente el tema o los contenidos trabajados. Se trata de una síntesis cognoscitiva fundamental para el aprendizaje: por medio de esta acción docente se ofrece un vínculo con el saber matemático que ha construido la comunidad profesional de matemáticas. Es importante que esta clausura no sea artificial o alejada del proceso recién vivido, es decir, debe seguir la misma línea de trabajo y estar relacionado con lo que se desarrolló en los anteriores momentos de la lección.

Se trata de la adquisición y estructuración de conocimientos (conceptos, procedimientos, métodos) que se usaron a lo largo del proceso. Se confronta con el saber conocido aunque de manera accesible. Aquí se puede incidir sobre las estrategias si hubiera varias, introducir un análisis de las acciones realizadas y proponer actividades complementarias que fortalezcan la comprensión de los conocimientos trabajados. Resulta conveniente que se reformulen por escrito los nuevos conocimientos adquiridos, siempre con la ayuda docente.

### **Etapas de la Lección**

En el desarrollo de las lecciones se distinguen dos etapas, según los propósitos de la enseñanza y aprendizaje, y las habilidades propuestas. Estas etapas son: el aprendizaje de conocimientos, y la movilización y aplicación de los conocimientos (MEP, 2012).

En la primera etapa (el aprendizaje de conocimientos) se realiza el aprendizaje de conocimientos nuevos, que pueden ser conceptos o procedimientos de resolución de

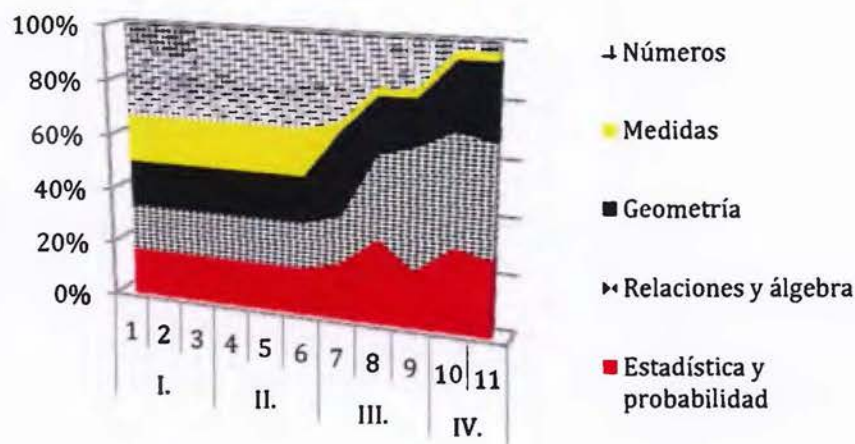
problemas. La segunda (la movilización y aplicación de los conocimientos) busca reforzar y ampliar el papel de los aprendizajes realizados, mediante actividades que así lo permitan. Esta última etapa puede realizarse en cualquier momento posterior, no necesariamente de forma inmediata a la primera (MEP, 2012).

### Áreas Matemáticas

En los cuatro ciclos educativos de la educación costarricense (I, II y III Ciclo de la Educación General Básica y Educación Diversificada) se realiza la instrucción matemática dividiéndola en cinco áreas matemáticas, estas son: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra, y Estadística y Probabilidad. La siguiente figura ilustra cómo están repartidos los contenidos de estas cinco áreas a través de cada ciclo educativo y a través de cada nivel educativo.

**Figura 1**

*Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos*



*Nota.* De “Programas de estudio de matemáticas”, por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012, p. 49.

Se puede deducir de la figura anterior que desde Octavo y Noveno año el porcentaje de contenidos correspondientes al área de Relaciones y Álgebra se incrementa. Es en estos

niveles en los cuales los estudiantes tienen un primer acercamiento formal con las funciones y se dan las bases para poder ahondar en estos temas en el Ciclo Diversificado.

Por otra parte, desde tercer ciclo se considera el área Medidas como transversal y no se imparte explícitamente como área matemática ya que se considera que dichos contenidos se encuentran inmersos en las otras áreas matemáticas. Lo mismo ocurre en la Educación Diversificada con el área de Números. La siguiente figura muestra de una mejor manera la forma en la cual están distribuidas las áreas matemáticas en el tercer ciclo de la Educación General Básica y la Educación Diversificada.

**Figura 2**

*Distribución de áreas por nivel*

Nivel	I Período	II Período	III Período
<b>Tercer ciclo</b>			
<b>7° Año</b>	Números	Estadística y Probabilidad Relaciones y Álgebra	Geometría
<b>8° Año</b>	Números Geometría	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad
<b>9° Año</b>	Números Geometría	Estadística y Probabilidad Relaciones y Álgebra	Relaciones y Álgebra
<b>Ciclo diversificado</b>			
<b>10° Año</b>	Geometría Relaciones y Álgebra	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad
<b>11° Año</b>	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad Geometría	Geometría

*Nota.* De “Programas de estudio de matemáticas”, por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012, p. 465.

De modo que, tal y como se observa en la figura 2, es en noveno y décimo nivel cuando se dedica más tiempo al área de Relaciones y Álgebra, siendo décimo nivel en el cual se profundiza en el tema de las funciones. Esto se puede evidenciar en la Tabla 4 que enlista los conocimientos y habilidades específicas para el área de Relaciones y Álgebra en décimo año.

**Tabla 4**

*Conocimientos y habilidades específicas en el área de Relaciones y Álgebra para décimo año del Ciclo Diversificado de enseñanza de matemática en Costa Rica.*

Conocimientos	Habilidades específicas
<b>Funciones</b>	Identificar si una relación dada en forma tabular,
Concepto de función y de gráfica de	simbólica o gráfica corresponde a una función.
una función	Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica
Elementos para el análisis de una	o algebraica en distintos puntos de su dominio.
función.	Analizar una función a partir de sus representaciones.
- Dominio	Calcular la composición de dos funciones.
- Imagen	Representar gráficamente una función lineal.
- Preimagen	Determinar la pendiente, la intersección con el eje de
- Ámbito	las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en
- Inyectividad	forma gráfica o algebraica.
- Crecimiento	Determinar la ecuación de una recta utilizando datos
- Decrecimiento	relacionados con ella.
- Ceros	Analizar gráfica y algebraicamente la función
- Máximo y mínimo	cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq$
- Análisis de gráficas de	0.
funciones	Plantear y resolver problemas en contextos reales
Composición de funciones	utilizando las funciones estudiadas.
Función lineal	Relacionar la representación gráfica con la algebraica.
Función cuadrática	

*Nota.* De “Programas de estudio de matemáticas”, por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012, p. 410.



### *Funciones Reales de Variable Real*

El actual concepto de función nace a partir de su utilización o aplicación en las Matemáticas para la resolución de algunos problemas en biología, administración, economía y ciencias sociales. Su importancia radica en que se pueden considerar situaciones en las que diferentes variables están relacionadas entre sí, es decir, que el valor que tome una de estas variables depende de forma directa del valor que tome la otra variable (Engler, Muller, Vranken y Heckein, 2005).

Un ejemplo que se puede mencionar, es que la distancia que recorre un automóvil está en función de la cantidad de gasolina que este posea. Este tipo de relación entre dos elementos donde uno de ellos depende del otro, se conoce en matemáticas por el nombre de Funciones Reales de Variable Real. A continuación, se dan algunas definiciones de varios autores.

Astorga, Guzmán y Rodríguez (2018) definen la función real de variable real como una correspondencia de la siguiente manera: “Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos no vacíos. Una función  $f$  de  $A$  en  $B$  es una ley, regla o correspondencia que a cada elemento de  $A$ , le hace corresponder un y sólo un elemento de  $B$ ” (p. 456).

Por otro lado, se define Función Real de Variable Real como un conjunto  $A$  en un conjunto  $B$ , ambos subconjuntos de los números reales, donde existe una regla de correspondencia que asigna a cada  $x$  en algún subconjunto  $D$  de  $A$ , un único y determinado elemento  $f(x)$  de  $B$  (Bartle y Sherbert, 2004, p. 22). Por su parte Hit y Torres (citados en Ugalde, 2013) expresan que una función  $f$  de un conjunto  $A$  hacia un conjunto  $B$  es una regla de correspondencia que asignan a cada elemento  $x$  de cierto subconjunto  $D$  de  $A$  un elemento determinado de manera única  $f(x)$  de  $B$ .

También, Díaz (s.f.) en sus notas sobre funciones define una función  $f$  de un conjunto  $X$  a un conjunto  $Y$  como una regla de correspondencia que asocia a cada elemento  $x$  de  $X$  un único elemento  $y$  de  $Y$ . El elemento  $y$  se llama la imagen de  $x$  bajo  $f$  y se denota por  $f(x)$ . El conjunto  $X$  se llama el dominio de la función y el conjunto  $Y$  contradominio. El rango de la función consta de todas las imágenes de los elementos de  $X$ .

Por último, y de una manera más puntual, Becerra (2005) nos dice que “una función se refiere a un asignación o correspondencia de un conjunto a otro” y nos expresa que es una terna constituida por:

1. Un conjunto  $A$  llamado dominio de la función
2. Un conjunto  $B$  llamado codominio de la función
3. Una regla de correspondencia que posee tres características
  - a) A todo elemento del dominio se le puede asociar un elemento del codominio.
  - b) Ningún elemento del dominio puede quedarse sin un asociado en el codominio.
  - c) Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el codominio.

Se denota como  $f: A \rightarrow B$  (p. 15).

### *Indicaciones de evaluación*

A continuación, se mostrarán algunas indicaciones de evaluación sumativa sobre el tema de funciones reales de variable real de acuerdo con los actuales Programas de Estudios de Matemáticas del MEP.

Cabe especificar que para la elaboración de la propuesta metodológica, únicamente nos vamos a centrar en el trabajo cotidiano, esto por diversos factores. Uno de ellos es que se

consideró que es uno de los aspectos que permite al docente evaluar en forma continua durante toda la clase y que involucra diferentes estados o momentos de razonamiento por parte del estudiantado, facilitando así también evaluar cada uno de los procesos matemáticos involucrados en la solución de un problema.

**Trabajo cotidiano.** Para el trabajo cotidiano, es importante evidenciar el progreso que cada estudiante experimenta al trabajar específicamente en tópicos relacionados con funciones, particularmente lo concerniente al uso de modelos matemáticos asociados a situaciones contextualizadas. Además, es fundamental evaluar el uso apropiado del vocabulario y la simbología matemática por parte de cada estudiante, así como la forma de comunicar y exponer sus argumentaciones.

**Pruebas escritas.** En las pruebas escritas es factible implementar ítems que permitan la integración de varias habilidades específicas para su evaluación. Aunque la mayoría de los conocimientos se pueden evaluar en un nivel de reproducción, es fundamental que los conocimientos que tienen que ver con resolución de problemas donde se apliquen las funciones estudiadas sean evaluados en la parte de desarrollo utilizando ítems con un nivel de dificultad de conexión y reflexión.

**Tareas.** “Para el trabajo extra clase, se pueden asignar tareas que permitan seguir activando los procesos de Argumentar y razonar y Representar en temáticas como el análisis de funciones dadas en distintas representaciones, búsqueda de modelos para situaciones dadas y análisis de modelos matemáticos (MEP, 2012, p. 427).

También es valioso asignar tareas de investigación o bien un proyecto acerca de la historia del desarrollo y uso de las funciones y modelos matemáticos. En estos casos es necesario delimitar los alcances del trabajo. Además, la evaluación debe considerar “el uso correcto del vocabulario, la notación y las diferentes propiedades que se trate, además de la

precisión y fundamentación de los razonamientos cuando se argumenta acerca de la solución de un problema determinado” (MEP, 2012, p. 429).

### *Contextos.*

Los contextos que se encuentran presentes en el currículo costarricense se categorizan en: matemáticos, personales, ocupacionales, sociales y científicos. Según Ruiz (2017), los contextos pueden conceptualizarse así:

Matemáticos: “se centran exclusivamente en conceptos y procedimientos que no salen del seno de las matemáticas” (p. 75).

Personales: “las actividades de uno mismo, su familia o sus iguales. (...) incluye (pero no se limita a (...)) preparación de alimentos, compras, juegos, salud personal, transporte personal, deportes, viajes, programación personal y finanzas personales” (p. 75).

Ocupacionales: “el mundo del trabajo. (...) pueden incluir (pero no se limitan a cosas tales como medir, calcular costos y pedir materiales para la construcción, nómina / contabilidad, control de calidad, programación / inventario, diseño / arquitectura y toma de decisiones relacionadas con el trabajo. (...) pueden relacionarse con cualquier nivel de la fuerza laboral, desde el trabajo no calificado hasta los niveles más altos de trabajo profesional” (p. 75).

Sociales: “la comunidad (local, nacional o global). Pueden involucrar (pero no se limita a cosas tales como sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas públicas, demografía, publicidad, estadísticas nacionales y economía. Aunque los individuos están involucrados en todas estas cosas de una manera personal, en la categoría de contexto social el enfoque de los problemas está en la perspectiva de la comunidad” (p. 75).

Científicos: “la aplicación de las matemáticas al mundo natural y temas relacionados con la ciencia y tecnología. (...) pueden incluir (pero no se limitan a áreas tales como clima o clima, ecología, medicina, ciencia espacial, genética, medición” (p. 75).

### **Capítulo 3: Metodología**

En este capítulo se describe el enfoque de esta investigación, así como técnicas utilizadas para la recolección de información, las fuentes de información y etapas en las que se desarrolló.

#### **Enfoque, Alcance y Diseño de la Investigación**

Esta investigación se ubica en el paradigma naturalista porque este no está orientado a realizar generalizaciones, ya que está limitado en un tiempo y en un espacio, además, la finalidad de la investigación en este paradigma es “comprender e interpretar la realidad, los significados de las personas, percepciones, interacciones y acciones” (Barrantes, 2010, p. 61).

De modo que el paradigma naturalista trata de estudiar el fenómeno desde la perspectiva de las personas involucradas, esto hace que no se admitan generalizaciones, pues la información no está exenta de la subjetividad de los involucrados, además, en cuanto a la relación sujeto-objeto, esta “es de dependencia, ya que se afectan mutuamente” (Barrantes, 2010, p. 61).

Con esta investigación no se pretende realizar generalizaciones sobre cómo debería de evaluarse el trabajo cotidiano; simplemente es una propuesta que se deriva de la revisión bibliográfica. Es por esto que se considera una investigación en el enfoque cualitativo, ya que en dicho enfoque “el investigador comienza examinando los hechos en sí y en el proceso desarrolla una teoría coherente para representar lo que observa” (Esterberg, citado por Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

En este caso, se hizo una revisión de la literatura para conocer cómo se debe evaluar el trabajo cotidiano en el enfoque de la resolución de problemas y cómo se determina el nivel del logro de las habilidades.

Por otro lado, este trabajo es considerado según su profundidad como una investigación exploratoria, ya que “abordan campos poco conocidos donde el problema, que sólo se vislumbra, necesita ser aclarado y delimitado. Esto último constituye precisamente el objetivo de una investigación de tipo exploratorio” (Jiménez, 1998, p. 12). Es debido a esto que las investigaciones exploratorias suelen incluir amplias revisiones de literatura y consultas con especialistas.

Adicionalmente, se sabe que los estudios exploratorios se realizan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes, es decir, “cuando la revisión de la literatura reveló que tan sólo hay guías no investigadas e ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio, o bien, si deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas” (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 91).

### **Instrumentos y Técnicas Para la Recolección de Datos**

Tal y como lo mencionan McMillan y Shumacher (2005), “las técnicas cualitativas recogen los datos principalmente en forma de palabras en lugar de números. El estudio proporciona una descripción narrativa detallada, un análisis y una interpretación de los fenómenos” (p. 50). Por lo tanto, este tipo de técnicas de recolección de información resultan ser las más adecuadas para investigaciones como esta. En particular, para la presente investigación toda la información fue obtenida de las fuentes bibliográficas, por lo que se utilizó la técnica de análisis bibliográfico.

### ***Fuentes de Información***

La información bibliográfica recolectada fue la base, junto con los actuales Programas de Estudios de Matemáticas y la bibliografía reportada en el marco teórico, para la

construcción de un instrumento que evalúa el trabajo cotidiano siguiendo el enfoque de la Resolución de Problemas.

## **Etapas de la investigación**

### *Indagación Teórica*

En esta primera etapa se realizó una búsqueda de bibliografía especializada en cuanto a la evaluación del trabajo cotidiano en Costa Rica y en otros países, además de las técnicas para evaluar los niveles de logro de habilidades. Con esto se obtuvo el sustento teórico para la elaboración del instrumento que permita evaluar el trabajo cotidiano tomando en cuenta las habilidades propuestas en el programa de estudios y los niveles de logro.

Woben (2017) afirma que el análisis de documentos ha sido ampliamente tratado y en las últimas décadas han aumentado las investigaciones que se refieren a él como parte de su metodología (p. 27). Por otra parte, el mismo autor, quien cita a Corbin y Strauss (2008) y a Rapley (2007), define el análisis de documentos como:

un procedimiento sistemático para revisar o evaluar documentos, tanto material impreso y electrónico (basado en computadora y transmitido por internet). Como otros métodos analíticos en la investigación cualitativa, el análisis de documentos requiere que los datos sean examinados e interpretados con el fin de obtener significado, ganar comprensión y desarrollar conocimiento empírico (Woben, 2017, p. 27).

De modo similar Abela (2002) quien cita a Krippendorff, define el análisis de contenido como “una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto” (p. 2). Por esta razón entendemos que el análisis de documentos toma un lugar importante dentro de la presente investigación, ya que permite adoptar los modelos de evaluación actuales como resultados



válidos y reproducibles en la elaboración de la propuesta de evaluación. Por otra parte, es necesario identificar las características del método, para así comprender sus peculiaridades.

Según Woben (2017), los investigadores normalmente revisan la literatura previa como parte de sus estudios e incorporan esta en sus informes. Sin embargo, cuando se proporciona una lista de documentos analizados, a menudo no incluye estudios previos, los cuales son una fuente de información que requieren que el investigador confíe en la descripción e interpretación de estos en lugar de tener los datos brutos como base para el análisis. En consecuencia, esta es una técnica que permite visualizar la problemática desde el punto de vista de los autores, usando sus conclusiones y resultados como insumos para la elaboración de la propuesta de evaluación.

“Es importante señalar aquí que la investigación cualitativa requiere una recopilación de datos sólidos, técnicas y la documentación del procedimiento de investigación. Información detallada sobre la forma en que se diseñó y realizó el estudio debe incluirse en el informe de investigación” (Woben, 2017, p. 29).

Cabe destacar aquí que se realizó un análisis de los modelos para la valoración de los problemas, presentado por Ángel Ruiz en “Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática” (2017). Con el análisis se concluyó que dichos modelos, son de suma importancia, ya que brindan un panorama claro de los problemas en cuanto a sus niveles de complejidad y procesos matemáticos involucrados. Sin embargo, se encontró con un gran número de elementos (indicadores, criterios, etc.) que caracterizan los modelos donde la manipulación adecuada de los mismos es fundamental. Sintetizar toda la información en un medio que permitiera la manipulación del modelo de manera sencilla, se convirtió en una necesidad para esta investigación.

Mientras que el análisis de documentos ha servido principalmente como complemento de otros métodos de investigación, también se ha utilizado como método independiente. De hecho, existen algunas formas especializadas de investigación cualitativa que se basan únicamente en el análisis de documentos (Woben, 2017, p. 29).

Con el objetivo de fortalecer esta sección del análisis de documentos se hará énfasis en el concepto de “hermenéutica”, el cual según González (2017) consiste en captar la idea del autor, entonces “contrapone la intención del autor o la del texto, contra la intención del lector. En la interpretación confluyen tres cosas: el autor, el texto y el lector, que es quien descifra el significado que el autor plasmó en su texto, sin dejar de poner su propia marca en alguna parte o algún significado” (p. 5). En el mismo sentido, Carcamo (2005) dice que la “hermenéutica puede ser asumida a través de un método dialéctico que incorpora a texto y lector en un permanente proceso de apertura y reconocimiento” (p. 207). La combinación de estas técnicas permite analizar todo el material documental de una manera que aportará mayor sustento para el análisis bibliográfico y para la posterior confección del instrumento de evaluación.

### *Diseño de Criterios e Indicadores de Evaluación de los Aprendizajes*

A finales del 2017 en una de las publicaciones de la revista Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, más específicamente en uno de sus apartados llamado “Evaluación y pruebas nacionales para un currículo que enfatiza en capacidades superiores” del Doctor Ángel Ruiz, se proporciona un marco que precisa algunos de los elementos del currículo de matemática. Además de brindar nuevos elementos teóricos para la gestión y evaluación del aula, esto último es considerado de suma importancia para la presente investigación. El modelo teórico cuenta con 61 indicadores asociados a las

capacidades superiores, estos indicadores a su vez se clasifican en tres grados de complejidad que permiten determinar el grado de intervención de los procesos en un problema o tarea matemática. Por último, cuenta con cinco criterios que determinan los niveles de complejidad de los problemas, a partir del grado de intervención de los procesos matemáticos, los cuales, se denotan como NC1, NC2, NC3, NC4 y NC5. Ruiz (2017), los define de la siguiente manera:

NC1: “cuando en un problema la intervención de los procesos no supera el grado 1, se acepta que el problema es de reproducción” (p.124).

NC2: “cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 2 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de conexión” (p.125).

NC3: “cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 3 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de reflexión” (p.125)

NC4: “cuando en un problema la intervención de procesos es de grado 2 o 1 y el número de los indicadores en el grado 2 es menor que tres, se requerirá hacer una valoración más específica para establecer si es de reproducción o conexión. Dependerá de la “fuerza” del indicador o indicadores de grado 2 para poder valorar el problema como de conexión. También este criterio aplica cuando en un problema aparecen tres indicadores de grado 2 en un proceso matemático y en los otros procesos los indicadores no sobrepasan el grado 1” (p. 125).

NC5: “cuando en un problema la intervención de procesos es de grado 3, 2 o 1 y el número de los indicadores en el grado 3 es menor que tres, se requiere hacer una valoración más específica para establecerse si es de reproducción, conexión o reflexión. También este

«criterio aplica cuando en un problema aparecen tres indicadores de grado 3 en un proceso matemático y en los otros procesos los indicadores no sobrepasan los grados 1 o 2» (p. 125).

De esta forma dicho modelo permitió tanto la obtención de los indicadores como una base teórica fundamental que simplificó el trabajo, en el sentido de que ya no resultaba necesario diseñar indicadores, sino que bastaba con mencionarlos. Por lo tanto, en este estudio se centró en la elaboración del instrumento para la evaluación del trabajo cotidiano y en el diseño de cinco problemas, cada uno de ellos considerado en alguno de los diferentes contextos (matemático, científico, social, personal y ocupacional). Las siguientes figuras corresponden a las tablas de los indicadores de los cinco procesos.

**Tabla 5**

*Indicadores de grados del proceso Razonar y argumentar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
RA1.1: Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real.	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2.	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3.
RA1.2: Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.	RA2.1: Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una	RA3.1: Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de
RA1.3: Responder a preguntas donde está		

Grado 1	Grado 2	Grado 3
presente de forma	situación matemática o de	contexto real) no
explícita toda la	contexto real.	estudiados y complejos.
información necesaria	RA2.2: Responder a	RA3.2: Desarrollar
para encontrar la solución	preguntas donde la	argumentos que utilizan
(preguntas directas como	respuesta no es directa y	integradamente distintos
¿cuántos? ¿cuánto es?).	amerita mayor	conceptos o métodos
RA1.4: Efectuar	argumentación (por	matemáticos para resolver
razonamientos directos o	ejemplo: ¿cómo hallamos?	un problema.
realizar interpretaciones	¿qué tratamiento	RA3.3: Generalizar los
que se extraen	matemático damos? ¿qué	métodos matemáticos
literalmente de los	puede o no puede pasar y	utilizados o resultados
resultados en la aplicación	por qué? ¿qué sabemos?	obtenidos en la resolución
de un procedimiento.	¿qué queremos obtener?).	de problemas.
RA1.5: Describir los	RA2.3: Brindar las	RA3.4: Realizar
procesos de cálculo o los	soluciones de las	razonamientos
resultados cuantitativos	preguntas cuando sea	matemáticos donde se
obtenidos al resolver un	pertinente mediante	muestra que se comprende
problema en una situación	diferentes	la amplitud y los límites de
matemática o de contexto	representaciones: tablas,	los objetos matemáticos
real ya estudiada.	gráficos, medidas	usados y de los
	estadísticas, elementos	procedimientos
	algebraicos, cifras, etc.	desarrollados.

Grado 1	Grado 2	Grado 3
	<p>RA2.4: Evaluar la validez de una secuencia no compleja de argumentos matemáticos (por ejemplo, escrita en un texto o en una exposición).</p>	<p>RA3.5: Formular conceptos novedosos en la resolución de problemas o descripción de una situación (matemática o de contexto real).</p>
	<p>RA2.5: Elaborar argumentos basados en sus propias acciones al resolver problemas similares a los ya estudiados.</p>	<p>RA3.6: Realizar razonamientos donde se señalan cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación y cómo están relacionados los diferentes objetos matemáticos que participan.</p>
		<p>RA3.7: Consignar en la resolución de un problema los elementos cruciales de la estrategia seguida.</p>
		<p>RA3.8: Realizar razonamientos matemáticos en</p>

Grado 1	Grado 2	Grado 3
		situaciones específicas donde se consignan las diferencias entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis o afirmaciones.

*Nota.* De “Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores”, por A. Ruiz, 2017, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 12, p. 106.

### Tabla 6

*Indicadores de grados del proceso Plantear y resolver problemas*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
PRP1.1: Resolver problemas con datos sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución.	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2.	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3.
PRP1.2: Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas,	PRP2.1: Plantear una estrategia correcta para resolver problemas que no	PRP3.1: Resolver problemas que no han sido estudiados donde se seleccionen, comparen y

Grado 1	Grado 2	Grado 3
<p>procedimientos, propiedades, o convenciones elementales.</p> <p>PRP1.3: Identificar problemas que se pueden plantear a partir de una situación dada matemática o de contexto real dada.</p> <p>PRP1.4: Identificar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que se encuentran explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones matemáticas elementales o de contexto real.</p> <p>PRP1.5: Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra</p>	<p>han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar.</p> <p>PRP2.2: Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto real) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad.</p> <p>PRP2.3: Resolver problemas que impliquen establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas, o distintas formas de representación o de comunicación.</p> <p>PRP2.4: Plantear problemas a partir de una situación dada matemática</p>	<p>evalúen diferentes estrategias.</p> <p>PRP3.2: Generalizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.</p> <p>PRP3.3: Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto real que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta.</p> <p>PRP3.4: Usar modelos matemáticos que no han sido estudiados, para representar o explicar situaciones (matemáticas o de contextos reales) identificando las limitaciones y los supuestos de los mismos.</p>



Grado 1	Grado 2	Grado 3
explícitamente formulado.	o de contexto real que implique una estrategia de solución.  PRP2.5: Identificar y usar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que no están explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones elementales matemáticas o de contexto real.	

*Nota.* De “Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores”, por A. Ruiz, 2017, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 12, p. 108.

### **Tabla 7**

*Indicadores de grados del proceso Conectar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
C1.1: Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención

Grado 1	Grado 2	Grado 3
matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas.	grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2.	del proceso con un grado 3.
C1.2: Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.	C2.1: Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados. C2.2: Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.	C3.1: Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos. C3.2: Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognoscitivas diferentes en la resolución de un problema.

*Nota.* De “Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores”, por A. Ruiz, 2017, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 12, p. 110.

Tabla 8

*Indicadores de grados del proceso Comunicar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
COM1.1: Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal).	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2.	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3.
COM1.2: Interpretar expresiones matemáticas dadas en situaciones similares a las estudiadas para proceder a buscar una estrategia de solución.	COM2.1: Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados no similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal).	COM3.1: Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos.
COM1.3: Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados.	COM2.2: Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos	COM3.2: Expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática.
		COM3.3: Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una

Grado 1	Grado 2	Grado 3
<p>COM1.4: Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.</p>	<p>matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema.</p> <p>COM2.3: Describir mediante un lenguaje matemáticamente no preciso las acciones, resultados y razonamientos que ha efectuado en la solución de un problema.</p> <p>COM2.4: Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.</p>	<p>prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).</p>

*Nota.* De “Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores”, por A. Ruiz, 2017, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 12, p. 111.

**Tabla 9**

*Indicadores de grados del proceso Representar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
R1.1: Identificar los datos que están presentes de forma explícita en representaciones* ya estudiadas de objetos matemáticos.	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2.	Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3.
R1.2: Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas.	R2.1: Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada.	R3.1: Pasar de una representación matemática a dos o más representaciones matemáticas en la resolución de problemas.
R1.3: Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada.	R2.2: Pasar de una representación matemática a otra en la resolución de problemas.	R3.2: Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos
	R2.3: Elaborar una	

Grado 1	Grado 2	Grado 3
	<p>representación matemática para interpretar o modelar una situación matemática o de contexto real no estudiada.</p> <p>R2.4: Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados.</p>	<p>reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos.</p> <p>R3.3: Combinar representaciones matemáticas distintas de manera creativa para interpretar y modelar una situación matemática o de contexto real.</p> <p>R3.4: Inventar nuevas formas de representación matemática en la resolución de problemas.</p> <p>R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas.</p>

*Nota.* De “Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores”, por A. Ruiz, 2017, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 12, p. 113.

Luego de haber descubierto este modelo, toda la atención se centró en encontrar alguna manera de manejar toda esa información (criterios, indicadores y problemas) de manera que el docente pudiera utilizarla de una forma más eficaz. Es por todo lo anterior que se toma la decisión de crear un sistema computacional que permitiera un mejor manejo de todos los elementos curriculares mencionados por Ruiz (2017). Antes de intentar utilizar el modelo se seleccionaron y confeccionaron problemas que permitieran hacer uso tanto del modelo teórico para la valoración de los problemas como poder elaborar el sistema computacional (la aplicación para valorar los niveles de complejidad de los problemas).

### ***Elaboración de los Problemas***

Para la elaboración de los problemas se tomó como fundamento teórico el documento “Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores”, escrito por el Doctor Angel Ruiz y publicado en la revista “Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática” en el año 2017, así como los elementos establecidos por el currículo. Dada la importancia del diseño y selección de un problema matemático (o tarea matemática) para el currículo, se implementó el modelo “4+6” para la valoración de tareas matemáticas, el cual, permite evaluar problemas que se encuentran en diferentes textos o que sean de elaboración propia; además permite “aportar elementos para seleccionar o incorporar la tarea en la acción educativa en la forma o en el momento adecuado, o brindar insumos para avanzar en el diseño de la tarea” (Ruiz, 2017, p.133). Este modelo expresa que hay que seguir 4 pasos y 6 elementos, los cuales, se presentan en la siguiente tabla:

**Tabla 10**

*Pasos y elementos del modelo 4+6 para valorar tareas matemáticas*

Pasos	Elementos
1. Enunciar: Tarea matemática o problema.	
2. Resolver: Aportar soluciones.	
3. Identificar: Conocimientos contextos y habilidades.	1. Conocimientos áreas. 2. Contextos. 3. Habilidades generales. 4. Habilidades específicas.
4. Valorar: procesos-capacidades	5. Grados procesos. 6. Nivel de complejidad.

*Nota.* Adaptado de “Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores”, por A. Ruiz, 2017, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 12, p. 136.

Cabe mencionar que dicho modelo realiza una valoración que según Ruiz (2017) “lo que esto implica es que se puede beneficiar si se tiene a mano una estrategia para determinar la naturaleza de la tarea o el problema en términos del currículo; es lo que llamamos “valoración” (p. 133).

Se han diseñado y valorado los problemas, según lo expuesto en el modelo. Además, cada uno de ellos responde a alguno de los contextos que establece el currículo, para dar



mayor precisión al eje disciplinar del currículo costarricense, que formula la necesidad de desarrollar una contextualización activa.

El modelo para realizar el análisis o valoración de un problema matemático (o tarea matemática) sigue los siguientes pasos: Enunciar, Resolver, Identificar y Valorar.

Dentro del paso “Enunciar” se establece el texto que engloba el problema (o tarea). En el segundo paso “Resolver” se brinda la solución (o varias soluciones) del problema (o tarea). El paso “Identificar” permite saber los conocimientos (áreas del currículo), contextos (matemático, científico, social, personal y ocupacional) y habilidades (generales y específicas) que se presentan en el problema (o tarea), así como identificar si hay una contextualización activa o no. Por último, el paso “Valorar” que hace referencia a analizar los procesos matemáticos (razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar y representar) y el nivel de complejidad (reproducción, conexión y reflexión), utilizando los 61 indicadores del modelo, así como los cinco criterios que permiten categorizar.

### *Elaboración de la aplicación*

Para el desarrollo de la aplicación, se utilizó el lenguaje de programación Python, lo anterior, debido a que su sintaxis es muy accesible para el desarrollador y, por ser un programa libre y de código abierto. Los módulos utilizados para la elaboración de la aplicación corresponden a:

**Tkinter.** (para la elaboración de la GUI). La Graphical User Interface (o interfaz gráfica de usuario) es la ventana donde está contenido el programa. Se ha diseñado para que las pestañas brinden información sobre el uso de la aplicación, que permitan introducir texto matemático, latín, flechas, entre otras; y elementos que permiten entender y sintetizar los

términos, conceptos y métodos presentados. Se puede visualizar en la GUI los pasos para evaluar un problema matemático (o tarea matemática).

**Sqlite3.** (crear la base de datos) La aplicación se ha diseñado para crear una base de datos, la cual, permite guardar información e imágenes que el usuario (docente) desee conservar.

**Re.** (valoración de los criterios) La aplicación permite evaluar el nivel de complejidad de un problema, siguiendo los cinco criterios establecidos por el modelo establecido.

**Sympy.** (para la elaboración de las fórmulas matemáticas) El diseño de la aplicación permite introducir fórmulas matemáticas, lo cual, brinda al usuario (docente) una visualización más agradable a la hora de introducir información.

**Math.** (para cálculos matemáticos no elementales) Por lo anterior, la aplicación surge como un instrumento que brinda una ayuda al usuario (docente) para entender y sintetizar los términos, conceptos y métodos presentados. El objetivo de la aplicación es poder determinar el nivel de complejidad de un problema (o tarea matemática), a partir de la intervención de los grados de los procesos matemáticos.

### *Elaboración del Instrumento*

Además de la aplicación que permite valorar los problemas de acuerdo con los indicadores de grados de los procesos para determinar su dificultad, se presenta un instrumento en formato de Microsoft Excel que permite registrar la información de los procesos que sigue el estudiante al resolver un problema y el nivel de dominio de estos. Para lo cual se escogió una escala numérica de 1 a 3 donde:

- 1 indica que el estudiante no evidencia ningún dominio del indicador del proceso.
- 2 indica que el estudiante domina parcialmente el indicador del proceso.
- 3 indica que el estudiante evidencia un dominio completo del indicador del proceso.

## Capítulo 4: Análisis de Resultados

### Valoración de los problemas

#### Problema 1

##### *Enunciar*

¿Qué compañía me interesa más?

Con el auge tecnológico del siglo XX llegaron los teléfonos para los hogares y así la necesidad de contar con el mejor plan en cuanto a ofertas de llamadas. En cierta región del país operan tres compañías: A, B y C, que ofrecen el servicio de telefonía fija para los hogares, a continuación, se muestran los planes que ofrecen las compañías telefónicas A, B y C para teléfonos fijos.

- La compañía A ofrece una cuota fija mensual por la línea telefónica de  $\$9647$ , más  $\$5$  por cada minuto de llamada.
- La compañía B ofrece pagar solo por el consumo  $\$25$  por cada minuto de llamada durante el mes.
- La compañía C ofrece una cuota fija mensual de  $\$9647$  por los primeros 100 minutos de llamadas, y  $\$15$  por cada minuto adicional.

A partir de la información anterior, realice las siguientes actividades:

1. Determine una función lineal para cada una de las ofertas de línea telefónica que permita calcular el monto por pagar.
2. Utilice el punto anterior para graficar cada una de las ofertas de los planes telefónicos, para esto utilice el mismo eje de coordenadas.
3. Determine cuál de las ofertas de las diferentes compañías es la mejor, para ello considere las diferentes necesidades de cada cliente en cuanto a los minutos necesarios para llamar durante el mes.

**Resolver**

1. Para dar una expresión de las funciones que permiten resolver las interrogantes se debe considerar lo siguiente:

Para la compañía A, se establece un pago de ₡5 por cada minuto de llamada, para los primeros tres minutos se calcula el monto a pagar, donde la variable “x” representa el tiempo que transcurre al llamar y la variable “y” el costo por dichos minutos utilizados al llamar, así tal y como se muestra en el siguiente cuadro:

$x$	$y$
0	9 647
1	9652
2	9657
3	9662

Ahora al utilizar los valores de la tabla anterior y mediante la fórmula general para el cálculo de la pendiente de la función lineal, se da a conocer la pendiente de la función para la compañía A como sigue:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{9652 - 9647}{1 - 0}$$

$$m = 5$$

Por otra parte, tenemos los ₡9647 que son pagos fijos mensuales, así la función que representa la oferta para dicha compañía, tal y como se muestra seguidamente:

$$A(x) = 5x + 9647$$

Para la compañía B tenemos que solo se va a pagar por el consumo, ₡25 por cada minuto de llamada. En el siguiente cuadro se muestran los primeros cuatro minutos de llamada y su respectivo costo.

$x$	$y$
1	25
2	50
3	75
4	100

Ahora al utilizar los valores encontrados en la tabla anterior y mediante la fórmula general para el cálculo de la pendiente de la función lineal, se da a conocer la pendiente de la función asociada a la compañía B. Dicho cálculo se muestra a continuación:

$$m = \frac{25 - 50}{1 - 2}$$

$$m = 25$$

En consecuencia, podemos escribir la representación algebraica para la función lineal que permite conocer el costo de utilizar una línea telefónica de la compañía B, así como se muestra seguidamente:

$$B(x) = 25x$$

Para la compañía C se tiene una situación particular, ya que hasta los primeros 100 minutos se paga una cuota fija de €9647, es decir durante los primeros cien minutos la pendiente de la función sería cero, luego de esto se debe pagar €15 por cada minuto adicional, dichos valores de tiempo y sus respectivos costos se muestran como sigue:

$x$	$y$
101	9662
102	9677
103	9692

Ahora se muestra el cálculo de la pendiente mediante la fórmula general, de la siguiente manera:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{9662 - 9647}{1 - 0}$$

$$m = 15$$

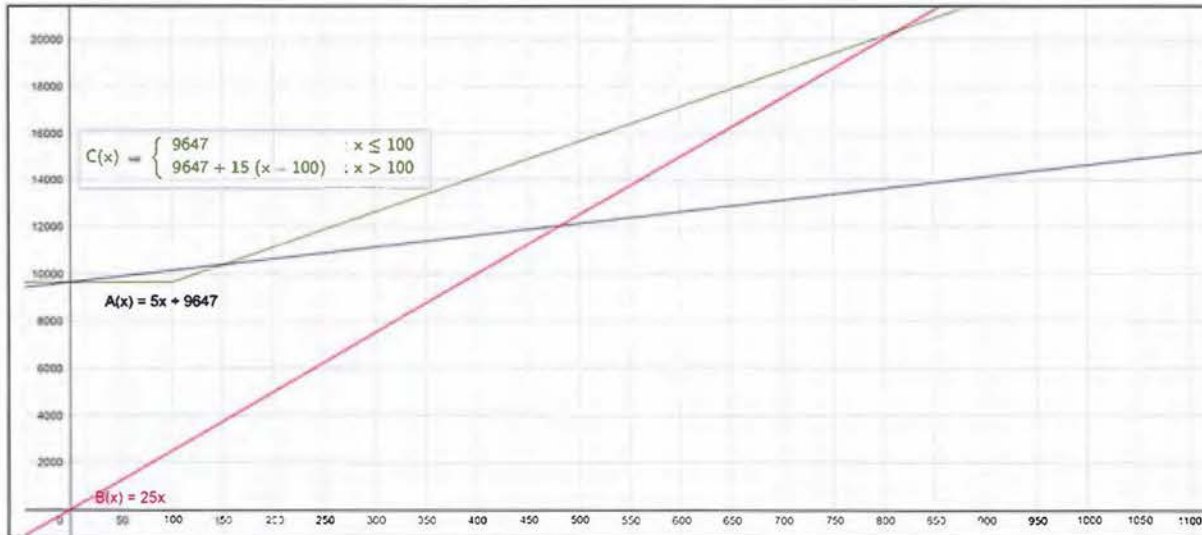
Con lo cual la función para la compañía C puede ser definida como sigue:

$$C(x) = \begin{cases} 9647 & \text{si } x \leq 100 \\ 9647 + 15(x - 100) & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

2. En la figura 3 están representadas las gráficas de las funciones  $A(x)$ ,  $B(x)$  y  $C(x)$  en el mismo eje de coordenadas.

**Figura 3**

*Representación gráfica de las funciones  $A(x)$ ,  $B(x)$  y  $C(x)$*



Nota. Elaboración propia.

3. Para poder determinar cuál de las ofertas adquirir, es importante considerar cuántos minutos se van a consumir durante el mes, así es razonable igualar cada una de las

expresiones algebraicas con cada una de las otras dos. Al hacer esto podemos encontrar el punto de intersección de cada par de funciones, donde hay cierto momento donde las ofertas tienen el mismo costo mensual y donde luego de ese valor de tiempo habría un cambio en dicho costo. Estos valores son los que nos permiten determinar cuándo cada una de las ofertas es mejor, en respuesta a las distintas necesidades de cada consumidor. Para la función  $A(x)$  note que  $x$  que pertenece a  $[0, 43200]$ , donde cero representa la cantidad mínima de tiempo que podría gastar una persona durante el mes y 43200 que representa la cantidad máxima de tiempo que podría gastar una persona durante el mes, el cálculo se muestra como sigue:

$$1 \text{ día} = 24 \text{ horas}$$

$$30 \text{ días} = 720 \text{ horas}$$

$$1 \text{ día} = 1440 \text{ minutos}$$

$$30 \text{ días} = 43200 \text{ minutos}$$

De manera similar, para la función  $B(x)$  se tiene que  $x$  que pertenece a  $[0, 43200]$ . Se pueden igualar ambas funciones y se despeja  $x$  para conocer cuando las compañías tendrían el mismo costo. Así el cálculo se muestra como sigue:

$$A(x) = B(x)$$

$$5x + 9647 = 25x$$

$$20x = 9647$$

$$x = \frac{9647}{20}$$

$$x = 482,35$$

Con ello, luego de 482,35 minutos el costo por tener una línea en cada compañía telefónica (A o B) es diferente a la otra, y al observar las gráficas podemos decir que la oferta

de la compañía A es más cara que la de la compañía B justo antes y más barata justo después del tiempo calculado.

De manera similar se puede luego igualar las funciones que representan los costos de las compañías  $A(x) = 5x + 9647$  con  $x$  que pertenece a  $[0, 43200]$  y  $C(x) = 9647$ , si  $x$  pertenece a  $[0, 100]$  y  $C(x) = 9647 + 15(x - 100)$ , si  $x$  pertenece a  $]100, 43200]$ , el cálculo se muestra como sigue:

Si  $x$  pertenece a  $[0, 100]$ , se tiene que:

$$A(x) = C(x) \Leftrightarrow 5x + 9647 = 9647$$

$$\Leftrightarrow 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Si  $x$  pertenece a  $]100, 43200]$ , se tiene que:

$$A(x) = C(x) \Leftrightarrow 5x + 9647 = 9647 + 15(x - 100)$$

$$\Leftrightarrow 5x = 15(x - 100)$$

$$\Leftrightarrow 5x = 15x - 1500$$

$$\Leftrightarrow 10x = 1500$$

$$\Leftrightarrow x = 150$$

Estos 150 minutos representan el justo momento en que las compañías A y C tendrán el mismo costo y luego de dicho momento habría un cambio en el monto a pagar mensualmente por cada una de las líneas telefónicas. Agregado a esto, para determinar cuál compañía es la más cara luego de ese momento, se debe observar el gráfico de la Figura 3 y así determinar que después de los 150 minutos la compañía A es mejor opción que la compañía C.

Por último, al comparar la compañía B con la compañía C como sigue:

$$C(x) = B(x)$$



$$9647 + 15(x - 100) = 25x$$

$$9647 + 15x - 1500 = 25x$$

$$10x = 8147$$

$$x = 814,7$$

Dicho resultado de 814,7 minutos determina el justo momento en el que las compañías C y B tendrán el mismo costo, luego de este tiempo habría un cambio en el monto a pagar por cada una de las líneas telefónicas, el cual se puede determinar al observar el gráfico de la Figura 3. De esta manera se puede afirmar que luego de 814,7 minutos el servicio ofrecido por la compañía C tiene un costo inferior que el ofrecido por la compañía B.

En resumen, se tiene lo siguiente: El análisis de las gráficas de las funciones y los cálculos realizados, revelan que la mejor opción si se va a hablar menos de 482,5 minutos es la compañía B, si se va a hablar más de 482,5 minutos la mejor opción es la compañía A. La compañía C solo es la segunda mejor opción durante algunos de los intervalos, más específicamente de 0 y hasta 150 minutos y justo después de los 814,7 minutos.

### *Identificar*

#### **Conocimientos y Áreas incluidas.**

- Relaciones y Álgebra (Función Lineal)

#### **Habilidades Generales.**

- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).

#### **Habilidades Específicas.**

- Representar gráficamente una función lineal (MEP, 2012, p. 410).
- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella (MEP, 2012, p. 410).

### **Contexto.**

- Este problema posee un contexto personal: ya que involucra las finanzas personales, una toma de decisión que va a influir en la vida cotidiana de las personas y de sus familias.

### **Valorar**

#### **Intervención de los Procesos en el Problema.**

Razonar y Argumentar. RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo: ¿cómo hallamos?, ¿qué tratamiento matemático damos?, ¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos?, ¿qué queremos obtener?). Este indicador se presenta ya que el estudiante necesita determinar que el comportamiento del problema es lineal, además también establecer lo que significa una solución en  $R^2$ , para así finalmente responder con precisión cuándo las compañías ofrecen un servicio menor, igual o mayor con respecto al costo de tener una línea telefónica.

RA2.3 Brindar las soluciones de las preguntas cuando sea pertinente mediante diferentes representaciones: tablas, gráficos, medidas estadísticas, elementos algebraicos, cifras, etc. Este indicador está presente cuando el estudiante debe dar las respuestas utilizando la representación algebraica y la representación gráfica, para finalmente integrar ambas representaciones y dar a conocer el momento en el que las compañías tendrían un costo menor, igual o mayor, todo esto para poder dar una respuesta más adecuada en cuanto a las diferentes necesidades de cada consumidor.

*Plantear y Resolver Problemas.* PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto real) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad. Este problema parte de un contexto real y se presenta de forma nueva, ya que el estudiante debe manipular tres funciones lineales de

manera fluida y compararlas en un mismo eje de coordenadas es decir integrar su representación gráfica con la representación algebraica, para luego determinar lo que significa una solución en  $R^2$  para poder dar la respuesta al problema que se ve condicionada por las diferentes necesidades de cada consumidor en cuanto a los minutos que necesita para llamar mensualmente.

**PRP2.5** Identificar y usar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que no están explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones elementales matemáticas o de contexto real. El estudiante debe usar e identificar modelos que ya han sido estudiados como la función lineal. Aquí se utiliza la función lineal a trozos, la cual no se encuentra de manera explícita en el texto, el estudiante debe calcularla para poder dar una respuesta precisa.

**Comunicar.** **COM2.1** Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados no similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal). Está presente en el problema ya que se debe identificar la expresión de cada una de las funciones lineales, la cual ya ha sido estudiada; sin embargo, el problema se presenta como algo novedoso al tener que distinguir el significado de representar las expresiones en un mismo eje de coordenadas.

**Representar.** **R2.1** Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. Este indicador está presente cuando el estudiante debe comprender la forma en que fue definida la función lineal para la compañía C, donde dicha función lineal es a trozos y su información se encuentra codificada dentro del problema.

**Nivel de complejidad.**

Se dan seis indicadores de grado 2, luego, el nivel de complejidad del ítem se puede considerar como conexión por criterio NC2.

## Problema 2

### Enunciar

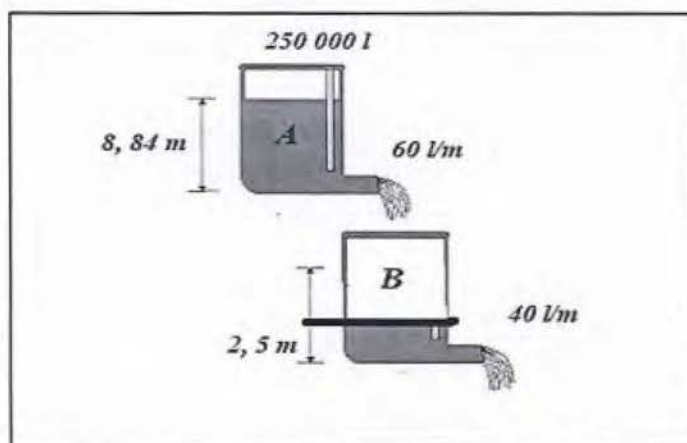
#### Desabastecimiento de agua

El problema de faltante de agua es un tema muy frecuente. Se sabe que cuando el agua llega a cierto límite, la presión en los tanques que la contienen disminuye, de manera que la presión no es la suficiente para mover el agua por las tuberías, con lo cual el agua no llega a todos los lugares.

Estimar el tiempo que transcurrirá hasta que la presión en los tanques se vea afectada por el faltante de agua es de gran interés. En la siguiente figura los tanques A y B están conectados de manera que el primero abastece al segundo. Se sabe que el tanque A está completamente lleno con 250 000 litros y sale agua a una razón de 60 litros por minuto, además este comparte las mismas dimensiones que el tanque B. También se sabe que el tanque B está en su límite inferior 2,5 metros (después de esta medida habrá faltante de presión). Además, del tanque B sale agua a razón de 40 litros por minuto. Considere los tanques que se muestran en la figura 4.

### Figura 4

*Diagrama de sistema para mantener la presión de agua en tanques de abastecimiento*



Nota: Tomado de: <https://images.app.goo.gl/1wrfyzYYwe6gwp3v6>

Determine las expresiones algebraicas de las funciones, que permiten conocer la cantidad de agua en cada tanque, en cualquier momento.

¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que el tanque B se quede sin la presión necesaria para transportar el agua por las tuberías?

*Resolver*

Para el tanque A tenemos que el agua sale a razón de 60 litros cada minuto, esto representa la pendiente de la función lineal, por otro lado, tenemos un valor fijo o cantidad inicial de 250 000 litros. Así la función que permite conocer la cantidad de agua en cualquier momento de tiempo  $x$ , está dada como sigue:

$$f(x) = -60x + 250000$$

Para el tanque B tenemos que considerar tanto el agua que está saliendo como la que está entrando es decir  $60l - 40l = 20l$ , así la expresión algebraica que representa dicha situación queda determinada por

$$g(x) = 20x + \mu, \text{ donde } \mu \text{ representa la cantidad inicial de agua en el tanque B.}$$

Para poder conocer la cantidad inicial de litros de agua en el tanque B, primero se hace una comparación entre las dimensiones de los tanques, para ello se utiliza una regla de tres, como sigue:

$$8,84 \text{ metros} \rightarrow 250000 \text{ litros}$$

$$2,5 \text{ metros} \rightarrow x \text{ litros}$$

$$\mu = \frac{250000l \cdot 2,5m}{8,84m}$$

$$\mu = \frac{250000l \cdot 2,5 \text{ m}}{8,84 \text{ m}}$$

$$\mu = 70701,35l$$

Luego, la función que permite calcular la cantidad de agua en el tanque B está determinada tanto por el agua que ingresa como por el agua que sale, pero solo sucede hasta el justo momento en que se termina el agua del tanque A. Para calcular este tiempo se debe igualar la función  $f(x)$  a cero y despejar la variable  $x$  como sigue

$$f(x) = -60x + 250000$$

$$0 = -60x + 250000$$

$$x = \frac{12500}{3}$$

Como se necesita saber cuántos litros de agua hay inicialmente en el tanque B, se calcula cuántos litros hay en el momento justo en que se termina el agua del tanque A. Así, se tiene lo siguiente:

$$g(x) = 20x + 70701,35l$$

$$g\left(\frac{12500}{3}\right) = 154034,68l$$

Cuando el agua del tanque A se termina por completo, la expresión algebraica que permite determinar la cantidad de agua en el tanque B solo se ve afectada por la cantidad de agua saliente, así la pendiente de la función lineal cambia. La función lineal se expresa de la siguiente manera:

$$p(x) = -40x + 154034,68$$

A continuación, se muestran los tiempos: en que se acabará el agua del tanque A, el tiempo desde que se termina el agua del tanque A y hasta que el tanque B llega a su límite de presión y finalmente un resumen de los resultados que evidencia cuando los tanques se queden sin la presión necesaria para mover el agua por las tuberías.

El tiempo hasta que se acabe el agua del tanque A, se obtuvo en el paso anterior al igualar la función  $f(x)$  a cero y despejar la variable  $x$  como sigue:

$$f(x) = -60x + 250000$$

$$0 = -60x + 250000$$

$$x = \frac{12500}{3}$$

El tiempo desde que se termina el agua del tanque A y hasta que el tanque B llega a su límite de presión, se obtiene al igualar la función  $p(x)$  con la cantidad de litros que marcan el límite de presión y despejando  $x$  como sigue:

$$p(x) = -40x + 154034,68$$

$$70701,35 = -40x + 154034,68$$

$$x = \frac{(154034,68 - 70701,35)}{40}$$

$$x = 2083,33$$

Al sumar los tiempos de los incisos anteriores, se determina el momento en el que habrá faltante de agua en los hogares debido a la baja presión. Así, el tiempo estimado en que el tanque A se quede sin agua es 4166,66 minutos, además el tiempo desde que se termina el agua del tanque A y hasta que el tanque B llega a su límite de presión es 2083,34 minutos, ambos tiempos sumados dan como resultando el momento en que habría un faltante de agua en las cañerías, el cálculo tal y como presenta seguidamente:

$$2083,34 + 4166,66 = 6250,0033$$

Finalmente se debe hacer una conversión del tiempo para determinar de cuántas horas se dispone hasta que no quede la presión requerida en los tanques. El resultado se muestra como sigue:

$$6250,0033m \cdot \frac{1h}{60m}$$

$$6250,0033 \cancel{m} \cdot \frac{1h}{60 \cancel{m}}$$

$$\frac{6250,0033h}{60} = 104.66h$$

### *Identificar*

#### **Conocimientos y Áreas incluidas.**

Relaciones y Álgebra (Función Lineal)

#### **Habilidades Generales.**

Aplicar el concepto de función en diversas situaciones (MEP, 2012, p. 405).

Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).

Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada (MEP, 2012, p. 405).

- Determinar el modelo matemático que se adapta mejor a una situación dada (MEP, 2012, p. 405).

#### **Habilidades específicas.**

- Representar gráficamente una función lineal (MEP, 2012, p. 410).
- Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica y algebraica (MEP, 2012, p. 410).
- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella (MEP, 2012, p. 410).

#### **Contexto.**

Este problema posee un contexto social, ya que es una problemática que involucra a toda la comunidad.

### *Valorar*

#### **Participación de los procesos**



**Razonar y argumentar.** RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto real. Este indicador está presente, ya que durante el proceso de resolución se deben determinar datos que no están explícitos en el enunciado como la regla de tres para determinar la cantidad inicial de litros de agua del tanque B. Por otro parte también se debe analizar la relación que existe entre cada una de las funciones y cómo estas cambian conforme el tiempo transcurre.

**Plantear y resolver problemas.** PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias. Este indicador está presente, ya que el estudiante debe implementar diferentes estrategias para resolver el problema, por ejemplo: utilizar la regla de tres en conjunto con las dimensiones de los tanques de agua para determinar la cantidad inicial de líquido que hay en el tanque B.

**Conectar.** C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos. Este indicador está presente ya que el estudiante debe relacionar el concepto de la regla de tres para conocer las unidades de agua que tiene inicialmente el tanque B. Además debe usar el concepto de función lineal para interpretar el problema de estimar el tiempo hasta que haya un faltante de agua.

**Comunicar.** COM2.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados no similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal). Este indicador está presente, ya que el estudiante debe reconocer la representación algebraica de cada una de las funciones involucradas, las expresiones para los tanques A y B que permite determinar cuando los tanques estarán en su límite de presión, donde dichas representaciones no están dadas explícitamente.

**Representar.** R3.3 Combinar representaciones matemáticas distintas de manera creativa para interpretar y modelar una situación matemática o de contexto real. Este indicador está presente ya que se debe combinar las representaciones algebraicas de los tanques A y B con el uso de la regla de tres y las dimensiones de los tanques de agua para encontrar la cantidad inicial de líquido en el tanque B.

**Nivel de complejidad.**

Se dan dos indicadores de grado 2 y tres indicadores de grado 3, luego, el nivel de complejidad del ítem se puede considerar como “reflexión” (por criterio NC3).

**Problema 3**

**Enunciar**

**Intersección recta-circunferencia.** Considere la circunferencia  $C$ , descrita por la ecuación  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$  y sea la recta  $L$  tangente a la circunferencia  $C$  en el punto  $B(-1,2)$ . De acuerdo con la información anterior, encuentre la ecuación que corresponde a la recta  $L$  y represente gráficamente a la recta y la circunferencia

**Resolver**

Note, que el centro de la circunferencia corresponde a:  $A(1,1)$ . Se puede determinar la pendiente de una recta a partir de su gráfica examinando el cambio en “ $x$ ” y el cambio en “ $y$ ”. Una característica de una recta es que su pendiente es constante en toda su extensión. Entonces, se puede escoger cualesquiera dos puntos sobre la gráfica de la recta para calcular la pendiente mediante la fórmula  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Dado que la recta  $L$  es tangente a la circunferencia, el otro punto que se puede seleccionar es  $B(-1,2)$ . Por lo que, se puede obtener la pendiente de la recta  $\overrightarrow{AB}$ , de la siguiente manera:

$$m_1 = \frac{2-1}{-1-1} = \frac{-1}{2}$$

Note, que la recta  $L$  (tangente a la circunferencia), es perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$  de modo que la pendiente de  $L$  es  $m_2 = 2$ .

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \cdot m_2 = -1$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{-2}{-1} = 2$$

La recta  $L$  tiene pendiente  $m = 2$  y es tangente a  $C$  en  $B(-1,2)$ . Por tanto, se tiene que:

$$y = mx + b \Leftrightarrow 2 = 2(-1) + b$$

$$\Leftrightarrow 2 = -2 + b$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 = b$$

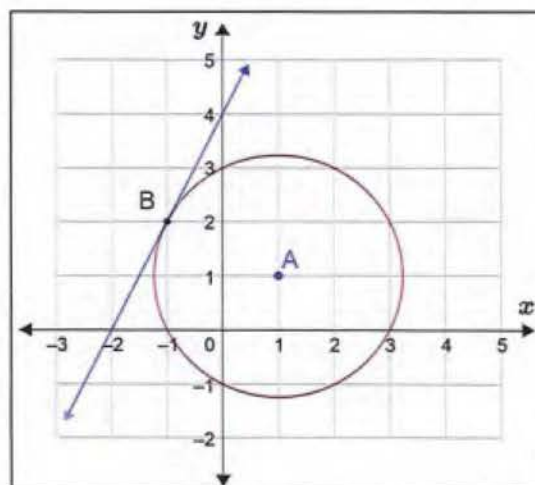
$$\Leftrightarrow 4 = b$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia de ecuación  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$  en el punto  $B(-1,2)$ , corresponde a:

$$y = 2x + 4.$$

### Figura 5

Representación gráfica de la circunferencia y la recta



Nota: Elaboración propia.

## *Identificar*

### **Conocimientos y Áreas Incluidas.**

- Relaciones y Álgebra: Función lineal.

### **Habilidades Generales.**

- Relaciones y Álgebra:

Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).

### **Habilidades Específicas.**

- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella (MEP, 2012, p. 410).

### **Contexto.**

Es un contexto matemático ya que el problema se centra “exclusivamente en conceptos y procedimientos que no salen del seno de las matemáticas” (Ruiz, 2017, p. 75).

## *Valorar*

### **Intervención de los Procesos en el Problema.**

**Razonar y argumentar.** RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto real. Lo anterior, debido a que se debe conocer los conceptos de pendiente, recta perpendicular, recta tangente y centro de una circunferencia para poder identificar la ecuación de la recta L.

**Plantear y resolver problemas.** PRP1.2 Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos, propiedades o convenciones elementales. En el problema se utiliza la fórmula de pendiente, así como procedimientos

elementales (despejes) para obtener la pendiente y el cálculo de la constante “b”, que representa la intersección con el eje y.

**Conectar.** C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas. En el problema se relacionan conceptos del área de Geometría (conocimiento de centro, radio, recta secante, recta tangente, recta exterior para determinar la ecuación de una recta) con procedimientos del área de Relaciones y álgebra (se determina la ecuación de una recta a partir de los datos brindados en la circunferencia.).

**Comunicar.** COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema. Por ejemplo, se plantea una interpretación de una secuencia de razonamientos con conceptos o procedimientos estudiados para obtener la ecuación de una recta.

**Representar.** R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. Lo anterior, debido a que se razona e interpreta información codificada, en referencia a la información que se puede obtener a partir del conocimiento de dos puntos contenidos en una recta (pendiente).

R2.2 Pasar de una representación matemática a otra en la resolución del problema. En la solución del problema se pasa de una forma verbal de la recta a su representación algebraica y geométrica.

**Nivel de complejidad.** Se da la intervención de tres procesos de grado dos, así como cuatro indicadores en dicho grado. Por lo anterior, el problema se clasifica como conexión, por criterio NC2.

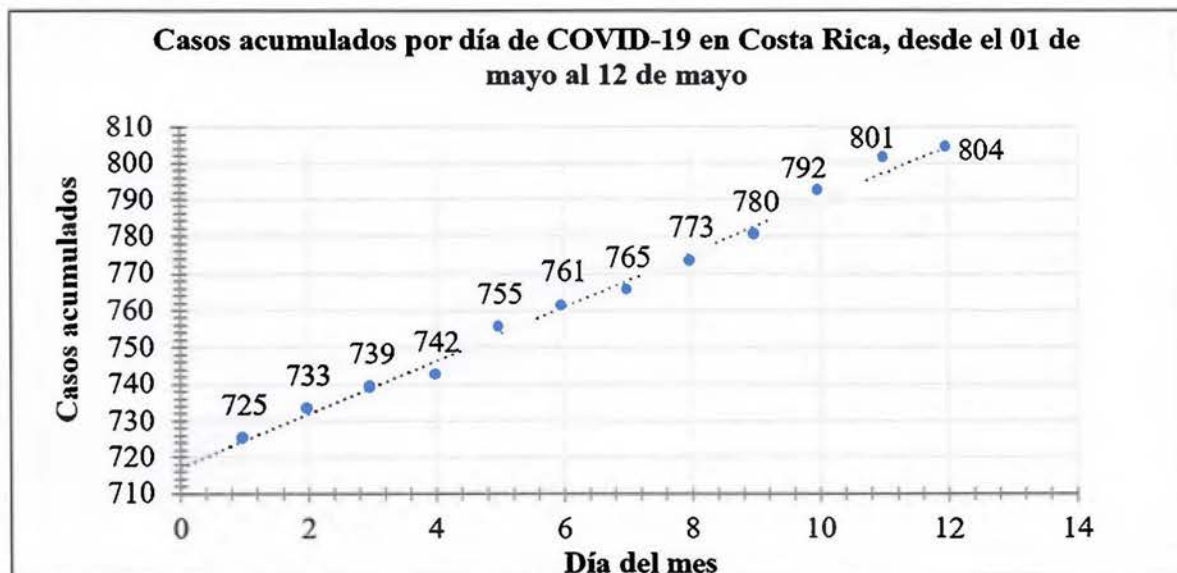
#### Problema 4

##### Enunciar

El 12 de mayo de 2020 en Costa Rica se registraron 3 casos nuevos de COVID-19, llegando así a la cifra de 804 personas diagnosticadas con el virus. El siguiente gráfico muestra los casos acumulados por día desde el 01 de mayo y hasta el 12 de mayo, según los datos del Ministerio de Salud de Costa Rica.

##### Figura 6

Gráfico de casos acumulados por día de COVID-19 desde el 01 de mayo y hasta el 12 de mayo en Costa Rica.



Nota: Elaboración propia con datos de “Situación nacional COVID-19 fecha 13 de mayo del 2020”, por Ministerio de Salud de Costa Rica, (2020), [infografía].

Debido a que el número de casos parece aumentar de forma lineal conforme pasan los días, se puede obtener una línea de tendencia para lo cual se necesitan únicamente dos pares de datos para construir la ecuación de la línea de tendencia (ecuación de la recta).

A partir de la información del gráfico anterior, determine la ecuación de una línea de tendencia y utilícela para calcular el número de casos nuevos que se podrían haber esperado

el 13 de mayo. Además, explique con sus propias palabras los pasos o procedimientos utilizados para resolver el problema.

### **Resolver**

1. Tome, por ejemplo, el número de casos registrados el 03 de mayo y el 12 de mayo y forme dos pares ordenados. El 03 de mayo se registraron 739 casos acumulados y el 12 de mayo se tenían 804 casos, por lo que los pares ordenados que se forman son (3, 739) y (12, 804).
2. Con los dos pares ordenados se procede a calcular la inclinación que tendrá la línea de tendencia, es decir, la pendiente de la recta, que se calcula con la fórmula  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , sustituyendo los valores se obtiene:  $\frac{65}{9}$  que es aproximadamente 7,22.
3. Con uno de los pares ordenados escogidos se determina el punto de intersección con el eje de las ordenadas. Utilizando el par ordenado (3, 739) y la ecuación  $b = y - mx$  se obtiene que el punto de intersección con el eje de las ordenadas es  $(0, \frac{2152}{3})$ , que es aproximadamente (0, 717.33).
4. Por lo tanto, la ecuación de la línea de tendencia será  $y = \frac{65}{9}x + \frac{2152}{3}$  y al evaluar esta en 13 se obtiene que el 13 de mayo se podía haber esperado  $\frac{7301}{9}$ , aproximadamente 811.22 casos acumulados, es decir, 7 casos nuevos.

### **Identificar**

#### **Conocimientos y Áreas Incluidas.**

- Relaciones y Álgebra: Función lineal
- Estadística y Probabilidad: Representaciones gráficas

#### **Habilidades Generales.**

Estadística y Probabilidad:

- Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos (MEP, 2012, p. 431).

#### Relaciones y álgebra

- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada (MEP, 2012, p. 405).
- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).

#### **Habilidades específicas.**

##### Estadística y Probabilidad:

- Utilizar diferentes tipos de representaciones gráficas o tabulares para el análisis de datos cualitativos y favorecer la resolución de problemas vinculados con diversas áreas (MEP, 2012, p. 432).

##### Relaciones y álgebra:

- Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas (MEP, 2012, p. 412).
- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella (MEP, 2012, p. 410).
- Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica (MEP, 2012, p. 410).

#### **Contextos**

- Es un contexto social, ya que utiliza datos estadísticos nacionales, que corresponden a una situación que es de interés para toda la sociedad. El problema hace alusión a la situación nacional durante la pandemia de covid-19, los problemas en este contexto hacen que el estudiante se involucre en o se informe sobre las situaciones que afectan a su comunidad.



## *Valorar*

### **Intervención de los Procesos en el Problema.**

***Razonar y argumentar.*** Se presenta el indicador RA2.1 en el cual el estudiante debe identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto real. En este caso la información se presenta mediante un gráfico del cual se deben extraer los datos.

***Plantear y Resolver Problemas.*** Se presenta el indicador PRP1.5 en el cual el estudiante debe resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado. En el problema se le indica al estudiante que debe determinar la ecuación de la línea de tendencia (ecuación de la recta) usando los datos del gráfico.

***Conectar.*** Se presenta el indicador C2.1 en el cual el estudiante debe usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados. En este caso, el problema involucra representaciones gráficas del área de estadística, en las que el estudiante debe identificar los datos y representarlos como pares ordenados, que luego usará para determinar la ecuación de la recta, que corresponde al área de relaciones y álgebra.

***Comunicar.*** Se presenta el indicador COM2.3 en el cual el estudiante debe describir mediante un lenguaje matemáticamente no preciso las acciones, resultados y razonamientos que ha efectuado en la solución de un problema. En este caso se le solicita al estudiante que explique con sus propias palabras los pasos o procedimientos que utilizó para resolver el problema.

También se presenta el indicador COM2.4 en el cual el estudiante debe comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.

**Representar.** Se presenta el indicador R2.1 en el cual el estudiante debe interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. Para responder el problema, el estudiante debe interpretar que la ecuación de la recta calculada, indica la cantidad de casos acumulados y no la cantidad de casos diarios.

**Nivel de complejidad.**

Por el criterio NC2 este problema es del nivel de conexión.

**Problema 5**

**Enunciar:**

Carlos se prepara para realizar un viaje durante las vacaciones de fin y principio de año con su papá, su mamá y su hermana. Para esto planean hospedarse 2 semanas en un hotel de Acapulco. Han estado revisando distintas opciones de hoteles en internet y encontraron dos que ofrecen los mismos servicios y que además cuentan con paquetes especiales para estancias mayores a 4 noches. A continuación, se muestran los paquetes de cada hotel.

**Hotel A**

\$430 por 7 noches, después solamente \$80 por cada noche adicional. El precio es por habitación

**Hotel B**

\$160 por 7 noches, después solamente \$15 por cada noche adicional. El precio es por persona

- a) Si todos se van a quedar en una sola habitación, ¿cuál de las dos ofertas es la mejor para Carlos y su familia? Realice una tabla de datos para cada hotel, teniendo en cuenta que el precio en el hotel A es por habitación y en el hotel B es por persona.
- b) Si justo antes de iniciar el viaje deciden extender sus vacaciones una semana más, ¿sigue siendo el hotel seleccionado en la parte a la mejor opción? Seleccione dos pares ordenados de cada tabla para determinar la ecuación de costo de hospedaje en cada hotel y evalúelas para determinar el costo del hospedaje para 14 días adicionales.

**Resolver**

**Parte a)**

Hotel A	Primera	Días adicionales						
	Semana	1	2	3	4	5	6	7
Costo	\$430	\$510	\$590	\$670	\$750	\$830	\$910	\$990

Hotel B	Primera	Días adicionales						
	Semana	1	2	3	4	5	6	7
Costo	\$160	\$175	\$190	\$205	\$220	\$235	\$250	\$265

Por lo tanto, después de las dos semanas Carlos y su familia pagarían en el hotel A \$990 en total, mientras que en el hotel B pagarían \$265 por persona, en total \$1060. En este caso la mejor opción es el hotel A.

**Parte b)**

A continuación, se construirá la ecuación para el hotel A, cuyo precio es por habitación, y la ecuación para el hotel B, cuyo precio es por persona.

Hotel A	Hotel B
Para la pendiente tome por ejemplo los pares: (1, 510) y (2, 590). Entonces: $m = \frac{590 - 510}{2 - 1} = 80$ $b = 510 - 80 \cdot 1 = 430$ Por lo tanto, la ecuación es: $y = 80x + 430$	Para el pendiente tome por ejemplo los pares: (1, 175) y (2, 190). Entonces: $m = \frac{190 - 175}{2 - 1} = 15$ $b = 175 - 15 \cdot 1 = 160$ Por lo tanto, la ecuación es: $y = 15x + 160$

Si queremos conocer el precio al extender la estadía una semana más debemos evaluar cada ecuación en 14 (días adicionales)

Hotel A	Hotel B
$y = 80 \cdot 14 + 430 = 1550$	$y = 15 \cdot 14 + 160 = 370$

Por lo tanto, después de las tres semanas Carlos y su familia pagarían en el hotel A \$1550 en total, mientras que en el hotel B pagarían \$370 por persona, en total \$1480. En este caso la mejor opción es el hotel B.

### *Identificar*

#### **Conocimientos y Áreas Incluidas**

- Relaciones y Álgebra: Función lineal

#### **Habilidades Generales.**

- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada (MEP, 2012, p. 405).
- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).

#### **Habilidades Específicas.**

- Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas (MEP, 2012, p. 412).
- Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio (MEP, 2012, p. 407).
- Analizar una función a partir de sus representaciones (MEP, 2012, p. 408).
- Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica (MEP, 2012, p. 410).
- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella (MEP, 2012, p. 410).

#### **Contextos.**

- Es un contexto personal, ya que este contexto incluye actividades como “preparación de alimentos, compras, juegos, salud personal, transporte personal, deportes, viajes, programación personal y finanzas personales” (Ruiz, 2017, p. 75). El problema muestra una situación hipotética de comparación de hoteles para un viaje familiar.

#### **Valorar**

##### **Intervención de los Procesos en el Problema.**

**Razonar y argumentar.** Se presenta el indicador RA2.3 en el cual el estudiante debe brindar las soluciones de las preguntas cuando sea pertinente mediante diferentes representaciones: tablas, gráficos, medidas estadísticas, elementos algebraicos, cifras, etc. En este problema primero deben formular una representación tabular y después utilizarla para determinar una representación algebraica.

**Plantear y Resolver Problemas.** Se presenta el indicador PRP2.5 en el cual el estudiante debe identificar y usar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que no

están explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones elementales matemáticas o de contexto real. En este caso el problema se modela a partir de funciones lineales y el estudiante debe ser capaz de notarlo, ya que al principio la información para modelar las funciones no está explícita en el enunciado.

**Conectar.** Se presenta el indicador C2.1 en el cual el estudiante debe usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados. En este caso, el estudiante debe ser capaz de relacionar los elementos de la representación tabular de una función con su representación algebraica, para poder pasar de una a otra.

**Comunicar.** Se presenta el indicador COM1.2 en el cual el estudiante debe interpretar expresiones matemáticas dadas en situaciones similares a las estudiadas para proceder a buscar una estrategia de solución. En el problema los datos están dados mediante enunciados, los cuales deben ser interpretados por el estudiante.

**Representar.** Se presenta el indicador R2.2 en el cual el estudiante debe pasar de una representación matemática a otra en la resolución de problemas. Esto ocurre cuando se le solicita al estudiante determinar las ecuaciones del costo utilizando los datos de la tabla que realizó en la parte a, en este caso debe pasar de una representación tabular a una representación algebraica.

También se presenta el indicador R2.4 en el cual el estudiante debe usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados. En este caso, en el problema primero se le pide al estudiante que realice una representación tabular y luego debe usar la representación algebraica

**Nivel de complejidad.**

Por el criterio NC2 este problema es del nivel de conexión

## Capítulo 5: Consideraciones finales

Tal y como se observa en los capítulos anteriores, en este trabajo se desarrolló una aplicación para valorar los niveles de dificultad de los problemas o tareas matemáticas a partir de los procesos involucrados. También, se elaboró una rúbrica para registrar el nivel de dominio de los procesos matemáticos a partir de los indicadores de grados de los procesos. Además, se crearon cinco problemas que fueron valorados utilizando la aplicación y que podrían ser utilizados en clase para evaluar el trabajo cotidiano del estudiante, con la ayuda de la rúbrica. De la realización de este trabajo se generaron algunas conclusiones, recomendaciones y limitaciones, las cuales se mencionan a continuación.

### Conclusiones

- Los cambios más recientes en los programas de educación matemática, junto con el alto valor porcentual que se le ha dado al trabajo cotidiano en los últimos años, hace que sea necesario buscar formas para registrar el desarrollo de las habilidades matemáticas por parte del estudiante en el aula. En ese sentido, esta propuesta representa una herramienta más que el docente puede utilizar para llevar dicho registro, siguiendo los requerimientos que establece el Ministerio de Educación Pública costarricense.
- Trabajar con problemas donde se pueda identificar tanto su nivel de complejidad, como la intervención de los procesos matemáticos, garantiza conocer cuáles están involucrados exactamente y en qué grado. De modo que al hacer uso de la rúbrica brindada en la presente investigación es posible dar a conocer una nota basada en desarrollo de estos procesos y por ende el de ciertas habilidades específicas. Al respecto Ruiz (2017) argumenta que “un estudiante que resuelve exitosamente un

problema determinado habrá mostrado no sólo su dominio de un contenido sino ciertas capacidades superiores” (p. 220)

- El modelo teórico presentado por Ruiz (2017), posee un gran número de elementos que lo caracterizan (criterios, indicadores), manipularlos de forma sencilla es necesario para facilitar el correcto uso de este. Por ello es fundamental el uso de la aplicación tanto para la valoración de los problemas como el del instrumento de evaluación del trabajo cotidiano para llevar el registro de los problemas y las calificaciones.

### **Recomendaciones**

- Para que un docente pueda hacer uso de las herramientas desarrolladas en este trabajo se requiere que tengan alguna noción del modelo de Ruiz (2017) para valorar niveles de complejidad que las sustentan, por lo que es recomendable buscar espacios y formas para socializar la propuesta.
- Si bien es cierto que es fundamental contar con un modelo para valoración de los problemas que permita determinar el nivel de complejidad de los mismos, es igual de importante contar con un modelo que determine pautas a seguir sobre cómo diseñar los problemas.
- Dado que el enfoque principal del currículo costarricense de matemáticas es la resolución de problemas, los docentes de esta área deben estudiar y trabajar fuertemente estrategias que permitan llevar a cabo su implementación, de manera que se propicie de la mejor forma el desarrollo de habilidades matemáticas por parte de la persona estudiante. Una de las primeras líneas de acción es cómo plantear problemas que permitan integrar habilidades matemáticas, de manera que exista claridad en el planteamiento de las etapas y momentos de la lección.



- Es necesario elaborar una base de datos con diversos problemas matemáticos, debidamente clasificados según su nivel de complejidad, que sirvan como base a los docentes para la confección de nuevos problemas, ya que confeccionarlos desde el principio requiere de más tiempo.

### **Limitaciones**

- El docente debe conocer y comprender acerca del modelo propuesto por Ruiz (2017), esto para garantizar el uso correcto tanto de la aplicación como del instrumento para la evaluación propuestos en esta investigación.
- Debido a que el modelo es relativamente reciente y exceptuando los ejemplos presentados por Ruiz (2017), existe un gran faltante de ejemplos en los que se haya aplicado dicho modelo. En ese sentido, se han aportado cinco problemas que fueron valorados utilizando este modelo.
- Con los problemas valorados y la rúbrica diseñada se pretendía realizar una prueba con docentes que imparten décimo año, quienes lo pondrían en práctica en sus clases. Sin embargo, la situación de la emergencia nacional y el rápido cambio a la educación a distancia no propiciaron el mejor ambiente para realizar esas pruebas.

## Anexos

En esta sección se presentan dos anexos, el anexo uno corresponde a la guía para utilizar la aplicación que permite valorar los niveles de complejidad de los problemas y tareas matemáticas. El anexo dos corresponde a una guía para utilizar la plantilla para la evaluación del trabajo cotidiano a partir de los indicadores de grados de los procesos. Además, se proporciona el código QR que permitirá acceder a las guías antes expuestas, la aplicación para valorar las capacidades superiores y niveles de complejidad, y la plantilla de evaluación del trabajo cotidiano.

### **Anexo 1: Manual de usuario de la aplicación para valorar las capacidades superiores y niveles de complejidad (AVCSNC)**

#### **Sección 1: Uso de la aplicación AVCSNC**

##### *Sobre la aplicación AVCSNC*

La aplicación AVCSNC es un programa que permite registrar, analizar y presentar datos obtenidos al valorar el nivel de complejidad de un problema. Es fácil aprender a utilizar el programa, pero se asume que el usuario estará familiarizado con los términos, conceptos y métodos presentados por Ruiz (2017) en los “Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática”.

En esta guía de usuario, se ofrece una visión general de las características de la aplicación, así como las instrucciones paso a paso para realizar cada una de las tareas.

##### *Contenido de la página principal*

En esta página se centraliza el acceso a los distintos componentes de la aplicación AVCSNC.

ID BORRAR CRUD AYUDA CRITERIOS CODIFICACION CONTEXTOS RA PRP C COM R Latin Puntuación Flechas F.2 Formas Alfabeto Matemático M.2 Misceláneo Divisas CONJUNTOS

**APLICACIÓN PARA VALORAR CAPACIDADES SUPERIORES Y NIVELES DE COMPLEJIDAD**

Ruta del Archivo (img):

ID (número problema):

Enunciar (tareas matemáticas, problema):

Resolver (aportar soluciones):

Identificar (contextos, conocimientos y habilidades):

Valorar (procesos, capacidades):

RESULTADOS: \_\_\_\_\_

Elementos seleccionados:

Nivel de complejidad:

- Para obtener información general de la aplicación, pulse el botón INFO (véase el capítulo 2).
- Para crear una base de datos, pulse el botón BBDD y seleccione crear base de datos (véase el capítulo 2).
- Para obtener información sobre los permisos y usos, pulse el botón AYUDA (véase el capítulo 2).
- Para obtener información sobre los criterios con los que se miden los niveles de complejidad de un problema, pulse el botón CRITERIOS (véase el capítulo 2).
- Para obtener información sobre la codificación de los indicadores de los diferentes grados de los procesos, pulse el botón CODIFICACIÓN (véase el capítulo 2).
- Para obtener información sobre los contextos, pulse el botón CONTEXTOS (véase el capítulo 2).
- Para seleccionar los indicadores de los diferentes grados de los procesos pulse los botones RA, PRP, C, COM, R (véase el capítulo 2).

- Para insertar texto matemático, pulse los botones Latín, puntuación, Flechas, F.2, Formas, Alfabeto, Matemático, M.2, Misceláneo, Divisas, Conjuntos. (véase el capítulo 2).
- Para el análisis de una tarea matemática, utilice los campos Enunciar, Resolver, Identificar y Valorar (la casilla ID NO se utiliza; véase el capítulo 3).
- Para visualizar el nivel de complejidad de un problema, después de haber seleccionado los indicadores de los grados de los procesos, pulse el botón APLICAR (véase el capítulo 4).
- Para eliminar la visualización de los indicadores seleccionados, el nivel de complejidad y el criterio, pulse el botón BORRAR (véase el capítulo 4).
- Para insertar imágenes escriba la ruta del archivo y pulse el botón INSERTAR (véase el capítulo 5).
- Para eliminar la imagen, pulse el botón ELIMINAR (véase el capítulo 5).
- Para crear una fórmula matemática, pulse el botón INSERTA TEXTO MATEMÁTICO, luego MOSTRAR TEXTO MATEMÁTICO (véase el capítulo 5).

## **Sección 2. Manejo de la barra de menú**

Dentro de la barra de menú la aplicación permite obtener información sobre el uso de algunos de los botones, crear la base de datos, nos permite recordar los criterios, codificación y contextos dados por Ruiz (2017), lo cual, permitirá al usuario tener la información a la mano, solo pulsando los botones correspondientes, a la información que desea consultar.

Por otro lado, permite también la selección de los diferentes indicadores de los grados de los procesos, los cuales, permitirán a su vez la categorización del problema, en algún nivel de complejidad.

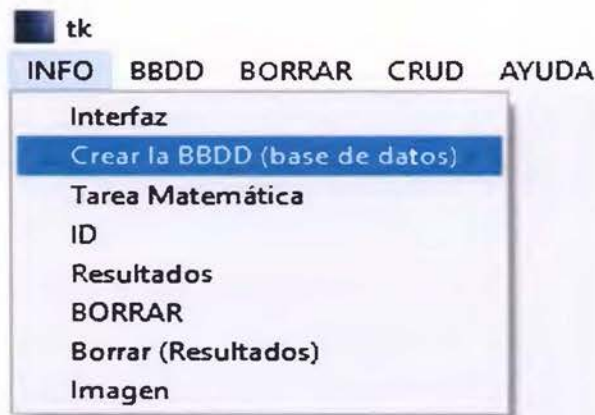
El usuario también podrá ingresar caracteres matemáticos, obteniendo así, una mejor visualización en la escritura matemática.

### *Información sobre el uso de INFO*

Pulsando el botón INFO el usuario podrá obtener información general del uso de la aplicación.



Por ejemplo: Si pulsamos el botón Crear la BBDD (base de datos)



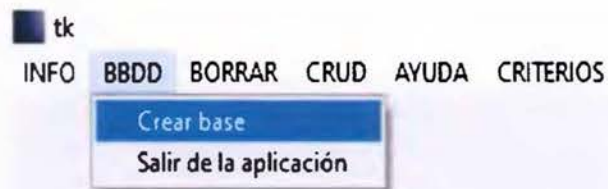
se nos desplegará un mensaje sobre el proceso para su creación.



Se procede de la misma forma para todos los demás submenús.

### ***Información sobre el uso de BBDD***

Pulsando el botón BBDD, el usuario podrá crear la base de datos, donde se guardarán los datos de las cajas de texto, el nivel de complejidad, el criterio y las imágenes



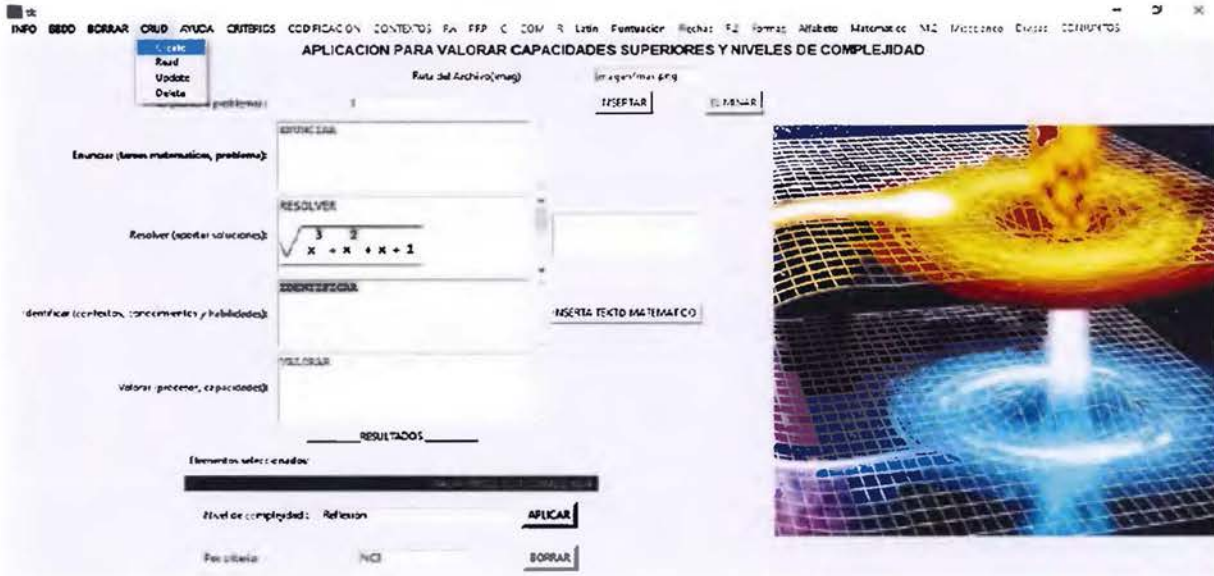
### ***Información sobre el uso de BORRAR***

Pulsando el botón BORRAR, el usuario podrá eliminar los datos que se encuentran en las cajas de texto, nivel de complejidad, criterio, ruta de la imagen y la imagen. Este botón no elimina el contenido de la caja de texto matemático.



### ***Información sobre el uso de CRUD***

Por sus siglas en inglés Create, Read, Update and Delete. Es el botón que nos permitirá manejar la base de datos. Después de ingresar los datos deseados, para poder guardar en la base de datos se oprime el botón CRUD y luego Create,

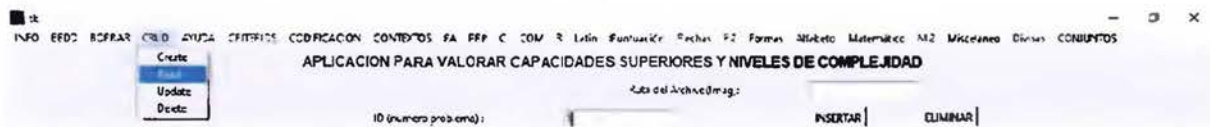


Para leer los datos almacenados en la base de datos, en primera instancia se debe ingresar el número ID de los datos guardados. El ID solo se utilizará para leer, actualizar o eliminar datos. El ID se genera automáticamente por la aplicación.

Se digita el ID correspondiente:

ID (número problema):

Luego presione el botón CRUD y luego Read



Y se desplegará la información almacenada para dicho ID

Para actualizar los datos; se ingresa el ID correspondiente:

ID (número problema) :

Y luego oprima el botón Update y se desplegará el siguiente mensaje

Para eliminar los datos, en primera instancia se ingresa el ID correspondiente:



ID (número problema) :

1

Y luego se oprime el botón Delete y se desplegará el siguiente mensaje

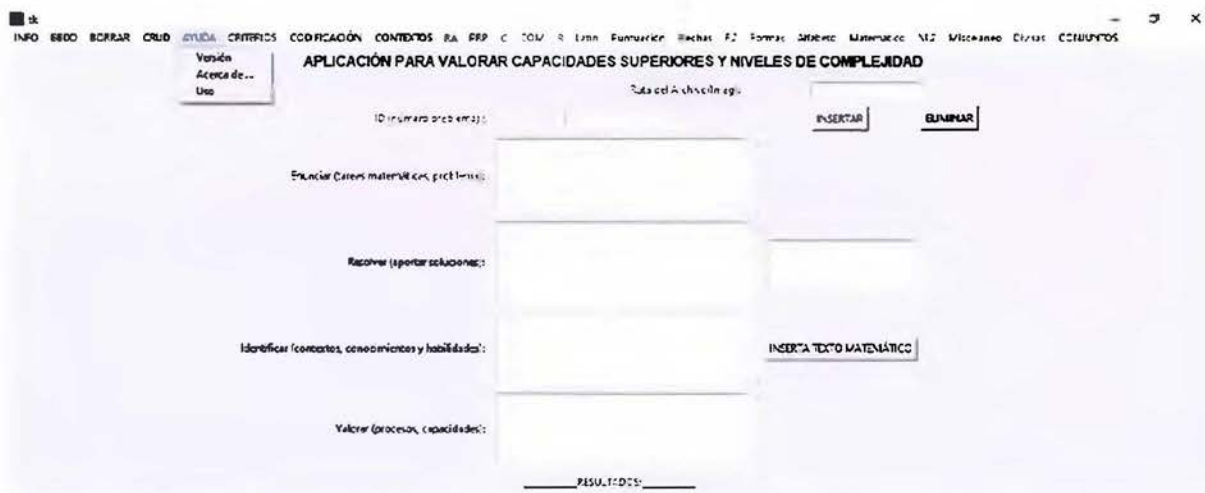


Oprima Aceptar.

Se recomienda, en el campo que se desea eliminar, ingresar nuevos datos, ya que, cuando se elimina un campo también se elimina el ID y no se podrá utilizar ese número nuevamente.

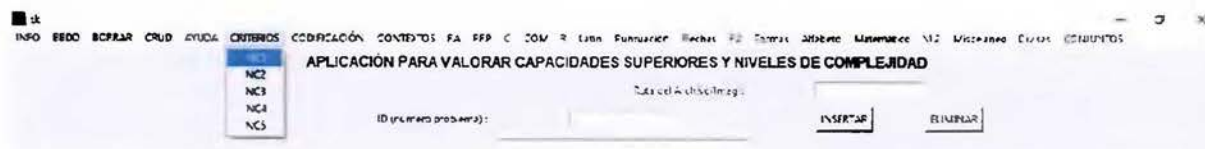
### ***Información sobre el botón AYUDA***

Al presionar este botón, el usuario obtendrá información sobre la versión de la aplicación, desarrollador de la interfaz, una pequeña leyenda sobre la creación de la aplicación, de donde nace el modelo utilizado en la programación de la interfaz, así como los permisos de uso.



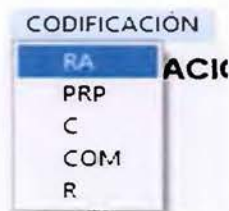
### Información del botón **CRITERIOS**

Pulsando el botón **CRITERIOS**, se le desplegará la información referente a los cinco criterios que determinan los niveles de complejidad de un problema. Al seleccionar cualquiera de ellos podrá ver su definición.



### Información del botón **CODIFICACIÓN**

Pulsando el botón **CODIFICACIÓN**, el usuario obtendrá información sobre el significado de RA, PRP, C, COM y R.



### Información sobre el botón **CONTEXTOS**

Pulsando el botón CONTEXTOS, el usuario obtendrá información sobre los diferentes contextos.



### Información sobre el uso de los botones RA, PRP, C, COM y R

Pulsando los botones RA, PRP, C, COM y R; el usuario podrá seleccionar los indicadores de los grados de los procesos.

INFO BESO BORRAR CILDO AYUDA CRITERIOS CODIFICACIÓN CONTEXTOS RA PRP C COM R Lista Puntuación Puntos E2 Formas Alfabeta Matemáticas M2 Miscelaneo Diversos CONJUNTOS

GRADO 1.

RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real.

RA1.2 Describir procedimientos rutinarios siguiendo ecuaciones directas.

RA1.3 Responder a preguntas donde esta presenta de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como "¿cuánto?" "¿cuánto es?").

RA1.4 Efectuar razonamientos directos y realizar interpretaciones que se extraen directamente de los resultados de la aplicación de un procedimiento.

RA1.5 Describir los procesos de cálculo o los resultados cuantitativos obtenidos al resolver un problema en una situación matemática o de contexto real ya estudiada.

GRADO 2.

RA2.1 Identificar información matemática que no sea dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto.

RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y presenta mayor argumentación (por ejemplo, "¿cómo llamamos?", "¿qué tratamiento matemático damos?", "¿qué puede o no puede pasar y por qué?", "¿qué sabemos?", "¿qué queremos obtener?").

RA2.3 Señalar las soluciones de las preguntas cuando sea pertinente mediante diferentes representaciones en tablas, gráficos, métodos, estadísticas, elementos algebraicos, otras, etc.

RA2.4 Evaluar la validez de una secuencia no completa de argumentos matemáticos (por ejemplo escrita en un texto o en una exposición).

RA2.5 Elaborar argumentos basados en sus propias acciones al resolver problemas similares a los ya estudiados.

GRADO 3.

RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real), no estudiados y complejos.

RA3.2 Describir argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver un problema.

RA3.3 Generalizar los métodos matemáticos utilizados o resultados obtenidos en la resolución de problemas.

RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados.

RA3.5 Formular conceptos novedosos en la resolución de problemas o descripción de una situación (matemática o de contexto real).

RA3.6 Realizar razonamientos donde se señalan cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación y cómo están relacionados los diferentes objetos matemáticos que participan.

RA3.7 Comparar en la resolución de un problema los procedimientos desarrollados en situaciones similares.

RA3.8 Realizar razonamientos matemáticos en situaciones específicas donde se reconocen las diferencias entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis o afirmaciones.

Valor (procesos, capacidades):

RESULTADOS:

Elementos seleccionados:

Nivel de complejidad:  APLICAR

Por criterios:  BORRAR

Al presionar el cualquiera de los indicadores, la selección de estos se mostrará en la barra de "Elementos seleccionados".

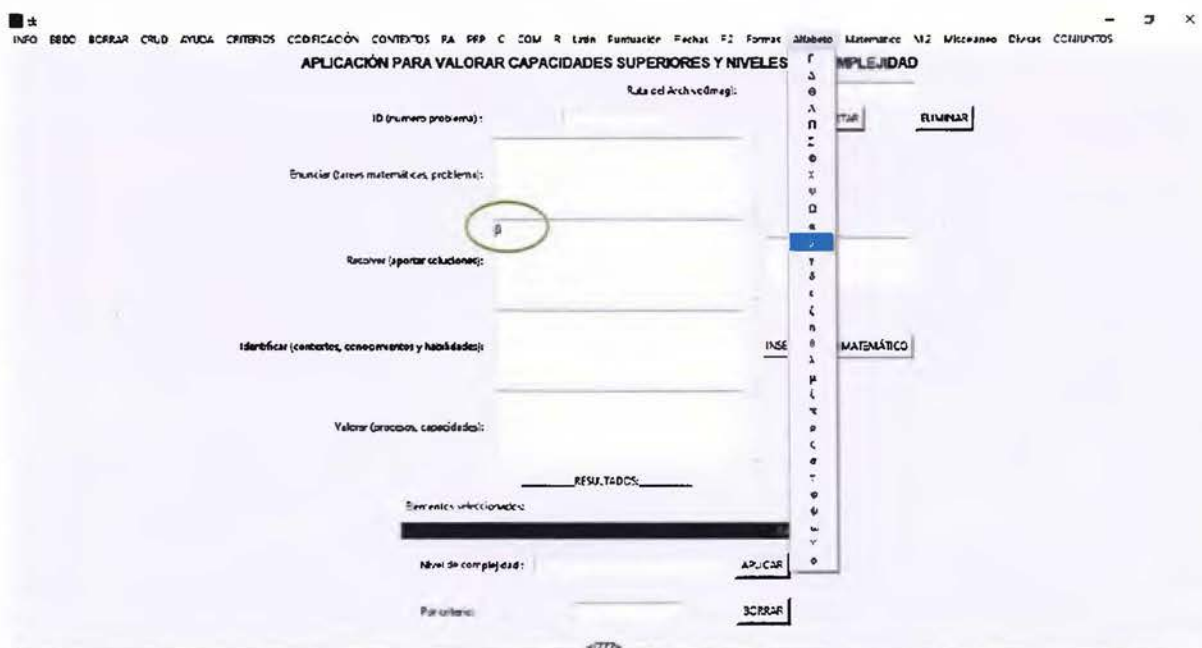
RESULTADOS:

Elementos seleccionados:

RA3.7

*Información sobre el uso de los botones Latín, Puntuación, Flechas, F.2, Formas, Alfabeto, Matemático, M.2, Misceláneo, Divisas y CONJUNTOS.*

Al presionar cualquiera de estos botones, el usuario podrá acceder a caracteres matemáticos; estos se insertarán únicamente en el campo “Resolver”. Si el usuario desea, puede copiarlo e insertarlo en otro campo.



### Sección 3. Análisis de una Tarea Matemática.

El modelo que se seguirá para realizar un análisis o la valoración de tareas matemáticas sigue los siguientes pasos: Enunciar, Resolver, Identificar y Valorar.

*Información sobre los cuadros de texto Enunciar, Resolver, Identificar y Valorar.*

El usuario podrá ingresar texto referente a la valoración de una tarea matemática; deberá posicionar el cursor en el cuadro donde desea ingresar los datos. El cuadro de texto “Resolver” es el único que recibe texto matemático. El usuario, cuando cree los datos que se guardarán en la base, no hará uso del campo ID, ya que, este se genera automáticamente.

ID (número problema):

Enunciar (tareas matemáticas, problema):

Resolver (aportar soluciones):

Identificar (contextos, conocimientos y habilidades):

Valorar (procesos, capacidades):

Enunciar

Resolver

Identificar

Valorar

#### Sección 4. Nivel de complejidad de un problema

Para visualizar el nivel de complejidad de un problema, primero se deben seleccionar uno a uno los indicadores de grado de los procesos presentes en el problema.

INFO BERRAR CREAR AYUDA CRITERIOS DESCRIPCIÓN CONTENIDOS RA PPP C COM R Lengu. Formulación Hojas F2 Formas Múltiples Matemáticas N12 Múltiples Clases CCIBUYTOS

GRADO 1.

RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real.

RA1.2 Describir procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.

RA1.3 Responder a preguntas donde esta presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos?, ¿cuánto es?).

RA1.4 Ejecutar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se obtienen directamente de los resultados de la aplicación de un procedimiento.

RA1.5 Describir los procesos de cálculo o los resultados cuantitativos obtenidos al resolver un problema en una situación matemática o de contexto real ya estudiada.

GRADO 2.

RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto.

RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo, ¿cómo hallamos?, ¿qué tratamiento matemático damos?, ¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos?, ¿qué queremos obtener?).

RA2.3 Seleccionar las soluciones de las preguntas cuando sea pertinente mediante diferentes representaciones (en tablas, gráficos, medidas estadísticas, diagramas algebraicos, otras, etc.).

RA2.4 Evaluar la validez de una secuencia no completa de argumentos matemáticos (por ejemplo escrito en un texto o en una exposición).

RA2.5 Elaborar argumentos basados en sus propias acciones al resolver problemas similares a los ya estudiados.

GRADO 3.

RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real), no estudiadas y complejas.

RA3.2 Desarrollar argumentos que ubiquen integralmente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver un problema.

RA3.3 Generalizar los métodos matemáticos utilizados o resultados obtenidos en la resolución de problemas.

RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados.

RA3.5 Firmar conceptos novedosos en la resolución de problemas o descripción de una situación (matemática o de contexto real).

RA3.6 Realizar razonamientos donde se relacionan cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación, como están relacionados los diferentes objetos matemáticos que participan.

RA3.7 Conectar en la resolución de un problema los diferentes aspectos de la información dada.

RA3.8 Realizar razonamientos matemáticos en situaciones específicas donde se consiguen las diferencias entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis o afirmaciones.

Valorar (procesos, capacidades):

RESULTADOS:

Elementos seleccionados:

Nivel de complejidad:  APLICAR

Por criterios:  BORRAR

Los cuales se mostrarán en la barra de “Elementos seleccionados”.

\_\_\_\_\_ RESULTADOS: \_\_\_\_\_

Elementos seleccionados:

RA3.4 PRP3.2 C3.1 COM2.2 R2.4

Nivel de complejidad :

Por criterio:

<||||>

Después de haber seleccionado los indicadores de los grados de los procesos, se debe oprimir el botón APLICAR. Se mostrará el nivel de complejidad del problema, así como el criterio que lo determinó.

\_\_\_\_\_ RESULTADOS: \_\_\_\_\_

Elementos seleccionados:

RA3.4 PRP3.2 C3.1 COM2.2 R2.4

Nivel de complejidad :

Por criterio:

<||||>

Si se equivoca en alguna selección, debe presionar el botón BORRAR. Cabe mencionar que este botón elimina los campos: Elementos seleccionados, Nivel de complejidad y Por criterio.

### **Sección 5. Inserción de imágenes y fórmulas matemáticas.**

La aplicación permite el ingreso de imágenes y poder guardarlas en la base de datos. Las extensiones de las imágenes que admite la aplicación corresponden a extensiones .png y

.gif. Se recomienda que las imágenes que se vayan a ingresar a la base de datos se encuentren en la misma carpeta que este programa, o para un mejor orden, dentro de una carpeta que se encuentre en la misma carpeta que este programa.

### *Insertar imágenes*

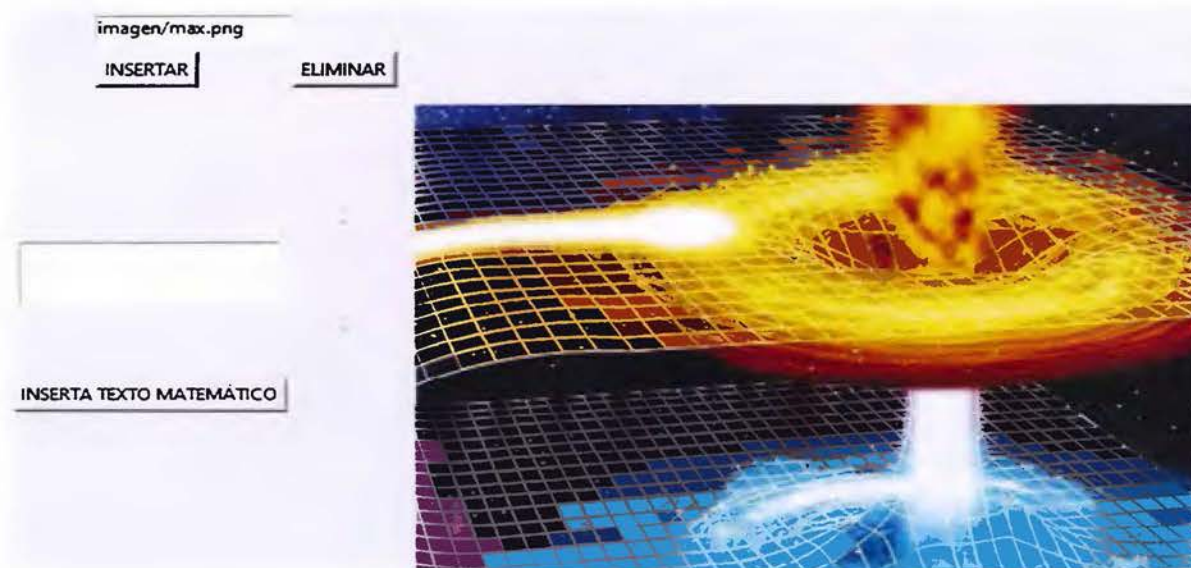
Para insertar imágenes escriba la ruta del archivo y pulse el botón INSERTAR. Para este caso, se ha creado una carpeta con el nombre “imagen” que se encuentra en la misma carpeta que el programa.



Se escribe la ruta del archivo, en el campo “Ruta del Archivo (Imag)”. Para el caso que se expone, se escribe el nombre de la carpeta donde se encuentra la imagen, luego, y separado por “/”, el nombre de la imagen con su extensión. Se recomienda nombres cortos para la imagen, para una mejor visualización.

Ruta del Archivo(Imag):	<input type="text" value="imagen/max.png"/>	
<input type="text"/>	<input type="button" value="INSERTAR"/>	<input type="button" value="ELIMINAR"/>

Se presiona el botón INSERTAR; y se podrá visualizar la imagen deseada.



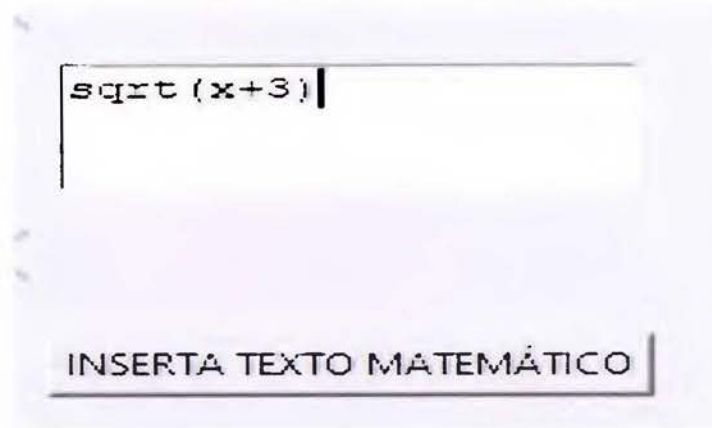
Si se desea ingresar otra imagen, puede presionar el botón eliminar y seguir el paso anterior o borrar la ruta ingresada e introducir una nueva y, presionar el botón INSERTAR y la imagen se cambiará automáticamente.

### ***Insertar fórmulas matemáticas***

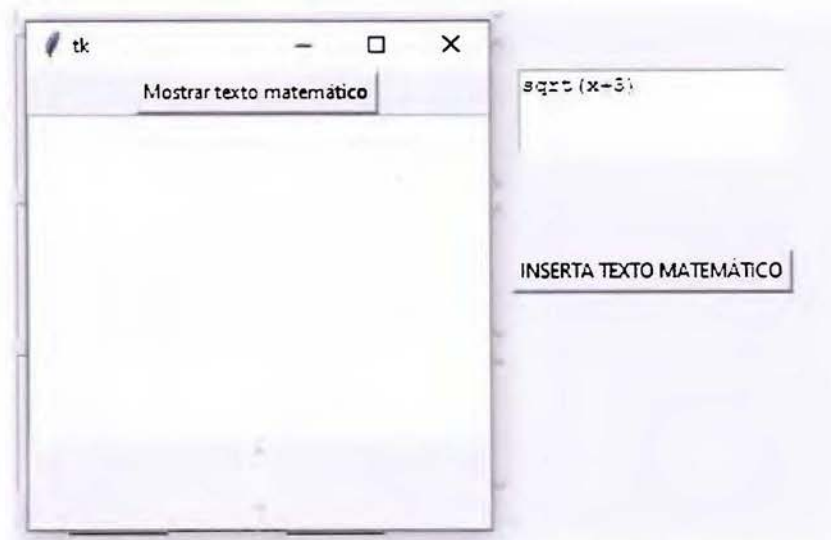
La aplicación permite que el usuario pueda crear sus propias fórmulas matemáticas, siguiendo un lenguaje muy básico para poder crearlas. En primera instancia, se mostrará la ruta para poder insertarlas, luego se mostrará la codificación para su creación.

Para crear una fórmula matemática, pulse el botón INSERTA TEXTO MATEMÁTICO, luego MOSTRAR TEXTO MATEMÁTICO. Se creará una raíz, se digita en la casilla correspondiente:  $\text{sqrt}(x+3)$

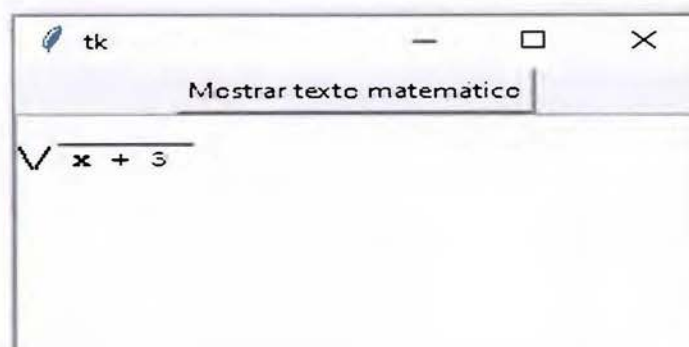




Se presiona el botón INSERTA TEXTO MATEMÁTICO:



Se presiona el botón Mostrar texto matemático:



Luego se copia y se pega en la caja correspondiente, ya que, la caja "Resolver" es la destinada para texto matemático se pegará ahí.

Ruta del Archivo(Imag):

ID (número problema):  INSERTAR ELIMINAR

Enunciar (tareas matemáticas, problema):

Resolver (aportar soluciones):  $\sqrt{x+3}$

Identificar (contextos, conocimientos y habilidades):  INSERTA TEXTO MATEMÁTICO

Valorar (procesos, capacidades):

tk - □ ×  
 Mostrar texto matemático  
x + 3

Podemos ahora eliminar la ventana emergente:

Ruta del Archivo(Imag):

ID (número problema):  INSERTAR ELIMINAR

Enunciar (tareas matemáticas, problema):

Resolver (aportar soluciones):  $\sqrt{x+3}$

Identificar (contextos, conocimientos y habilidades):  INSERTA TEXTO MATEMÁTICO

Es importante mencionar, que este campo es para escribir raíz, fracciones, exponentes, ente otros; pero no para escribir ecuaciones, para poder hacerlo, deberá escribir directamente el signo “=” en el campo “Resolver”. Las variables reservadas para escribir fórmulas corresponden a:  $x, y, z, a, b, c, d, e, f, w$ . Cualquier otra variable, no permitirá la visualización de la fórmula.

La siguiente tabla muestra algunas de las fórmulas que se pueden crear y cómo crearlas.

Operación	Símbolos	Resultado
Potencias	$x^{**2}$	$x^2$
Raíz	$\text{sqrt}(5)$	$\sqrt{5}$
Fracciones	$(x^{**7}+7) / (a^{**5})$	$\frac{x^7 + 7}{a^5}$
Subíndice	$X_7$	$x_7$
Producto	$7*x$	$7x$

Es importante mencionar que cada fórmula o lenguaje simbólico, deberá ir en una sola línea. Veamos el siguiente ejemplo.

The screenshot shows a Tkinter window with the title "Mostrar texto matemático". On the left, a mathematical formula is displayed: 
$$-b + \frac{\sqrt{-4 \cdot a \cdot c + b^2}}{2 \cdot a}$$
. On the right, the corresponding Python code is shown: `-b + sqrt(b**2-4*a*c) / (2*a)`. Below the code is a button labeled "INSERTA TEXTO MATEMÁTICO".

The screenshot shows a Tkinter window with the label "Resolver (aportar soluciones):". The text area contains the partial formula: 
$$-b + \frac{\sqrt{-4 \cdot a \cdot c + b^2}}{2 \cdot a}$$

Se continúa escribiendo en otra línea (independientemente que sea una fracción).

The screenshot shows a Tkinter window with the label "Resolver (aportar soluciones):". The text area contains the complete formula: 
$$-b + \frac{\sqrt{-4 \cdot a \cdot c + b^2}}{2 \cdot a}$$
 followed by the text "la otra tiene signo negativo".

## Anexo 2: Manual de usuario para la plantilla de evaluación del trabajo cotidiano.

### Uso de la plantilla de evaluación del trabajo cotidiano

#### *Sobre la plantilla de evaluación de trabajo cotidiano*

La tabla es un documento de Excel programada que permite registrar, analizar y presentar datos obtenidos al evaluar a los estudiantes en la resolución de problemas según el nivel de complejidad de cada problema. Es fácil aprender a utilizar el programa, pero se asume que el usuario estará familiarizado con los términos, conceptos y métodos presentados por Ruiz (2017) en los “Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática”.

En esta guía de usuario, se ofrece una visión general de las características de la plantilla, así como las instrucciones paso a paso para realizar cada una de las tareas.

### ***Contenido de la página principal (Hoja HOME)***

En esta página se centraliza el acceso directo a las funciones de la plantilla,

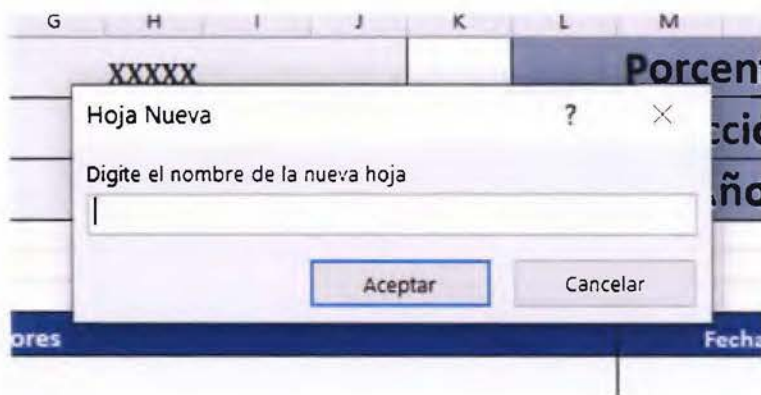


#### **Nueva Tabla.**

Dentro de la sección de “Nueva tabla” se presenta la plantilla de la evaluación del trabajo cotidiano, para acceder a ella basta con dar clic al ícono.

#### **Agregar tabla.**

Al acceder para insertar una nueva tabla desplegará una ventana donde el usuario debe digitar el nombre que desea colocarle a la hoja (Tabla) y dar clic al botón aceptar



Ya con la hoja creada, se debe completar la información administrativa,

Centro educativo:	XXXXX	Porcentaje:	0,0	<b>I Período</b>
Nivel:		Sección:	XXXXX	
Asignatura:	Matemática	Año:	XXXXX	

Nota: Para los apartados de nivel y periodo se habilitó una lista desplegable que permite seleccionar el deseado.

**Nivel.** Al seleccionar la celda, se habilita un botón en la parte inferior derecha de la misma para desplegar la lista y seleccionar el nivel deseado.



**Periodo.** De manera análoga a los niveles se habilita un botón en la parte superior derecha para desplegar los periodos y seleccionar el deseado.





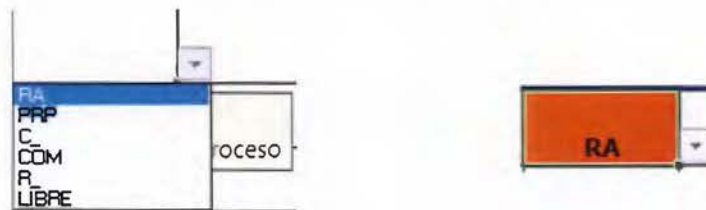
**Proceso.** El usuario debe seleccionar mediante una lista desplegable en cada fila los procesos que corresponden al problema a desarrollar.



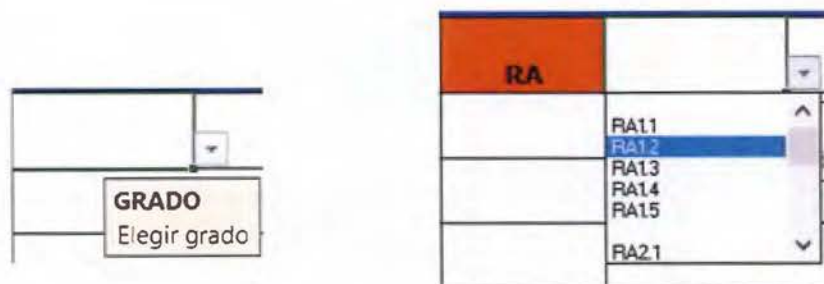
Los procesos para identificar con mayor facilidad tienen una simbología de color, la cual se establece a continuación:

Procesos	
RA	Razonar y argumentar
PRP	Plantear y resolver problemas
C	Conectar
COM	Comunicar
R	Representar

Esta simbología de color se establece de manera automática,



**Grado.** Además del proceso el usuario debe seleccionar mediante una lista desplegable el grado del problema según se ha establecido.



Cabe destacar que serán solo los grados que corresponden al proceso seleccionado los que están habilitados, esto para evitar errores. Luego de seleccionar el grado, en la columna derecha adjunta se mostrará el indicador seleccionado,

Indicadores	
RA	RA1.2
Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.	

Así mismo, tanto el proceso como el grado deben tener el mismo color de relleno, y con ello se garantiza una correcta selección del indicador deseado por el usuario.

**Evaluación de los indicadores.** En este apartado el usuario (docente) evaluará a cada estudiante basándose en lo seleccionado en el apartado anterior. Para mayor facilidad se proporciona una tabla en la que cada fila corresponde a los datos de un estudiante


Evaluación de los Indicadores																
Nº	Nombre y apellidos estudiante	RA	LIB1	LIB2	LIB3	LIB4	LIB5	LIB6	LIB7	LIB8	LIB9	LIB10	Total	Promedio	Nota	%
1	xxxxxxxxxxxx	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
3		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
7		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
11		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
13		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
16		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
17		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
18		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
19		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00




Docente: Denis García G.




Note que las filas que no se seleccionaron estarán nombradas en la tabla de evaluación de indicadores, como columnas “LIBRE”. Las mismas no son tomadas en el cálculo evaluativo. En el caso de las seleccionadas se nombrarán según los procesos escogidos, en su respectivo orden.

Evaluación de los Indicadores														
Nº	Nombre y apellidos estudiante	TA	LIBRE	LIBRE	LIBRE	LIBRE	LIBRE	LIBRE	LIBRE	LIBRE	LIBRE	Total	Promedio	Nota
1	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Por otro lado, las columnas, “Nombre y apellidos estudiante”, “Nota” o “%”, tienen habilitado la función filtro que se puede acceder seleccionando la celda deseada, y dar clic en el botón , donde se abrirá una ventana que permitirá seleccionar a gusto del usuario los datos que se desean mostrar en la tabla.

-  Ordenar de A a Z
-  Ordenar de Z a A
- Ordenar por color >
- Vista de Hoja >
-  Borrar filtro de "Nombre y apellido..."
- filtrar por color >
- Filtros de texto >

Buscar 

- (Seleccionar todo)
- Alexis Flores
- Deiby Moya
- Denis García
- Jean Carlo Mora
- (Vacías)

ACEPTAR

Cancelar

**La escala de calificación.** Se ha establecido una escala de 1 a 3 donde el docente debe tomar la decisión de cuál valor colocar por indicador, a cada estudiante.

Escala de calificación		
<b>No logrado</b>	No se evidencia el dominio del indicador	<b>1</b>
<b>En proceso</b>	Se evidencia un dominio parcial del indicador	<b>2</b>
<b>Logrado</b>	Se evidencia el correcto dominio del indicador	<b>3</b>

El docente debe digitar el valor en cada columna que representa a los procesos e indicadores seleccionados

RA	LIBR	LIBR	LIBR	LIBR	LIBR	LIBR	LIBRE	LIBR	LIBRE
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

El sistema va a calcular un total, promedio, nota (1-100), y un porcentaje por cada estudiante según la valoración que el docente colocó. Cabe destacar que el porcentaje se calcula a partir del valor digitado por el docente en la parte administrativa.

<b>Porcentaje:</b>	<b>30,0</b>
--------------------	-------------

Nota: Si la columna está nombrada como “Libre” debe tener un valor de cero para no ser tomado en cuenta para el cálculo respectivo.

Evaluación de los Indicadores														
N°	Nombre y apellidos estudiante	RA	LIBR	LIBR	LIBR	LIBR	LIBR	LIBRE	LIBR	LIBRE	Total	Promedio	Nota	%
1	Denis Garcia	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0,3	100,00	30,00

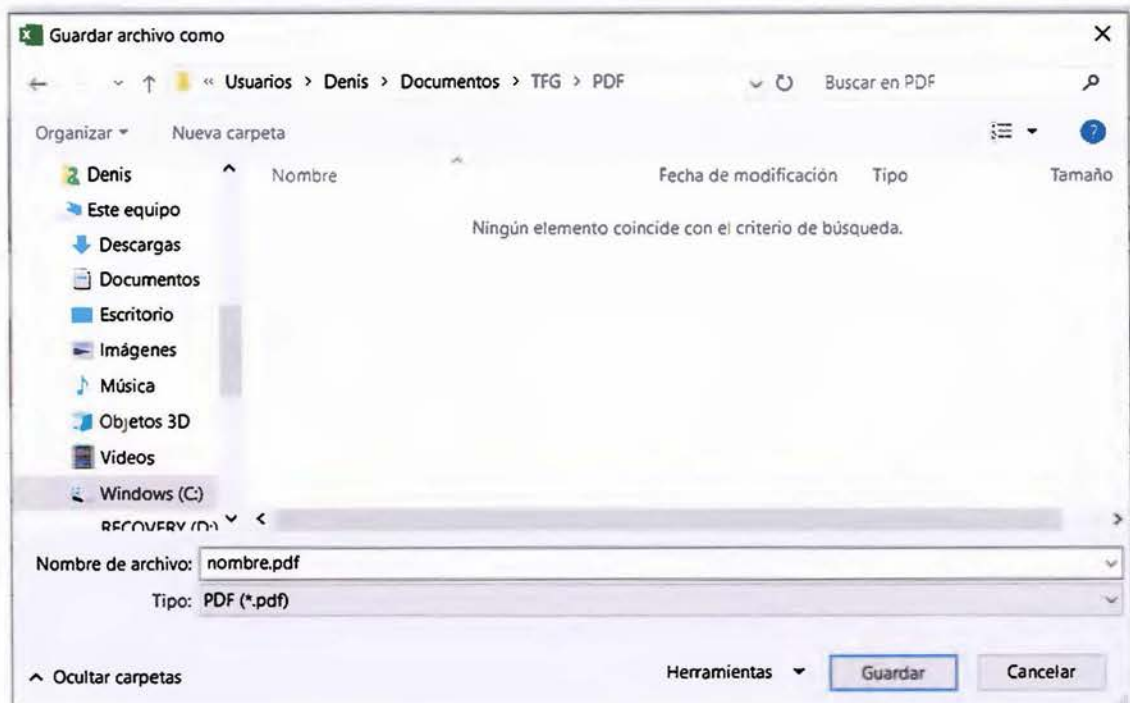
### **Herramientas**

Estos botones permiten 3 funciones particulares de mucha utilidad. A continuación, se mencionarán cada una.

**PDF.** Esta herramienta genera un pdf con toda la información desarrollada en la hoja.



Al acceder en ella se abrirá la siguiente ventana,



En ella se debe completar con el nombre que desea colocarle al pdf así como la ubicación donde desea guardar el archivo. En la lista desplegable debe estar indicado “PDF (\*.pdf)” como tipo de archivo. Si no lo está se puede desplegar la lista y seleccionarlo.

**Nueva Tabla.** Esta herramienta permite generar una nueva tabla.




**Home.** En el caso de esta herramienta permite volver a la página de inicio



### ***Informe individual del trabajo cotidiano***

Esta hoja adicional es para generar un informe individual que contempla la información administrativa, los procesos e indicadores evaluados y los resultados que se han obtenido, se puede guardar este informe mediante la herramienta pdf.

El usuario debe seleccionar el nombre del estudiante deseado. Mediante del botón 

El estudiante Denis Garcia

**Software (aplicación).** Este ícono remite a una carpeta de Google Drive para descargar el .exe de la aplicación.



**Información.** Este ícono te remitirá a una carpeta de Google Drive para brindar información de contactos y los manuales o guías de uso.



**Anexo 3: Código QR para acceder a los recursos de los anexos 1 y 2**

Al escanear el siguiente código QR tendrá acceso a una carpeta de Google Drive en la que encontrará la aplicación para valorar tareas matemáticas, la rúbrica para evaluar trabajo cotidiano y los manuales de los anexos 1 y 2



## Referencias Bibliográficas

- Abela, J. A. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada*. Granada (España): Universidad de Granada.
- Alfaro, C. (2008). Las ideas de Pólya en la resolución de problemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 1(1).  
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6967/6653>
- Alfaro, C. & Fonseca, J. L. (2010). Resolución de problemas como estrategia metodológica en la formación de docentes de Matemáticas: Una propuesta. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 5(6), 175-191.  
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6928/6614>
- Alsina, A. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon*, 33(1), 7-29.  
[https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon92\\_0.pdf](https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon92_0.pdf)
- Andrade, A., García, F., Juárez, M. I., Padilla, L. M., & Vargas, L. (2010). *Manual de técnicas e instrumentos para facilitar la evaluación del aprendizaje*. Baja California: CETYS. [http://moodle2.unid.edu.mx/dts\\_cursos\\_md/lic/ED/AV/AM/11/Manual.pdf](http://moodle2.unid.edu.mx/dts_cursos_md/lic/ED/AV/AM/11/Manual.pdf)
- Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R., & Zúñiga, J. (2006). *Investigación educativa I*. Chile. <https://jrvargas.files.wordpress.com/2009/11/investigacion-educativa.pdf>
- Argüero-Calvo, E., & Meza-Cascante, L. G. (2014). Evaluación de los aprendizajes en la educación media: Características técnicas de las pruebas escritas en matemática. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*. 14(2).  
<http://hdl.handle.net/2238/9473>

- Astorga, A., Guzmán, J., & Rodríguez, J. (2018). Funciones Reales de Variable Real. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 452-522, <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/MATEGENERAL/index.htm>
- Ausubel, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*, Paidós.
- Abela, J. A. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Azcárate, P., & Cardeñoso, J. M., (2012). Evaluación de la competencia matemática. *Investigación en la Escuela*, 1(78), 31-42. <https://revistascientificas.us.es/index.php/IE/article/view/6934>
- Bados, A., & García, E. (2014). *Resolución de problemas*. Depósito Digital de la Universidad de Barcelona. <http://hdl.handle.net/2445/54764>
- Bartle, G. & Sherbert, R. (2004). *Introducción al análisis matemático con una variable*. LIMUSA.
- Barrantes, R. (2010). *Investigación: Un camino al conocimiento, un enfoque cualitativo y cuantitativo*. EUNED.
- Becerra, J. M. (2005). *Matemáticas VI...Un paseo sencillo e introductorio al cálculo*. Universidad Autónoma de México.
- Bedoya, C. A. (2017). *Diseño de un instrumento tipo escala Likert para la descripción de las actitudes hacia la tecnología por parte de los profesores de un colegio público de Bogotá* (Tesis de Maestría). Recuperada de: Repositorio Institucional de la Universidad Francisco José de Caldas RIUD. <http://hdl.handle.net/11349/6881>

- Blanco, L. J., Caballero, A. & Cárdenas, J. A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria*. Universidad de Extremadura.
- Blanco, L. J., Caballero A., Cárdenas, J. A. & Guerrero, E. (2016). Manifestaciones de los profesores de matemáticas sobre sus prácticas de evaluación de la resolución de problemas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 649-669. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a17>
- Bonillo, C., Bringas, A., deAndreis, M., Destéfano, G. B. & Tenutto, M. (2005). *Aportes para el debate sobre evaluación*. <http://www.nuestraldea.com/wp-content/uploads/2011/05/aportes-para-el-debate-sobre-evaluacion.pdf>
- Bowen, G. A. (2009). Document Analysis as a Qualitative Research Method. *Qualitative Research Journal*, (9), 27-40. DOI 10.3316/QRJ0902027
- Cabrerizo, J. & Castillo, S. (2010). *Evaluación educativa de aprendizajes y competencias*. Pearson.
- Cárdenas, J. A. (2014). *La Evaluación de la resolución de problemas en Matemática: Concepciones y prácticas de los profesores de secundaria* (Tesis doctoral). Recuperada de Repositorio Institucional de la Universidad de Extremadura. <http://hdl.handle.net/10662/2050>
- Cárcamo, H. (2005). Hermenéutica y análisis cualitativo. Cinta de Moebio. *Revista de Epistemología de Ciencias Sociales*, (23), 206-207.
- Carrillo. J. (1995). La resolución de problemas en matemáticas: ¿Cómo abordar su evaluación? *Investigación en la Escuela*, 25(1), 82-83. <https://revistascientificas.us.es/index.php/IE/article/view/8385>



Díaz, L. (s. f.). *Funciones: Notas para el curso de cálculo diferencial e integral químico biólogo*.

<http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Funcion/Notas de Funciones.pdf>.

Dolores, C. & García-García, J. (2016). Concepciones de profesores de Matemáticas sobre la evaluación y las competencias. *Números*, 92, 71-92.  
<https://mdc.ulpgc.es/utis/getfile/collection/numeros/id/1033/filename/1036.pdf>

Duarte, L. D., Guillén, A. M., Ramírez, K., Ureña, J. J., & Vargas, J. D. (2015). *Evaluación del logro de habilidades en el área de Estadística y Probabilidad de octavo año de la educación secundaria en Costa Rica* (Tesis de grado). Universidad de Costa Rica, Costa Rica.

Engler, A., Hecklein, M., Muller D., & Vrancken, S. (2005). *Funciones*. Ediciones UNL.

Escalante, S. B. (2015). *Método de Pólya en la resolución de problemas matemáticos* (Tesis de grado), Universidad Rafael Landívar.

Espinosa, M. M. (2013). Evaluación de competencias mediante rúbrica. Importancia de las matemáticas en la evaluación de competencias genéricas. *Historia y Comunicación Social*, 18(esp), 243-255. [https://doi.org/10.5209/rev\\_HICS.2013.v18.44240](https://doi.org/10.5209/rev_HICS.2013.v18.44240)

Flores, A. H., & Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, haciendo Matemática: La evaluación en el aula. *Educación Matemática*, 21(2), 117-142.  
<http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n2/v21n2a5.pdf>

García, P., & Blanco, R. (2014). *Creencias de los docentes de Matemática, a nivel de secundaria, sobre la evaluación en Matemática*. (Tesis de grado). Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. <http://hdl.handle.net/2238/4062>

- Gonzales, R. Y. (2017). El método hermenéutico aplicado en el análisis de documentos periodísticos, un camino para la investigación filosófica en el nivel medio superior. ACTAS, volumen (4), 5-6.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, L. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.
- Jiménez, R. (1998). *Metodología de la Investigación. Elementos básicos para la investigación clínica*. Ciencias Médicas.
- McMillan, J., & Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. Pearson
- Mena, P. (2015). Desarrollo en la prueba nacional de bachillerato de Matemática: Una necesidad. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10(13), 53-66.
- Ministerio de Educación de Perú. (2013). *Informe de evaluación de Matemática en sexto grado – 2013. ¿Qué logros de aprendizaje en Matemática muestran los estudiantes al finalizar la primaria?* [http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/07/EM\\_Matematica\\_baja-2.pdf](http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/07/EM_Matematica_baja-2.pdf)
- Ministerio de Educación: Gobierno de Chile. (2011). *Niveles de logro 2° Medio 2011 SIMCE TIC*. [http://www.enlaces.cl/wp-content/uploads/Niveles\\_de\\_Logro.pdf](http://www.enlaces.cl/wp-content/uploads/Niveles_de_Logro.pdf)
- Ministerio de Educación, Gobierno de la Provincia de Córdoba. (2015). *La evaluación en los distintos formatos curriculares*. <http://www.nuestraldea.com/wp-content/uploads/2015/03/Evaluacenosformatoscurri.pdf>
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). *Programas de estudio Matemáticas*. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>

- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2013). *Evaluación diagnóstica*.  
<https://www.drea.co.cr/sites/default/files/Contenido/Evaluaci%C3%B3n%20Diagn%C3%B3stica%202013.pdf>
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2014). *Informe cualitativo de desempeño en el primer año de la Educación General Básica. Curso lectivo 2014*.  
<https://www.mep.go.cr/sites/default/files/informe%20cualitativo%20desempeno.pdf>
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2019). *Reglamento de evaluación de los Aprendizajes*. Imprenta Nacional: La Gaceta.
- Ministerio de Educación Pública de Guatemala. (2010). *Evaluación de los aprendizajes*. Dirección General de Gestión de Calidad Educativa.
- Ministerio de Salud de Costa Rica. (2020). Situación nacional COVID-19 fecha 13 de mayo del 2020 [infografía].  
[https://www.ministeriodesalud.go.cr/sobre\\_ministerio/prensa/img\\_cvd/img\\_datos\\_marzo\\_2020\\_64.jpg](https://www.ministeriodesalud.go.cr/sobre_ministerio/prensa/img_cvd/img_datos_marzo_2020_64.jpg)
- Mora, A. I. (2004). La evaluación educativa. Concepto, períodos y modelos. *Actualidades Investigativas en Educación*, 4(2), 1-28.  
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44740211>
- Moral, C. (2006). Criterios de validez en la investigación cualitativa actual. *Revista de Investigación Educativa*, 24(1), 147-164.  
<http://revistas.um.es/rie/article/viewFile/97351/93461>
- Moreno, T. (2009). El profesorado y la evaluación de alumnos en secundaria. X Congreso Nacional de Investigación, área 15, procesos de formación.
- Morocho, I. M. (2011). *Elaboración y aplicación de instrumentos de evaluación de acuerdo a los indicadores esenciales de evaluación según la reforma curricular del 2010, en*

- el área de ciencias naturales, para los niños de cuarto año de básica de la escuela Manuel Utreras Gómez del recinto chilchil, de la parroquia chontamarca del cantón y provincia del Cañar, en el periodo lectivo 2022-2012* (Tesis de grado). Recuperado de Repositorio Institucional de la Universidad Politécnica Salesiana. <http://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/1454>
- Norris, N. (1998). Curriculum, evaluation revisited, *Cambridge Journal of Education*, 28 (2), 207-219. <https://doi.org/10.1080/0305764980280206>
- Ortiz, E. F. (2006). Modelo de evaluación del aprendizaje. *Revista Paideia*, 1(2). <http://paideia.uprrp.edu/wp-content/uploads/2013/11/Modelo-de-evaluaci%C3%B3n-del-aprendizaje.pdf>
- Pérez, Y., Guerrero, M., & González, J. (2010). *Procedimiento para obtener información y caracterizar comportamientos y determinantes individuales de elección de opciones turísticas*. EUMED. [www.eumed.net/libros/2010a/655/](http://www.eumed.net/libros/2010a/655/)
- Programa Estado de la Nación, (2017). *Sexto informe estado de la educación*. Servicios gráficos A. C. <https://www.estadonacion.or.cr/educacion2017/informe-para-descarga.html>
- Rojas, R. (1991). *Guía para realizar investigaciones sociales*. Plaza y Valdés.
- Ruiz, A. (2013). La reforma de la educación matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 8(Es). <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/11125/10602>
- Ruiz, A. (2014). La implementación de los programas oficiales de matemáticas. *Quinto Informe del Estado de la Educación*.

- Ruiz, A. (2015). Balance y perspectivas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10(13), 15 - 33. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19168/19224>
- Ruiz, A. (2017). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 12(Es). <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916/31622>
- Ruiz, D., & García, M. (2003). El lenguaje como mediador en el aprendizaje de la aritmética en la primera etapa de Educación Básica. *Educere*, 23(7), 321-327. <https://www.redalyc.org/pdf/356/35602302.pdf>
- Sanjurjo, L., & Vera, M. T. (2001). *Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior*. Homo Sapiens.
- Segura, M. A. (2009). La evaluación de los aprendizajes basada en el desempeño por competencias. *Actualidades Investigativas en Educación*, 9(2), 1-25. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/9522/17877>
- Segura, M. A. (2018). La función formativa de la evaluación en el trabajo escolar cotidiano. *Revista Educación*, 42(1), 1-31. <https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v42i1.22743>
- Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública. (2013). *Las estrategias y los instrumentos de evaluación desde el enfoque formativo. Serie: Herramientas para la evaluación en educación básica*. Segunda edición electrónica. México, D.F. Recuperado de: [http://www.educacionespecial.sep.gob.mx/pdf/doctos/2Academicos/h\\_4\\_Estrategias\\_instrumentos\\_evaluacion.pdf](http://www.educacionespecial.sep.gob.mx/pdf/doctos/2Academicos/h_4_Estrategias_instrumentos_evaluacion.pdf)

- Ugalde, W. J. (2013). Funciones: Desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, Educación e Internet*, 14(1).  
<https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i1.1564>
- USAID. (s.f.) *Herramientas de evaluación en el aula*. Estados Unidos. Recuperado de:  
[://uvg.edu.gt/educacion/maestros-innovadores/documentos/evaluacion/Herramientas\\_Evaluacion.pdf](://uvg.edu.gt/educacion/maestros-innovadores/documentos/evaluacion/Herramientas_Evaluacion.pdf)
- Verdejo, P., Encinas, M., & Trigos, L. (2012). *Estrategias para la evaluación de aprendizajes complejos y competencias*. Research Gate.  
[https://www.researchgate.net/publication/281324667\\_estrategias\\_evaluacion\\_competencias\\_aprendizaje\\_complejo](https://www.researchgate.net/publication/281324667_estrategias_evaluacion_competencias_aprendizaje_complejo)
- Villalonga, J. M. (2017). *La competencia matemática. Caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España.  
<http://hdl.handle.net/10803/457718>